мума $|y'(x)|$) *и последовательностью нулей* $y'(x)$ (последовательностью точек максимума $|y(x)|$), *причем обе эти последовательности расположены в порядке возрастания* (см. фиг. 1). *Тогда имеют место равенства*

$$|y'(x_{2n})| = |A(x_{2n})|^{\frac{1}{4}+\alpha_n}, \tag{61$_1$}$$

$$|y(x_{2n+1})| = |A(x_{2n+1})|^{-\frac{1}{4}+\beta_n}, \tag{61$_2$}$$

где числовые последовательности $\{\alpha_n\}$ *и* $\{\beta_n\}$ *таковы, что*

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \beta_n = 0$$

(см. Виман [2], стр. 127).

Для доказательства умножим уравнение (1) на $2y'$ и проинтегрируем его от x_{2n} до x_{2n+2}. В силу того, что $y(x_{2n}) = y(x_{2n+2}) = 0$, получаем

$$0 = y'^2(x_{2n+2}) - y'^2(x_{2n}) + 2\int_{x_{2n}}^{x_{2n+2}} A(x)y(x)\cdot y'(x)dx =$$

$$= y'^2(x_{2n+2}) - y'^2(x_{2n}) + [A(x)y^2(x)]_{x_{2n}}^{x_{2n+2}} - \int_{x_{2n}}^{x_{2n+2}} A'(x)y^2(x)\,dx,$$

$$y'^2(x_{2n+2}) - y'^2(x_{2n}) = \int_{x_{2n}}^{x_{2n+2}} A'(x)\,y^2(x)\,dx. \tag{62}$$

Обозначим через m' и M' соответственно нижнюю и верхнюю грани функции $|A'(x)|$ на отрезке $[x - k/\sqrt{A(x)},\ x + k/\sqrt{A(x)}]$. Тогда для любого числа τ, $0 < \tau < 1$, можно найти такое значение x^0, что при $x \geqslant x^0$ выполняются неравенства (59) и неравенства

$$(1-\tau)^2 \leqslant \frac{m'}{|A'(x)|} \leqslant \frac{M'}{|A'(x)|} \leqslant (1+\tau)^2. \tag{63}$$

Из (62) следует, что

$$y'^2(x_{2n+2}) - y'^2(x_{2n}) = A' \int_{x_{2n}}^{x_{2n+2}} y^2(x)\,dx, \tag{64}$$

где A' заключено между нижней и верхней гранями функции $A'(x)$ на отрезке $[x_{2n}, x_{2n+2}]$. Найдется настолько большой номер n_0, что при $n > n_0$ выполняются неравенства (59) и (63), а отрезок $[x_{2n}, x_{2n+2}]$

содержится в отрезке $[x_{2n}, k/\sqrt{A(x_{2n})}]$. При этих значениях n в силу (63) имеем

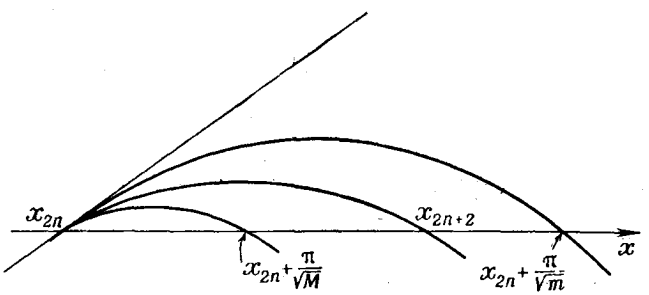
$$(1-\tau)^2 |A'(x_{2n})| \leqslant |A'| \leqslant (1+\tau)^2 |A'(x_{2n})|. \tag{65}$$

С помощью метода вариации произвольных постоянных (гл. II, § 1, п. 5, „в") легко выводится, что решение $y(x)$ уравнения (1), обращающееся в нуль в точке x_{2n}, удовлетворяет интегральному уравнению

$$y(x) = \frac{y'(x_{2n})}{\sqrt{C}} \sin \sqrt{C}(x - x_{2n}) + \\ + \frac{1}{\sqrt{C}} \int_{x_{2n}}^{x} [C - A(\xi)] y(\xi) \sin \sqrt{C}(x-\xi)\, d\xi, \tag{66}$$

где C — произвольная положительная постоянная.

Предположим для определенности, что $y'(x_{2n}) > 0$. Обозначим через M и m соответственно верхнюю и нижнюю грани значений



Фиг. 3.

функции $A(x)$ на отрезке $[x_{2n}, x_{2n} + k/\sqrt{A(x_{2n})}]$. Придавая в равенстве (66) произвольной постоянной C последовательно значения $C = M$ и $C = m$, получаем, что на отрезке $[x_{2n}, x_{2n} + \pi/\sqrt{M}]$ (фиг. 3) выполняются неравенства

$$0 \leqslant \frac{y'(x_{2n})}{\sqrt{M}} \sin \sqrt{M}(x - x_{2n}) \leqslant y(x), \tag{66$_1$}$$

а на отрезке $[x_{2n}, x_{2n+2}]$ — неравенства

$$0 \leqslant y(x) \leqslant \frac{y'(x_{2n})}{\sqrt{m}} \sin \sqrt{m}(x - x_{2n}). \tag{66$_2$}$$

Поэтому [1])

$$\frac{\pi y'^2(x_{2n})}{2M\sqrt{M}} < \int\limits_{x_{2n}}^{x_{2n+2}} y^2(x)\,dx < \frac{\pi y'^2(x_{2n})}{2m\sqrt{m}}. \tag{67}$$

Так как функции $A'(x_{2n})$ и $y'^2(x_{2n+2}) - y'^2(x_{2n})$ имеют одинаковые знаки, то, в силу (64), (65) и (67), получаем

$$\frac{\pi}{2}(1-\tau)^2\frac{1}{M\sqrt{M}} \leqslant \frac{y'^2(x_{2n+2}) - y'^2(x_{2n})}{y'^2(x_{2n})A'(x_{2n})} \leqslant \frac{\pi}{2}(1+\tau)^2\frac{1}{m\sqrt{m}}.$$

Принимая во внимание неравенства (58) и (59′), имеем

$$\frac{1}{m\sqrt{m}} \leqslant \frac{1}{A(x_{2n})^{3/2}(1-\tau)^3} < \frac{1}{A(x_{2n})}\frac{1}{(1-\tau)^3}\frac{1+\tau}{\pi}(x_{2n+2} - x_{2n}).$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{M\sqrt{M}} \geqslant \frac{1}{A(x_{2n})^{3/2}(1+\tau)^3} \geqslant \frac{1}{(1+\tau)^3}\frac{1}{A(x_{2n})}\frac{1-\tau}{\pi}(x_{2n+2} - x_{2n}),$$

а поэтому

$$\frac{(1-\tau)^3}{(1+\tau)^3} \leqslant \frac{y'^2(x_{2n+2}) - y'^2(x_{2n})}{\frac{1}{2}y'^2(x_{2n})\frac{A'(x_{2n})}{A(x_{2n})}(x_{2n+2} - x_{2n})} \leqslant \frac{(1+\tau)^3}{(1-\tau)^3}. \tag{68}$$

Очевидно, что

$$\ln A(x_{2n+2}) - \ln A(x_{2n}) = (x_{2n+2} - x_{2n})\frac{A'}{A} \quad (A' = A'(\xi),\ A = A(\bar{\xi})).$$

Обозначая через M' и m' соответственно верхнюю и нижнюю грани функции $A'(x)$ на отрезке $[x_{2n},\ x_{2n} + k/\sqrt{A(x_{2n})}]$, получаем, что

$$m'/M < |A'|/A < M'/m.$$

---

[1]) Из (66_1), (66_2) следует неравенство

$$\frac{y'^2(x_{2n})}{M}\int\limits_{x_{2n}}^{x_{2n}+\frac{\pi}{\sqrt{M}}} \sin^2\sqrt{M}(x - x_0)\,dx \leqslant \int\limits_{x_{2n}}^{x_{2n+2}} y^2(x)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{y'^2(x_{2n})}{m}\int\limits_{x_{2n}}^{x_{2n}+\frac{\pi}{\sqrt{m}}} \sin^2\sqrt{m}(x - x_{2n})\,dx.$$

— *Прим. ред.*

Из (59) и (63) следуют неравенства

$$\frac{(1-\tau)^2}{(1+\tau)^2}\frac{|A'(x_{2n})|}{A(x_{2n})} \leqslant \frac{m'}{M} \leqslant \frac{|A'|}{A} \leqslant \frac{M'}{m} \leqslant \frac{(1+\tau)^2|A'(x_{2n})|}{(1-\tau)^2 A(x_{2n})},$$

$$\left|\ln\frac{A(x_{2n+2})}{A(x_{2n})}\right|\frac{(1-\tau)^2}{(1+\tau)^2} = (x_{2n+2}-x_{2n})\frac{(1-\tau)^2}{(1+\tau)^2}\frac{|A'|}{A} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|A'(x_{2n})|}{A(x_{2n})}\cdot(x_{2n+2}-x_{2n}) \leqslant \frac{(1+\tau)^2}{(1-\tau)^2}\left|\ln\frac{A(x_{2n+2})}{A(x_{2n})}\right|,$$

$$\frac{(1+\tau)^2}{(1-\tau)^2}\frac{1}{\left|\ln\frac{A(x_{2n+2})}{A(x_{2n})}\right|} \geqslant \frac{1}{\frac{|A'(x_{2n})|}{A(x_{2n})}(x_{2n+2}-x_{2n})} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{(1-\tau)^2}{(1+\tau)^2}\frac{1}{\left|\ln\frac{A(x_{2n+2})}{A(x_{2n})}\right|}.$$

Принимая во внимание, что функции $y'^2(x_{2n+2})-y'^2(x_{2n})$ и $A'(x)$ имеют одинаковые знаки, получаем из (68) и из только что доказанного неравенства

$$\frac{(1-\tau)^5}{(1+\tau)^5} \leqslant \frac{y'^2(x_{2n+2})-y'^2(x_{2n})}{\frac{1}{2}\ln\frac{A(x_{2n+2})}{A(x_{2n})}\,y'^2(x_{2n})} \leqslant \frac{(1+\tau)^5}{(1-\tau)^5}. \tag{69}$$

Из этих неравенств следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y'^2(x_{2n+2})-y'^2(x_{2n})}{y'^2(x_{2n})}\Big/\frac{1}{2}\ln\frac{A(x_{2n+2})}{A(x_{2n})} = 1. \tag{70}$$

Из (59) получаем

$$(1-\tau)^2 \leqslant A(x_{2n+2})/A(x_{2n}) \leqslant (1+\tau)^2.$$

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}\ln A(x_{2n+2})/A(x_{2n}) = 0$ и в силу (70)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y'^2(x_{2n+2})-y'^2(x_{2n})}{y'^2(x_{2n})} = 0.$$

Но

$$\lim_{n\to\infty}[\ln y'^2(x_{2n+2})-\ln y'^2(x_{2n})]\Big/\frac{y'^2(x_{2n+2})-y'^2(x_{2n})}{y'^2(x_{2n})} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\ln\left[1+\frac{y'^2(x_{2n+2})-y'^2(x_{2n})}{y'^2(x_{2n})}\right]\Big/\frac{y'^2(x_{2n+2})-y'^2(x_{2n})}{y'^2(x_{2n})} = 1,$$

и потому с помощью (70) получаем, что

$$\lim_{n\to\infty}\ln\frac{y'^2(x_{2n+2})}{y'^2(x_{2n})}\Big/\frac{1}{2}\ln\frac{A(x_{2n+2})}{A(x_{2n})} = 1.$$

Положим теперь

$$y'^2(x_{2n}) = A(x_{2n})^{\frac{1}{2}+2\alpha_n} \tag{71}$$

и докажем, что

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0.$$

В самом деле, для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое n_0, что при $n > n_0$ имеем

$$1 - \varepsilon < \ln \frac{y'^2(x_{2n+2})}{y'^2(x_{2n})} \Big/ \frac{1}{2} \ln \frac{}{A(x_{2n})} < 1 + \varepsilon,$$

откуда

$$1 - \varepsilon < \ln \frac{y'^2(x_{2n_0+2p})}{y'^2(x_{2n_0})} \Big/ \frac{1}{2} \ln \frac{A(x_{2n_0+2p})}{A(x_{2n_0})} < 1 + \varepsilon \, (p = 1, 2, \ldots),$$

$$-\varepsilon < \frac{2\alpha_{n_0+p} + \dfrac{\frac{1}{2}\ln A(x_{2n_0}) - \ln y'^2(x_{2n_0})}{\ln A(x_{2n_0+2p})}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\dfrac{\ln A(x_{2n_0})}{\ln A(x_{2n_0+2p})}} < \varepsilon.$$

Но так как $\lim\limits_{p\to\infty} \ln |A(x_{2n_0+2p})| = +\infty$, а ε произвольно, то из доказанного неравенства следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Положим теперь

$$|y(x_{2n+1})| = [A(x_{2n+1})]^{-1/4+\beta_n} \tag{72}$$

и докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$.

Из (66_1) и (66_2) вытекает, что

$$\frac{|y'(x_{2n})|}{\sqrt{M}} \leqslant |y(x_{2n+1})| \leqslant \frac{|y'(x_{2n})|}{\sqrt{m}}.$$

Принимая во внимание (59′) и (71), получаем, при $n > n_0$,

$$\frac{1}{1+\tau} |A(x_{2n})|^{-1/4+\alpha_n} \leqslant A(x_{2n+1})^{-1/4+\beta_n} \leqslant \frac{1}{1-\tau} |A(x_{2n})|^{-1/4+\alpha_n},$$

откуда следует, что число β_n заключено между числами

$$\frac{1}{4} - \frac{\ln(1+\tau)}{\ln A(x_{2n+1})} + \left(-\frac{1}{4} + \alpha_n\right) \frac{\ln A(x_{2n})}{\ln A(x_{2n+1})}$$

и

$$-\frac{\ln(1-\tau)}{\ln A(x_{2n+1})} + \left(-\frac{1}{4} + \alpha_n\right) \frac{\ln A(x_{2n})}{\ln A(x_{2n+1})} + \frac{1}{4}.$$

Но $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln A(x_{2n})}{\ln A(X_{2n+1})} = 1$; $\lim\limits_{n\to\infty} \ln A(x_{2n+1}) = \infty$, и потому $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$[1]).

---

[1]) Для того чтобы вычислить первый предел, достаточно заметить, что для любого, сколь угодно малого, положительного числа τ можно, в силу (59), найти такое число n_0, что при $n \geqslant n_0$ выполняются неравенства $(1+\tau)^2 A(x_{2n}) > A(x_{2n+1}) > (1-\tau)^2 A(x_{2n})$. Поэтому отношение $\ln A(x_{2n+1})/\ln A(x_{2n})$ заключено между $2\ln(1-\tau)/\ln A(x_{2n}) + 1$ и $2\ln(1+\tau)/\ln A(x_{2n}) + 1$.

в) Нетрудно видеть, что если в уравнении $y''+A(x)y=0$ функция $A(x)$ удовлетворяет указанным в „б“ условиям и если $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x)=+\infty$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=0$, $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}\,|y'(x)|=+\infty$; если же при тех же условиях $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x)=0$, то $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}\, y(x)=+\infty$, а $\lim\limits_{x\to+\infty}|y'(x)|=0$. Таким образом, *при указанных предположениях решения уравнения* (1) *могут обладать лишь устойчивостью в смысле Рауса* (§ 1, п. 1).

9. Случай, когда функция $A(x)$ положительна, не убывает, имеет непрерывную производную и $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x)=+\infty$; теоремы Армеллини — Тонелли — Сансоне. а) Этот пункт посвящен изучению решений уравнения

$$y''+A(x)y=0 \tag{1}$$

при условии, что функция $A(x)$ *положительна, не убывает в промежутке* $[q, +\infty)$, *имеет непрерывную производную* и что $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x)=+\infty$. Мы укажем для таких уравнений два критерия устойчивости решения $y=0$.

Для того чтобы короче сформулировать один из этих критериев, введем понятия *почти скачкообразно стремящихся к бесконечности функций и регулярно стремящихся к бесконечности функций*. Пусть $\{\theta_n\}$ — некоторая последовательность попарно не пересекающихся отрезков $\theta_n\equiv[a_n, b_n]$, $a_n<b_n$, лежащих в промежутке $[q, +\infty)$. Мы будем говорить, что эта последовательность имеет в $[q, +\infty)$ *плотность* меньшую, чем ε, если существует такое n_0, что для любого $n>n_0$ выполняется неравенство $\sum\limits_{k=1}^{n}(b_k-a_k)/b_n<\varepsilon$. Пусть функция $F(x)$ при $x\geqslant q$ положительна, непрерывна, не убывает и пусть $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=+\infty$. Если для любого $\varepsilon>0$ в $[q, +\infty)$ можно найти последовательность отрезков $\{\theta_n\}$, плотность которой меньше, чем ε, и такую, что приращение функции $F(x)$ на множестве, дополнительном к $\{\theta_n\}$, конечно, то функция $F(x)$ называется *почти скачкообразно* стремящейся к бесконечности. В противном случае функция $F(x)$ называется *регулярно* стремящейся к бесконечности.

Имеет место следующая теорема, сформулированная и частично доказанная Армеллини и полностью доказанная одновременно и независимо Тонелли и Сансоне[1]).

Пусть в уравнении

$$y''+A(x)y=0 \tag{1}$$

[1]) См. Армеллини [1], Тонелли [1], Сансоне [2]. В тексте воспроизводится доказательство Армеллини и Тонелли.

функция $A(x)$ в промежутке $[q, +\infty)$ положительна, не убывает, имеет непрерывную производную и пусть $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x) = +\infty$, причем $\ln A(x)$ регулярно стремится к бесконечности. Тогда для любого решения $y(x)$ уравнения (1) *имеем*

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0\ ^{1)}.$$

Положим

$$y'^2 + A(x)y^2 = A(x)\lambda^2, \tag{73}$$

где $\lambda(x) \geqslant 0$ ($\lambda(x)$ является амплитудой колебания в момент x [2]). Тогда

$$|y(x)| \leqslant \lambda(x), \tag{74}$$

причем знак равенства может иметь место тогда и только тогда, когда $y'(x) = 0$, т. е. в точках максимума и минимума функции $y(x)$.

Дифференцируя равенство (73), получаем, что

$$A'(y^2 - \lambda^2)/A = d\lambda^2/dx. \tag{75}$$

Но $A > 0$, $A' \geqslant 0$, $y^2 - \lambda^2 \leqslant 0$, а поэтому $d\lambda^2/dx \leqslant 0$. Следовательно, $\lambda^2(x)$ является монотонной, невозрастающей функцией, но тогда и *последовательность максимумов функции $|y(x)|$ невозрастающая* (см. также п. 2, „в“). Отсюда следует, что существует

$$\lim_{n\to\infty} |y(x_{2n+1})| = \alpha.$$

---

[1]) Если функция $A(x)$ положительна, не убывает и $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x) = +\infty$, то все решения (1) ограничены при $x \to +\infty$. Действительно, из (6), п. 1, § 4, гл. VII, следует, что

$$\lim_{n\to+\infty} [\max_{x_{2n}\leqslant x\leqslant x_{2n+2}} y^2(x)] = y^2(x_1) \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{m_{2n}^2}{m_{2n+1}^2} < +\infty,$$

так как $m_{2n}^2 \leqslant m_{2n+1}^2$ — *Прим. ред.*

[2]) Сравним уравнение (1) с уравнением

$$\bar{y}'' + A\bar{y} = 0 \quad (1'),$$

где $\bar{A} = A(x) \leqslant A(\bar{x})$ для всех $\bar{x} \geqslant x$ (x фиксировано); функция

$$\bar{y}(\bar{x}) = y(x)\cos\sqrt{\bar{A}}(\bar{x} - x) + \frac{y'(x)}{\sqrt{A(x)}}\sin\sqrt{\bar{A}}(\bar{x} - x)$$

дает решение (1′), причем $\bar{y}^2(\bar{x}) \geqslant y^2(\bar{x})$ для $x_{2n-2} \leqslant x \leqslant \bar{x} \leqslant x_{2n}$, откуда

$$y^2(x) \leqslant \lambda^2(x) = y^2(x) + \frac{y'^2(x)}{A(x)} = \max_{x\leqslant\bar{x}\leqslant x_{2n}} \bar{y}^2(\bar{x}).$$

— *Прим. ред.*

(Напомним, что, согласно обозначениям, введенным в п. 2, „а“, $x_0, x_2, \ldots, x_{2n}, \ldots; x_1, x_3, x_5, \ldots, x_{2n+1}, \ldots$ являются соответственно последовательностью точек максимума функций $|y'(x)|$ и $|y(x)|$, причем эти последовательности расположены в порядке возрастания. Без потери общности можно считать, что $x_0 > 0$.)

Покажем, что при сделанных нами предположениях $\alpha = 0$.

Предположим, что $\alpha \neq 0$. Для любого, сколь угодно малого положительного числа ε можно найти такое x^0, что при $x > x^0$ имеем

$$\alpha \leqslant \lambda(x) < \alpha + \varepsilon.$$

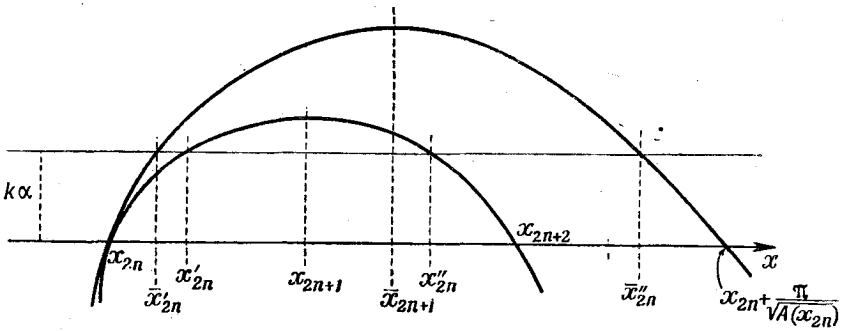
Интегрируя равенство (75) от x^0 до x и полагая $\mu = \ln A(x)$, получаем

$$\lambda^2(x) = \lambda^2(x^0) - \int_{x^0}^{x} [\lambda^2(\xi) - y^2(\xi)] \frac{A'(\xi)}{A(\xi)} d\xi,$$

$$0 \leqslant \int_{x^0}^{x} [\lambda^2(\xi) - y^2(\xi)] \mu'(\xi) d\xi < (\alpha + \varepsilon)^2 - \alpha^2 = 2\alpha\varepsilon + \varepsilon^2. \quad (76)$$

Обозначим теперь через k любое положительное число, меньшее единицы, через A — объединение всех лежащих в промежутке $[q, +\infty)$ отрезков, в каждой точке которых выполняется неравенство $|y(x)| \leqslant k\alpha$, а через B — объединение всех смежных промежутков для A, лежащих в $[q, +\infty)$. Очевидно, что в каждой точке из B выполняется неравенство $\alpha + \varepsilon > y(x) > k\alpha$.

Докажем, что *для любого $\sigma > 0$ можно найти такое положительное число k, достаточно близкое к единице, что плотность множества B в промежутке $[q, +\infty)$ меньше, чем σ.*



Фиг. 4.

Предположим, что на отрезке $[x_{2n}, x_{2n+2}]$ имеем $y(x) \geqslant 0$, и обозначим через x'_{2n}, x''_{2n} такие значения x, что

$$x_{2n} < x'_{2n} < x''_{2n} < x_{2n+2}; \; y(x'_{2n}) = y(x''_{2n}) = k\alpha$$

(фиг. 4).

Положим

$$\bar{y}(x) = \frac{y'(x_{2n})}{\sqrt{A(x_{2n})}} \sin \sqrt{A(x_{2n})}\,(x - x_{2n}).$$

Тогда на всем отрезке $[x_{2n}, x_{2n+2}]$ выполняется неравенство $y(x) \leqslant \bar{y}(x)$ (см. п. 8, „б").

Покажем, что для данного σ можно найти настолько большое n_0 и настолько близкое к единице значение k, что при $n > n_0$ имеем

$$(x''_{2n} - x'_{2n})/(x'_{2n} - x_{2n}) < \sigma.$$

Пусть $\bar{x}_{2n+1}$ — середина отрезка $[x_{2n}, x_{2n} + \pi/\sqrt{A(x_{2n})}]$; тогда

$$\bar{y}(x) = \bar{y}(\bar{x}_{2n+1}) \cos \sqrt{A(x_{2n})}(x - \bar{x}_{2n+1}).$$

Найдется такое $\bar{x}'_{2n} < x'_{2n}$, что $\bar{y}(\bar{x}'_{2n}) = y(x'_{2n})$,

$$k\alpha = \bar{y}(\bar{x}'_{2n}) = \bar{y}(\bar{x}_{2n+1}) \cos \sqrt{A(x_{2n})}\,(\bar{x}'_{2n} - \bar{x}_{2n+1}),$$

$$k\alpha = \bar{y}(\bar{x}_{2n+1})\left[1 + \frac{A(x_{2n})(\bar{x}'_{2n} - \bar{x}_{2n+1})^2}{2} D\right], \tag{77}$$

где D равно второй производной от $\cos z$, вычисленной в точке $\bar{z}$, лежащей между $z = 0$ и $z = \sqrt{A(x_{2n})}(\bar{x}'_{2n} - \bar{x}_{2n+1})$.

Поэтому $D = -\cos \bar{z}$ и величина $\bar{y}(\bar{x}_{2n+1}) D$ заключена между $-\bar{y}(\bar{x}_{2n+1})$ и $-\bar{y}(\bar{x}_{2n+1}) \cos\{\sqrt{A(x_{2n})}\,(\bar{x}'_{2n} - \bar{x}_{2n+1})\} = -k\alpha$. Следовательно,

$$\bar{y}(\bar{x}_{2n+1}) D < -\bar{y}(\bar{x}_{2n+1}) \cos\{\sqrt{A(x_{2n})}\,(\bar{x}'_{2n} - \bar{x}_{2n+1})\}.$$

Из (77) и из доказанного неравенства следует, что

$$k\alpha < \bar{y}(\bar{x}_{2n+1}) - \frac{A(x_{2n})(\bar{x}'_{2n} - \bar{x}_{2n+1})^2}{2} k\alpha,$$

$$|\bar{x}'_{2n} - \bar{x}_{2n+1}| < \frac{1}{\sqrt{A(x_{2n})}} \sqrt{2\,\frac{\bar{y}(\bar{x}_{2n+1}) - k\alpha}{k\alpha}} = \sqrt{\frac{H_n}{A(x_{2n})}},$$

где

$$H_n = 2[\bar{y}(\bar{x}_{2n+1}) - k\alpha]/k\alpha.$$

Так как

$$\bar{y}(\bar{x}_{2n+1}) = \frac{y'(x_{2n})}{\sqrt{A(x_{2n})}} \sin \sqrt{A(x_{2n})}\,(\bar{x}_{2n+1} - x_{2n}) =$$

$$= \frac{y'(x_{2n})}{\sqrt{A(x_{2n})}} = \lambda(x_{2n})\,^{1)},$$

---

[1]) В самом деле, $\bar{x}_{2n+1} - x_{2n} = \dfrac{\pi}{2\sqrt{(A\,x_{2n})}}$, а $y(x_{2n}) = 0$, $\lambda^2(x) = \dfrac{y'^2 + A(x)y^2}{A(x)}$. — *Прим. перев.*

и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{y}(\bar{x}_{2n+1}) = \alpha$, то, выбирая σ в промежутке $(0, \pi)$, можно найти такие k и n_0, что при $n > n_0$ имеем

$$|H_n| < \left(\frac{\sigma}{4}\right)^2.$$

Но тогда при $n > n_0$

$$\frac{\bar{x}_{2n+1} - \bar{x}'_{2n}}{\bar{x}'_{2n} - x_{2n}} = \frac{\bar{x}_{2n+1} - \bar{x}'_{2n}}{(\bar{x}_{2n+1} - x_{2n}) - (\bar{x}_{2n+1} - \bar{x}'_{2n})} <$$

$$< \frac{\sqrt{\dfrac{H_n}{A(x_{2n})}}}{\dfrac{\pi}{2\sqrt{A(x_{2n})}} - \sqrt{\dfrac{H_n}{A(x_{2n})}}} < \frac{\sigma}{\pi},$$

откуда

$$\frac{x''_{2n} - x'_{2n}}{x'_{2n} - x_{2n}} < \frac{\bar{x}''_{2n} - \bar{x}'_{2n}}{\bar{x}'_{2n} - x_{2n}} = 2\,\frac{\bar{x}_{2n+1} - \bar{x}'_{2n}}{\bar{x}'_{2n} - x_{2n}} < \sigma,$$

$$\frac{\sum\limits_{l=n_0+1}^{n} (x''_{2l} - x'_{2l})}{x''_{2n}} < \sigma\,\frac{\sum\limits_{l=n_0+1}^{n} (x'_{2l} - x_{2l})}{x''_{2n}} < \sigma.$$

Тем самым наше утверждение относительно плотности множества B доказано.

Но $\lambda^2(x) - y^2(x) \geqslant 0$, $d\mu/dx \geqslant 0$, $\lambda^2(x) \geqslant \alpha^2$, и на множестве A имеем $|y(x)| \leqslant k\alpha$. Поэтому

$$\int\limits_{x_0}^{+\infty} [\lambda^2(x) - y^2(x)]\,\frac{d\mu}{dx}\,dx > \int\limits_{A} [\lambda^2(x) - y^2(x)]\,\frac{d\mu}{dx}\,dx >$$

$$> \alpha^2(1 - k^2) \int\limits_{A} \frac{d\mu}{dx}\,dx = \alpha^2(1 - k^2)\,\Delta_A\mu,$$

где через $\Delta_A\mu$ обозначено полное приращение функции μ на отрезках множества A. Из (76) получаем, что

$$\alpha^2(1 - k^2)\,\Delta_A\mu < 2\alpha\varepsilon + \varepsilon^2.$$

Таким образом, мы доказали, что для любого σ можно найти такое множество B, состоящее из промежутков, лежащих в $[q, +\infty)$, что его плотность меньше, чем σ, а полное приращение $\Delta_A\mu$ функции μ на дополнительном множестве A конечно. Но это противоречит условию теоремы, так как функция $\mu = \ln A(x)$ регулярно стремится к бесконечности. Полученное противоречие и доказывает, что $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0$.

б) Укажем, что существует класс функций $A(x)$, включающий подклассы функций, почти скачкообразно стремящихся к бесконечности, и такой, что для функций из этого класса любое решение уравнения

$$y'' + A(x)y = 0 \tag{1}$$

удовлетворяет условию

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0.$$

Имеет место следующая теорема (см. Сансоне [2], стр. 398—399), для которой мы дадим лишь формулировку:

Пусть в уравнении (1) *функция* $A(x)$ *при* $x \geqslant q$ *положительна, непрерывна, не убывает и имеет непрерывную производную* $A'(x)$. *Пусть, далее,* $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x) = +\infty$[1]. *Рассмотрим некоторую последовательность* $\{t_n\}$ *положительных чисел, удовлетворяющих условиям*

$$t_n < t_{n+1}, \quad t_{n+1} - t_n \leqslant t_n - t_{n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} (t_{n+1} - t_n) = 0, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, (t_{n+1} - t_n)/(t_n - t_{n-1}) = 1,$$

и обозначим через $A'(\xi_n)/A(\xi_n)$ *наименьшее значение функции* $A'(x)/A(x)$ *на отрезке* $[t_n, t_{n+1}]$, $t_n \leqslant \xi_n \leqslant t_{n+1}$. *Если для любой последовательности* $\{t_n\}$, *удовлетворяющей указанным условиям, имеет место соотношение*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (t_{n+1} - t_n) \frac{A'(\xi_n)}{A(\xi_n)} = +\infty,$$

то для любого решения $y(x)$ *уравнения* (1) *имеем*

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0.$$

в) Из сформулированной сейчас теоремы можно вывести два весьма простых достаточных условия для того, чтобы $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0$. *Пусть в уравнении*

$$y''(x) + A(x)y(x) = 0 \tag{1}$$

функция $A(x)$ *при* $x \geqslant q$ *положительна, непрерывна, не убывает, имеет непрерывную производную* $A'(x)$ *и пусть* $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x) = +\infty$.

---

[1]) Если $A(x)$ стремится к $+\infty$ не монотонно, то (1) может иметь неограниченное решение. Относительно условий, обеспечивающих ограниченность всех решений (1) в этом случае, см. Л. И. Камынин [1]. — *Прим. ред.*

Пусть, далее, существует бесконечно много отрезков $[a_n, b_n]$, *лежащих в промежутке* $[q, +\infty]$ (*причем* $a_n < b_n$, $b_n < a_{n+1}$, $\delta_n = b_n - a_n \geqslant \delta_0 > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$) *и таких, что ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta_n m_n$ *расходится*[1]) (*через* m_n *мы обозначаем наименьшее значение функции* $A'(x)/A(x)$ *на отрезке* $[a_n, b_n]$). *Тогда для любого решения* $y(x)$ *уравнения* (1) *имеем*

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0.$$

Выберем, в самом деле, некоторую последовательность чисел t_1, t_2, ..., t_n, ..., удовлетворяющую указанным в „б" условиям. Тогда существует такой индекс r_0, что при $r \geqslant r_0$ имеем $t_{r+1} - t_r < \delta_0/3$. Если обозначить через n_0 первый индекс n, для которого $a_{n_0} > t_{r_0}$, то внутри любого отрезка $\delta_n = [a_n, b_n]$, где $n > n_0$, содержатся отрезки $[t_r, t_{r+1}]$, сумма длин которых больше, чем $\delta_n - 2\delta_0/3 \geqslant \delta_n - 2\delta_n/3 = \delta_n/3$. Поэтому сумма произведений этих отрезков $[t_r, t_{r+1}]$ на соответствующие множители $A'(\xi_r)/A(\xi_r)$ превышает $\delta_n m_n/3$; но тогда ряд $\sum\limits_{r=1}^{\infty} (t_{r+1} - t_r) \dfrac{A'(\xi_r)}{A(\xi_r)}$ расходится в силу расходимости ряда $\sum\limits_{n\geqslant n_0} \delta_n m_n/3$. Отсюда следует, что ряд

$$\sum_{r=1}^{\infty} (t_{r+1} - t_r) \frac{A'(\xi_r)}{A(\xi_r)}$$

расходится, а потому мы можем воспользоваться сформулированной в „б" теоремой.

Имеет место также теорема: *Если при* $x \geqslant q$ *функция* $A(x)$ *положительна, непрерывна, не убывает, имеет непрерывную производную* $A'(x)$, *причем* $A'(x) \geqslant l > 0$ *и* $\int\limits_q^{+\infty} dx/A(x) = +\infty$, *то для любого решения* $y(x)$ *уравнения* (1) *имеем*

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0.$$

В самом деле, для любой последовательности t_1, t_2, ..., t_n, ... из промежутка $[q, +\infty]$, такой, что $t_{n+1} - t_n > t_{n+2} - t_{n+1}$,

---

[1]) Можно построить функции $A(x)$, *почти скачкообразно стремящиеся к бесконечности* и удовлетворяющие указанным здесь условиям (см. Сансоне [2], стр. 401).

$n = 1, 2, \ldots,$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} (t_{n+1} - t_n) \frac{A'(\xi_n)}{A(\xi_n)} \geqslant l \sum_{n=1}^{\infty} (t_{n+1} - t_n) \frac{1}{A(t_{n+1})} =$$

$$= l \sum_{n=1}^{\infty} (t_{n+1} - t_n) \frac{1}{A(t_n)} - l \sum_{n=1}^{\infty} (t_{n+1} - t_n) \left[\frac{1}{A(t_n)} - \frac{1}{A(t_{n+1})} \right] \geqslant$$

$$\geqslant l \int_{t_1}^{+\infty} dx/A(x) - l \sum_{n=1}^{\infty} (t_{n+1} - t_n) \left[\frac{1}{A(t_n)} - \frac{1}{A(t_{n+1})} \right].$$

Но

$$\sum_{n=1}^{\infty} (t_{n+1} - t_n) \left[\frac{1}{A(t_n)} - \frac{1}{A(t_{n+1})} \right] \leqslant$$

$$\leqslant (t_2 - t_1) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{A(t_n)} - \frac{1}{A(t_{n+1})} \right] = \frac{t_2 - t_1}{A(t_1)},$$

и, следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (t_{n+1} - t_n) A'(\xi_n)/A(\xi_n)$ расходится, а потому мы можем воспользоваться теоремой, сформулированной в „б“.

§ 5. Асимптотическое представление решений дифференциальных уравнений второго порядка при больших значениях параметра.

1. Уравнение $y'' - (\lambda^2\chi_0 + \lambda\chi_1 + \chi_2)y = 0$. а) В приложениях часто возникает необходимость в нахождении асимптотических выражений для частных решений дифференциальных уравнений, зависящих от параметра, при условии, что параметр принимает весьма большие значения. Этой задачей мы занимались, например, в гл. IV, § 7, где нами было получено асимптотическое выражение для функций Штурма—Лиувилля. Для решения этой задачи почти всегда решение уравнения представляют сначала в виде интеграла; именно таким путем получаются асимптотические выражения для многочленов Лежандра [1]), Якоби (см. Сеге [1]) и для функций Бесселя при больших значениях параметра (порядка) (см. Ватсон [1], гл. VIII, стр. 252—297).

Мы ограничимся изложением некоторых замечаний Джеффрея (Джеффрей [1], [2]), позволяющих легко найти первый член асимптотического разложения по параметру решения уравнения в случае, когда известен вид этого разложения. Относительно более глубокого изложения этого вопроса см. Биркгоф [1], Тамаркин [1], Гольдштейн [1], [2], Лангер [1], [2], [3], Тржитцинский [1].

---

[1]) См. Я. Л. Геронимус [1], стр. 89. — *Прим. перев.*

б) Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y'' - (\lambda^2\chi_0 + \lambda\chi_1 + \chi_2)\,y = 0, \tag{1}$$

где χ_0, χ_1, χ_2 — непрерывные функции от x, заданные на некотором конечном или бесконечном промежутке I; $\chi_0 \neq 0$; отношения χ_1/χ_0, χ_2/χ_0 ограничены в I, а λ — некоторый параметр, который может принимать сколь угодно большие значения.

Предположим, что это уравнение имеет решение вида

$$y = \Phi e^{\lambda\omega}\left(1 + \frac{f_1}{\lambda} + \frac{f_2}{\lambda^2} + \ldots\right), \tag{2}$$

где функции Φ, ω, f_1, f_2, ... зависят только от x, ограничены в I, имеют непрерывные вторые производные, причем ряд (2) сходится при $\lambda > \lambda_0$, каково бы ни было x из I.

Подставим ряд (2) в уравнение (1), расположим получающееся в левой части выражение по степеням λ и приравняем нулю коэффициенты при λ^2, λ, λ^0. Тогда мы получим:

$$\omega'^2 = \chi_0, \tag{3}$$

$$\Phi'/\Phi = (\chi_1 - \omega'')/2\omega', \tag{4}$$

$$2\omega' f'_1 = \chi_2 - \Phi''/\Phi. \tag{5}$$

Из равенства (3) следует, что

$$\omega = \pm \int^x \chi_0^{1/2}\,dx,$$

а из равенства (4) вытекает равенство

$$\Phi = \omega'^{-1/2} e^{\int^x \chi_1/2\omega'\,dx}. \tag{6}$$

Поэтому

$$\Phi e^{\lambda\omega} = \chi_0^{-1/4} e^{\pm\int^x (\lambda\chi_0^{1/2} + \chi_1/2\chi_0^{1/2})\,dx}, \tag{7}$$

где нижний предел интеграла может быть выбран произвольным образом.

Предположим, что $\chi_0 > 0$ в I. При $\lambda \geqslant \lambda_1 \geqslant \lambda_0$ имеем

$$\chi = \lambda^2\chi_0 + \lambda\chi_1 + \chi_2 > 0, \tag{8}$$

$$\chi^{1/2} = \lambda\chi_0^{1/2}\left[1 + \frac{1}{\lambda}\frac{\chi_1}{\chi_0} + \frac{1}{\lambda^2}\frac{\chi_2}{\chi_0}\right]^{1/2} = \lambda\chi_0^{1/2} + \frac{\chi_1}{2\chi_0^{1/2}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

$$y = \Phi e^{\lambda\omega}\left[1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right] = \chi_0^{-1/4} e^{\pm\int^x \chi^{1/2}\,dx}\left[1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]. \tag{9_1}$$

Если же в I $\chi_0 < 0$, то при $\lambda \geqslant \lambda_1 \geqslant \lambda_0$ имеем

$$\chi = -\psi = \lambda^2\chi_0 + \lambda\chi_1 + \chi_2 < 0.$$

Поэтому, отделяя в формуле (9_1) действительную часть от мнимой, получаем, что решения уравнения (1) имеют вид

$$y(x) = |\chi_0|^{-1/4}[A\cos L(x) + B\sin L(x)]\left[1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right], \qquad (9_2)$$

где

$$L(x) = \int^x \psi^{1/2}\,dx,$$

а A и B — произвольные постоянные.

в) В случае, когда функции χ_0, χ_1, χ_2 не удовлетворяют указанным условиям, требуется более глубокое изучение решений.

2. Асимптотическая формула Карлини для функций Бесселя большого порядка. В качестве приложения изложенных выше методов рассмотрим уравнение Бесселя (гл. III, § 6)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0$$

и выведем для его решений асимптотическую формулу Карлини (см. Карлини [1]; эта работа была переведена на немецкий язык Якоби [2]; см. также Якоби [1], т. VII, стр. 189—245). Формула Карлини была первой, установленной в этом направлении.

Полагая $x = ne^{\xi}$, получаем

$$\frac{d^2y}{d\xi^2} + n^2(e^{2\xi} - 1)y = 0,$$

и *если n велико по сравнению с x*, то $\xi < 0$, $\chi = n^2(1 - e^{2\xi})$, $(\lambda = n)$, $\chi_0 = 1 - e^{2\xi}$. Поэтому в силу (9_1)

$$y \sim (1 - e^{2\xi})^{-1/4} e^{\pm n\int^{\xi}(1-e^{2\xi})^{1/2}\,d\xi}.$$

Но

$$n\int^x (1 - e^{2\xi})^{1/2}\,d\xi = n\int^x \left[1 - \frac{x^2}{n^2}\right]^{1/2}\frac{dx}{x} = \int^x \frac{\sqrt{n^2 - x^2}}{x}\,dx =$$

$$= n\ln\frac{x}{n + \sqrt{n^2 - x^2}} + \sqrt{n^2 - x^2},$$

и, следовательно,

$$y \sim (n^2 - x^2)^{-1/4} x^n (n + \sqrt{n^2 - x^2})^{-n} e^{\sqrt{n^2 - x^2}},$$

$$y \sim (n^2 - x^2)^{-1/4} x^{-n} (n + \sqrt{n^2 - x^2})^{n} e^{-\sqrt{n^2 - x^2}}.$$

Первая из этих формул отличается лишь множителем $1/\sqrt{2\pi}$ от асимптотического выражения для $J_n(x)$, полученного Карлини (см. Ватсон [1], стр. 15). Это выражение имеет вид

$$J_n(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{x^n e^{\sqrt{n^2 - x^2}}}{(n^2 - x^2)^{1/4}(n + \sqrt{n^2 - x^2})^n}.$$

Глава VIII

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ В ЦЕЛОМ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Теоремы существования для уравнения $y' = f(x, y)$

1. Точки Пеано для уравнения $y' = f(x, y)$. а) Мы рассматривали вопросы о существовании и единственности решений дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений в гл. I. Более глубокое изучение этих вопросов для линейных дифференциальных уравнений и систем таких уравнений было проведено в гл. IV и V. В этой главе такое изучение будет проведено для нелинейных дифференциальных уравнений и систем нелинейных уравнений, имеющих нормальную форму.

При доказательстве теорем существования и *единственности* в гл. I мы использовали условие Липшица. Однако в приложениях встречаются уравнения, правые части которых не во всех точках удовлетворяют этому ограничительному условию. Поэтому возникает необходимость в более общих теоремах существования и единственности.

Исследования в этом направлении начинаются с двух основополагающих работ Пеано[1]). Мы уже ссылались на эти работы в гл. I, § 6, п. 2, где показали, что для существования хотя бы одного решения системы дифференциальных уравнений $y'_i = f_i(x; y_1, y_2, \ldots, y_m)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, удовлетворяющего данным начальным условиям, достаточно непрерывности функций $f_i(x; y_1, y_2, \ldots, y_m)$. Приведем пример, показывающий, что этого условия недостаточно для того, чтобы такое решение было единственным.

б) Рассмотрим уравнение $y' = f(x, y)$, где $f(x, y) = |y|^{1/2}$, и будем искать решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(x^0) = 0$ (см. Мюллер [1], стр. 4,6).

Функция $f(x, y)$ непрерывна в плоскости x, y, и, следовательно, через каждую точку этой плоскости проходит по крайней мере одна интегральная кривая (гл. I, § 6, п. 2). Если точка (x^0, y^0) не лежит на оси абсцисс, то частная производная $f_y(x, y)$ ограничена в окрестности точки (x^0, y^0), и поэтому существует единственное решение

---

[1]) Пеано [1], [2]. Вопросы, рассматриваемые в этой главе, были предметом изучения в ряде недавно появившихся работ. Для удобства читателя мы даем в конце главы библиографический список этих работ.

нашего уравнения, проходящее через точку (x^0, y^0). Рассмотрим, с другой стороны, точку $(x^0, 0)$. Каковы бы ни были действительные числа a и b, такие, что $a \leqslant x^0 \leqslant b$, функция $y = y(x)$, определенная соотношениями $y(x) = 0$ при $a \leqslant x \leqslant b$, $y(x) = \frac{1}{4}(x-b)^2$ при $x \geqslant b$, $y(x) = -\frac{1}{4}(a-x)^2$ при $x \leqslant a$, удовлетворяет данному дифференциальному уравнению и начальному условию $y(x^0) = 0$.

Рассмотренный пример показывает, таким образом, *что непрерывности функции $f(x, y)$ в окрестности точки (x^0, y^0) недостаточно для того, чтобы обеспечить единственность решения уравнения $y' = f(x, y)$, проходящего через эту точку.*

Если через точку (x^0, y^0) проходят две или более интегральных кривых уравнения $y' = f(x, y)$, то точка (x^0, y^0) называется *точкой Пеано* для этого уравнения и говорят, что в этой точке имеет место *явление Пеано*.

Аналогично можно определить точку Пеано для системы дифференциальных уравнений.

в) Из доказанного в „б“ следует, что все точки оси абсцисс являются точками Пеано для уравнения $y' = |y|^{1/2}$. М. А. Лаврентьев построил такую непрерывную в квадрате Q: $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ функцию $f(x, y)$, что через каждую внутреннюю точку квадрата Q проходят по крайней мере две интегральные кривые уравнения $y' = f(x, y)$, не совпадающие ни в какой сколь угодно малой окрестности точки (x^0, y^0). Говорят, что в квадрате Q имеет место *явление Лаврентьева* (см. М. А. Лаврентьев [1]).

2. Решения уравнения $y' = f(x, y)$, определенные в конечном промежутке. а) Предпошлем изучению поведения интегральных кривых уравнения $y' = f(x, y)$ некоторые простые замечания [1]).

Пусть функция $f(x, y)$ определена на некотором множестве I точек (x, y) плоскости x, y. Пусть, далее, точки кривой $y = \varphi(x)$ принадлежат I, когда x изменяется в промежутке (a, b), $-\infty < a < x < b < +\infty$, причем функция $\varphi(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)),$$

и при $a < x < b$ выполняется неравенство $|f(x, y)| \leqslant M$. Докажем, что при этих предположениях *существуют конечные пределы*

$$A = \lim_{x \to a+0} \varphi(x), \qquad B = \lim_{x \to b-0} \varphi(x). \tag{1}$$

В самом деле, для любых двух точек x' и x'', лежащих в промежутке (a, b), найдется лежащая в промежутке (x', x'') точка ξ, такая, что

$$\varphi(x'') - \varphi(x') = (x'' - x')\varphi'(\xi) = (x'' - x') f[\xi, \varphi(\xi)].$$

[1]) Относительно изучаемого в п. 1—5 материала см. Камке [1], стр. 73—81.

Поэтому $|\varphi(x'')-\varphi(x')|\leqslant M(x''-x')$, и наше утверждение следует из необходимого и достаточного признака сходимости Коши.

б) *Пусть множество I открыто и связно* (т. е. любая точка этого множества является внутренней и для любых двух точек P' и P'' этого множества найдется соединяющая их ломаная, все точки которой лежат в I). *Обозначим через FI границу этого множества и предположим, что функция $f(x, y)$ определена и ограничена в $I+FI$ и непрерывна в каждой точке из $I+FI$.*

Пусть график функции $y=\varphi(x)$ принадлежит I, когда x изменяется в *конечном промежутке* (a, b), $a<x<b$, и функция $y=\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению

$$y'=f(x, y).$$

Тогда в силу „а" существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a+0}\varphi(x)$, $\lim\limits_{x\to b-0}\varphi(x)$. Если положить

$$\varphi(a)=\lim_{x\to a+0}\varphi(x), \qquad \varphi(b)=\lim_{x\to b-0}\varphi(x),$$

то функция $\varphi(x)$ будет определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$.

Покажем, что существуют также и пределы

$$\lim_{h\to+0}[\varphi(a+h)-\varphi(a)]/h, \qquad \lim_{h\to+0}[\varphi(b-h)-\varphi(b)]/-h,$$

т. е. производные $\varphi'(a+0)$, $\varphi'(b-0)$.

Точки $[a, \varphi(a)]$, $[b, \varphi(b)]$ принадлежат множеству $I+FI$. Следовательно, $f(x, \varphi(x))$ является непрерывной функцией от x на отрезке $[a, b]$. Если точка c лежит в промежутке (a, b), то при $a<x<b$ имеем

$$\varphi(x)=\varphi(c)+\int_c^x f[x, \varphi(x)]\,dx.$$

В силу непрерывности $\varphi(x)$ эта формула верна и при $x=a$, $x=b$, откуда и вытекает существование $\varphi'(a+0)$, $\varphi'(b-0)$.

3. Область существования интегральной кривой. а) Пусть R — прямоугольник, стороны которого параллельны осям координат и заданы уравнениями

$$x=\alpha,\ x=\beta;\ y=\gamma,\ y=\delta,\ [0<\beta-\alpha,\ 0<\delta-\gamma].$$

Пусть, далее, *функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике R и на его контуре.* Тогда существует такое число M, что для любой точки (x, y) из R имеем $|f(x, y)|\leqslant M$.

Пусть точка (x^0, y^0) лежит внутри R, а $y=\varphi(x)$ — интегральная кривая уравнения

$$y'=f(x, y), \tag{2}$$

проходящая через (x^0, y^0) и определенная в *промежутке* (a, b) [1]. Докажем, что *можно найти решение* $y=\psi(x)$ *уравнения* (2), *определенное на отрезке, содержащем промежуток* (a, b), *совпадающее на промежутке* (a, b) *с* $\varphi(x)$ *и такое, что концы графика этого решения лежат на границе прямоугольника* R.

Рассмотрим для этого прямоугольник R', стороны которого заданы уравнениями

$$\alpha-\rho\leqslant x\leqslant\beta+\rho,\ \gamma-\rho\leqslant y\leqslant\delta+\rho,\ \rho>0,$$

и определим функцию $f(x, y)$ в точках (x, y) из $R'-R$, полагая $f(x, y)=f(x', y')$, где (x', y') — точка границы прямоугольника R, находящаяся на наименьшем расстоянии от (x, y). Функция $f(x, y)$ будет тогда непрерывна в R', причем в R' сохраняется неравенство $|f(x, y)|\leqslant M$.

Положим $\delta'=\min(\rho, \rho/M)$ [2] и заметим, что по теореме, доказанной в гл. I, § 6, п. 2, существует интегральная кривая $y=y(x)$ уравнения (2), проходящая через точку (x^0, y^0) прямоугольника R и определенная на отрезке $[x^0-\delta', x^0+\delta']$.

Как указывалось в п. 2, „б“, интегральную кривую Γ: $y=\varphi(x)$, заданную в промежутке (a, b) из $[\alpha, \beta]$, можно продолжить на отрезок $[a, b]$. Если конец $(b, \varphi(b))$ продолженной таким образом кривой Γ лежит *вне* R, то мы берем часть кривой Γ, абсцисса правого конца которой является наибольшей из абсцисс $\bar{x}$, обладающих тем свойством, что при изменении x на отрезке $[x^0, \bar{x}]$ кривая Γ остается в R. Если же конец $(b, \varphi(b))$ лежит *внутри* R, то из точки $(b, \varphi(b))$ выходит интегральная кривая Γ_1: $y=\varphi_1(x)$, определенная на отрезке $[b, b+\delta']$ и касающаяся кривой Γ в точке $(b, \varphi(b))$. Если правый конец $[b+\delta', \varphi_1(b+\delta')]$ кривой Γ_1 лежит на границе прямоугольника R, то наше утверждение доказано; если он лежит вне прямоугольника R, то берем часть кривой Γ_1, выходящую из точки $[b, \varphi(b)]$, которая целиком лежит в R, причем правый конец этой части лежит на границе R; наконец, если $[b+\delta', \varphi_1(b+\delta')]$ лежит внутри R, то строим интегральную кривую Γ_2, определенную на отрезке $[b+\delta', b+2\delta']$ и касающуюся кривой Γ_1 в точке $[b+\delta', \varphi_1(b+\delta')]$. Продолжая такой процесс, мы через конечное число шагов придем к кривой Γ_p, правый конец которой лежит вне R или на границе R. Аналогично строятся кривые слева от левого конца кривой Γ. Итак, мы построили интегральную кривую уравнения (2) $\Gamma_{-q}+\Gamma_{-q+1}+\ldots+\Gamma_{-1}+\Gamma+\Gamma_1+\ldots+\Gamma_p$, частью которой является кривая Γ и концы которой лежат вне R или на границе R. Отсюда и следует существование интегральной кривой с требуемыми свойствами.

---

[1] Предполагается, что $\alpha\leqslant a<b\leqslant\beta$. — *Прим. ред.*

[2] Как уже указывалось в гл. I, § 3, п. 4, „в“, если $M=0$, то следует положить $\delta'=\rho$.

б) *Пусть функция* $f(x, y)$ *непрерывна в квадрате* Q,

$$Q\colon \alpha - a \leqslant x \leqslant \alpha + a,\ \beta - a \leqslant y \leqslant \beta + a,$$

и $|f(x, y)| < L$ *в* Q, *и пусть* $\delta = \min(a/2, a/2L)$. *Рассмотрим квадрат* Q',

$$Q'\colon \alpha - a/2 \leqslant x \leqslant \alpha + a/2,\ \beta - a/2 \leqslant y \leqslant \beta + a/2,$$

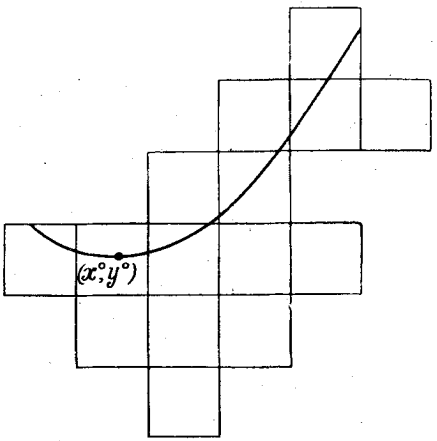
и докажем, что если интегральная кривая $y = \varphi(x)$ *уравнения* $y' = f(x, y)$ *проходит через точку* $(\bar{x}, \bar{y})$ *квадрата* Q', *то либо эта кривая имеет точки с абсциссой не меньшей, чем* $\bar{x} + \delta$ *(не превосходящей* $\bar{x} - \delta$), *либо ее можно продолжить до интегральной кривой этого уравнения*[1], *имеющей точки с абсциссой* $\bar{x} + \delta$ $(\bar{x} - \delta)$.

Обозначим через Q'' квадрат с центром в точке $(\bar{x}, \bar{y})$, стороны которого параллельны осям координат и имеют длину 2δ. В силу доказанного в „а“ мы можем считать, что интегральная кривая $y = \varphi(x)$ пересекает границы квадрата Q'' в некоторой точке $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$. Тогда

$$\bar{y}_1 = \bar{y} + \int_{\bar{x}}^{\bar{x}_1} f[x, \varphi(x)]\,dx,$$

$$|\bar{y}_1 - \bar{y}| < L|\bar{x}_1 - \bar{x}| \leqslant La/2L = a/2 \leqslant \delta,\ |\bar{y}_1 - \bar{y}| < \delta,$$

и потому $\bar{x}_1 = \bar{x} + \delta$.



Фиг. 5.

в) Обозначим через Q множество точек, принадлежащих конечному числу равных, не налегающих друг на друга квадратов, стороны которых параллельны осям координат, причем любые два квадрата либо не пересекаются, либо имеют общую вершину, либо общую сторону и для любого квадрата найдется другой квадрат, имеющий с ним общую сторону (фиг. 5). Докажем, что для Q сохраняет силу доказанное в „а“ утверждение, т. е. что *если функция* $f(x, y)$ *непрерывна в* Q, *а* (x^0, y^0) — *некоторая точка, лежащая внутри* Q, *то*

[1]) Говоря *о продолжении интегральной кривой*, мы считаем, что получающаяся кривая на всем своем протяжении является интегральной кривой данного уравнения.

интегральная кривая Г: $y = \varphi(x)$ *уравнения* $y' = f(x, y)$, *проходящая через* (x^0, y^0), *является частью интегральной кривой* $y = \psi(x)$, *концы которой лежат на границе* Q.

В силу п. 2, „а", мы можем считать, что интегральная кривая Г определена на отрезке $[a, b]$, таком, что $a < x^0 < b$. Если конец $[b, \varphi(b)]$ этой кривой не лежит на границе Q, то мы можем считать, что он лежит внутри одного из квадратов q_1, образующих множество Q, причем границы q_1, параллельные оси ординат, имеют уравнения $x = \alpha$, $x = \alpha + \rho$. Рассмотрим прямоугольник R, образованный всеми квадратами из Q, стороны которых, параллельные оси ординат, имеют абсциссы $x = \alpha$, $x = \alpha + \rho$ (одним из этих квадратов является q_1). В силу ранее доказанного мы можем продолжить интегральную кривую Г до пересечения с границей прямоугольника R. Если правый конец продолженной кривой лежит на одной из сторон R, параллельных оси абсцисс, или является лежащей на границе R вершиной одного из квадратов, принадлежащих Q, то наша теорема доказана. Если же правый конец продолженной кривой лежит на прямой $x = \alpha + \rho$, то он либо лежит внутри общей стороны двух квадратов q_2 и q_3, из которых один, скажем q_2, принадлежит полосе, ограниченной прямыми $x = \alpha$, $x = \alpha + \rho$, а другой q_3 — полосе, ограниченной прямыми $x = \alpha + \rho$, $x = \alpha + 2\rho$, либо является вершиной одного из квадратов, принадлежащих Q, и лежит внутри Q.

В первом случае мы, рассматривая прямоугольник $q_2 + q_3$, можем, согласно „а", продолжить кривую Г внутрь квадрата q_3. Во втором случае, по тем же соображениям, мы можем продолжить Г в полосу, ограниченную прямыми $x = \alpha + \rho$, $x = \alpha + 2\rho$, рассматривая квадрат, образованный четырьмя квадратами из Q, прилегающими к рассматриваемой вершине. Так как Q состоит из конечного числа полос, стороны которых параллельны оси ординат, то через конечное число шагов мы получим продолжение кривой Г, концы которого принадлежат границе Q.

г) *Пусть* I — *открытое множество и* Q — *лежащее в* I *множество, состоящее из конечного числа равных квадратов, расположенных так, как это было описано в* „в". *Пусть функция* $f(x, y)$ *непрерывна в* I, *а* Г: $y = \varphi(x)$ *является интегральной кривой уравнения* $y' = f(x, y)$, *проходящей через точку* (x^0, y^0), *лежащую внутри* Q. В силу „в" кривую Г можно продолжить вправо и влево таким образом, что концы продолженной кривой лежат на границе Q. Но эти концы лежат внутри I, и, следовательно, можно продолжить полученную кривую вправо и влево, получив таким образом точки этой кривой, лежащие вне Q. Поэтому при сделанных выше предположениях *любую интегральную кривую, проходящую через внутреннюю точку* (x^0, y^0) *множества* Q, *можно продолжить вправо и влево таким образом, что получатся точки, лежащие вне* Q.

д) *Пусть множество* I *точек плоскости* x, y *открыто и связно, а функция* $f(x, y)$ *непрерывна в* I.

Для любой точки (x^0, y^0) *из* I *существует по меньшей мере одна кривая* Γ *с уравнением* $y=\varphi(x)$, *которая проходит через точку* (x^0, y^0), *определена на некотором отрезке* $[x^0-\delta, x^0+\delta]$ *и является интегральной кривой уравнения*

$$y'=f(x, y).$$

Докажем, что кривая Γ *является частью интегральной кривой* $\Gamma_1: y=\Phi(x)$, *которая определена в промежутке* (a, b), *содержащем отрезок* $[x^0-\delta, x^0+\delta]$, *где*

1) *или* $b=+\infty$ $(a=-\infty)$;

2) *или* b *конечно* (a *конечно*) *и*

$$\overline{\lim_{x\to b-0}}\,|\Phi(x)|=+\infty, \quad (\overline{\lim_{x\to a+0}}\,|\Phi(x)|=+\infty);$$

3) *или* b *конечно и* $\overline{\lim\limits_{x\to b-0}}\,|\Phi(x)|=\beta$ (a *конечно и* $\overline{\lim\limits_{x\to a+0}}\,|\Phi(x)|=\alpha$), *причем для любого* $\varepsilon>0$ *и любого положительного числа* τ *существуют точки кривой* Γ_1, *находящиеся от границы множества* I *на расстоянии меньшем, чем* ε, *абсциссы которых больше, чем* $b-\tau$ (*меньше, чем* $a+\tau$).

Рассмотрим для каждого целого положительного числа m множество Q_m, состоящее из квадратов, лежащих в пересечении множества I с кругом, центр которого лежит в начале координат, а радиус равен m $(x^2+y^2\leqslant m^2)$, причем стороны этих квадратов параллельны осям координат и равны $1/2^m$, а координаты точек квадратов удовлетворяют неравенствам

$$k2^{-m}\leqslant x\leqslant(k+1)2^{-m}, \quad l2^{-m}\leqslant y\leqslant(l+1)2^{-m}$$
$$(k, l=0, \pm1, \pm2, \ldots).$$

Последовательность множеств $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m, \ldots$ обладает тем свойством, что при $m_1<m_2$ множество Q_{m_1} лежит в Q_{m_2}.

Пусть целое число N настолько велико, что точка (x^0, y^0) принадлежит Q_N. Если кривая Γ целиком содержится в Q_N, то в силу „в“ мы можем считать, что ее концы лежат на границе множества Q_N. В силу „г“ можно продолжить интегральную кривую Γ как направо, так и налево таким образом, что получится кривая Γ_1, не лежащая целиком ни в одном из множеств Q_{N+p}, каково бы ни было p. Отсюда следует, что если Γ_1 не определена в $(x^0+\delta, +\infty)$, то существует такое число b, что для любого $\tau>0$ на отрезке $[x^0-\delta, b-\tau]$ определена часть кривой Γ_1, или продолжение этой кривой. Если уравнение кривой Γ_1 имеет вид $y=\Phi(x)$, то возможны два случая: либо $\overline{\lim\limits_{x\to b-0}}\,|\Phi(x)|=+\infty$, либо $\overline{\lim\limits_{x\to b-0}}\,|\Phi(x)|=B<\infty$. Для доказательства теоремы достаточно рассмотреть второй случай.

Пусть

$$\underline{\lim_{x\to b-0}}\,\Phi(x)=B_1, \qquad \overline{\lim_{x\to b-0}}\,\Phi(x)=B_2.$$

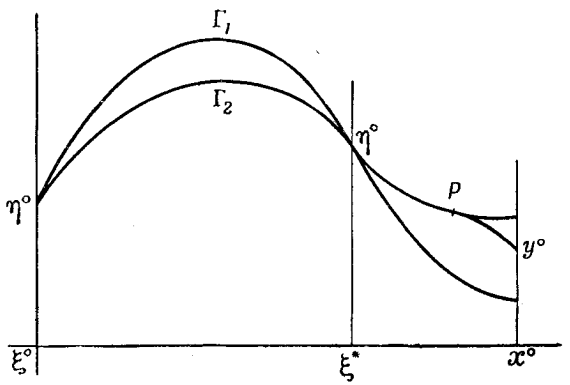
Тогда точки $P_1 \equiv (b, B_1)$, $P_2 = (b, B_2)$ (возможно, совпадающие) являются предельными точками для I. В самом деле, каково бы ни было $\tau > 0$, точка $[b - \tau, \Phi(b - \tau)]$ принадлежит I.

Очевидно, что P_1 и P_2 не могут быть внутренними точками для I. В самом деле, если бы, например, точка P_1 лежала внутри I, то можно было бы построить лежащий в Q квадрат с центром в точке P_1 и со сторонами, параллельными осям координат. Как и в „б" можно было бы найти такой концентричный с Q квадрат Q' со сторонами, параллельными осям координат, и такое число $\delta' > 0$, что любую интегральную кривую, проходящую через точку $(\bar{x}, \bar{y})$ из Q', можно было бы определить на отрезке $[\bar{x}, \bar{x} + \delta']$. Но тогда на этой интегральной кривой были бы точки с абсциссой большей, чем b, вопреки предположению.

Отсюда следует, что точки P_1 и P_2 принадлежат границе множества I, и наша теорема доказана.

е) Из доказанной в „д" теоремы следует, что *если функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области I, то любую интегральную кривую уравнения $y' = f(x, y)$, концы которой не лежат на границе множества I, можно продолжить вплоть до границы I.*

4. Об интегральных кривых, выходящих из некоторой точки. Этот пункт, равно как и п. 5, посвящен изучению интегральных кривых, выходящих из некоторой точки.



Фиг. 6.

Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна на открытом и связном множестве I и пусть из некоторой точки (ξ^0, η^0) выходят по крайней мере две интегральные кривые, Γ_1 и Γ_2, уравнения $y' = f(x, y)$:

$$\Gamma_1 : y = \varphi(x); \qquad \Gamma_2 : y = \psi(x),$$

определенные на отрезке $[\xi^0, b]$ (см. фиг. 6).

Так как функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют заданному уравнению, то кривые Γ_1 и Γ_2 *касаются* в общих точках. Рассмотрим множество S, состоящее из точек (x, y), координаты x и y которых удовлетворяют неравенствам

$$\xi^0 \leqslant x \leqslant b; \ \min\{\varphi(x), \psi(x)\} \leqslant y \leqslant \max\{\varphi(x), \psi(x)\}.$$

Докажем, что если *точка* (x^0, y^0) *принадлежит* S *и не совпадает с точкой* (ξ^0, η^0), *то существует по крайней мере одна интегральная кривая данного уравнения, соединяющая точки* (ξ^0, η^0) *и* (x^0, y^0).

Если $\varphi(x^0) = \psi(x^0)$, то теорема очевидна. Предположим, например, что $\varphi(x^0) < \psi(x^0)$. Обозначим через ξ^* верхнюю грань абсцисс ξ общих точек кривых Γ_1 и Γ_2, для которых $\xi^0 < \xi < x^0$. Тогда $\varphi(\xi^*) = \psi(\xi^*)$ и

$$\varphi'(\xi^*) = f[\xi^*, \varphi(\xi^*)] = f[\xi^*, \psi(\xi^*)] = \psi'(\xi^*).$$

Далее, $\xi^* < x^0$ и при $\xi^* < x \leqslant x^0$ имеем $\varphi(x) \neq \psi(x)$, а поэтому $\varphi(x) < \psi(x)$. Обозначим через C множество, ограниченное кривыми $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$, $(\xi^* \leqslant x \leqslant x^0)$, и прямой $x = x^0$. Функция $f(x, y)$ непрерывна и ограничена на этом множестве.

Интегральная кривая Γ_3, выходящая из точки (x^0, y^0) влево, либо касается кривой Γ_1 в точке P, абсцисса которой заключена между ξ^* и x^0, либо касается кривой Γ_2 в точке, абсцисса которой заключена в тех же пределах, либо касается кривых Γ_1 и Γ_2 в точке $[\xi^*, \varphi(\xi^*)]$. В первом из этих случаев искомая интегральная кривая состоит из части кривой Γ_1, соединяющей точку (ξ^0, η^0) с P, и части кривой Γ_3, концами которой являются точки P и (x^0, y^0). Аналогично строится искомая кривая и в остальных двух случаях.

5. Верхнее и нижнее решения. Точки и связки (пучки) Пеано. а) Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна на открытом связном множестве I и пусть

$$\Gamma_1 : y = G(x), \qquad [\Gamma_2 : y = g(x)]$$

является интегральной кривой уравнения

$$y' = f(x, y), \tag{2}$$

концы которой лежат на границе FI множества I и которая проходит через точку (x^0, y^0). Если для любой другой интегральной кривой $y = \varphi(x)$ уравнения (2), проходящей через точку (x^0, y^0), выполняется неравенство

$$\varphi(x) \leqslant G(x), \qquad [g(x) \leqslant \varphi(x)],$$

то $G(x)$ ($g(x)$) *называется верхним* (*нижним*) *решением уравнения* (2) относительно точки (x^0, y^0) [1]).

б) Имеет место следующая теорема:

Если функция $f(x, y)$ непрерывна на открытом связном множестве I, то через любую точку (x^0, y^0) из I проходят верхнее и нижнее решения, причем эти решения приближаются к границе I в смысле, указанном в п. 3, „д".

Обозначим через Q лежащий в I квадрат, стороны которого параллельны осям координат и имеют длину $2a$. Так как функция $f(x, y)$ непрерывна в Q, то существует такое положительное число L, что $|f(x, y)| < L$. Как обычно, полагаем $\delta = \min(a, a/L)$. Пусть $y = \varphi(x)$ — интегральная кривая уравнения (2), проходящая через точку (x^0, y^0). Можно считать, что концы этой кривой лежат на границе квадрата Q. Но, рассуждая так же, как в п. 2, „б", получаем, что при $|x - x^0| \leqslant \delta$ имеем

$$|y(x) - y^0| = \left| \int_{x^0}^{x} f[x, \varphi(x)]\, dx \right| < L|x - x^0| < a,$$

а поэтому любая интегральная кривая уравнения (2), проходящая через точку (x^0, y^0), определена, во всяком случае, на отрезке $[x^0 - \delta, x^0 + \delta]$ и, следовательно, пересекается с любой прямой, параллельной оси ординат, абсцисса которой заключена между $x^0 - \delta$ и $x^0 + \delta$.

Для каждой точки x отрезка $[x^0 - \delta, x^0 + \delta]$ рассмотрим множество чисел, являющихся значениями в этой точке решений уравнения (2), проходящих через точку (x^0, y^0). Обозначим через $G(x)$ и $g(x)$ верхнюю и нижнюю грани этого множества и докажем, что для всех x из отрезка $[x^0 - \delta, x^0 + \delta]$ выполняются равенства

$$G'(x) = f(x, G(x)), \qquad g'(x) = f(x, g(x)).$$

Положим для любого целого положительного m

$$x_{m,k} = x^0 + \delta 2^{-m} k \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm 2^m).$$

Тогда для любых m и k существует интегральная кривая $y = \varphi_{m,k}(x)$, выходящая из (x^0, y^0), такая, что

$$0 \leqslant G(x_{m,k}) - \varphi_{m,k}(x_{m,k}) < \frac{1}{m}.$$

Определим в $[x^0 - \delta, x^0 + \delta]$ функцию $\varphi_m(x)$, положив

$$\varphi_m(x) = \max_{|k| \leqslant 2^m} \varphi_{m,k}(x).$$

---

[1]) Верхнее и нижнее решения впервые рассматривались Пеано в его работах [1], [2].

Тогда

$$0 \leqslant G(x_{m,k}) - \varphi_m(x_{m,k}) < \frac{1}{m} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm 2^m). \tag{3}$$

Функции $\varphi_m(x)$ определены на отрезке $[x^0 - \delta, x^0 + \delta]$ и удовлетворяют на нем дифференциальному уравнению

$$\varphi'_m(x) = f[x, \varphi_m(x)] \quad (m = 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

В самом деле, зададим некоторое значение x и пусть

$$\varphi_m(x) = \varphi_{mk_1}(x) = \ldots = \varphi_{mk_s}(x) > \varphi_{ml}(x) \quad \text{при} \quad l \neq k_1, k_2, \ldots, k_s,$$

а поэтому

$$\varphi'_{mk_1}(x) = \varphi'_{mk_2}(x) = \ldots = \varphi'_{mk_s}(x)\ ^{1)}. \tag{5}$$

Можно определить такой отрезок $[x - \rho, x + \rho]$, что для любой точки $x + h$ этого отрезка выполняются неравенства

$$\varphi_{mk_i}(x + h) > \varphi_{ml}(x + h) \quad (i = 1, 2, \ldots, s; \ l \neq k_1, k_2, \ldots, k_s),$$

и, следовательно, для $x + h$ имеем

$$\varphi_m(x + h) = \max\,[\varphi_{mk_1}(x + h), \varphi_{mk_2}(x + h), \ldots, \varphi_{mk_s}(x + h)].$$

Для любого h разностное отношение $[\varphi_m(x + h) - \varphi_m(x)]/h$ равно по крайней мере одному из разностных отношений

$$[\varphi_{mk_i}(x + h) - \varphi_{mk_i}(x)]/h \quad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

а в силу (5) имеем тогда $\varphi'_m(x) = \varphi'_{mk_i}(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$, откуда и вытекает равенство (4).

Так как $y^0 - a \leqslant \varphi_m(x) \leqslant y^0 + a$, то функции $\varphi_m(x)$ *равномерно ограничены в* $[x^0 - \delta, x^0 + \delta]$, а в силу (4) они *равностепенно непрерывны*.

Заметим, что

$$x_{m+r,\, 2^r k} = x^0 + \delta 2^{-(m+r)} 2^r k = x_{mk},$$

и поэтому, в силу неравенства (3),

$$0 \leqslant G(x_{mk}) - \varphi_{m+r}(x_{mk}) < \frac{1}{m + r}.$$

Устремляя r к бесконечности, убеждаемся, что существует $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n(x_{mk})$. Таким образом, последовательность функций $\{\varphi_n(x)\}$ сходится на множестве, всюду плотном в $[x^0 - \delta, x^0 + \delta]$. Как было показано в гл. I, § 6, п. 2, „г“, отсюда следует, что эта последовательность

---

[1]) Равенство (5) следует из того, что функции $\varphi_{mk_i}(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ удовлетворяют уравнению (2). — *Прим. ред.*

равномерно сходится к непрерывной функции $\overline{G}(x)$, причем в точках x_{mk} имеем

$$\overline{G}(x_{mk}) = G(x_{mk}), \tag{6}$$

а в остальных точках ξ из $[x^0 - \delta, x^0 + \delta]$ имеем $\overline{G}(\xi) \leqslant G(\xi)$.

Докажем от противного, что для всех точек ξ из $[x^0 - \delta, x^0 + \delta]$ имеем $\overline{G}(\xi) = G(\xi)$. Пусть в точке ξ имеет место неравенство $\overline{G}(\xi) < G(\xi)$ и пусть $y = \varphi(x)$ — решение уравнения (2), проходящее через точку (x^0, y^0), и такое, что

$$\overline{G}(\xi) < \varphi(\xi) < G(\xi)$$

(см. п. 4). В силу непрерывности функций $\overline{G}(x)$ и $\varphi(x)$ существует такое x_{mk}, что $\overline{G}(x_{mk}) < \varphi(x_{mk})$, но $\varphi(x_{mk}) \leqslant G(x_{mk})$, и поэтому $\overline{G}(x_{mk}) < G(x_{mk})$, вопреки равенству (6).

Таким образом, мы доказали, что последовательность $\{\varphi_m(x)\}$ равномерно сходится к функции $G(x)$ на отрезке $[x^0 - \delta, x^0 + \delta]$. Из (4) следует, что

$$\varphi_m(x) = \varphi_m(x^0) + \int_{x^0}^{x} f[x, \varphi_m(x)]\, dx.$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем, что

$$G(x) = G(x^0) + \int_{x^0}^{x} f[x, G(x)]\, dx,$$

откуда вытекает, что $G'(x) = f[x, G(x)]$. Таким образом, мы доказали *существование верхнего и нижнего решений среди решений уравнения* (2), *проходящих через точку* (x^0, y^0) *и определенных на отрезке* $[x^0 - \delta, x^0 + \delta]$ (рассуждения, аналогичные проведенным выше, можно провести и для отрезка $[x^0 - \delta, x^0]$).

Нам осталось показать, что верхнее решение можно продолжить вплоть до границы области I (в смысле, указанном в п. 3, „д"), причем продолженное решение также будет верхним решением.

Мы построили справа от x^0 верхнее решение на отрезке $[x^0, x^0 + \delta]$. Если точка $[x^0 + \delta, G(x^0 + \delta)]$ лежит внутри I, то рассмотрим верхнее решение $\Gamma_1 : y = G_1(x)$ уравнения (2), выходящее вправо из точки $[x^0 + \delta, G(x^0 + \delta)]$. Если $y = \gamma(x)$ является любым решением уравнения (2), выходящим из точки (x^0, y^0) и также определенным при $x > x^0 + \delta$, то для любого значения $\overline{x}$, для которого одновременно определены решения $G_1(x)$ и $\gamma(x)$, имеет место неравенство $\gamma(\overline{x}) \leqslant G_1(\overline{x})$. Это неравенство очевидно, если $\gamma(x^0 + \delta) = G_1(x^0 + \delta)$, если же $\gamma(x^0 + \delta) < G_1(x^0 + \delta)$, то доказательство проводится от противного. Предположим, что $\gamma(\overline{x}) > G_1(\overline{x})$, тогда найдется такое число ξ, заключенное между $x^0 + \delta$ и $\overline{x}$, что кривые Γ_1 и $y = \gamma(x)$

касаются в точке с абсциссой ξ; заменяя дугу кривой Γ_1, выходящую из точки $[\xi, G_1(\xi)]$, соответствующей дугой кривой $y=\gamma(x)$, получаем интегральную кривую уравнения (2), выходящую из точки $[x^0+\delta, G_1(x^0+\delta)]$, ордината которой в точке $[\bar{x}, \gamma(\bar{x})]$ больше ординаты точки $[\bar{x}, G_1(\bar{x})]$, вопреки тому, что $y=G_1(x)$ является верхним решением уравнения (2), выходящим вправо из точки $[x^0+\delta, G(x^0+\delta)]$.

Отсюда следует, что если правый конец графика решения $y=G(x)$ лежит внутри I, то это решение можно продолжить, причем продолженное решение также будет верхним решением среди всех решений, выходящих из точки (x^0, y^0). Но получающееся решение либо определено в промежутке $[x^0, +\infty)$, либо существует верхняя грань b чисел $x^0+\delta'$, для которых $G(x)$ имеет на отрезке $[x^0, x^0+\delta']$ указанное свойство. В первом случае теорема доказана. Во втором случае она доказана, если $\overline{\lim\limits_{x\to b-0}}\,|G(x)|=+\infty$. Осталось рассмотреть случай, когда $\overline{\lim\limits_{x\to b-0}}\,|G(x)|<+\infty$.

Если мы положим в этом случае

$$\underline{\lim_{x\to b-0}}\, G(x)=B_1, \qquad \overline{\lim_{x\to b-0}}\, G(x)=B_2 .$$

и примем во внимание результаты из п. 3, „б“ [1]), то получим, что точки (b, B_1), (b, B_2) (возможно, совпадающие) не могут лежать внутри I. Так как они являются для I предельными точками, то они лежат на границе I.

в) В каждой точке (x^0, y^0) можно рассматривать *верхнее и нижнее решения справа и верхнее и нижнее решения слева.*

Если как справа, так и слева верхнее и нижнее решения совпадают, то уравнение (2) обладает единственным решением, проходящим через точку (x^0, y^0). Следует заметить, однако, что совпадение верхнего и нижнего решений справа (слева) не влечет за собой совпадения этих решений слева (справа). Как говорят, в этом случае решения *раздваиваются* слева (справа).

Вообще, если с какой-либо стороны от точки (x^0, y^0) решения не совпадают, то говорят, что они образуют *пучок* (связку) Пеано.

Интегральные кривые из связки Пеано ограничены верхним и нижним решениями.

г) Заметим, что если в уравнении $y'=f(x, y)$ функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике $R: \alpha\leqslant x\leqslant \alpha+a$, $|y-\beta|\leqslant b$ и наибольшее значение $|f(x, y)|$ в R равно M, то верхнее и нижнее

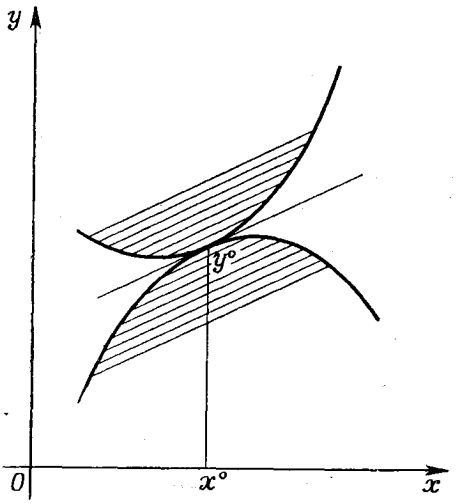
---

[1]) Согласно доказанному в п. 3, „б“, если верхнее решение проходит через некоторую точку Q' с абсциссой $\bar{x}$, то его можно продолжить вправо на отрезок $[\bar{x}, \bar{x}+\delta]$, где δ — некоторое фиксированное число, причем нетрудно видеть, что можно добиться, чтобы продолженное решение также было верхним решением.

решения уравнения $y' = f(x, y)$, выходящие из точки (α, β), *определены по крайней мере в* $[\alpha, \alpha + \delta)$, *где* $\delta = \min(a, b/M)$. В самом деле, если $\delta_1 = \min(a, b/M - \tau)$, где $\tau \geqslant 0$, то по доказанному в „а" эти решения существуют на отрезке $[\alpha, \alpha + \delta_1]$. Но так как $\lim\limits_{\tau \to 0} \delta_1 = \delta$, то из рассуждений, проведенных в п. 2, следует, что эти решения существуют и в $[\alpha, \alpha + \delta)$.

6. Области непрерывной зависимости верхних и нижних решений от координат начальной точки. а) В этом пункте мы рассмотрим вопрос о зависимости верхнего и нижнего решений от начальных данных (см. Монтель [1]). Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна на открытом и связном множестве I и пусть $y = G(x)$, $y = g(x)$ являются соответственно верхним и нижним решениями уравнения $y' = f(x, y)$, проходящими через точку (x^0, y^0).

Точка (x, y) из I принадлежит к *верхней* (нижней) *области* решения $y = G(x)$, $[y = g(x)]$, если имеет место неравенство $y > G(x)$ $[y < g(x)]$ (см. фиг. 7).



Фиг. 7.

б) Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике R,

$$R: |x - \alpha| \leqslant a, \quad |y - \beta| \leqslant b,$$

и пусть $y = G(x)$, $[y = g(x)]$ является верхним (нижним) решением уравнения

$$y' = f(x, y), \tag{2}$$

проходящим через точку (α, β). Рассмотрим *последовательность*

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n), \ldots$$

точек из R, *принадлежащих к верхней области решения* $y = G(x)$ (*к нижней области решения* $y = g(x)$) *и таких, что*

$$\lim_{n \to \infty} (x_n, y_n) = (\alpha, \beta), \quad [\lim_{n \to \infty} x_n = \alpha, \ \lim_{n \to \infty} y_n = \beta].$$

Пусть в R выполняется неравенство $|f(x, y)| \leqslant M$ и пусть $\delta = \min(a, b/4M)$. Рассмотрим прямоугольник R_1, определенный неравенствами

$$R_1: \ |x - \alpha| \leqslant \delta, \quad |y - \beta| \leqslant b/2.$$

Без потери общности можно считать, что точки (x_n, y_n) $(n=1, 2, \ldots)$ принадлежат R_1.

Если $y=G_n(x)$ $[y=g_n(x)]$ является верхним (нижним) решением уравнения (2), выходящим из точки (x_n, y_n),

$$G_n(x_n)=y_n \quad [g_n(x_n)=y_n],$$

то оно определено *по крайней мере на отрезке* $[\alpha-\delta, \alpha+\delta]$. Докажем, что *последовательность этих решений* $\{G_n(x)\}$, $[\{g_n(x)\}]$ *равномерно сходится на отрезке* $[\alpha-\delta, \alpha+\delta]$ *к функции* $G(x)$, $[g(x)]$[1]).

Пусть точка x лежит на $[\alpha-\delta, \alpha+\delta]$. Повторяя проведенные в п. 5, „б" рассуждения, касавшиеся продолжения верхнего решения, получаем

$$G_n(x) \geqslant G(x), \quad [\alpha-\delta \leqslant x \leqslant \alpha+\delta]. \tag{7}$$

С другой стороны, $|\beta-G_n(x)| \leqslant b$, $|G_n'(x)|=|f(x, G_n(x))| \leqslant M$, и поэтому функции $G_n(x)$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны на отрезке $[\alpha-\delta, \alpha+\delta]$. По теореме Асколи (гл. I, § 6, п. 2, „в") можно извлечь *равномерно* сходящуюся к некоторой функции $\overline{G}(x)$ подпоследовательность

$$G_{\lambda_1}(x), G_{\lambda_2}(x), \ldots, G_{\lambda_n}(x), \ldots \quad (\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_n<\ldots),$$

причем (см. п. 5, „б")

$$\overline{G}'(x)=f(x, \overline{G}(x)).$$

В силу (7)

$$\overline{G}(x) \geqslant G(x). \tag{8}$$

Очевидно, что

$$|\overline{G}(\alpha)-\beta| \leqslant |\overline{G}(\alpha)-\overline{G}(x_{\lambda_n})|+|\overline{G}(x_{\lambda_n})-G_{\lambda_n}(x_{\lambda_n})|+|y_{\lambda_n}-\beta|,$$

и так как

$$\lim_{\lambda_n\to\infty}|\overline{G}(\alpha)-\overline{G}(x_{\lambda_n})|=0, \quad \lim_{\lambda_n\to\infty}|\overline{G}(x_{\lambda_n})-G_{\lambda_n}(x_{\lambda_n})|=0,$$

$$\lim_{\lambda_n\to\infty}|y_{\lambda_n}-\beta|=0,$$

то $\overline{G}(\alpha)=\beta$. Следовательно, $y=\overline{G}(x)$ является решением уравнения (2), проходящим через точку (α, β). Так как $G(x)$ является верхним решением относительно точки (α, β), то из неравенства (8) следует, что $\overline{G}(x)=G(x)$.

Докажем теперь, что для любой точки ξ из $[\alpha-\delta, \alpha+\delta]$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} G_n(\xi)=G(\xi).$$

---

[1]) См. Монтель [1], стр. 207. Если снять ограничение, что точки (x_n, y_n) принадлежат к верхней области для $G(x)$, то заключение теоремы может не иметь места. См. Тонелли [2].

В самом деле, если бы это соотношение не имело места, то множество чисел $\{G_n(\xi)\}$ имело бы в силу (7) по крайней мере одну предельную точку, бо́льшую, чем $G(\xi)$. Следовательно, можно было бы извлечь из него последовательность чисел $G_{\mu_1}(\xi), \ldots, G_{\mu_p}(\xi), \ldots$, такую, что $|G_{\mu_p}(\xi) - G(\xi)| > \varepsilon > 0$.

Но это невозможно, так как в силу доказанного выше из последовательности $G_{\mu_1}(x), \ldots, G_{\mu_p}(x), \ldots$ можно извлечь подпоследовательность, которая сходится к функции $G(x)$ на отрезке $[\alpha - \delta, \alpha + \delta]$ и, в частности, в точке ξ.

Заметим, наконец, что в силу равномерной ограниченности и равностепенной непрерывности функций $G_n(x)$ на отрезке $[\alpha - \delta, \alpha + \delta]$ последовательность $\{G_n(x)\}$ равномерно сходится к $G(x)$ на этом отрезке (см. гл. I, § 6, п. 2, „г").

в) Из доказанной теоремы вытекает важное следствие.

Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике R,

$$R: |x - \alpha| \leqslant a, \quad |y - \beta| \leqslant b,$$

и пусть через любую внутреннюю точку (x^0, y^0) этого прямоугольника проходит *единственное* решение уравнения $y' = f(x, y)$. Обозначим это решение $y = \varphi(x; x^0, y^0)$ и докажем, что $\varphi(x; x^0, y^0)$ *является непрерывной функцией от* (x^0, y^0).

Существует прямоугольник R' с центром в точке (x^0, y^0), со сторонами, параллельными осям координат, через любую точку (ξ, η) которого проходит интегральная кривая уравнения $y' = f(x, y)$, определенная на отрезке $[x^0 - \delta, x^0 + \delta]$.

Пусть $\sigma > 0$ — любое положительное число. Из доказанной выше теоремы и из того, что два решения, проходящие через две различные точки из R' с одинаковыми абсциссами, не могут иметь общих точек в R, вытекает существование таких двух чисел y_n, $\bar{y}_n$, что $y^0 + \delta > y_n > y^0 > \bar{y}_n > y^0 - \delta$, и для любой точки x отрезка $[x^0 - \delta, x^0 + \delta]$ выполняются неравенства

$$0 < \varphi(x; x^0, y_n) - \varphi(x; x^0, y^0) < \sigma,$$

$$0 < \varphi(x; x^0, y^0) - \varphi(x; x^0, \bar{y}_n) < \sigma.$$

Если (ξ, η) — любая точка круга C с центром в (x^0, y^0), который лежит внутри пересечения прямоугольника R' с областью, ограниченной кривыми

$$y = \varphi(x; x^0, y_n); \quad y = \varphi(x; x^0, \bar{y}_n),$$

то

$$\varphi(x; x^0, y_n) > \varphi(x; \xi, \eta) > \varphi(x; x^0, \bar{y}_n).$$

Поэтому для рассматриваемой точки (ξ, η) и для любой точки x из $[x^0-\delta, x^0+\delta]$ имеем

$$\varphi(x; x^0, y^0)+\sigma > \varphi(x; \xi, \eta) > \varphi(x; x^0, y^0)-\sigma,$$

$$|\varphi(x; \xi, \eta)-\varphi(x; x^0, y^0)| < \sigma\,^{1)}.$$

Наше утверждение доказано.

Доказанное утверждение имеет тот же характер, что и утверждение, доказанное в гл. I, § 6, п. 3, „г", и является обобщением теоремы о непрерывной зависимости решений от начальных условий, доказанной нами в гл. I, § 5, п. 1 в предположении, что функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица по y.

§ 2. Теоремы сравнения и теоремы единственности для уравнения $y'=f(x, y)$

1. Теорема о переходе к пределу для решений дифференциальных уравнений $y'=f_n(x, y)$. Пусть $\{f_n(x, y)\}$ — последовательность функций, определенных на *замкнутом ограниченном* множестве I, и пусть каждое из уравнений

$$y'=f_n(x, y) \quad (n=1, 2, \ldots)$$

имеет, по крайней мере, одну интегральную кривую $y=\varphi_n(x)$, определенную на отрезке $[\alpha-\delta, \alpha+\delta]$ и проходящую через точку (α, β), то есть пусть

$$\varphi_n'(x)=f_n[x, \varphi_n(x)] \quad [\alpha-\delta \leqslant x \leqslant \alpha+\delta, \ \varphi_n(\alpha)=\beta].$$

Докажем, что если *последовательность функций* $\{f_n(x, y)\}$ *равномерно сходится в* I *к непрерывной функции* $f(x, y)$, *то из последовательности* $\{\varphi_n(x)\}$ *можно извлечь подпоследовательность, равномерно сходящуюся на отрезке* $[\alpha-\delta, \alpha+\delta]$ *к функции* $\varphi(x)$, *удовлетворяющей уравнению*

$$\varphi'(x)=f[x, \varphi(x)].$$

Пусть наибольшее значение $|f(x, y)|$ в I равно $M<L$. Найдется такое n_0, что при $n>n_0$ в I выполняется неравенство $|f_n(x, y)-f(x, y)|<L-M$. Поэтому, при $n>n_0$, $|f_n(x, y)|<L$ и без потери общности можно считать, что

$$|f_n(x, y)|<L \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Так как $|\varphi_n'(x)|=|f_n(x, \varphi_n(x))|<L$, то функции последовательности $\{\varphi_n(x)\}$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны.

---

[1]) Относительно прямого доказательства этой теоремы при предположении о единственности решения см. Пини [1].

По теореме Асколи (гл. I, § 6, п. 2, „в") из этой последовательности можно извлечь подпоследовательность

$$\varphi_{\lambda_1}(x),\ \varphi_{\lambda_2}(x),\ \ldots,\ \varphi_{\lambda_p}(x),\ \ldots\ (\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_n<\ldots),$$

равномерно сходящуюся на отрезке $[\alpha-\delta,\ \alpha+\delta]$ к некоторой функции $\varphi(x)$.

Зададим некоторое $\varepsilon>0$. Тогда можно найти такое N_0, что при $n>N_0$ в I выполняется неравенство

$$|f(x,\ y)-f_n(x,\ y)|<\varepsilon\quad(n>N_0).$$

В силу непрерывности функции $f(x, y)$ в I, можно найти такое положительное число ρ, что при $|y''-y'|<\rho$ для всех значений x выполняется неравенство

$$|f(x,\ y')-f(x,\ y'')|<\varepsilon.$$

Можно найти такое N_1, что при $\lambda_p>N_1$ на отрезке $[\alpha-\delta,\ \alpha+\delta]$ справедливо неравенство

$$|\varphi_{\lambda_p}(x)-\varphi(x)|<\rho\quad(\lambda_p>N_1),$$

и потому при $\lambda_p>N_0,\ N_1$ имеем

$$|f(x,\ \varphi_{\lambda_p}(x))-f_{\lambda_p}(x,\ \varphi_{\lambda_p}(x))|<\varepsilon,$$

$$|f(x,\ \varphi(x))-f(x,\ \varphi_{\lambda_p}(x))|<\varepsilon,$$

а, следовательно,

$$|f(x,\ \varphi(x))-f_{\lambda_p}(x,\ \varphi_{\lambda_p}(x))|<2\varepsilon,$$

$$|f(x,\ \varphi(x))-\varphi'_{\lambda_p}(x)|<2\varepsilon.$$

Таким образом, последовательность $\{\varphi'_{\lambda_p}(x)\}$ равномерно сходится на отрезке $[\alpha-\delta,\ \alpha+\delta]$ к функции $f(x,\ \varphi(x))$. Но по известной теореме о дифференцировании рядов, из равномерной сходимости последовательности $\{\varphi'_{\lambda_p}(x)\}$ вытекает, что функция $\varphi(x)$ дифференцируема, и что

$$\lim_{p\to\infty}\varphi'_{\lambda_p}(x)=\varphi'(x),$$

а поэтому $\varphi'(x)=f(x,\ \varphi(x))$.

С другой стороны, из условия $\varphi_{\lambda_p}(\alpha)=\beta$ вытекает, что $\varphi(\alpha)=\beta$. Теорема доказана.

2. Первая теорема сравнения для дифференциальных уравнений первого порядка. а) Мы можем теперь установить первую теорему сравнения для дифференциальных уравнений первого порядка.

Пусть функции $f(x, y)$, $F(x, y)$ *определены в прямоугольнике* R,

$$R: \quad \alpha \leqslant x \leqslant \alpha + a, \quad |y - \beta| \leqslant b, \tag{1}$$

и удовлетворяют там неравенству

$$f(x, y) < F(x, y). \tag{2}$$

Если функции $y(x)$ *и* $Y(x)$ *непрерывны и дифференцируемы на отрезке* $[\alpha, \alpha + \delta]$ $(\delta > 0, \delta \leqslant a)$ *и удовлетворяют на этом отрезке уравнениям*

$$y'(x) = f[x, y(x)], \quad Y'(x) = F[x, Y(x)]$$

и начальным условиям

$$y(\alpha) = \beta, \quad Y(\alpha) = \beta,$$

то $y(x) < Y(x)$ *при* $\alpha < x \leqslant \alpha + \delta$ [1]).

В самом деле, рассмотрим функцию $z(x) = Y(x) - y(x)$. Так как

$$z(\alpha) = 0, \quad z'(\alpha) = Y'(\alpha) - y'(\alpha) = F(\alpha, \beta) - f(\alpha, \beta) > 0,$$

то в некоторой окрестности точки $x = \alpha$ эта функция возрастает и справа от точки $x = \alpha$ положительна. Так как функция $z(x)$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \alpha + \delta]$, то, если бы неравенство $z(x) > 0$ выполнялось не во всех точках $x > \alpha$, нашлась бы такая точка α_1, $\alpha < \alpha_1 \leqslant \alpha + \delta$, что $z(\alpha_1) = 0$, в то время как $z(x) > 0$ при $\alpha < x < \alpha_1$. Но тогда в точке α_1 мы имели бы

$$z'(\alpha_1) = Y'(\alpha_1) - y'(\alpha_1) = F[\alpha_1, Y(\alpha_1)] - f[\alpha_1, y(\alpha_1)] \leqslant 0,$$

что невозможно, так как $Y(\alpha_1) = y(\alpha_1)$ и, по предположению,

$$F[\alpha_1, Y(\alpha_1)] - f[\alpha_1, y(\alpha_1)] > 0.$$

б) Из доказанной теоремы вытекает следствие:

Пусть функции $f(x, y)$, $F(x, y)$ *непрерывны в прямоугольнике* R, *определенном неравенствами* (1), *удовлетворяют неравенству* (2) *и пусть в* R

$$|f(x, y)| \leqslant M, \quad |F(x, y)| \leqslant M.$$

Положим $\delta = \min(a, b/M)$ *и обозначим через* G_F, g_F, $[G_f, g_f]$ *соответственно верхнее и нижнее решения в* $[\alpha, \alpha + \delta]$ *уравнения*

$$Y' = F(x, Y) \quad [y' = f(x, y)],$$

---

[1]) Аналогично, *если функции* $f(x, y)$, $F(x, y)$ *определены в прямоугольнике* R: $\alpha - a \leqslant x \leqslant \alpha$, $|\beta - y| \leqslant b$ *и удовлетворяют там неравенству* $f(x, y) < F(x, y)$, *а функции* $y(x)$ *и* $Y(x)$ *определены на отрезке* $[\alpha - \delta, \alpha]$ $(\delta > 0, \delta \leqslant a)$ *и удовлетворяют уравнениям* $y'(x) = f[x, y(x)]$, $Y'(x) = F[x, Y(x)]$ *и начальным условиям* $y(\alpha) = Y(\alpha) = \beta$, *то* $y(x) > Y(x)$. Доказательство аналогично проведенному в тексте.

проходящие через точку (α, β). *Тогда*

$$g_f(x) \leqslant G_f(x) < g_F(x) \leqslant G_F(x).$$

в) Из доказанной теоремы вытекает также следующее утверждение.

Пусть $\{f_n(x, y)\}$ — *последовательность непрерывных функций, определенных в прямоугольнике* R,

$$R: \quad \alpha \leqslant x \leqslant \alpha + a, \quad |y-\beta| \leqslant b,$$

и пусть

$$f_n(x, y) > f(x, y) \qquad (n=1, 2, \ldots),$$

где $f(x, y)$ — *непрерывная в* R *функция, причем*

$$|f(x, y)| \leqslant M; \quad |f_n(x, y)| \leqslant M \qquad (n=1, 2, \ldots),$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x, y) = f(x, y).$$

Если $\delta = \min(a, b/M)$, то уравнение $y'=f_n(x, y)$ обладает на отрезке $[\alpha, \alpha+\delta]$ верхним решением $G_n(x)$, проходящим через точку (α, β). Обозначим через $G(x)$ верхнее решение уравнения $y'=f(x, y)$, проходящее через точку (α, β), и докажем, что *последовательность функций* $\{G_n(x)\}$ *равномерно* сходится к $G(x)$ на отрезке $[\alpha, \alpha+\delta]$.

В самом деле, имеем

$$G_n(x) \geqslant G(x) \qquad [\alpha \leqslant x \leqslant \alpha+\delta]. \tag{3}$$

Так как функции последовательности $\{G_n(x)\}$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны в $[\alpha, \alpha+\delta]$, то можно выбрать из нее подпоследовательность $\{G_{\lambda_p}(x)\}$, $(\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_p < \ldots)$, равномерно сходящуюся к некоторой функции $\overline{G}(x)$. Очевидно, что $\overline{G}(\alpha)=\beta$.

Из неравенства (3) следует, что

$$\lim_{p\to\infty} G_{\lambda_p}(x) = \overline{G}(x) \geqslant G(x).$$

Но $\overline{G}'(x) = f[x, \overline{G}(x)]$[1], а $G(x)$ является верхним решением уравнения $y'=f(x, y)$ и, следовательно, $\overline{G}(x)=G(x)$.

Повторяя теперь рассуждения, проведенные в § 1, п. 6, „б“, убеждаемся в справедливости высказанного утверждения.

3. Вторая теорема сравнения. а) Установим теперь вторую теорему сравнения.

Пусть в каждой точке прямоугольника R,

$$R: \quad \alpha \leqslant x \leqslant \alpha+a, \quad |y-\beta| \leqslant b,$$

[1]) Здесь используется теорема § 2, п. 1. — *Прим. ред.*

функция $f(x, y)$ принимает конечное значение, а функция $F(x, y)$ непрерывна, и пусть в R выполняются неравенства

$$f(x, y) \leqslant F(x, y), \qquad |F(x, y)| < L.$$

Пусть, далее, $\delta > 0$, $\delta \leqslant a$, $\delta \leqslant b/L$, и уравнение $y' = f(x, y)$ обладает решением $y = \varphi(x)$, проходящим через точку (α, β) и определенным на отрезке $[\alpha, \alpha + \delta]$. Покажем, что при $\alpha \leqslant x \leqslant \alpha + \delta$ выполняется неравенство

$$\varphi(x) \leqslant G_F(x)\,^{1)},$$

где через $y = G_F(x)$ обозначено верхнее решение уравнения $y' = F(x, y)$, выходящее вправо из точки (α, β).

Положим

$$F_n(x, y) = F(x, y) + \frac{1}{n}.$$

Найдется такой номер n_0, что при $n > n_0$ имеем $|F_n(x, y)| < L$. Следовательно, уравнение

$$y' = F_n(x, y)$$

обладает верхним решением $y = G_{F_n}(x)$, определенным на отрезке $[\alpha, \alpha + \delta]$ и выходящим из точки (α, β). По теореме сравнения из п. 2 имеет место неравенство

$$\varphi(x) < G_{F_n}(x) \qquad (\alpha < x < \alpha + \delta). \tag{4}$$

Функции последовательности $\{G_{F_n}(x)\}$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны на $[\alpha, \alpha + \delta]$. Поэтому по теореме из п. 1 из нее можно выделить подпоследовательность

$$G_{\lambda_1}(x), G_{\lambda_2}(x), \ldots, G_{\lambda_p}(x), \ldots, \quad (\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_p < \ldots),$$

которая равномерно сходится к решению $\overline{G}(x)$ уравнения

$$\overline{G}'(x) = F[x, \overline{G}(x)].$$

Но в силу (4) имеем $\varphi(x) \leqslant \overline{G}(x)$, а поэтому $\varphi(x) \leqslant G_F(x)$.

Повторяя рассуждение, проведенное в § 1, п. 5, „г“, убеждаемся, что можно было предположить $\delta > 0$, $\delta \leqslant a$, $\delta \leqslant b/M$, где

$$|F(x, y)| \leqslant M.$$

---

[1]) Если рассматривать решения слева от точки α, то справедлива теорема:

Пусть функции $f(x, y)$ и $F(x, y)$ определены в прямоугольнике R: $\alpha - a \leqslant x \leqslant \alpha$, $|y - \beta| \leqslant b$, причем функция $F(x, y)$ непрерывна в R, $f(x, y) \geqslant F(x, y)$, $|F(x, y)| < L$. Если $\delta > 0$, $\delta < a$, $\delta \leqslant b/L$, а $y = \varphi(x)$ является решением уравнения $y' = f(x, y)$, проходящим через точку (α, β) и определенным на отрезке $[\alpha - \delta, \alpha]$, то имеет место неравенство $\varphi(x) \leqslant G_F(x)$, где G_F — верхнее решение уравнения $y' = F(x, y)$, выходящее влево из точки (α, β).

б) Из доказанной теоремы вытекает следствие:

Пусть функции $f(x, y)$, $F(x, y)$ непрерывны в прямоугольнике R,

$$R:\quad \alpha \leqslant x \leqslant \alpha + a,\quad |\beta - y| \leqslant b \quad [\alpha - a \leqslant x \leqslant \alpha,\quad |\beta - y| \leqslant b],$$

и пусть в R

$$|f(x, y)| \leqslant M;\quad |F(x, y)| \leqslant M;\quad f(x, y) \leqslant F(x, y)$$
$$[f(x, y) \geqslant F(x, y)].$$

Если $\delta = \min(a, b/M)$, то на отрезке $[\alpha, \alpha+\delta]$, ($[\alpha-\delta, \alpha]$) имеем

$$G_f(x) \leqslant G_F(x).$$

4. Оценка разности между решениями, проходящими через одну и ту же точку. Теорема Бомпиани — Тонелли — Монтеля. Очевидно, что можно будет установить критерии единственности решения, если удастся найти оценку разности двух решений уравнения $y'=f(x, y)$, проходящих через одну и ту же точку[1]). Такая оценка дается следующей теоремой:

Пусть в прямоугольнике R,

$$R:\quad 0 \leqslant x - \alpha \leqslant a,\quad |y - \beta| \leqslant b,$$

определена функция $f(x, y)$ и уравнение

$$y' = f(x, y) \tag{5}$$

обладает двумя решениями, $y=y_1(x)$; $y=y_2(x)$, удовлетворяющими одному и тому же начальному условию $y_1(\alpha)=y_2(\alpha)=\beta$ и определенными на отрезке $[\alpha, \alpha+a]$. Пусть для этих решений выполняется неравенство

$$y_1(x) \leqslant y_2(x) \tag{6}$$

при $\alpha < x \leqslant \alpha + \delta$[2]).

Предположим, кроме того, что существует функция $d(x, y, z)$, определенная в параллелепипеде R'

$$R':\quad \alpha \leqslant x \leqslant \alpha + a,\quad |y - \beta| \leqslant b,\quad 0 \leqslant z \leqslant 2b,$$

---

[1]) См. Бомпиани [1], Тонелли [2]. Новое доказательство теоремы Осгуда [1], данное Тамаркиным [2], привело Бомпиани к оценке разности между двумя решениями при данном значении абсциссы.

[2]) Условие $y_1(x) \leqslant y_2(x)$ не является ограничением; в самом деле, если $y=y_1(x)$ и $y=y_2(x)$ являются решениями уравнения (5), проходящими через точку (α, β) и определенными на отрезке $[\alpha, \alpha+a]$, то, полагая для любого x

$$z_1(x) = \min[y_1(x), y_2(x)],\quad z_2(x) = \max[y_1(x), y_2(x)]$$

и замечая, что два решения уравнения (5) имеют в общих точках одну и ту же касательную, получаем, что $z_1(x)$ и $z_2(x)$ удовлетворяют уравнению (5) и неравенству $z_1(x) \leqslant z_2(x)$,

и непрерывная в нем, для которой при

$$\alpha \leqslant x \leqslant \alpha + a, \quad |y_1 - \beta| \leqslant b, \quad |y_2 - \beta| \leqslant b, \quad y_1 \leqslant y_2$$

выполняется неравенство

$$f(x, y_2) - f(x, y_1) \leqslant d(x, y_1, y_2 - y_1)\,^{1)}.$$

Пусть $|d(x, y, z)| \leqslant M'$ *в* R' *и* δ *является таким положительным числом, что*

$$0 < \delta \leqslant a, \quad \delta \leqslant b/M'.$$

Тогда на отрезке $[\alpha, \alpha + \delta]$ *имеют место неравенства*

$$0 \leqslant y_2(x) - y_1(x) \leqslant G(x), \tag{7}$$

где через $G(x)$ *обозначено определенное в* $[\alpha, \alpha + \delta]$ *верхнее решение уравнения*

$$\frac{dz}{dx} = d(x, y_1(x), z),$$

проходящее через точку $(\alpha, 0)$ $[G(\alpha) = 0]$.

В самом деле, полагая $z(x) = y_2(x) - y_1(x)$, имеем

$$\frac{dz}{dx} = f(x, y_1(x) + z) - f(x, y_1(x)).$$

Но $f(x, y_1(x) + z) - f(x, y_1(x)) \leqslant d(x, y_1(x), z)$, и из теоремы сравнения, приведенной в п. 3, „а“, следует выполнение неравенства (7).

Эта теорема была доказана Бомпиани [1] в предположении, что функция $d(x, y, z)$ не зависит от y, т. е. что $f(x, y_2) - f(x, y_1) \leqslant d(x, |y_2 - y_1|)$, причем на функцию $d(x, z)$ накладывались условия: $d(x, z) \geqslant 0$ и $d(x, z)$ является неубывающей функцией от z. Тонелли в заметке [2] показал, что эти два условия излишни. В форме, приведенной в тексте, теорему доказал Монтель [1].

5. Теоремы единственности Пеано, Тонелли, Осгуда и Тамаркина. Из доказанной теоремы мы выведем некоторые простые критерии единственности, установленные Пеано, Тонелли, Осгудом и Тамаркиным.

а) Пусть $d = 0$, т. е. пусть при $y_1 < y_2$

$$f(x, y_2) - f(x, y_1) \leqslant 0.$$

Иными словами, пусть $f(x, y)$ является *невозрастающей функцией от* y. Так как решение уравнения $dz/dx = 0$, удовлетворяющее начальному условию $z(\alpha) = 0$, тождественно равно нулю, то имеет место следующий критерий Пеано ([2], стр. 227).

---

[1]) Для оценки разности решений уравнения (5) слева от точки a следует заменить неравенство, приведенное в тексте, неравенством

$$f(x, y_2) - f(x, y_1) \geqslant d(x, y_1, y_2 - y_1) \qquad (y_1 \leqslant y_2).$$

Если функция $f(x, y)$ определена в окрестности точки (α, β) и является невозрастающей функцией от y, то уравнение $y' = f(x, y)$ имеет не более одного решения, удовлетворяющего условию $y(\alpha) = \beta$.

Прямое доказательство этого критерия можно провести следующим образом. Пусть $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ являются решениями уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющими начальным условиям $y_1(\alpha) = y_2(\alpha) = \beta$ и определенными на отрезке $[\alpha, \alpha + \delta]$. Предположим, что равенство $y_1(x) = y_2(x)$ нарушается в некоторых точках отрезка $[\alpha, \alpha + \delta]$. Пусть, например, ξ — такая точка, что $y_1(\xi) < y_2(\xi)$. Обозначим через $(\alpha_1, \alpha_1 + \delta_1)$ наибольший промежуток, содержащий точку ξ, на котором выполняется неравенство $y_1(x) < y_2(x)$. Тогда $y_1(\alpha_1) = y_2(\alpha_1)$, $y_1(\alpha_1 + \delta_1) \leqslant y_2(\alpha_1 + \delta_1)$ и при $\alpha_1 < x < \alpha_1 + \delta_1$ имеют место неравенства $f(x, y_1(x)) \geqslant f(x, y_2(x))$, $y_1'(x) \geqslant y_2'(x)$, $[y_1(x) - y_2(x)]' \geqslant 0$. Если бы не имело места тождество $[y_1(x) - y_2(x)]' \equiv 0$, то из доказанного неравенства следовало бы, что $y_1(\alpha_1 + \delta_1) - y_2(\alpha_1 + \delta_1) > 0$, чего не может быть. Если же $[y_1(x) - y_2(x)]' \equiv 0$, то в промежутке $(\alpha_1, \alpha_1 + \delta_1)$ имеем $y_1(x) = y_2(x)$, в то время как в точке ξ этого промежутка $y_1(\xi) < y_2(\xi)$. Полученное противоречие доказывает справедливость нашего критерия.

б) Положим в теореме из п. 4 $d = \varphi(x)\omega(z)$, где *функция $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \alpha + a]$, а функция $\omega(z)$ определена при всех неотрицательных z, удовлетворяет условиям $\omega(0) = 0$, $\omega(z) > 0$ при $z > 0$, и*

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\varepsilon}^{2b} \frac{dz}{\omega(z)} = +\infty.$$

Легко доказать, что в этом случае *единственным решением уравнения*

$$\frac{dz}{dx} = \varphi(x)\,\omega(z),$$

обращающимся в нуль при $x = \alpha$, является нулевое решение.

Пусть, в самом деле, $z = z(x)$ является решением этого уравнения, удовлетворяющим указанному начальному условию и определенным на отрезке $[\alpha, \alpha + \delta]$. Предположим, что существует такая точка α_2 из $[\alpha, \alpha + \delta]$, что $z(\alpha_2) \neq 0$. Если $\alpha < \alpha_1 < \alpha_2$, то по правилу замены переменной в определенном интеграле имеем

$$\int_{z(\alpha_1)}^{z(\alpha_2)} \frac{dz}{\omega(z)} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \varphi(x)\,dx.$$

Но при $\alpha_1 \to \alpha + 0$ в силу начального условия $\lim\limits_{\alpha_1 \to \alpha + 0} z(\alpha_1) = 0$, поэтому

$$\lim_{\alpha_1 \to \alpha + 0} \int_{z(\alpha_1)}^{z(\alpha_2)} dz/\omega(z) = +\infty \text{ и, следовательно, } \lim_{\alpha_1 \to \alpha + 0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \varphi(x)\,dx = +\infty,$$

чего не может быть, так как функция $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \alpha+a]$.

Из доказанного вытекает следующий критерий единственности Тонелли [2]:

Пусть функция $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \alpha+a]$, а функция $\omega(z)$ непрерывна и удовлетворяет условиям $\omega(0)=0$, $\omega(z)>0$ при $z>0$, и

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{2b}\frac{dz}{\omega(z)}=+\infty.$$

Пусть, кроме того, функция $f(x, y)$ определена в прямоугольнике R,

$$R:\ \alpha\leqslant x\leqslant\alpha+a,\quad |y-\beta|\leqslant b,$$

и удовлетворяет неравенству

$$f(x, y_2)-f(x, y_1)\leqslant\varphi(x)\,\omega(y_2-y_1)\ ^{1)} \tag{8}$$

при $\alpha\leqslant x\leqslant\alpha+a$, $\beta-b\leqslant y_1\leqslant y_2\leqslant\beta+b$. При этих предположениях в R существует единственное решение уравнения $y'=f(x, y)$, выходящее из точки (α, β) [2].

в) В частности, выбирая $\varphi(x)=1$, мы получаем теорему Осгуда [1] и Тамаркина [2]:

Если функция $\omega(z)$ непрерывна при $z\geqslant 0$, $\omega(0)=0$ и $\omega(z)>0$ при $z>0$,

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{2b}\frac{dz}{\omega(z)}=+\infty$$

и в прямоугольнике R: $|x-\alpha|\leqslant a$, $|y-\beta|\leqslant b$ функция $f(x, y)$ непрерывна и удовлетворяет неравенству

$$|f(x, y_2)-f(x, y_1)|\leqslant\omega(|y_2-y_1|),$$

то в R существует одна и только одна интегральная кривая, проходящая через точку (α, β) [3].

---

[1]) При рассмотрении решений слева от точки (α, β) неравенство (8) надо заменить неравенством $f(x, y_2)-f(x, y_1)\geqslant\varphi(x)\,\omega(y_2-y_1)$.

[2]) Если в теореме Тонелли функция $f(x, y)$ ограничена в R, то в качестве $\varphi(x)$ можно выбрать функцию, определенную при $\alpha<x\leqslant\alpha+a$, суммируемую на отрезке $[\alpha+\varepsilon, \alpha+a]$ для любого ε, $0<\varepsilon<a$, и такую, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\alpha+\varepsilon}^{\alpha+a}\varphi(x)\,dx<+\infty.$$

[3]) Эта теорема была доказана сначала Осгудом, а затем Тамаркиным в предположении, что функция $\omega(z)$ возрастает. Доказательство Тамаркина существенным образом основывается на теореме единственности для уравнения $dz/dx=\omega(z)$. Соответственно измененный метод доказательства приводит к изложенной в п. 4 теореме Бомпиани.

6. Теорема существования и единственности Розенблатта, Нагумо и Перрона. Докажем следующую теорему существования и единственности:

Если функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике R,

$$R: \quad \alpha \leqslant x \leqslant \alpha + a, \quad |y - \beta| \leqslant b,$$

и удовлетворяет при $\alpha \leqslant x \leqslant \alpha + a$ неравенству

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)|(x - \alpha) \leqslant k|y_2 - y_1| \quad (0 < k \leqslant 1), \tag{9}$$

то существует одно и только одно решение уравнения $y' = f(x, y)$, проходящее через точку (α, β).

Эта теорема была доказана Розенблаттом [1] для $0 < k < 1$ и Нагумо [1] для $k = 1$ при условии, что неравенство (9) выполняется в строгом смысле; Перрон [4] доказал, что достаточно выполнение неравенства

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)|(x - \alpha) \leqslant |y_2 - y_1| \quad (\alpha \leqslant x \leqslant \alpha + a). \tag{10}$$

Пусть интегральные кривые $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$ нашего уравнения определены на отрезке $[\alpha, \alpha + \delta]$ и проходят через одну и ту же точку (α, β). Положим при $x \neq \alpha$

$$F(x) = [\varphi(x) - \psi(x)]/(x - \alpha);$$

по правилу Лопиталя имеем

$$\lim_{x \to \alpha} F(x) = \lim_{x \to \alpha} \frac{\varphi(x) - \psi(x)}{x - \alpha} = \lim_{x \to \alpha} \frac{\varphi'(x) - \psi'(x)}{1} = f(\alpha, \beta) - f(\alpha, \beta) = 0.$$

Поэтому, если положить $F(\alpha) = 0$, то функция $F(x)$ будет непрерывна на отрезке $[\alpha, \alpha + \delta]$ и равна нулю в точке α. Докажем, что она тождественно равна нулю. Если бы это было не так, то нашлась бы точка x_0 отрезка $[\alpha, \alpha + \delta]$, в которой $F(x)$ достигала своего наибольшего значения G, причем $G \neq 0$. Но тогда в силу (5) и (10)

$$G = \left| \frac{\varphi(x_0) - \psi(x_0)}{x_0 - \alpha} \right| = \frac{1}{x_0 - \alpha} \left| \int_\alpha^{x_0} \{f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t))\} \, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{x_0 - \alpha} \int_\alpha^{x_0} \left| \frac{\varphi(t) - \psi(t)}{t - \alpha} \right| dt = \frac{1}{x_0 - \alpha} \int_\alpha^{x_0} |F(t)| \, dt.$$

Так как функция $F(t)$ не постоянна на отрезке $[\alpha, x_0]$, то

$$\frac{1}{x_0 - \alpha} \int_\alpha^{x_0} |F(t)| \, dt < G,$$

и потому $G < G$. Полученное противоречие и доказывает наше утверждение.

7. Теорема существования и единственности Розенблатта и Скорца-Драгони. а) Доказанная в предыдущем пункте теорема является частным случаем критерия, доказанного Розенблаттом [2] и Скорца-Драгони [1]. Мы ограничимся формулировкой этого критерия.

Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике R,

$$R: \quad |x-\alpha| \leqslant a, \quad |y-\beta| \leqslant b,$$

и пусть $\delta = \min(a, b/M)$, где через M обозначено наибольшее значение функции $|f(x, y)|$ в R.

Предположим кроме того, что при

$$\alpha - a \leqslant x \leqslant \alpha + a, \quad \beta - b \leqslant y_1 < y_2 \leqslant \beta + b$$

выполняется неравенство

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leqslant \frac{\theta(x)\, k(x)}{|x-\alpha|} |y_2 - y_1|,$$

где

1) *функция $\theta(x)$ неотрицательна, суммируема и такова, что*

$$\left| \int_{\alpha}^{x} |\theta(t)|\, dt \right| \leqslant |x-\alpha|, \quad \text{при} \quad |x-\alpha| \leqslant a;$$

2) *$k(x) \geqslant 1$, и функция $k(x)$ абсолютно непрерывна на любом отрезке вида $|x-\alpha| \leqslant d_1 < d$* ($d$ — постоянная величина, не превосходящая a);

3) *функция $[k(x)-1]/|x|$ суммируема на отрезке $[\alpha - d_1, \alpha + d_1]$*[1]).

Положим $\delta_1 = \min(\delta, d)$. Тогда уравнение

$$y' = f(x, y)$$

обладает одним и только одним решением, определенным на отрезке $[\alpha - \delta_1, \alpha + \delta_1]$ и проходящим через точку (α, β).

б) Доказанная в предыдущем пункте теорема может быть также выведена из следующей общей теоремы Скорца-Драгони, для которой мы также даем лишь формулировку (см. Скорца-Драгони [1], [2], стр. 444).

Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике R,

$$R: \quad |x-\alpha| \leqslant a, \quad |y-\beta| \leqslant b,$$

---

[1]) Розенблатт доказал теорему для частного случая

$$k(x) = 1 + \left| \ln \frac{1}{|x-\alpha|} \right|^{-p}, \quad \text{где } p > 1.$$

В этом случае в формулировке теоремы следует положить $d = 1$.

и пусть точка (x^0, y^0) *лежит внутри прямоугольника* R. *Предположим, что при*

$$|x-\alpha|\leqslant a, \quad \beta-b\leqslant y_1<y_2\leqslant\beta+b$$

имеет место неравенство

$$|f(x, y_2)-f(x, y_1)|<\varphi(x)\,\omega(y_2-y_1),$$

где функция $\varphi(x)$ *неотрицательна и суммируема в смысле Лебега на всех отрезках вида* $[\alpha-a, x^0-\varepsilon]$, $[x^0+\varepsilon, \alpha+a]$[1]), *а функция* $\omega(z)$ *непрерывна и положительна для всех* z. *Пусть, наконец, любому числу* $z^0>0$ *можно поставить в соответствие такие положительные числа* $\bar{\varepsilon}$ *и* $\bar{z}$, *что для всех положительных чисел* ε, *не превосходящих* $\bar{\varepsilon}$, *имеем*

$$\alpha-a<x^0-\varepsilon,$$

$$x^0+\varepsilon<\alpha+a,$$

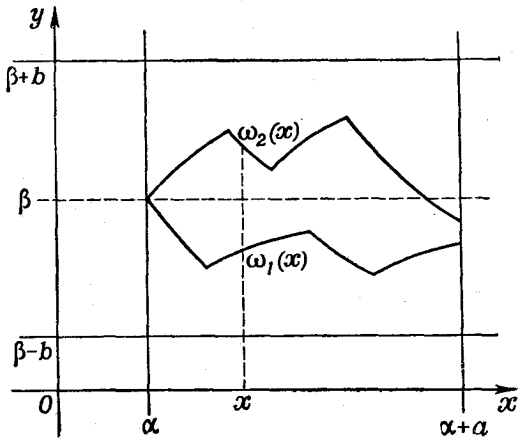
$$\varepsilon\bar{z}<z^0$$

и

$$\int_{\alpha-a}^{x^0-\varepsilon}\varphi(x)\,dx\leqslant\int_{\varepsilon\bar{z}}^{z^0}\frac{dz}{\omega(z)};$$

$$\int_{x^0+\varepsilon}^{\alpha+a}\varphi(x)\,dx\leqslant\int_{\varepsilon\bar{z}}^{z_0}\frac{dz}{\omega(z)}.$$

Тогда через точку (x^0, y^0) *проходит одно и только одно решение уравнения* $y'=f(x, y)$.



Фиг. 8.

8. О границах связки интегральных кривых, проходящих через некоторую точку. Теорема Пеано—Перрона. а) Закончим этот параграф изложением теоремы, обобщающей теорему сравнения из п. 2. Эта теорема по своему характеру связана с основными идеями доказательства Пеано теоремы существования решения для уравнения $y'=f(x, y)$ (см. Пеано [1]) и с важной работой Перрона [5] по тому же вопросу.

б) *Пусть функции* $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$ *непрерывны на отрезке* $[\alpha, \alpha+a]$ *и пусть* $\omega_1(\alpha)=\omega_2(\alpha)$ *и* $\omega_1(x)<\omega_2(x)$ *при* $\alpha<x\leqslant\alpha+a$ (фиг. 8).

Пусть, далее, функция $f(x, y)$ *непрерывна в области* D *плоскости* x, y, *определенной неравенствами*:

$$D: \quad \alpha\leqslant x\leqslant\alpha+a, \quad \omega_1(x)\leqslant y\leqslant\omega_2(x).$$

---

[1]) $\varepsilon>0$, $\alpha-a<x^0-\varepsilon<x^0+\varepsilon<\alpha+a$.

Обозначим через $D_+\omega_2(x)$ и $D_-\omega_1(x)$ соответственно верхнее правое (левое) производное число функции $\omega_2(x)$ и нижнее правое (левое) производное число функции $\omega_1(x)$ (см. Валле-Пуссен [1], т. I, стр. 97) *и предположим, что во всех точках отрезка $[\alpha, \alpha+a]$, за исключением, быть может, счетного множества точек, выполняются неравенства*

$$D_-\omega_1(x) \leqslant f(x, \omega_1(x)), \quad f(x, \omega_2(x)) \leqslant D_+\omega_2(x).$$

Обозначим через M наибольшее значение функции $|f(x, y)|$ в D и выберем настолько большое число b, что прямоугольник R,

$$R\colon \alpha \leqslant x \leqslant \alpha+a, \ |y-\beta| \leqslant b,$$

содержит область D, причем $b/M > a$.

Определим в прямоугольнике R функцию $f(x, y)$ по следующему правилу:

$$f(x, y) = f(x, \omega_2(x)), \text{ если } y \geqslant \omega_2(x),$$

$$f(x, y) = f(x, \omega_1(x)), \text{ если } y \leqslant \omega_1(x),$$

и рассмотрим в этом прямоугольнике уравнение

$$y' = f(x, y).$$

Тогда выходящая из точки (α, β) связка интегральных кривых $y = y(x)$ этого уравнения $(y(\alpha) = \beta)$ может быть определена на отрезке $[\alpha, \alpha+a]$, причем на этом отрезке выполняются неравенства

$$\omega_1(x) \leqslant y(x) \leqslant \omega_2(x).$$

Проведем доказательство от противного. Предположим, что в некоторой точке x_1, $\alpha < x_1 < \alpha+a$ имеем

$$y(x_1) < \omega_1(x_1), \quad [y(x_1)] > \omega_2(x_1)]. \tag{11}$$

Функция $y(x) - \omega_1(x)$, $[y(x) - \omega_2(x)]$ равна нулю в точке a и отрицательна (положительна) в точке x_1. Можно найти такое x_1', что

$$a \leqslant x_1' < x_1, \quad y(x_1') - \omega_1(x_1') = 0, \quad [y(x_1') - \omega_2(x_1') = 0]$$

и

$$y(x) - \omega_1(x) < 0 \quad \text{при} \quad x_1' < x \leqslant x_1,$$

$$[y(x) - \omega_2(x) > 0 \quad \text{при} \quad x_1' < x \leqslant x_1].$$

Из того, что на отрезке $[x_1', x_1]$ имеем $y'(x) = f(x, y(x))$ и $y(x) \leqslant \omega_1(x)$, $[y(x) \geqslant \omega_2(x)]$, следует, что на этом отрезке, за исключением *счетного множества* точек, выполняются соотношения

$$y'(x) = f(x, y(x)) = f(x, \omega_1(x)) \geqslant D_-\omega_1(x),$$

$$[y'(x) = f(x, y(x)) = f(x, \omega_2(x)) \leqslant D_+\omega_2(x)].$$

Следовательно, нижнее (верхнее) правое производное число разности $\omega_1(x)-y(x)$ $[\omega_2(x)-y(x)]$ может быть положительным (отрицательным) лишь в счетном множестве точек отрезка $[x_1', x_1]$. Но тогда функция $\omega_1(x)-y(x)$ $[\omega_2(x)-y(x)]$ не может возрастать (убывать) на этом отрезке (см. Валле-Пуссен [1], т. I, стр. 99), и поэтому $\omega_1(x_1)-y(x_1)\leqslant 0$, $[\omega_2(x_1)-y(x_1)]\geqslant 0$, вопреки неравенству (11).

в) Если функции $\omega_1(x)$ и $\omega_2(x)$ определены на отрезке $[\alpha-a, \alpha]$, причем $\omega_1(\alpha)=\omega_2(\alpha)$, $\omega_1(x)<\omega_2(x)$ при $\alpha-a\leqslant x<\alpha$ и

$$D_+\omega_1(x)\geqslant f(x, \omega_1(x)),\ D_-\omega_2(x)\leqslant f(x, \omega_2(x)),$$

то для решений уравнения $y'=f(x, y)$, выходящих влево из точки (α, β), имеет место теорема, аналогичная теореме, доказанной в „б“.

§ 3. Область существования и теоремы единственности для решений систем дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями

1. Область существования интегральных кривых. а) С помощью таких же рассуждений, какие были проведены в § 1, п. 2, можно доказать справедливость следующих теорем:

Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$y_i'=f_i(x;\ y_1, y_2, \ldots, y_m)\quad (i=1, 2, \ldots, m), \tag{1}$$

где точка $(x;\ y_1, y_2, \ldots, y_m)$ *пробегает множество* I, *имеющее* $m+1$ *измерение. Если функции* $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$ *удовлетворяют системе* (1), *когда* x *изменяется в промежутке* (a, b), $-\infty<a<x<b<+\infty$, *и если при* $a<x<b$ *имеем*

$$|f_i(x;\ \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x))|\leqslant M\quad (i=1, 2, \ldots, m),$$

то существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to a+0}\varphi_k(x)=A_k,\qquad \lim_{x\to b-0}\varphi_k(x)=B_k\quad (k=1, 2, \ldots, m).$$

б) *Пусть множество* I *открыто и связно,* FI — *граница* I *и пусть функции* $f_i(x;\ y_1, y_2, \ldots, y_m)$, $(i=1, 2, \ldots, m)$ *определены и ограничены в* $I+FI$ *и непрерывны в любой точке из* $I+FI$. *Если функции* $y_1=\varphi_1(x), y_2=\varphi_2(x), \ldots, y_m=\varphi_m(x)$ *удовлетворяют системе* (1), *когда* x *изменяется в промежутке* (a, b), *то существуют производные* $\varphi_k'(a+0)$, $\varphi_k'(b-0)$ $(k=1, 2, \ldots, m)$.

в) Имеет место теорема, аналогичная теореме из § 1, п. 3, „д“.

Пусть функции $f_i(x;\ y_1, y_2, \ldots, y_m)$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ *непрерывны на открытом и связном множестве* I, *состоящем из точек* $P\equiv(x;\ y_1, y_2, \ldots, y_m)$.

Выберем в I некоторую точку $(x^0;\ y_1^0,\ y_2^0,\ \ldots,\ y_m^0)$. По теореме Пеано (гл. I, § 6, п. 2) существует, по крайней мере, одна интегральная кривая Γ системы (1), проходящая через точку $(x^0;\ y_1^0,\ y_2^0,\ \ldots,\ \ldots,\ y_m^0)$ и определенная на отрезке $[x^0-\delta,\ x^0+\delta]$. Пусть уравнения этой кривой имеют вид $y_1=\varphi_1(x),\ y_2=\varphi_2(x),\ \ldots,\ y_m=\varphi_m(x)$.

Кривую Γ можно тогда продолжить так, чтобы она приблизилась на сколь угодно малое расстояние к границе множества I. Иными словами, *кривая* Γ *является частью интегральной кривой* Γ': $y_1=\Phi_1(x),\ y_2=\Phi_2(x),\ \ldots,\ y_m=\Phi_m(x)$, *определенной в промежутке* $(a,\ b)$, *который содержит отрезок* $[x^0-\delta,\ x^0+\delta]$, *причем*

1) *либо* $b=+\infty$ $(a=-\infty)$;

2) *либо* b *конечно* (a *конечно*), *но имеет место по крайней мере одно из соотношений*

$$\overline{\lim_{x\to b-0}}\,|\Phi_k(x)|=+\infty,\ \left[\overline{\lim_{x\to a+0}}\,|\Phi_k(x)|=+\infty\right]\quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ m);$$

3) *либо* b *конечно* (a *конечно*), *и все величины*

$$\overline{\lim_{x\to b-0}}\,|\Phi_k(x)|,\ \left[\overline{\lim_{x\to a+0}}\,|\Phi_k(x)|\right]\quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$$

конечны, причем для любых $\varepsilon>0,\ \tau>0$ *найдутся точки кривой* Γ', *соответствующие значениям* x, *большим, чем* $b-\tau$ (*меньшим, чем* $a+\tau$), *расстояние которых от границы меньше* ε.

Для доказательства достаточно повторить рассуждения из § 1, п. 3, и заметить, что если мы приходим к случаю, когда

$$\underline{\lim_{x\to b-0}}\ \Phi_k(x)=\beta_k,\quad \overline{\lim_{x\to b-0}}\ \Phi_k(x)=\gamma_k\quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

то точки $(b;\ \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_m)$, $(b;\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots,\ \gamma_m)$ (возможно совпадающие) лежат на границе множества I.

Если в системе (1) функции f_i определены на замкнутом связном ограниченном множестве I, имеющем $m+1$ измерение, то любую интегральную кривую системы (1), концы которой не принадлежат границе множества I, можно продолжить до интегральной кривой с концами на границе множества I.

г) Из теоремы „в“ вытекает следующее утверждение для уравнения вида

$$y^{(m)}=f(x;\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(m-1)}).$$

Если функция $f(x;\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(m-1)})$ *непрерывна в открытом связном множестве* I, *имеющем* $m+1$ *измерение, то любой точке* $(x^0,\ y^0,\ y_1^0,\ \ldots,\ y_{m-1}^0)$ *из* I *и любому решению* $y=y(x)$ *этого уравнения, удовлетворяющему начальным условиям*

$$y(x^0)=y^0,\ y^{(i)}(x^0)=y_i^0\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m-1),$$

Пусть, в самом деле, мы имеем два таких решения $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \ldots, \varphi_m(x)$; $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_m(x)$, определенных на отрезке $[\alpha, \alpha+\delta]$. Полагая

$$F_i(x) = [\varphi_i(x) - \psi_i(x)]/(x-\alpha) \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

мы получаем, по теореме Лопиталя, что $\lim\limits_{x\to\alpha+0} F_i(x) = 0$. Поэтому, если положить $F_i(\alpha) = 0$ при $i = 1, 2, \ldots, m$, то функции $F_i(x)$ будут определены на отрезке $[\alpha, \alpha+\delta]$ и равны нулю в точке α. Но тогда они тождественно равны нулю. Пусть, в самом деле,

$$G = F_k(x_0) = \max_{\alpha \leqslant x \leqslant \alpha+\delta} [F_1(x), F_2(x), \ldots, F_m(x)]$$

и $G \neq 0$. Рассуждая так же, как в § 2, п. 6, приходим к противоречивому неравенству

$$G = |[\varphi_k(x_0) - \psi_k(x_0)]/(x_0 - \alpha)| < G.$$

3. Обобщение Цвирнера теоремы Скорца-Драгони на системы дифференциальных уравнений. Цвирнер перенес на системы дифференциальных уравнений исследования Скорца-Драгони и вывел из своей теоремы результаты Розенблатта и Нагумо — Камке, объединив их в единой формулировке, обобщающей оба эти результата (см. Скорца-Драгони [2], [1], Розенблатт [2], Цвирнер [1], стр. 249—250, Камке [1], стр. 139).

Пусть функции $f(x; y, z)$, $g(x; y, z)$ определены в параллелепипеде P,

$$P: \quad x^0 - d \leqslant x \leqslant x^0 + d, \quad y_1 \leqslant y \leqslant y_2, \quad z_1 \leqslant z \leqslant z_2,$$
$$(d > 0, \ y_1 < y_2, \ z_1 < z_2),$$

и пусть в P

$$|x - x^0| \{ |\bar{y}_2 - \bar{y}_1|^n |f(x; \bar{y}_2, \bar{z}_2) - f(x; \bar{y}_1, \bar{z}_1)| + $$
$$+ |\bar{z}_2 - \bar{z}_1|^n |g(x; \bar{y}_2, \bar{z}_2) - g(x; \bar{y}_1, \bar{z}_1)| \} \leqslant$$
$$\leqslant \theta(x) k(x) \ [|\bar{y}_2 - \bar{y}_1|^{n+1} + |\bar{z}_2 - \bar{z}_1|^{n+1}],$$

где n — действительное число, большее, чем — 1, функция $\theta(x)$ непрерывна, не принимает на отрезке $[x^0 - d, x^0 + d]$ отрицательных значений и такая, что

$$0 \leqslant \int_{x_0}^{x} \theta(t)\, dt/(x - x^0) \leqslant 1,$$

а функция $k(x)$ непрерывна вместе со своей первой производной на любом отрезке вида $|x - x^0| \leqslant d_1 \ (< d)$ и всегда больше или равна 1; пусть, кроме того, на таких отрезках функция $[k(x) - 1]/|x - x^0|$ интегрируема.

При этих предположениях система дифференциальных уравнений

$$y' = f(x;\ y,\ z),\quad z' = g(x;\ y,\ z)$$

имеет одну и только одну интегральную кривую, проходящую через точку $(x^0,\ y^0,\ z^0)$ $[y_1 < y^0 < y_2;\ z_1 < z^0 < z_2]$ [1]).

§ 4. Уравнение $y' = \lambda f(x, y)$

а) При рассмотрении уравнения $y' = \lambda f(x, y)$, где λ — некоторый параметр, возникают три вида проблем: 1) изучить верхние и нижние решения, проходящие через заданную точку; 2) изучить решения, проходящие через две заданные точки; 3) изучить решения, проходящие через заданную точку и обладающие в другой заданной точке данным значением производной. Эти проблемы были изучены в работах Хикозака — Нобору, Завиша, Такахаши [2]). Мы рассмотрим вторую из этих проблем.

б) *Пусть дано уравнение*

$$y' = \lambda f(x, y), \tag{1}$$

где функция $f(x, y)$ *непрерывна в прямоугольнике* R,

$$R:\quad |x - x_0| \leqslant a,\quad |y - y_0| < b,$$

и не обращается в этом прямоугольнике в нуль. Тогда функция $f(x, y)$ сохраняет знак, и потому, изменяя в случае необходимости λ на $-\lambda$, мы можем считать, что *существуют такие положительные числа* m *и* M, *что*

$$0 < m \leqslant f(x, y) \leqslant M.$$

Предположим, кроме того, что функция $f(x, y)$ *удовлетворяет условию Липшица относительно* y, *т. е. что существует такое число* N, *что*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant N|y_1 - y_2|.$$

Выберем в R *точку* (x_1, y_1), *где* $x_1 \neq x_0$, *и найдем значения параметра* λ, *которым соответствуют решения уравнения* (1), *удовлетворяющие краевым условиям*

$$y(x_0) = y_0,\quad y(x_1) = y_1\ ^{3)}. \tag{2}$$

---

[1]) Относительно других теорем сравнения и единственности для систем дифференциальных уравнений см. Джулиано [1], [2].

Относительно других теорем единственности на отрезке $[x^0,\ x^0 + a]$, $a > 0$ см. Барбути [1].

[2]) Хикозака — Нобору [1], Завиша [1], Такахаши [1].

Относительно рассматриваемой в тексте проблемы при более общих предположениях см. Цвирнер [2].

[3]) Если опустить условие, что функция $f(x, y)$ не меняет знака в R, то проблема может не иметь решения; например, уравнение $y' = \lambda y$ обладает единственным решением, проходящим через начало координат, а именно $y = 0$.

Для нахождения этих значений параметра λ и соответствующих решений применим метод последовательных приближений.

Пусть функция $y=y_0(x)$ непрерывна вместе со своей первой производной, имеет график, лежащий в прямоугольнике R, и удовлетворяет краевым условиям

$$y_0(x_0)=y_0, \quad y_0(x_1)=y_1. \tag{3}$$

Например, пусть графиком функции $y=y_0(x)$ является отрезок, соединяющий точки (x_0, y_0), (x_1, y_1).

Определим второе приближение для искомой функции при помощи равенства

$$y_1(x)=y_0+\lambda_1\int_{x_0}^{x} f(x, y_0(x))\,dx, \tag{4_1}$$

где значение параметра λ_1 выбрано таким образом, чтобы выполнялось второе равенство (2). Для этого достаточно взять

$$\lambda_1=(y_1-y_0)/\int_{x_0}^{x_1} f(x, y_0(x))\,dx. \tag{5_1}$$

Рекуррентным процессом получаем

$$y_n(x)=y_0+\lambda_n\int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}(x))\,dx \quad (n=2, 3, \ldots), \tag{4_n}$$

где

$$\lambda_n=(y_1-y_0)/\int_{x_0}^{x_1} f(x, y_{n-1}(x))\,dx \quad (n=2, 3, \ldots). \tag{5_n}$$

Докажем, что *если число* $p\geqslant 1$ *и*

$$M/mp\leqslant 1,$$

и если y_1 *удовлетворяет неравенствам*

$$|y_1-y_0|\leqslant b/p, \quad |y_1-y_0|\,N(1+Mm^{-1})\,(2m)^{-1}<1,$$

то последовательность $\{\lambda_n\}$ *сходится к числу* λ, *а последовательность* $\{y_n(x)\}$ *равномерно сходится на отрезке* $[x_0, x_1]$ *к функции* $\varphi(x)$,

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\lambda, \quad \lim_{n\to\infty} y_n(x)=\varphi(x),$$

причем

$$\varphi'(x)=\lambda f[x, \varphi(x)].$$

Следовательно, функция $\varphi(x)$ *удовлетворяет уравнению* (1) *и краевым условиям* $\varphi(x_0)=y_0$, $\varphi(x_1)=y_1$, *причем любое другое*