

Из неравенств (6) и (9) легко получить оценки для $|y_{n+1}(x) - y_n(x)|$, $|\lambda_{n+2} - \lambda_{n+1}|$; имеем

$$\begin{aligned} |y_{n+1}(x) - y_n(x)| &= \left| \lambda_{n+1} \int_{x_0}^x f(x, y_n) dx - \lambda_n \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}) dx \right| \leqslant \\ &\leqslant |\lambda_{n+1} - \lambda_n| \left| \int_{x_0}^x f(x, y_n) dx \right| + |\lambda_n| \left| \int_{x_0}^x \{f(x, y_n) - f(x, y_{n-1})\} dx \right|. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} |y_{n+1}(x) - y_n(x)| &\leqslant 2^{-1}N |y_1 - y_0| R_n m^{-2} M |x - x_0| + \\ &\quad + |y_1 - y_0| m^{-1} |x_1 - x_0|^{-1} N \int_{x_0}^x |y_n - y_{n-1}| dx, \\ |y_{n+1}(x) - y_n(x)| &\leqslant 2^{-1}N |y_1 - y_0| R_n m^{-2} M |x - x_0| + \\ &\quad + 2^{-1}N |y_1 - y_0| R_n m^{-1} |x_1 - x_0|^{-1} |x - x_0|^2, \\ |y_{n+1}(x) - y_n(x)| &\leqslant \\ &\leqslant 2^{-1}N R_n m^{-1} |y_1 - y_0| |x - x_0| (1 + Mm^{-1}) = u_{n+1}. \quad (10) \end{aligned}$$

Из (7) и (10) следует тогда неравенство

$$u_{n+1}/u_n \leqslant 2^{-1}N |y_1 - y_0| m^{-1} (1 + Mm^{-1}) < 1,$$

которое влечет за собой абсолютную и равномерную сходимость на отрезке $[x_0, x_1]$ ряда

$$y_0(x) + [y_1(x) - y_0(x)] + \dots + [y_n(x) - y_{n-1}(x)] + \dots$$

Из (8) и (10) следует, что

$$|\lambda_{n+2} - \lambda_{n+1}| \leqslant N |y_1 - y_0| m^{-2} |x_1 - x_0|^{-2} \int_{x_0}^{x_1} |y_{n+1} - y_n| dx,$$

$$|\lambda_{n+2} - \lambda_{n+1}| \leqslant 2^{-2}N^2 R_n m^{-3} |y_1 - y_0|^2 (1 + Mm^{-1}) = k_{n+1},$$

и в силу (9) имеем

$$k_{n+1}/k_n = 2^{-1}N m^{-1} |y_1 - y_0| (1 + Mm^{-1}) < 1.$$

Поэтому ряд $\lambda_0 + (\lambda_1 - \lambda_0) + \dots + (\lambda_{n+1} - \lambda_n) + \dots$ абсолютно сходится, т. е. существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n$.

д) Положим теперь

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = \varphi(x), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda,$$

Переходя в формулах (4_n) и (5_n) к пределу при $n \rightarrow \infty$ и принимая во внимание равномерную сходимость последовательности $\{y_n(x)\}$ на отрезке $[x_0, x_1]$, имеем

$$\varphi(x) = y_0 + \lambda \int_{x_0}^x f(x, \varphi(x)) dx; \quad \lambda = (y_1 - y_0) / \int_{x_0}^{x_1} f(x, \varphi(x)) dx.$$

Поэтому функция $\varphi(x)$ удовлетворяет поставленным условиям.

е) Осталось доказать, что функция $\varphi(x)$ единственна. Заметим для этого, что если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют равенствам

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \lambda f(x, \varphi(x)), & \psi'(x) &= \mu f(x, \psi(x)), \\ \varphi(x_0) &= \psi(x_0) = y_0, & \varphi(x_1) &= \psi(x_1) = y_1\end{aligned}$$

и если $\lambda < \mu$, то $\lambda f(x, y) < \mu f(x, y)$, и по первой теореме сравнения из § 2, п. 2, "а", получаем, что $\varphi(x_1) \neq \psi(x_1)$; если же $\lambda = \mu$, то из того, что функция $\lambda f(x, y)$ по предположению удовлетворяет условию Липшица, и из условия $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$ следует равенство $\varphi(x) \equiv \psi(x)$.

§ 5. Интегральные кривые уравнения $y'' = f(x, y)$, проходящие через две заданные точки, как экстремальные кривые

а) Пусть дано уравнение

$$Y'' = F(x, Y),$$

где функция $F(x, Y)$ определена и непрерывна в полосе

$$0 \leq x \leq a_0, \quad -\infty < Y < +\infty \quad (a_0 > 0).$$

Найдем интегральные кривые этого уравнения, удовлетворяющие краевым условиям

$$Y(0) = A, \quad Y(a) = B, \quad 0 < a \leq a_0,$$

где A и B — заданные числа.

С помощью замены искомой функции

$$Y(x) = y(x) + (B - A)x^{-1} + A$$

задача сводится к *нахождению интегральных кривых уравнения*
 $y'' = f(x, y), \quad (1)$

где функция $f(x, y)$ непрерывна в полосе S ,

$$S: \quad 0 \leq x \leq a_0, \quad -\infty < y < +\infty \quad (a_0 > 0),$$

удовлетворяющих краевым условиям

$$y(0) = 0, \quad y(a) = 0 \quad (0 < a \leq a_0), \quad (2)$$

Функция Грина $G(x, \xi)$ для уравнения $y'' = 0$ при краевых условиях $y(0) = y(a) = 0$ имеет вид

$$G(x, \xi) = -(a - \xi)x/a \quad \text{при } x \leq \xi,$$

$$G(x, \xi) = -(a - x)\xi/a \quad \text{при } x \geq \xi$$

(см. гл. V, § 3, п. 1). Поэтому *искомые решения являются решениями (возможно существующими) нелинейного интегрального уравнения:*

$$y(x) = \int_0^a G(x, \xi) f(\xi, y(\xi)) d\xi \quad (3)$$

[см. гл. V, § 3, п. 3, $r(x) = f(x, y)$].

Существование решения этого интегрального уравнения при предположении, что функция $f'_y(x, y)$ положительна и ограничена, было доказано Пикаром ([1], [2], стр. 1—14) с помощью метода последовательных приближений. Недавно Гаммерштейн ([1], стр. 118—122) указал более общие условия для существования решения уравнения (3). Позже Гиршфельд [1] вывел эти условия с помощью метода последовательных приближений.

В рассуждениях Гиршфельда решение уравнения (3) рассматривается как экстремаль для интеграла

$$\int_0^a F(x; y, y') dx; \quad F(x; y, y') = \frac{1}{2} y'^2 + \int_0^y f(x, t) dt$$

при краевых условиях (2). Чинквини изучил этот интеграл с помощью *прямых методов* вариационного исчисления и получил теорему существования весьма общего вида. Мы дадим только формулировку теоремы Чинквини [1].

Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в полосе S ,

$$S: 0 \leq x \leq a_0, \quad -\infty < y < +\infty \quad (a_0 > 0),$$

и пусть существуют такие неотрицательные числа h_1, h_2 , что для любой точки (x, y) из S имеем

$$\int_0^y f(x, t) dt \geq -h_1 y^2 - h_2.$$

Тогда дифференциальное уравнение

$$y'' = f(x, y)$$

обладает на отрезке $[0, a]$, где $0 < a \leq a_0$ и $0 < a < \pi / \sqrt{2h_1}$, по крайней мере одним решением, которое удовлетворяет краевым условиям $y(0) = y(a) = 0$.

б) Покажем на примере (см. Чинквини [1], стр. 103), что формулировка этой теоремы не может быть улучшена, иными словами можно указать уравнение (1), для которого не существует решения краевой задачи (2), если a удовлетворяет неравенствам $0 < a < \pi(1+\delta)/\sqrt{2h_1}$, каким бы малым мы ни выбрали положительное число δ .

Действительно, для уравнения $y'' = -y + 1$ имеем

$$\int_0^y f(x, t) dt = -\frac{1}{2} y^2 + y \geq -\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) y^2 - \frac{1}{4\varepsilon} \quad (\varepsilon > 0),$$

и мы можем выбрать $h_1 = \frac{1}{2} + \varepsilon$, $h_2 = \frac{1}{4\varepsilon}$. Следовательно, рассматриваемое уравнение обладает при $0 < a < \pi/\sqrt{1+2\varepsilon}$, ($\varepsilon > 0$) решением, удовлетворяющим краевым условиям $y(0) = y(a) = 0$. В то же время общее решение этого уравнения имеет вид $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x + 1$, а поэтому, каковы бы ни были числа c_1 и c_2 , невозможно удовлетворить краевым условиям $y(0) = y(\pi) = 0$.

§ 6. Теоремы отделения, сравнения и единственности для уравнений второго порядка

1. Теорема Тонелли об отделении нулей решений однородных дифференциальных уравнений второго порядка. Докажем данное Тонелли [3] обобщение теоремы отделения, доказанной в гл. IV, § 2, п. 7, для однородных линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

Пусть

$$f(x; y, y', y'') = 0 \quad (1)$$

является дифференциальным уравнением второго порядка, однородным относительно y, y', y''

$$f(x; cy, cy', cy'') = c^m f(x; y, y', y'') \quad (m — целое).$$

Пусть для всех точек полосы $a \leq x \leq b$, за исключением, быть может, точек, расположенных на оси x , имеет место теорема единственности решения, проходящего через данную точку в данном направлении.

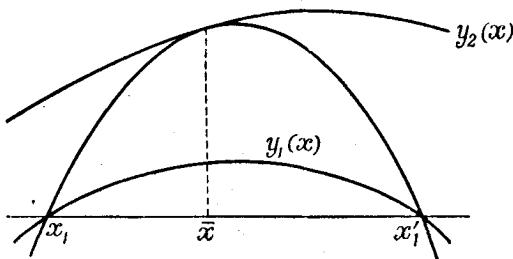
Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются решениями этого уравнения, не равными тождественно нулю, а x_1 и x'_1 — последовательными нулями функции $y_1(x)$, лежащими на отрезке $[a, b]$ и такими, что $y_2(x_1) \neq 0, y_2(x'_1) \neq 0$, то между x_1 и x'_1 содержится один и только один нуль функции $y_2(x)$.

Проведем доказательство от противного. Предположим, что функция $y_2(x)$ отлична от нуля на отрезке $[x_1, x'_1]$ и потому сохраняет

на нем один и тот же знак, и пусть

$$\min_{x_1 < x < x'_1} |y_2(x)| = m > 0 \quad (\text{фиг. 9}).$$

Без потери общности мы можем считать, что $y_1(x) > 0$, $y_2(x) > 0$ при $x_1 < x < x'_1$. Рассмотрим пучок интегральных кривых уравнения (1) вида $y = cy_1(x)$, $c > 0$. При достаточно малом (большом) c кривая $y = cy_1(x)$ не пересекает (пересекает) кривую $y = y_2(x)$. Обозначим через c_0 верхнюю грань значений c , для которых кривая $y = cy_1(x)$ не имеет общих точек с кривой $y = y_2(x)$, и покажем, что кривые $y = c_0 y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ имеют одну и только одну общую точку, абсцисса \bar{x} которой такова, что $x_1 < \bar{x} < x_2$ и $c_0 y_1(\bar{x}) = y_2(\bar{x})$. В самом деле, если бы при $x_1 \leq x \leq x'_1$ мы имели, что $c_0 y_1(x) < y_2(x)$,



Фиг. 9.

то в силу непрерывности существовали бы такие значения $c > c_0$, для которых мы имели бы $cy_1(x) < y_2(x)$ на отрезке $[x, x'_1]$, что невозможно; если бы кривая $y = c_0 y_1(x)$ имела две или более общих точек с кривой $y = y_2(x)$, то существовали бы такие значения $c < c_0$, что соответствующие им кривые $y = cy_1(x)$ имели бы по крайней мере две общие точки с кривой $y = y_2(x)$, что также невозможно.

Но при $h > 0$ имеем

$$[c_0 y_1(\bar{x} + h) - c_0 y_1(\bar{x})]/h < [y_2(\bar{x} + h) - y_2(\bar{x})]/h,$$

$$[c_0 y_1(\bar{x} - h) - c_0 y_1(\bar{x})]/(-h) > [y_2(\bar{x} - h) - y_2(\bar{x})]/(-h),$$

а поэтому $c_0 y'_1(\bar{x}) = y'_2(\bar{x})$ и кривые $y = c_0 y_1(x)$, $y = y_2(x)$ касаются друг друга в точке $(\bar{x}, y_2(\bar{x}))$. В силу предположения о выполнении теоремы единственности это невозможно, так как тогда эти кривые должны были бы совпадать на всем отрезке $[x_1, x'_1]$.

Таким образом, мы доказали, что функция $y_2(x)$ имеет по крайней мере один нуль в промежутке (x_1, x'_1) . Обычные рассуждения показывают, что другого такого нуля не может быть (гл. IV, § 2, п. 7, „а“),

2. Теоремы сравнения для решений дифференциальных уравнений второго порядка. Теоремы единственности. а) Дифференциальному уравнению второго порядка $y'' = f(x; y, y')$ [или системе двух таких уравнений $y'' = f(x; y, y')$, $y'' = g(x; y, y')$] посвящено большое количество работ, в которых указаны важные критерии единственности (сравнения)¹⁾, напоминающие по своей природе критерий Пеано, изложенный нами в § 2, п. 5, „а“. Рассуждения Скорца-Драгони [3], примененные Гроппи [1] для сравнения двух дифференциальных уравнений второго порядка, позволяют высказать эти критерии в чрезвычайно простом виде.

б) Пусть функции $f(x; y, y')$, $g(x; y, y')$ определены в полосе S

$$S: a \leq x \leq b, -\infty < y < +\infty, -\infty < y' < +\infty \quad (a < b)$$

$$f(x; y, y') < g(x; y, y'). \quad (2)$$

Если $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ являются соответственно решениями уравнений

$$y'' = f(x; y, y'), \quad y'' = g(x; y, y'),$$

удовлетворяющими условиям

$$y_1(a) \geq y_2(a), \quad y_1(b) \geq y_2(b), \quad (3)$$

и если, по крайней мере, одна из функций f , g является неубывающей функцией относительно y , то на всем отрезке $[a, b]$ выполняется неравенство

$$y_1(x) \geq y_2(x). \quad (4)$$

Предположим, что функция f является неубывающей функцией относительно y (рассуждения проводятся аналогично и в случае, когда g является неубывающей относительно y). Если бы неравенство (4) не выполнялось на всем отрезке $[a, b]$, то нашлась бы такая точка \bar{x} этого отрезка, для которой $y_1(\bar{x}) - y_2(\bar{x}) < 0$. Рассмотрим наибольший промежуток (a_1, b_1) , содержащий \bar{x} , на котором выполняется неравенство

$$y_1(x) < y_2(x) \quad (a \leq a_1 < b_1 \leq b). \quad (5)$$

Тогда

$$\left. \begin{array}{l} y_1(a_1) = y_2(a_1), \quad y_1(b_1) = y_2(b_1), \\ y'_1(a_1) \leq y'_2(a_1), \quad y'_1(b_1) \geq y'_2(b_1). \end{array} \right\} \quad (6)$$

В промежутке (a_1, b_1) найдется по крайней мере одна точка ξ , в которой разность $y_2(x) - y_1(x)$ достигает своего наибольшего зна-

¹⁾ См. Пикар [2], стр. 9, Скорца-Драгони [3], стр. 14, [4], стр. 45, Каччиополи [2], стр. 20, Розенблatt [3], стр. 105, Пиконе (теорема, упомянутая в работе Миранда [1], стр. 291), Гроппи [1], Чинквини [2], стр. 6,

чения; в этой точке $y'_1(\xi) = y'_2(\xi)$. Принимая во внимание, что f является неубывающей функцией относительно y , получаем, что

$$\begin{aligned} y''_2(\xi) - y''_1(\xi) &= g[\xi; y_2(\xi), y'_2(\xi)] - f[\xi; y_1(\xi), y'_1(\xi)] \geqslant \\ &\geqslant g[\xi; y_2(\xi), y'_2(\xi)] - f[\xi; y_2(\xi), y'_2(\xi)] > 0, \end{aligned}$$

в то время как в точке максимума должно выполняться неравенство $y''_2(\xi) - y''_1(\xi) \leqslant 0$ (см. Чинквики [2], стр. 6).

в) Проведенное в „б“ доказательство сохраняет силу и в случае, когда $f(x; y, y') \leqslant g(x; y, y')$, а f (или g) является возрастающей функцией относительно y .

Таким образом, мы получили следующую теорему единственности:
Пусть дано уравнение

$$y'' = f(x; y, y'), \quad (7)$$

где функция f определена в полосе S ,

$S: a \leqslant x \leqslant b, -\infty < y < +\infty, -\infty < y' < +\infty$ ($a < b$),

и является возрастающей функцией относительно y . Если два решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (7) удовлетворяют краевым условиям

$$y_1(a) = y_2(a), \quad y_1(b) = y_2(b),$$

то они совпадают на всем отрезке $[a, b]$.

г) Доказанная в „б“ теорема сравнения сохраняет силу и в случае, когда

$$f(x; y, y') \leqslant g(x; y, y'),$$

причем функция f (или g) является неубывающей функцией относительно y и монотонной относительно y' .

Предположим, что функция $f(x; y, y')$ не убывает относительно y и y' (не убывает относительно y и не возрастает относительно y'). Рассуждая так же, как и в „б“, убеждаемся в справедливости соотношений (5) и (6).

На всем отрезке $[a_1, b_1]$ не может выполняться неравенство

$$y'_1(x) - y'_2(x) \geqslant 0 \quad [y'_1(x) - y'_2(x) \leqslant 0],$$

так как в противном случае мы имели бы $y_1(x) \equiv y_2(x)$, вопреки (5). Поэтому существует такая точка x_1 из $[a_1, b_1]$, что

$$y'_1(x_1) < y'_2(x_1) \quad [y'_1(x_1) > y'_2(x_1)].$$

Четвертое (третье) соотношение из (6) показывает, что

$$x_1 < b_1 \quad [a_1 < x_1].$$

Обозначим через ξ верхнюю (нижнюю) грань таких значений x , что $y'_1(t) < y'_2(t)$, $[y'_1(t) > y'_2(t)]$ для всех t , удовлетворяющих неравенствам $x_1 \leqslant t < x$ $[x < t \leqslant x_1]$. Тогда $\xi \leqslant b_1$ ($\xi \geqslant a_1$) и $y'_1(x) <$

$< y'_2(x)$ при $x_1 \leq x < \xi$ [$y'_1(x) > y'_2(x)$ при $\xi < x \leq x_1$], $y'_1(\xi) = y'_2(\xi)$. Отсюда получаем, что

$$y_1(x) < y_2(x), \quad y'_1(x) < y'_2(x) \text{ при } x_1 \leq x < \xi, \quad (8)$$

$$[y_1(x) < y_2(x), \quad y'_1(x) > y'_2(x) \text{ при } \xi < x \leq x_1]$$

и

$$y'_1(\xi) = y'_2(\xi). \quad (9)$$

Но тогда при $x_1 \leq x \leq \xi$ [$\xi \leq x \leq x_1$] имеем

$$\begin{aligned} y''_1(x) = f(x; y_1(x), y'_1(x)) &\leq \\ &\leq f(x; y_2(x), y'_2(x)) \leq g(x; y_2(x), y'_2(x)) = y''_2(x), \end{aligned}$$

и, следовательно, $y''_1(x) \leq y''_2(x)$, а потому из (9) вытекает, что при $x_1 \leq x \leq \xi$ [$\xi \leq x \leq x_1$],

$$y'_1(x) - y'_2(x) \geq 0 \quad [y'_1(x) - y'_2(x) \leq 0],$$

вопреки второму из неравенств (8).

д) Из доказанной в „д“ теоремы сравнения следует *критерий единственности Скорца-Драгони* [4]:

Если функция $f(x; y, y')$ определена в полосе S ,

$S: a \leq x \leq b, -\infty < y < +\infty, -\infty < y' < +\infty$ ($a < b$),

и если $f(x; y, y')$ не убывает относительно y и монотонна относительно y' , то любые два решения $y_1(x), y_2(x)$ уравнения

$$y'' = f(x; y, y'), \quad (7)$$

удовлетворяющие условиям

$$y_1(a) = y_2(a), \quad y_1(b) = y_2(b),$$

совпадают на всем отрезке $[a, b]$.

Скорца-Драгони ([4], стр. 45) построил также пример, показывающий, что одного неубывания $f(x; y, y')$ относительно y недостаточно для того, чтобы обеспечить единственность решений уравнения (7).

§ 7. Краевые задачи для уравнения $y'' = f(x; y, y')$. Теоремы существования

1. Решения, принадлежащие области, ограниченной двумя интегральными кривыми. Теорема существования Скорца-Драгони. Доказательство Чинквини. а) Этот параграф посвящен установлению некоторых общих теорем существования для уравнений вида $y'' = f(x; y, y')$. Читатель увидит, что при доказательстве предложений из п. 1 и 3 некоторые упрощения получаются при использовании аппроксимирующих многочленов Северини [1].

б) На использовании аппроксимирующих многочленов Северини основано доказательство, данное Чинквики [2] для следующей теоремы Скорца-Драгони:

Пусть функция $f(x; y, y')$ конечна и непрерывна в области C : $a \leq x \leq b$, $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$, $-\infty < y' < +\infty$ ($a < b$), где $y_1(x) \leq y_2(x)$ [$a \leq x \leq b$], пусть, далее, $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются на отрезке $[a, b]$ решениями дифференциального уравнения

$$y'' = f(x; y, y') \quad (1)$$

и, кроме того, пусть существует такое число M , что во всей области C выполняется неравенство

$$|f(x; y, y')| \leq M. \quad (2)$$

Тогда, если точки (x_i, y_i) ($i = 0, 1$) удовлетворяют неравенствам $a \leq x_0 < x_1 \leq b$, $y_1(x_i) \leq y_i \leq y_2(x_i)$ ($i = 0, 1$),

то уравнение (1) обладает на отрезке $[x_0, x_1]$, по крайней мере, одним решением $y = y_0(x)$, удовлетворяющим неравенствам

$$y_1(x) \leq y_0(x) \leq y_2(x) \quad (3)$$

и краевым условиям

$$y_0(x_0) = y_0, \quad y_0(x_1) = y_1.$$

Определим в области C_∞ ,

$$C_\infty: \quad x_0 \leq x \leq x_1, \quad -\infty < y < +\infty; \quad -\infty < y' < +\infty,$$

вспомогательную функцию $f_0(x; y, y')$, положив

$$f_0(x; y, y') = f(x; y, y') \text{ при всех } (x; y, y') \text{ из } C, \quad (4)$$

$$f_0(x; y, y') = [y - y_2(x)]^2/[1 + \{y - y_2(x)\}^2] + f(x; y_2(x), y') \quad \text{при } y > y_2(x),$$

$$f_0(x; y, y') = -[y - y_1(x)]^2/[1 + \{y - y_1(x)\}^2] + f(x; y_1(x), y') \quad \text{при } y < y_1(x).$$

Тогда во всей области C_∞ имеем

$$|f_0(x; y, y')| < M + 1. \quad (5)$$

Положим

$$R = |(y_1 - y_0)/(x_1 - x_0)|, \quad L_1 = R + (M + 1)(x_1 - x_0),$$

$$\Gamma = \max_{x_0 \leq x \leq x_1} \{|y_1(x)|, |y_2(x)|\}, \quad L_0 = \Gamma + 2L_1(x_1 - x_0).$$

Рассмотрим в соответствии с теоремой Вейерштрасса (см., например, Тонелли [4], стр. 9) последовательность целых рациональных

функций $\{P_n(x; y, y')\}$ от переменных x, y, y' , которая равномерно сходится к функции $f_0(x; y, y')$ в области C_L ,

$$C_L: \quad x_0 \leq x \leq x_1, \quad -L_0 \leq y \leq L_0, \quad -2L_1 \leq y' \leq 2L_1,$$

и определим во всей области C_∞ последовательность функций $\{Q_n(x; y, y')\}$, положив

$$Q_n(x; y, y') \equiv P_n(x; y, y'), \text{ если } (x; y, y') \text{ принадлежит } C_L,$$

$$Q_n(x; y, y') \equiv P_n(x; y, 2L_1), \text{ если } -L_0 \leq y \leq L_0 \text{ и } y' > 2L_1,$$

$Q_n(x; y, y') \equiv P_n(x; y, -2L_1), \text{ если } -L_0 \leq y \leq L_0 \text{ и } y' < -2L_1$,
и, наконец,

$$Q_n(x; y, y') \equiv Q_n(x; L_0, y') \text{ при } y > L_0, |y'| < +\infty,$$

$$Q_n(x; y, y') \equiv Q_n(x; -L_0, y') \text{ при } y < -L_0, |y'| < +\infty.$$

Например, при $y > L_0, y' > 2L_1$ имеем

$$Q_n(x; y, y') \equiv Q_n(x, L_0, 2L_1) = P_n(x, L_0, 2L_1).$$

Каждая из функций $Q_n(x; y, y')$ ($n = 1, 2, \dots$) непрерывна и ограничена во всей области C_∞ и имеет в этой области ограниченные разностные отношения для всех своих аргументов. В силу (5) можно найти такое число \bar{n} , что при всех $n > \bar{n}$ имеем во всей области C_∞

$$|Q_n(x; y, y')| < M + 1. \quad (6)$$

Рассмотрим при $n > \bar{n}$ дифференциальное уравнение

$$y'' = Q_n(x; y, y') \quad (7)$$

и заметим, что любому значению \bar{y}' из промежутка $(-L_1, L_1)$ соответствует решение $y = \bar{y}_n(x)$ уравнения (7), определенное на отрезке $[x_0, x_1]$ и удовлетворяющее начальным условиям

$$\bar{y}_n(x_0) = y_0, \quad \bar{y}'_n(x_0) = \bar{y}' \quad (8)$$

(см. гл. I, § 3, п. 4).

Так как

$$\bar{y}'_n(x) = \bar{y}'_n(x_0) + (x - x_0) \bar{y}''(\xi), \quad x_0 < \xi < x_1,$$

то

$$|\bar{y}'_n(x)| \leq (M + 1)(x - x_0) + L_1,$$

$$|\bar{y}'_n(x)| \leq 2L_1. \quad (9)$$

Если же мы выбрали бы в начальных условиях (8) $\bar{y}' \geq L_1$, то мы получили бы, что

$$\bar{y}'_n(x) \geq \bar{y}' - |x - x_0| |\bar{y}''(\xi)| \geq L_1 - |x_1 - x_0| (M + 1) = R, \quad \bar{y}'_n(x) \geq R,$$

а потому

$$\bar{y}_n(x_1) - \bar{y}_n(x_0) \geq R|x_1 - x_0| \geq |y_1 - y_0|$$

и, следовательно,

$$\bar{y}_n(x_1) \geq y_1.$$

Аналогично, если выбрать в начальных условиях (8) $\bar{y}' \leq -L_1$, то получим, что для любого x из отрезка $[x_0, x_1]$ справедливо неравенство $\bar{y}'_n(x) \leq -R$, и, следовательно,

$$\bar{y}_n(x_1) \leq y_1.$$

Решение $y = \bar{y}_n(x)$ уравнения (7) непрерывно зависит от \bar{y}' (гл. I, § 5, п. 1, „а“). Поэтому для любого $n > \bar{n}$ существует по крайней мере одно значение \bar{y}' из промежутка $(-L_1, L_1)$, которому соответствует решение $y = \bar{y}_n(x)$ уравнения (7), обозначаемое нами в дальнейшем через $y = y_n(x)$ и удовлетворяющее условиям

$$y_n(x_0) = y_0, \quad y_n(x_1) = y_1. \quad (10)$$

На всем отрезке $[x_0, x_1]$ при $n > \bar{n}$ имеем

$$|y'_n(x)| \leq 2L_1, \quad (11_1)$$

$$|y_n(x)| \leq 2L_1(x - x_0) + |y_n(x_0)| \leq L_0,$$

$$|y_n(x)| \leq L_0. \quad (11_2)$$

Следовательно, любая точка $(x, y_n(x), y'_n(x))$, $(x_0 \leq x \leq x_1)$ принадлежит области G_L . Поэтому $y = y_n(x)$ является решением уравнения

$$y''_n = P_n(x; y_n, y'_n), \quad (11_3)$$

удовлетворяющим начальным условиям (10). Увеличив, если это необходимо, n , мы можем считать, что при $n > \bar{n}$ выполняется неравенство

$$|y''_n(x)| < M + 1. \quad (11_4)$$

Из неравенств (11₁), (11₂), (11₄) вытекает, в силу теоремы Асколи (гл. I, § 6, п. 2, „в“), что из последовательности $\{y_n(x)\}$ можно выбрать подпоследовательность

$$y_{\lambda_1}(x), y_{\lambda_2}(x), \dots, y_{\lambda_n}(x), \dots (\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots),$$

равномерно сходящуюся на отрезке $[x_0, x_1]$ к некоторой функции $y_0(x)$. При этом выбор можно осуществить так, чтобы последовательность

$$y'_{\lambda_1}(x), y'_{\lambda_2}(x), \dots, y'_{\lambda_n}(x), \dots$$

равномерно сходилась на отрезке $[x_0, x_1]$ к функции $y'_0(x)$. В силу сказанного выше, любая точка $(x; y_0(x), y'_0(x))$ принадлежит области C_L .

Принимая во внимание, что при $n \rightarrow \infty$ последовательность

$$\{P_{\lambda_n}(x; y_{\lambda_n}(x), y'_{\lambda_n}(x))\}$$

равномерно сходится на отрезке $[x_0, x_1]$ к функции

$$f_0(x; y_0(x), y'_0(x)),$$

получаем из уравнения

$$y''_{\lambda_n} = P_{\lambda_n}(x; y_{\lambda_n}, y'_{\lambda_n}),$$

путем предельного перехода при $n \rightarrow \infty$, что

$$y''_0(x) = f_0(x; y_0(x), y'_0(x)).$$

Для того чтобы доказать теорему, нам осталось показать, что функция $y_0(x)$ удовлетворяет неравенству (3).

Для этого заметим, что при $y < y_1(x)$ [$y > y_2(x)$] функция $f_0(x; y, y')$ возрастает относительно y , и, следовательно, достаточно повторить рассуждения из § 6, п. 2, „б“, чтобы убедиться в невозможности неравенства $y_0(x) < y_1(x)$ [$y_2(x) < y_0(x)$].

2. Существование интегральной кривой, проходящей через две заданные точки, для случая, когда функция $f(x; y, y')$ ограничена. Докажем теперь вторую теорему существования, сохранив предположение об ограниченности $f(x; y, y')$.

Пусть функция $f(x; y, y')$ конечна и непрерывна в полосе S ,

$S: a \leq x \leq b, -\infty < y < +\infty, -\infty < y' < +\infty (a < b)$,

и пусть во всей этой полосе выполняется неравенство

$$|f(x; y, y')| \leq M.$$

Тогда, если числа x_1 и x_2 таковы, что

$$a \leq x_1 \leq x_2 \leq b,$$

а y_1 и y_2 — любые два числа, то существует, по крайней мере, одно решение уравнения

$$y'' = f(x; y, y'), \quad (12)$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2. \quad (13)$$

Эта теорема является частным случаем общей теоремы Биркгофа и Келлога ([1], стр. 109; эта общая теорема позже была вновь доказана Каччиополи [3]). Элементарное доказательство последней было

дано Скорца-Драгони [5]; мы получим эту теорему как непосредственное следствие из теоремы, доказанной в п. 1.

Пусть y'_1 — любое число и $y = y(x)$ — уравнение интегральной кривой Γ уравнения (12), удовлетворяющей начальным условиям

$$y(x_1) = y_1, \quad y'(x_1) = y'_1.$$

Мы имеем

$$y(x) = \int_{x_1}^x (x-t)f[t; y(t), y'(t)] dt + (x-x_1)y'_1 + y_1, \quad (14)$$

$$y'(x) = \int_{x_1}^x f[t; y(t), y'(t)] dt + y'_1,$$

откуда вытекает неравенство

$$|y(x)| \leq M \frac{(x-x_1)^2}{2} + |y'_1| |x-x_1| + |y_1|,$$

$$|y'(x)| \leq M |x-x_1| + |y'_1|.$$

Из этих неравенств следует, что областью существования рассматриваемых интегральных кривых является отрезок $[x_1, x_2]$. В самом деле, если число ξ таково, что $x_1 < \xi \leq x_2$, то $\lim_{x \rightarrow \xi^-} |y(x)| < +\infty$,

$\lim_{x \rightarrow \xi^-} |y'(x)| < +\infty$, а следовательно (§ 3, п. 1, „в“, „г“), правый конец кривой Γ должен лежать на границе полосы S , и поэтому $y(x)$ определено на всем отрезке $[x_1, x_2]$.

Пусть теперь $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ — два решения уравнения (12), соответствующие начальным условиям

$$y_1(x_1) = y_1, \quad y'_1(x_1) = -L,$$

$$y_2(x_1) = y_1, \quad y'_2(x_1) = L.$$

Тогда из (14) следует, что

$$y_1(x) \leq M \frac{(x-x_1)^2}{2} + y_1 - L(x-x_1),$$

$$y_2(x) \geq -M \frac{(x-x_1)^2}{2} + y_1 + L(x-x_1),$$

и если выбрать L таким образом, что $M(x_2-x_1) \leq 2L$, то на отрезке $[x_1, x_2]$ выполняется неравенство $y_1(x) \leq y_2(x)$. Выберем L настолько большим, что

$$L > \left| \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \right| + \frac{M(x_2-x_1)}{2}.$$

Тогда из доказанного выше следует, что $y_1(x_2) < y_2 < y_2(x_2)$, и

поэтому, применив доказанную в п. 1 теорему, мы убеждаемся в существовании, по крайней мере, одного решения уравнения (12), удовлетворяющего краевым условиям (13).

3. Случай, когда функция $f(x; y, y')$ не ограничена. Теоремы существования Тонелли. Теорема существования Чинквини. а) Для приложений представляет интерес рассмотрение уравнений вида $y'' = f(x; y, y')$ в случае, когда функция $f(x; y, y')$ стремится к бесконечности при стремлении y и y' к бесконечности.

Исследования в этом направлении были проведены Каччиополи [2], стр. 20, Нагумо [2], Сато [2], Скорца-Драгони [6], [7], Чинквини [2], Тонелли [5]. Мы изложим доказательство двух теорем существования Тонелли, которые имеют весьма общий характер и могут быть просто и быстро доказаны.

б) Пусть функция $f(x; y, y')$ конечна и непрерывна в полосе S ,

$$S: x_1 \leq x \leq x_2, -\infty < y < +\infty, -\infty < y' < +\infty (x_1 < x_2),$$

и пусть для любых чисел $\sigma > 0$ и $Y \geq 0$ можно найти такую функцию $\psi(x)$, положительную и суммируемую в смысле Лебега на отрезке $[x_1, x_2]$, что для всех точек из S справедливы неравенства

$$|f(x; y, y')| < \sigma |y'| + \psi(x) \text{ при } |y| \leq Y, \quad (15)$$

$$f(x; y, y') > -\sigma(|y| + |y'|) - \psi(x) \text{ при } y \geq Y, \quad (16)$$

$$f(x; y, y') < \sigma(|y| + |y'|) + \psi(x) \text{ при } y \leq -Y. \quad (17)$$

Тогда для любых двух чисел y_1 и y_2 существует на отрезке $[x_1, x_2]$, по крайней мере, одно решение уравнения

$$y'' = f(x; y, y'), \quad (18)$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2.$$

Сделаем, как и в § 5, п. 1, „а“, преобразование

$$Y = y - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x - \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$$

и заметим, что из выполнения условий (15), (16), (17) для уравнения (18) следует выполнение этих условий для преобразованного уравнения $Y'' = F(x; Y, Y')$. Поэтому без потери общности мы можем считать, что разыскиваются решения уравнения (18), удовлетворяющие краевым условиям

$$y(x_1) = 0, \quad y(x_2) = 0, \quad (19)$$

при единственном предположении, что для любого $\sigma > 0$ найдется

функция $\psi(x)$, положительная и суммируемая в смысле Лебега на отрезке $[x_1, x_2]$, для которой во всех точках полосы S выполняются неравенства

$$f(x; y, y') > -\sigma \{ |y| + |y'| \} - \psi(x) \quad \text{при } y \geq 0, \quad (16')$$

$$f(x; y, y') < \sigma \{ |y| + |y'| \} + \psi(x) \quad \text{при } y \leq 0. \quad (17')$$

в) Пусть функция $y = y(x)$ является решением уравнения (18) в некотором отрезке $[\xi_1, \xi_2]$, содержащемся в $[x_1, x_2]$, и пусть выполняются следующие условия:

$$\left. \begin{array}{l} y'(\xi_2) = 0, \\ y(x) \geq 0, \quad y'(x) \geq 0 \quad \text{при } \xi_1 \leq x \leq \xi_2 \\ \{0 \leq y(\xi_1) \leq y(x) \leq y(\xi_2) \text{ в } [\xi_1, \xi_2]\} \end{array} \right\} \quad (20_1)$$

Пусть $\sigma > 0$ и

$$\sigma(x_2 - x_1)(x_2 - x_1 + 1) < \frac{1}{2}. \quad (21)$$

Так как для всех точек полосы S , в которых $y \geq 0$, выполняется неравенство (16'), то в $[\xi_1, \xi_2]$ имеем

$$-y'' = -f(x; y, y') < \sigma \{ y(x) + y'(x) \} + \psi(x). \quad (22)$$

Положим

$$H = \int_{x_1}^{x_2} \psi(x) dx, \quad \Delta = \max_{\xi_1 \leq x \leq \xi_2} |y'(x)|$$

и проинтегрируем неравенство (22) на отрезке $[x, \xi_2]$. Тогда мы получим

$$y'(x) < \sigma \int_x^{\xi_2} [y(x) + y'(x)] dx + H,$$

$$y'(x) < \sigma [y(\xi_2) + \Delta] (\xi_2 - x) + H,$$

$$\Delta < \sigma [y(\xi_2) + \Delta] (\xi_2 - x) + H.$$

Но $y(\xi_2) \leq y(\xi_1) + (\xi_2 - \xi_1) \Delta$, поэтому

$$\Delta [1 - \sigma (\xi_2 - \xi_1) (\xi_2 - \xi_1 + 1)] < \sigma y(\xi_1) (\xi_2 - \xi_1) + H.$$

Из неравенства (21) получаем $\Delta < 2\sigma y(\xi_1) (\xi_2 - \xi_1) + 2H$, откуда следует, что $\Delta < y(\xi_1) + 2H$. Итак, мы доказали, что при выполнении условий (20₁) имеет место неравенство

$$0 \leq y'(x) < y(\xi_1) + 2H,$$

а тем более и неравенство

$$0 \leq y'(x) < y(x) + 2H \quad (\xi_1 \leq x \leq \xi_2). \quad (23_1)$$

Аналогично, если $y = y(x)$ является на отрезке $[\xi_1, \xi_2]$ решением уравнения (18), удовлетворяющим условиям

$$y'(\xi_1) = 0; \quad y(x) \geq 0, \quad y'(x) \leq 0 \quad \text{при } \xi_1 \leq x \leq \xi_2, \quad (20_2)$$

$$y'(\xi_2) = 0; \quad y(x) \leq 0, \quad y'(x) \leq 0 \quad \text{при } \xi_1 \leq x \leq \xi_2, \quad (20_3)$$

$$y'(\xi_1) = 0; \quad y(x) \leq 0, \quad y'(x) \geq 0 \quad \text{при } \xi_1 \leq x \leq \xi_2, \quad (20_4)$$

то мы имеем соответственно

$$0 \leq -y'(x) \leq y(x) + 2H, \quad (23_2)$$

$$0 \leq -y'(x) \leq -y(x) + 2H, \quad (23_3)$$

$$0 \leq y'(x) \leq -y(x) + 2H. \quad (23_4)$$

Теперь нетрудно доказать, что если $y = y(x)$ является решением уравнения (18), удовлетворяющим краевым условиям (19), то для любого x из отрезка $[x_1, x_2]$ имеем

$$|y'(x)| < |y(x)| + 2H. \quad (23)$$

В точках, в которых $y'(x) = 0$, неравенство (23) очевидно. Пусть теперь в некоторой точке \bar{x} из $[x_1, x_2]$ имеем $y'(\bar{x}) \neq 0$ и пусть (ξ_1, ξ_2) — наибольший промежуток, содержащий точку \bar{x} , на котором $y'(x) \neq 0$. Не может быть, чтобы одновременно оказались справедливыми неравенства $\xi_1 = x_1$, $\xi_2 = x_2$, так как по теореме Ролля функция $y'(x)$, по крайней мере, один раз обращается в нуль в промежутке (x_1, x_2) . Поэтому возможны три случая:

- 1) $y'(\xi_1) = 0, \quad y'(\xi_2) = 0$ и $y'(x) \neq 0$ при $\xi_1 < x < \xi_2$,
- 2) $y(\xi_1) = 0, \quad y'(\xi_2) = 0$ и $y'(x) \neq 0$ при $\xi_1 < x < \xi_2$,
- 3) $y'(\xi_1) = 0, \quad y(\xi_2) = 0$ и $y'(x) \neq 0$ при $\xi_1 < x < \xi_2$.

В случае 1) либо функция $y(x)$ сохраняет знак в промежутке (ξ_1, ξ_2) , либо этот промежуток распадается на два промежутка, на каждом из которых функция $y(x)$ сохраняет знак. В случаях 2) и 3) функция $y(x)$ сохраняет знак в промежутке (ξ_1, ξ_2) . Поэтому из неравенств (23₁), (23₂), (23₃), (23₄) вытекает неравенство (23).

Положим $|y(x)| = z(x)$. Тогда из (23) следует, что $z'(x) < z + 2H$, поэтому

$$0 \leq z(x) \leq \int_{x_1}^x [z + 2H] dx$$

и, по лемме Гронуолла (гл. I, § 5, п. 3),

$$0 \leq |y(x)| \leq 2H(x_2 - x_1) e^{x_2 - x_1},$$

откуда получаем неравенство

$$|y'(x)| \leq 2H[1 + (x_2 - x_1) e^{x_2 - x_1}].$$

Из него следует, что если $y = y(x)$ является на отрезке $[x_1, x_2]$ решением уравнения (18) и удовлетворяет краевым условиям (19), то

$$\left. \begin{aligned} |y(x)| &\leq 2H(x_2 - x_1)e^{x_2 - x_1}, \\ |y'(x)| &\leq 2H[1 + (x_2 - x_1)e^{x_2 - x_1}]. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

г) Чтобы закончить доказательство теоремы, поступим, как в п. 1. Положим

$$H_0 = 2H[1 + (x_2 - x_1)e^{x_2 - x_1}] + 1$$

и обозначим через S_0 параллелепипед, определенный неравенствами

$$S_0: \quad x_1 \leq x \leq x_2, \quad |y| \leq H_0, \quad |y'| \leq H_0.$$

Рассмотрим последовательность многочленов $\{P_n(x; y, y')\}$, определенных в S_0 и удовлетворяющих во всем S_0 неравенствам:

$$|f(x; y, y') - P_n(x; y, y')| < \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Поставим в соответствие каждому многочлену P_n определенную в S функцию $f_n(x; y, y')$ по следующему правилу: функция $f_n(x; y, y')$ равна

$$P_n(x; y, y') \quad \text{в } S_0,$$

$$P_n(x; y, H_0) \quad \text{при } x_1 \leq x \leq x_2, |y| \leq H_0, y' > H_0,$$

$$P_n(x; y, -H_0) \quad \text{при } x_1 \leq x \leq x_2, |y| \leq H_0, y' < -H_0,$$

$$f_n(x; H_0, y') \quad \text{при } x_1 \leq x \leq x_2, y > H_0, |y'| < +\infty,$$

$$f_n(x; -H_0, y') \quad \text{при } x_1 \leq x \leq x_2, y < -H_0, |y'| < +\infty.$$

Если в S_0 имеем $|f(x; y, y')| \leq M$, то $|P_n(x; y, y')| < M + 1$ в S_0 , и, следовательно, $|f_n(x; y, y')| < M + 1$ в S . Поэтому функция $f_n(x; y, y')$ непрерывна и ограничена в S и удовлетворяет в S условиям

$$f_n(x; y, y') > -\sigma(|y| + |y'|) - \left\{ \psi(x) + \frac{1}{n} \right\} \quad \text{при } y \geq 0,$$

$$f_n(x; y, y') < \sigma(|y| + |y'|) + \left\{ \psi(x) + \frac{1}{n} \right\} \quad \text{при } y \leq 0.$$

Уравнение

$$y'' = f_n(x; y, y')$$

по доказанной в п. 2 теореме обладает, по крайней мере, одним решением $y = y_n(x)$, удовлетворяющим начальным условиям

$$y_n(x_1) = y_n(x_2) = 0 \quad [y_n''(x) = f_n(x; y_n'(x), y_n(x))].$$

Каждое из этих решений, в силу доказанного в „в“, удовлетворяет неравенствам, получаемым заменой в (24) H на $H + (x_2 - x_1)/n$ ($\psi(x)$ следует заменить на $\psi(x) + 1/n$). Поэтому

$$\begin{aligned} |y_n(x)| &\leq 2 \left[H + \frac{x_2 - x_1}{n} \right] (x_2 - x_1) e^{x_2 - x_1}, \\ |y'_n(x)| &\leq 2 \left[H + \frac{x_2 - x_1}{n} \right] [1 + (x_2 - x_1) e^{x_2 - x_1}]. \end{aligned}$$

Найдется такое n_0 , что при $n > n_0$ имеем $|y_n(x)| < H_0$, $|y'_n(x)| < H_0$ и, кроме того, при $n > n_0$ функция $y_n(x)$ удовлетворяет на всем отрезке $[x_0, x_1]$ уравнению $y_n'' = P_n(x; y, y')$, где $|y_n''(x)| < M + 1$.

Последовательности $\{y_n(x)\}$, $\{y'_n(x)\}$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны, а потому дальнейшее доказательство проходит точно так же, как и в п. 1.

д) В частности, ограничиваясь рассмотрением *решений уравнения*

$$y'' = f(x; y, y'), \quad (18)$$

удовлетворяющих краевым условиям

$$y(x_1) = y(x_2) = 0 \quad (19)$$

(в этом случае не нужно указанное в „б“ преобразование), мы получаем следующую теорему Тонелли [5]:

Пусть функция $f(x; y, y')$ конечна и непрерывна в полосе S , $S: x_1 \leq x \leq x_2$, $-\infty < y < +\infty$, $-\infty < y' < +\infty$ ($x_1 < x_2$), и для любого $\sigma > 0$ можно найти такую функцию $\psi(x)$, положительную и суммируемую на отрезке $[x_1, x_2]$, что для всех точек полосы S имеем

$$\begin{aligned} f(x; y, y') &> -\sigma \{ |y| + |y'| \} - \psi(x) \quad \text{при } y \geq 0 \\ f(x; y, y') &< \sigma \{ |y| + |y'| \} + \psi(x) \quad \text{при } y \leq 0. \end{aligned}$$

Тогда найдется, по крайней мере, одно решение уравнения (18), определенное на отрезке $[x_1, x_2]$ и обращающееся в нуль в точках x_1 и x_2 .

е) Другие теоремы были установлены авторами, упомянутыми в „а“, для случая, когда функция $f(x; y, y')$ удовлетворяет неравенству вида

$$|f(x; y, y')| \leq \psi_0(y) y'^2 + \psi_1(x),$$

где функции $\psi_0(y)$, $\psi_1(x)$ неотрицательны и суммируемы соответственно в $(-\infty, +\infty)$ и $[x_1, x_2]$. Для подробного ознакомления мы отсылаем читателя к работам этих авторов¹⁾.

1) Относительно исследования (включая теоремы существования и единственности) первой краевой задачи для уравнения (18), когда $f(x; y, y')$ удовлетворяет условию $|f(x; y, y')| \leq A y'^2 + B$, см. С. Н. Бернштейн [1]. (Впервые эти результаты опубликованы в 1910 г.) — Прим. ред.

§ 8. Теоремы существования и единственности Каратеодори

1. Теоремы существования и единственности Каратеодори для нормальных систем дифференциальных уравнений. а) При изучении теорем существования для систем дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x; y_1, y_2, \dots, y_m) \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

мы требовали непрерывности функций

$$f_i(x; y_1, y_2, \dots, y_m) \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

откуда следовала и непрерывность первых производных от искомых функций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$. Хан ([1], стр. 326) и Каратеодори ([1], стр. 665—674) освободились от этого ограничения, заменив дифференциальные уравнения интегральными.

Имеет место следующая теорема существования Каратеодори:
Пусть даны m функций

$$f_i(x; y_1, y_2, \dots, y_m) \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

определенных в полосе S ,

$$S: a < x < b, \quad -\infty < y_i < +\infty \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (a < b).$$

Пусть эти функции при постоянных y_1, y_2, \dots, y_m являются измеримыми функциями от x на промежутке (a, b) , а при заданном значении x из промежутка (a, b) — непрерывными функциями от (y_1, y_2, \dots, y_m) .

Пусть, далее, существует неотрицательная функция $M(x)$, суммируемая на любом отрезке, лежащем в промежутке (a, b) , и такая, что для любой точки полосы S имеем

$$|f_i(x; y_1, y_2, \dots, y_m)| \leq M(x) \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (A)$$

Тогда для любой точки $(x^0; y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0)$ полосы S существуют m абсолютно непрерывных функций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$, которые во всех точках промежутка (a, b) удовлетворяют системе интегральных уравнений

$$y_i(x) = y_i^0 + \int_{x^0}^x f_i(t; y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)) dt \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (1)$$

а следовательно, удовлетворяют почти всюду (т. е. всюду, за исключением множества меры нуль) в промежутке (a, b) системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x; y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)) \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (2)$$

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, докажем следующую лемму.

Лемма. Пусть функция $f(x; y_1, y_2, \dots, y_m)$ определена в полосе S ,

$$S: a < x < b, -\infty < y_i < +\infty \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

и при постоянных y_1, y_2, \dots, y_m измерима относительно x в $a < x < b$, а при заданных $x, y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_m$ непрерывна относительно y_i ($i = 1, 2, \dots, m$).

Пусть, далее,

$$|f(x; y_1, y_2, \dots, y_m)| \leq M(x),$$

где функция $M(x)$ суммируема в $a < x < b$, и пусть функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$ измеримы в промежутке (a, b) . Тогда функция $f(x; \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x))$ суммируема в (a, b) .

Утверждение справедливо при $m = 1$.

В самом деле, если $\varphi_1(x) = \alpha$, где α постоянная величина, то функция $f(x; \alpha)$ измерима по предположению.

Если же функция $\varphi_1(x)$ не постоянна, то существует последовательность $\{\bar{\varphi}_n(x)\}$ измеримых функций, каждая из которых принимает лишь конечное число значений и таких, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\varphi}_n(x) = \varphi_1(x)$, причем функции $f(x; \bar{\varphi}_n(x))$ измеримы ¹⁾.

Так как функция $f(x; y_1)$ непрерывна по y_1 , то $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x; \bar{\varphi}_n(x)) = f(x; \varphi_1(x))$, а так как последовательность $\{f(x; \bar{\varphi}_n(x))\}$ составлена из измеримых функций, то и функция $f(x; \varphi_1(x))$ измерима ²⁾. Из неравенства $|f(x; \varphi_1(x))| \leq M(x)$ следует, кроме того, суммируемость функции $f(x; \varphi_1(x))$.

Предположим теперь, что теорема доказана для m функций, и докажем ее для случая, когда число функций равно $m+1$. Функция $f(x; \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x), \bar{\varphi}_{m+1}(x))$, где $\bar{\varphi}_{m+1}(x)$ измерима и принимает лишь конечное число значений, также измерима. Если последовательность функций $\{\bar{\varphi}_n(x)\}$ такова, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\varphi}_n(x) = \varphi_{m+1}(x)$, то

рассуждения, аналогичные проведенным выше, показывают, что и функция $f(x; \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x), \varphi_{m+1}(x))$ измерима, а неравенство $|f(x; \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x), \varphi_{m+1}(x))| \leq M(x)$ влечет за собой суммируемость функции f .

Докажем теперь сформулированную выше теорему, следуя изложенному нами в гл. I, § 6, п. 3, методу Тонелли доказательства теорем существования. Мы ограничимся рассмотрением полуоткрытого

¹⁾ См. И. П. Натансон [1], стр. 93. — Прим. перев.

²⁾ См. там же, стр. 85. — Прим. перев.

промежутка $x^0 \leq x < x^0 + \delta$, $\delta = b - x^0$, так как для $x^0 - \delta < x \leq x^0$, $\delta = x^0 - a$ доказательство проводится аналогично.

Определим для любого натурального числа n функции $y_1^{(n)}(x)$, $y_2^{(n)}(x)$, ..., $y_m^{(n)}(x)$, $x^0 \leq x < x^0 + \delta$, по следующему закону:

$$y_i^{(n)}(x) = y_i^0 \text{ при } x^0 \leq x \leq x^0 + \delta/n^1),$$

$$y_i^{(n)}(x) = y_i^0 + \int_{x^0}^{x-\delta/n} f_i(t; y_1^{(n)}(t), y_2^{(n)}(t), \dots, y_m^{(n)}(t)) dt^2)$$

при $x^0 + \delta/n \leq x < x^0 + \delta$ и $i = 1, 2, \dots, m$.

Тогда

$$\left| y_i^{(n)}(x') - y_i^{(n)}(x'') \right| = \\ = \left| \int_{x^0 - \delta/n}^{x'' - \delta/n} f_i(t; y_1^{(n)}(t), y_2^{(n)}(t), \dots, y_m^{(n)}(t)) dt \right| \leq \left| \int_{x^0 - \delta/n}^{x'' - \delta/n} M(t) dt \right|.$$

В силу абсолютной непрерывности интеграла $\int M(t) dt$ функции последовательностей $\{y_1^{(n)}(x)\}$, $\{y_2^{(n)}(x)\}$, ..., $\{y_m^{(n)}(x)\}$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны на любом отрезке I из $[x^0, x^0 + \delta]$. Поэтому из этих последовательностей можно извлечь подпоследовательности

$$\{y_1^{(\lambda_n)}(x)\}, \{y_2^{(\lambda_n)}(x)\}, \dots, \{y_m^{(\lambda_n)}(x)\}, \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots,$$

которые равномерно сходятся в I к непрерывным функциям

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x),$$

удовлетворяющим системе (1).

В самом деле, имеем

$$y_i^{(\lambda_n)}(x) = y_i^0 + \int_{x^0}^x f_i(t; y_1^{(\lambda_n)}(t), y_2^{(\lambda_n)}(t), \dots, y_m^{(\lambda_n)}(t)) dt - \\ - \int_{x^0 - \delta/\lambda_n}^x f_i(t; y_1^{(\lambda_n)}(t), y_2^{(\lambda_n)}(t), \dots, y_m^{(\lambda_n)}(t)) dt.$$

Но второй интеграл не превосходит по абсолютной величине значения $\left| \int_{x^0 - \delta/\lambda_n}^x M(t) dt \right|$ и стремится к нулю, когда $n \rightarrow \infty$ (равномерно

¹⁾ При $n=1$ мы рассматриваем $x^0 \leq x < x^0 + \delta$.

²⁾ В силу доказанной леммы интегралы, входящие в эту формулу, имеют смысл.

относительно x); кроме того, при любом t имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(t; y_1^{(\lambda_n)}(t), y_2^{(\lambda_n)}(t), \dots, y_m^{(\lambda_n)}(t)) = f_i(t; y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)).$$

В силу условия (A) при $n \rightarrow \infty$ можно перейти к пределу под знаком первого интеграла¹⁾, откуда и вытекает, что полученные функции удовлетворяют системе (1).

б) Теорема единственности Каратеодори формулируется следующим образом:

Пусть выполняются условия предыдущей теоремы и пусть функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$ образуют решение системы (2), удовлетворяющее условиям

$$y_i(x^0) = y_i^0 \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (3)$$

Если существует такая функция $N(x)$, суммируемая на каждом отрезке, лежащем внутри (a, b) , что для любой совокупности m чисел $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_m$ имеем при $a < x < b$

$$\begin{aligned} |f_i(x; \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_m) - f_i(x; y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x))| &\leq \\ &\leq N(x) [|\bar{y}_1 - y_1(x)| + |\bar{y}_2 - y_2(x)| + \dots + |\bar{y}_m - y_m(x)|] \quad (4) \\ &\quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned}$$

(условие Липшица), то решение системы (2), удовлетворяющее начальным условиям (3), единственно.

Пусть, в самом деле, $\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x), \dots, \bar{y}_m(x)$ — любая система непрерывных функций, удовлетворяющих системе интегральных уравнений

$$\bar{y}_i(x) = y_i^0 + \int_a^x f_i(t; \bar{y}_1(t), \bar{y}_2(t), \dots, \bar{y}_m(t)) dt \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (1')$$

Докажем, что при $x^0 \leq x < b$

$$\bar{y}_i(x) = y_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (5)$$

(аналогично рассматривается случай $a < x \leq x^0$).

Положим

$$\nu(x) = |\bar{y}_1(x) - y_1(x)| + \dots + |\bar{y}_m(x) - y_m(x)| \quad (6)$$

и обозначим через $\mu(\xi)$ наибольшее значение $\nu(x)$ на отрезке $[x^0, \xi]$. Предположим, что равенство (5) выполняется не во всех точках полуоткрытого промежутка $[x^0, b)$. Тогда найдется точка ξ этого

¹⁾ См. И. П. Натансон [1], стр. 134. — Прим. перев.

полуоткрытого промежутка, в которой $\mu(\xi) > 0$. Обозначим через ξ^0 нижнюю грань значений ξ , для которых $\mu(\xi) > 0$. Так как функция $\mu(\xi)$ непрерывна и не убывает, то

$$\mu(\xi^0) = 0, \text{ где } x^0 \leq \xi^0 < b,$$

и

$$\mu(\xi) > 0 \text{ при } \xi^0 < \xi < b. \quad (7)$$

Пусть ξ — любое число, лежащее между ξ^0 и b , а ζ — точка отрезка $[x^0, \xi]$, в которой $v(x)$ принимает наибольшее значение. Тогда

$$v(\zeta) = \mu(\xi), \quad (8)$$

а так как $v(x)$ равно нулю при $x^0 \leq x \leq \xi^0$, то

$$\xi^0 < \zeta \leq \xi. \quad (9)$$

В силу того, что $\bar{y}_i(\xi^0) = y_i(\xi^0)$ при $i = 1, 2, \dots, m$, из равенств (1) и (1') следует соотношение

$$\begin{aligned} \bar{y}_i(\zeta) - y_i(\zeta) &= [\bar{y}_i(\zeta) - \bar{y}_i(\xi^0)] - [y_i(\zeta) - y_i(\xi^0)] = \\ &= \int_{\xi^0}^{\xi} [f_i(t; \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_m) - f_i(t; y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t))] dt. \end{aligned}$$

Тогда из (4) и (6) вытекает неравенство

$$|\bar{y}_i(\zeta) - y_i(\zeta)| \leq \int_{\xi^0}^{\zeta} N(t) v(t) dt \leq v(\zeta) \int_{\xi^0}^{\zeta} N(t) dt,$$

и из (8) и (9) получаем

$$|\bar{y}_i(\zeta) - y_i(\zeta)| \leq \mu(\xi) \int_{\xi^0}^{\xi} N(t) dt.$$

Суммируя эти неравенства по i от 1 до m и принимая во внимание (8), получаем

$$\mu(\xi) \leq m \mu(\xi) \int_{\xi^0}^{\xi} N(t) dt.$$

Следовательно,

$$\int_{\xi^0}^{\xi} N(t) dt \geq 1/m$$

для любого ξ , лежащего между ξ^0 и b . Но это невозможно, так как предел левой части равен нулю, когда $\xi \rightarrow \xi^0$.

Полученное противоречие и показывает, что равенство (5) имеет место для всех значений x , удовлетворяющих неравенствам $x^0 \leq x \leq b$. Теорема доказана.

2. Теоремы существования и единственности для систем дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных. а) Грейвс и Гильдебрандт [1], а позже Мания [1] в связи с исследованиями по вариационному исчислению изучали в направлении теорем Каратеодори системы дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных. Мы укажем формулировку одной из теорем существования и одной из теорем единственности Мания, обобщающих основную теорему о неявных функциях.

б) Т е о р е м а с у щ е с т в о в а н и я . П у с т ь

1) ф у н к ц и и $f_i(x; u_1, u_2, \dots, u_m; v_1, v_2, \dots, v_m)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) определены при

$$a \leq x \leq b, \quad |u_k - u_k^0(x)| < \sigma, \quad |v_k - v_k^0(x)| < \sigma \quad (k = 1, 2, \dots, m),$$

где a и b — некоторые числа, $a < b$, $\sigma > 0$, функции $u_k^0(x)$ ($k = 1, 2, \dots, m$) непрерывны, а функции $v_k^0(x)$, ($k = 1, 2, \dots, m$) измеримы и ограничены на отрезке $[a, b]$;

2) функции $f_i(x; u_1, u_2, \dots, u_m; v_1, v_2, \dots, v_m)$ и их частные производные первого порядка по v_1, v_2, \dots, v_m непрерывны по $u_1, u_2, \dots, u_m; v_1, v_2, \dots, v_m$ равномерно относительно x и ограничены во всей области определения;

3) каковы бы ни были измеримые на отрезке $[a, b]$ функции $u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x); v_1(x), v_2(x), \dots, v_m(x)$, где

$$|u_k(x) - u_k^0(x)| < \sigma, \quad |v_k(x) - v_k^0(x)| < \sigma \quad (k = 1, 2, \dots, m),$$

функции $f_i(x; u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x); v_1(x), v_2(x), \dots, v_m(x))$ измеримы на отрезке $[a, b]$;

4) пусть, кроме того, выполняется равенство

$$f_i(x; u_1^0(x), u_2^0(x), \dots, u_m^0(x); v_1^0(x), v_2^0(x), \dots, v_m^0(x)) = 0 \\ (i = 1, 2, \dots, m);$$

5) пусть, наконец, якобиан

$$D(x) = \left. \frac{\partial [f_1, f_2, \dots, f_m]}{\partial [v_1, v_2, \dots, v_m]} \right|_{[u_1 = u_1^0(x), \dots, u_m = u_m^0(x); v_1 = v_1^0(x), \dots, v_m = v_m^0(x)]}$$

ограничен снизу, т. е. существует такое положительное число μ , что $|D(x)| > \mu$.

При этих предположениях можно найти такие положительные числа δ и ϵ , $0 < \delta < \epsilon < \sigma$, что если \bar{x} — любая точка, выбранная на отрезке $[a, b]$ и если $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m)$ — совокупность m чисел, удовлетворяющих неравенствам

$$|\bar{u}_k - u_k^0(\bar{x})| < \delta \quad (k = 1, 2, \dots, m),$$

то система дифференциальных уравнений

$$f_i(x; u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x); u'_1(x), u'_2(x), \dots, u'_m(x)) = 0 \quad (10)$$

$$(i = 1, 2, \dots, m)$$

обладает почти всюду в некоторой окрестности точки \bar{x} , по крайней мере, одним решением $u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x)$. В этом решении функции $u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x)$ абсолютно непрерывны и удовлетворяют соотношениям

$$\bar{u}_k(\bar{x}) = \bar{u}_k, \quad |u_k(x) - \bar{u}_k^0(x)| < \delta, \quad |u'_k(x) - \bar{v}_k^0(x)| < \varepsilon,$$

$$(k = 1, 2, \dots, m)^1.$$

в) Теорема единственности. Пусть выполнены условия предыдущей теоремы и пусть существует функция $N(x)$, интегрируемая в смысле Лебега на отрезке $[a, b]$ и такая, что для любой совокупности непрерывных функций $\bar{u}_k(x), \tilde{u}_k(x)$, $(k = 1, 2, \dots, m)$, удовлетворяющих неравенствам

$$|\bar{u}_k(x) - \bar{u}_k^0(x)| < \sigma, \quad |\tilde{u}_k(x) - \bar{u}_k^0(x)| < \sigma, \quad (k = 1, 2, \dots, m),$$

и совокупности функций $v_k(x)$ $k = 1, 2, \dots, m$, удовлетворяющих неравенствам

$$|v_k(x) - \bar{v}_k^0(x)| < \delta \quad (k = 1, 2, \dots, m),$$

имеем на всем отрезке $[a, b]$

$$|f_i(x; \bar{u}_1(x), \dots, \bar{u}_m(x); v_1(x), \dots, v_m(x)) - f_i(x; \tilde{u}_1(x), \dots, \tilde{u}_m(x); v_1(x), \dots, v_m(x))| \leq N(x) (|\bar{u}_1(x) - \tilde{u}_1(x)| + \dots + |\bar{u}_m(x) - \tilde{u}_m(x)|),$$

$$(i = 1, 2, \dots, m).$$

Тогда решение системы (10), существование которого утверждается сформулированной в „б“ теоремой, единственно.

ЛИТЕРАТУРА

Для удобства читателя приведем литературу по вопросам, рассмотренным в этой главе.

K § 1—2

Bompiani E., Rend. Acc. Naz. dei Lincei (6), **1** (1925), 298—302.

Brouwier L., Mémoires Liège, **14**, № 15 (1928).

Charpentier M., Bull. des Sciences Math. (2), **54** (1930), 203—209; Mathematica (Cluj), **5** (1931), 65—99; Bull. of the Am. Math. Soc., **38** (1932), 849—854.

Haviland E. K., Am. Journ. of Math., **54** (1932), 632—634.

Hoheisel G., Jahrb. der Deutsch. Math. Ver., **42** (1933), 33—42.

¹⁾ Относительно частного случая такого уравнения $f(x; u, u') = 0$, где $f_u' = 0$, см. гл. IX, § 2.

- Hukuhara M., Jap. Journ. of Math., 5 (1928), 239—251; Journ. of the Fac. of Sci. Hokkaido Imp. Un. (1), 5 (1937), 107—122.
- Kamke E., Acta Math., 52 (1928), 327—339; Tôhoku Math. Journ., 31 (1929), 72—76.
- Kitagawa T., Jap. Journ. of Math., 9 (1932), 153—160.
- Inaba M., Proc. Phys. Math. Soc. Japan (3), 11 (1929), 69—72; Jap. Journ. of Math., 10 (1934), 169—176.
- Iyanaga S., Jap. Journ. of Math., 5 (1928), 253—257.
- Lavrentieff M., Math. Zeitschr., 23 (1925), 197—209.
- Montel P., Ann. Sc. de l'Éc. Norm. Sup., 24 (1907), 233—334; Bull. des Sciences Math., 50 (1926), 205—217.
- Müller M., Jahr. der Deutsch. Math. Ver., 37 (1928), 33—48.
- Nagumo M., Jap. Journ. of Math., 3 (1926), 107—112; 7 (1930), 140—160.
- Nakano H., Proc. Phys. Math. Soc. Japan, 14 (1932), 41—43.
- Nikliborc W., Studia Math., 1 (1929), 201—209.
- Nikodym O., Rend. Sem. Padova, 6 (1935), 21—43.
- Okamura H., Memoirs of the Coll. of Sc. Kyôto Imp. Un., 14 (1931), 85—96; 17 (1934), 319—328.
- Orlicz W., Bull. Int. Acad. Polonaise (1932), 221—228.
- Osgood W. F., Monatsh. für Math. und Phys., 9 (1898), 331—345.
- Peano G., Atti della R. Acc. Sc., Torino, 21 (1885—1886), 437—445; Math. Ann., 37 (1890), 182—228.
- Perron O., Math. Ann., 76 (1915), 471—484.
- Pini E., Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei (6), 9 (1929), 625—630; Rend. R. Ist. Lombardo Sc. e Lett. (2), 63 (1930), 531—534.
- Rosenblatt A., C. Rend. Ac. Sc., 186 (1928), 1797—1799.
- Satô T., Jap. Journ. of Math., 13 (1936), 1—6; Proc. of the Imp. Acad. of Japan, 4 (1928), 326—329.
- Scorza-Dragoni G., Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei (6), 9 (1929), 378—382; 14 (1931), 7—11; Rend. Circ. Mat. Palermo, 54 (1930), 430—448.
- Tamarkine J., Math. Zeitschr., 16 (1923), 207—213.
- Tonelli L., Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei (6), 1 (1925), 272—277.
- Vander Lyng G., Ann. of Math. (2), 37 (1936), 642—644.
- Watanabe Y., Jap. Journ. of Math., 7 (1930), 209—214.
- Wazewski T., Ann. Soc. Pol. Math., 12 (1934), 72—80.
- Yosie T., Proc. Phys. Math. Soc. Japan (3), 8 (1926), 16—20; Jap. Journ. of Math., 2 (1926), 161—173.

K § 3

- Barbuti U., Rend. Acc. Naz. dei Lincei (8), 3 (1947), 272—276.
- Digel E., Math. Zeitschr., 39 (1934), 157—160.
- Giuliano L., Boll. Un. Mat. It. (2), 2 (1940), 221—227; Rend. R. Acc. d'Italia (7), 1 (1940), 330—336.
- Hokari S., Proc. Phys. Math. Soc. Japan (3), 14 (1932), 299—333.
- Hukuhara M., Jap. Journ. of Math., 5 (1929), 345—350; 6 (1930), 269—299; 7 (1930), 173—186; Proc. of the Imp. Acad. of Japan, 6 (1930), 360—362; Proc. Phys. Math. Soc. Japan (3), 12 (1930), 233—239.
- Kamke E., Math. Zeitschr., 32 (1930), 101—107; Sitz. der Heidelberger Ak. der Wiss. Math. nat. Klasse (1931), 17; Jahr. der Deutsch. Math. Ver., 41 (1932), 158—164; Acta Math., 58 (1932), 57—85.
- Kampen E. R., Am. Journ. of Math., 59 (1937), 144—152.
- Kneser H., Sitzber. der kgl. Preuss. Ak. der Wiss. zu Berlin (1923), 171—174.
- Marchaud M., Bull. Soc. Math. de France, 62 (1934), 1—38; Mathematica (Cluj), 10 (1935), 5—31.
- Mayrhofer K., Monatsh. für Math. und Phys., 41 (1934), 201—215.
- Mie G., Math. Ann., 48 (1893), 553—568.
- Minzonii A., Rend. Sem. Padova, 9 (1938), 142—149.

- Müller M., Sitz. der Heidelberger Ak. der Wiss., Math. nat. Klasse, **9** (1927), 38; Math. Zeitschr., **26** (1927), 619—645; **28** (1928), 349—355; **41** (1936), 163—175.
- Nagumo M., Jap. Journ. of Math., **4** (1928), 215—230; **5** (1928), 97—125; **6** (1929), 89—118; Proc. of the Imp. Acad. of Japan, **12** (1930), 233—239.
- Perron O., Math. Ann., **78** (1918), 378—384; **95** (1926), 98—101; Math. Zeitschr., **28** (1928), 216—219.
- Rosenblatt A., Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei (6), **8** (1928), 41—45.
- Scorza-Dragoni G., Rend. R. Ist. Lombardo Sc. e Lett., **64** (1931), 659—682.
- Zwirner G., Rend. Sem. Mat. di Roma (4), **1** (1937), 235—252.

K § 4

- Hikosaka Noboru H., Proc. Phys. Math. Soc. Japan (3), **2** (1929), 73—83.
- Takahashi S., Tôhoku Math. Journ., **34** (1931), 249—256.
- Zawischa K., Monatsh. für Math. und Phys., **37** (1930), 103—124.
- Zwirner G., Rend. Sem. Padova, **15** (1946), 33—39.

K § 5

- Cinquini S., Boll. Un. Mat. It., **17** (1938), 99—105.
- Hammerstein H., Acta Math., **54** (1880), [117—176], 118—122.
- Hirschfeld H. O., Proc. of the Cambr. Phil. Soc., **32** (1936), 86—95.
- Picard E., Journ. de Math. pur. et appl. (4), **9** (1893), 217—271; Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles, Paris, 1930, p. 1—14.

K § 6—7

- Birkhoff G. D., Trans. of the Am. Math. Soc., **28** (1922), 96—115, 109.
- Caccioppoli R., Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei (6), **11** (1930), 794—799; Rend. Sem. Mat. Padova, **3** (1932), 1—15; Rend. Sem. Mat. di Roma (3), **1** (1933), 13—22, 20.
- Cinquini S., Annali della R. Sc. Norm. Sup. di Pisa (2), **8** (1939), 1—22.
- Hammerstein A., Journ. für die reine und ang. Math., **168** (1932), 37—43; Sitzber. Berlin Math. Ges., **30** (1932), 3—10.
- Hukuhara M., Jap. Journ. of Math., **5** (1929), 351—367.
- Gronwall T. H., Ann. of Math., **28** (1927), 355—364.
- Groppi I., Boll. Un. Mat. It., **17** (1938), 179—182.
- Kellogg O. D., Trans. of the Am. Math. Soc., **23** (1932), 96—115, 109.
- Mambriani A., Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei (6), **9** (1929), 620—622.
- Miranda C., Mem. R. Acc. d'Italia, **5** (1934), 285—322, 291.
- Nagumo M., Proc. Phys. Math. Soc. Japan (3), **19** (1937), 861—866.
- Nikliborc W., Ak. der Wiss. zu Leipzig, **82** (1930), 227—242.
- Rosenblatt A., Bull. des Sciences Math., **57** (1933), 100—106; C. Rend. Ac. Sc., **196** (1933), 593—594; Bull. Soc. Math. Grèce, **14** (1933), 7—15.
- Satô T., Proc. of the Imp. Acad. of Japan, **13** (1937), 348—351.
- Scorza-Dragoni G., Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei (6), **9** (1929), 623—625; **6**, **22** (1935), 44—48; Giorn. di Mat. di Battaglini, **69** (1931), 77—112; Math. Ann., **105** (1931), 133—143; Boll. Un. Mat. It., **14** (1935), 225—230; Rend. Sem. Mat. di Roma (4), **2** (1938), 177—215; 253—254, 255—275.
- Severini C., Atti R. Acc. Sc., Torino, **40** (1905), 858—869.
- Tonelli L., Boll. Un. Mat. It., **6** (1927), 126—128; Annali della R. Sc. Norm. Sup. di Pisa (2), **8** (1939), 75—88.

K § 8

- Carathéodory C., Vorlesungen über reelle Funktionen, 2-te Aufl., 1927, S. 665—674.
- Hahn H., Monatsh. für Math. und Phys., **14** (1903), 325—342, 326.
- Hildebrandt T. H., Graves L. M., Trans. of the Am. Math. Soc., **29** (1927), 127—153.
- Manià B., Rend. R. Ist. Lombardo Sc. e Lett. (2), **69** (1936), 461—476.

ГЛАВА IX

ОСОБЫЕ ТОЧКИ. ОСОБЫЕ РЕШЕНИЯ

§ 1. Особые точки дифференциальных уравнений первого порядка вида $y' = \frac{\gamma x + \delta y}{\alpha x + \beta y}$

1. Общие замечания. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}, \quad (1)$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ являются голоморфными функциями от комплексных переменных x и y в окрестности некоторой точки (x_0, y_0) плоскости x, y . Если $P(x_0, y_0) \neq 0$, то, по теореме Коши (гл. III, § 1, п. 3), существует одно и только одно решение $y(x)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$ и голоморфное в окрестности точки x_0 . Эта теорема неприменима, если $P(x_0, y_0) = 0$, т. е. если дробь $Q(x, y)/P(x, y)$ имеет особенность в точке (x_0, y_0) , или, как говорят, если точка (x_0, y_0) является особой точкой для уравнения (1).

Предположим сначала, что

$$P(x_0, y_0) = 0, \quad Q(x_0, y_0) \neq 0. \quad (2)$$

В следующем пункте мы рассмотрим случай, когда $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$.

Вместо (1) рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}. \quad (3)$$

Так как функция $P(x, y)/Q(x, y)$ голоморфна в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) , то уравнение (3) обладает одним и только одним решением $x(y)$, удовлетворяющим начальному условию $x(y_0) = x_0$ и голоморфным в некоторой окрестности точки y_0 . Это решение имеет поэтому вид

$$x - x_0 = a_1(y - y_0) + a_2(y - y_0)^2 + \dots \quad (4)$$

Из уравнения (3) и первого из условий (2) следует, что $0 = (dx/dy)_{y=y_0} = a_1$. Если $x - x_0$ не равно тождественно нулю и a_m — первый отличный от нуля коэффициент в (4), то

$$x - x_0 = a_m(y - y_0)^m + a_{m+1}(y - y_0)^{m+1} + \dots, \quad (a_m \neq 0),$$

и, следовательно¹⁾,

$$y - y_0 = e^r [b_1(x - x_0)^{1/m} + b_2(x - x_0)^{2/m} + \dots],$$

где

$$\epsilon = \cos \frac{2\pi}{m} + i \sin \frac{2\pi}{m}, \quad r = 0, 1, 2, \dots, m-1.$$

В этом случае точка (x_0, y_0) является алгебраической критической точкой решения, и при обходе вокруг точки x_0 происходит перестановка m выражений $y - y_0$. Эти выражения являются m ветвями одной и той же аналитической функции от $(x - x_0)$.

Можно доказать, что за исключением этих m ветвей не существует решений, стремящихся к y_0 , когда $x \rightarrow x_0$ вдоль некоторого пути (Кенигсбергер [1], стр. 350, Айнс [1], стр. 390).

Если же в (4) $x - x_0 \equiv 0$, то при любом значении y имеем $P(x_0, y) = 0$, т. е. уравнение (3) имеет решение $x = x_0$, а уравнение (1) не имеет решений $y(x)$, удовлетворяющих уравнению в окрестности точки x_0 .

Приведем примеры, разъясняющие положение вещей в этом случае.

Решение уравнения $dy/dx = 1/x$ имеет вид $y(x) = c + \ln x$, и в окрестности точки $x = 0$ функция $y(x)$ имеет бесконечное множество значений, отличающихся друг от друга на целое кратное $2\pi i$; в этом случае решение $y(x)$ имеет в начале координат логарифмическую особенность.

Решение уравнения $dy/dx = (y - 1)/x^2$ имеет вид $y = 1 + ce^{-1/x}$ (c — постоянная величина); при $c \neq 0$ начало координат является существенно особой точкой для этого решения.

2. Точки неопределенности. Канонические формы. Предположим, что

$$P(x_0, y_0) = 0, \quad Q(x_0, y_0) = 0, \quad (5)$$

и что в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) имеем $P(x, y) \neq 0$, $Q(x, y) \neq 0$, т. е., как говорят, что точка (x_0, y_0) является изолированной точкой неопределенности функции $Q(x, y)/P(x, y)$.

Перенесем начало координат в точку (x_0, y_0) ; пусть разложение функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ в степенные ряды начинается с членов вида

$$\left. \begin{aligned} P(x, y) &= \alpha x + \beta y + \dots \\ Q(x, y) &= \gamma x + \delta y + \dots \end{aligned} \right\}, \quad (6_1)$$

причем

$$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0. \quad (6_2)$$

Покажем, что путем соответствующего линейного преобразования независимой переменной и искомой функции можно привести уравнение (1) к одной из двух канонических форм.

1) См. Б. А. Фукс и В. И. Левин [1], стр. 48. — Прим. перев.

Положим

$$x_1 = ax + by, \quad y_1 = cx + dy, \quad (7)$$

тогда

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{cP + dQ}{aP + bQ} = \frac{(ca + d\gamma)x + (c\beta + d\delta)y + \dots}{(a\alpha + b\gamma)x + (a\beta + b\delta)y + \dots}.$$

Если можно выбрать числа a, b, c, d так, чтобы

$$a\alpha + b\gamma = \lambda a, \quad a\beta + b\delta = \lambda b; \quad (8_1)$$

$$c\alpha + d\gamma = \mu c, \quad c\beta + d\delta = \mu d, \quad (8_2)$$

то уравнение (1) примет канонический вид

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{\mu y_1 + \dots}{\lambda x_1 + \dots}. \quad (9)$$

Уравнения систем (8_1) и (8_2) линейны и однородны относительно пар $a, b; c, d$. Их можно записать в виде

$$(\alpha - \lambda)a + \gamma b = 0, \quad \beta a + (\delta - \lambda)b = 0; \quad (10_1)$$

$$(\alpha - \mu)c + \gamma d = 0, \quad \beta c + (\delta - \mu)d = 0. \quad (10_2)$$

По известной теореме эти системы имеют ненулевые решения тогда и только тогда, когда λ и μ являются корнями характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} \alpha - \rho & \gamma \\ \beta & \delta - \rho \end{vmatrix} = 0. \quad (11)$$

Если в (6_1) $\beta = \gamma = 0$, то уравнение (1) уже имеет канонический вид (9). Предположим теперь, что равенство $\beta = \gamma = 0$ не имеет места, и рассмотрим сначала случай, когда уравнение (11) имеет различные корни λ, μ , т. е. случай, когда

$$\Delta = (\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma \neq 0. \quad (12)$$

В этом случае из систем (10_1) и (10_2) можно найти пары (a, b) , (c, d) (каждую из них с точностью до постоянного множителя), причем легко видеть, что $ad - bc \neq 0$, т. е. что преобразование (7) не вырождено. В самом деле, предположим, например, что $\beta \neq 0$; так как b и a (c и d) не равны одновременно нулю, то $b \neq 0, d \neq 0$, а следовательно $a/b = (\lambda - \delta)/\beta, c/d = (\mu - \delta)/\beta$ и $a/b \neq c/d$.

Таким образом, если выполняется неравенство (12), то с помощью линейного преобразования (7) уравнение (1) можно привести к каноническому виду (9).

Докажем теперь, что если

$$\Delta = (\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma = 0, \quad (13)$$

т. е. если характеристическое уравнение (11) имеет кратный корень $\lambda = (\alpha + \delta)/2$, то уравнение (1) можно привести к каноническому виду

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{\lambda(x_1 + y_1) + \dots}{\lambda x_1 + \dots}. \quad (14)$$

Для этого нам нужно выбрать числа a, b, c, d так, чтобы

$$(\alpha - \lambda)a + \gamma b = 0, \quad \beta a + (\delta - \lambda)b = 0, \quad [\lambda = (\alpha + \delta)/2] \quad (15)$$

и

$$\lambda(ax + by) + \lambda(cx + dy) \equiv (c\alpha + d\gamma)x + (c\beta + d\delta)y. \quad (16)$$

Из системы (15) можно найти не равные одновременно нулю числа a и b , определенные с точностью до постоянного множителя. Уравнение же (16) распадается на два уравнения

$$(\alpha - \lambda)c + \gamma d = a\lambda, \quad \beta c + (\delta - \lambda)d = b\lambda, \quad (17)$$

из которых одно, как легко видеть, является следствием другого.

Так как $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, то из уравнения (11) следует, что $\lambda \neq 0$, если, кроме того, например, $\beta \neq 0$, то $b \neq 0$. Но c и d удовлетворяют уравнению $\beta c + (\delta - \lambda)d = b\lambda$. Сравнивая это уравнение со вторым уравнением (15) и принимая во внимание, что $b\lambda \neq 0$, убеждаемся в справедливости неравенства $ad - bc \neq 0$. Таким образом, мы доказали, что в любой точке неопределенности функции $P(x, y)/Q(x, y)$, в которой $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, можно привести уравнение к одному из двух канонических видов (9), (14) при помощи линейного преобразования.

3. Уравнение вида $dy/dx = (\gamma x + \delta y)/(\alpha x + \beta y)$ в действительной области. Предположим, что в уравнении (1) функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ являются линейными формами. Тогда это уравнение имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\gamma x + \delta y}{\alpha x + \beta y}, \quad (18)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — действительные числа, $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. В следующем пункте мы изучим поведение действительных решений этого уравнения. Для этого мы выведем в этом пункте канонические формы, к которым можно привести уравнение (18) с помощью линейных действительных преобразований.

В силу изложенного в п. 2 уравнение (18) можно заменить в случае, когда $(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma \neq 0$, уравнением вида

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{\mu y_1}{\lambda x_1} \quad (\mu \neq \lambda), \quad (18_1)$$

где λ и μ — (различные) корни уравнения (11). В случае же, когда $(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma = 0$, уравнение (18) приводится с помощью линейного

действительного преобразования к уравнению

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1}{x_1}. \quad (18_2)$$

Заметим, что если $\Delta = (\alpha - \lambda)^2 + 4\beta\gamma > 0$, то в уравнении (18₁) числа λ и μ действительны и различны, а числа a, b, c, d действительны. Если же $\Delta < 0$, то числа λ и μ , a и c , b и d комплексны и сопряжены. В этом случае ($\Delta < 0$), полагая

$$x_1 = X + iY, \quad y_1 = X - iY, \quad \lambda = \rho_1 + i\rho_2, \quad \mu = \rho_1 - i\rho_2 \quad (\rho_2 \neq 0),$$

получаем из уравнения (18) с помощью невырожденного линейного действительного преобразования уравнение

$$\frac{dY}{dX} = \frac{\rho_2 X + \rho_1 Y}{\rho_1 X - \rho_2 Y}. \quad (18_3)$$

Окончательно: пусть дано уравнение (18), тогда его решения получаются с помощью линейного действительного преобразования из решений уравнений

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mu y}{\lambda x}, \quad [\Delta > 0, \text{ если } \mu \neq \lambda; \Delta = 0, \text{ если } \mu = \lambda], \quad (19_1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\rho_2 x + \rho_1 y}{\rho_1 x - \rho_2 y}, \quad [\rho_2 \neq 0, \Delta < 0], \quad (19_2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x}, \quad [\Delta = 0]. \quad (19_3)$$

4. Классификация Пуанкаре особых точек в действительном случае. Изложим теперь классификацию Пуанкаре ([3], стр. 385) действительных решений уравнения (18).

а) Пусть в уравнении (19₁) λ и μ имеют один и тот же знак (тогда либо $\Delta = 0$, либо $\Delta > 0$, $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$). Меняя, если это необходимо, местами x и y , мы можем считать, что $\mu \geq \lambda$. Одним из решений уравнения (19₁) будет $x = 0$, а остальные решения имеют вид

$$y = c |x|^{\mu/\lambda} \quad (c = \text{const}).$$

Если $\mu > \lambda$, то эти решения изображаются кривыми, касающимися оси x в начале координат (см. фиг. 10), а если $\mu = \lambda$, то $y = cx$ (c — постоянная величина) и интегральные кривые образуют пучок прямых, проходящих через начало координат (см. фиг. 11). Как в том, так и в другом случае говорят, что особая точка в начале координат является *узлом*.

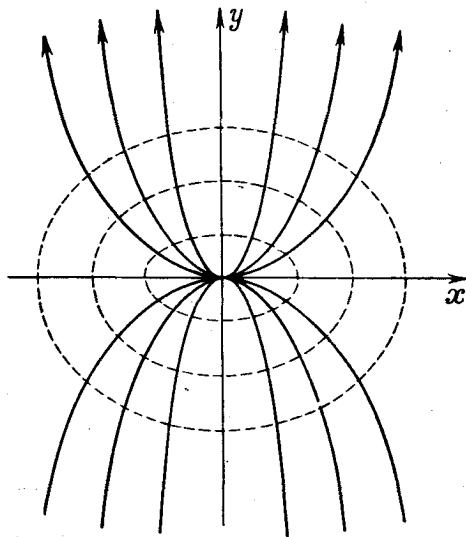
Уравнению (19₁) и полученным сейчас результатам можно дать красивую наглядную интерпретацию. Рассмотрим эллиптический параболоид

$$z = \frac{x^2}{2\mu} + \frac{y^2}{2\lambda} \quad [\mu \geq \lambda > 0] \quad (20)$$

и предположим, что ось z направлена в сторону, противоположную направлению силы тяжести.

Проекциями линий уровня этой поверхности (пересечений ее с плоскостями $z = \text{const}$) на плоскость (x, y) являются эллипсы

$$\frac{x^2}{2\mu} + \frac{y^2}{2\lambda} = c.$$



Фиг. 10. Узел.

Дифференциальное уравнение семейства этих эллипсов имеет вид

$$\frac{x dx}{\mu} + \frac{y dy}{\lambda} = 0. \quad (21)$$

Линии стока параболоида (ортогональные траектории к линиям уровня) проектируются на плоскость (x, y) в линии, ортогональные к эллипсам, следовательно, семейство проекций линий стока удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mu y}{\lambda x}.$$

Из доказанного выше следует, что если параболоид

не является параболоидом вращения, то линии стока проходят через вершину параболоида и касаются там параболы, получающейся при пересечении параболоида с плоскостью (x, z) . Поэтому медленно скатывающиеся по параболоиду капли воды имеют в вершине одно и то же направление движения, за исключением капель, скатывающихся перпендикулярно этому общему направлению.

Если же параболоид является параболоидом вращения ($\mu = \lambda$), то его линии стока являются параболами, получающимися при пересечении параболоида с плоскостями, проходящими через ось z .

б) Пусть в уравнении (19_1) λ и μ имеют различные знаки, т. е. $\Delta > 0$, $\alpha\delta - \beta\gamma < 0$.

Тогда существуют только два решения уравнения (19_1) , проходящих через начало координат: $x = 0$, $y = 0$. Все остальные интегральные кривые имеют уравнение

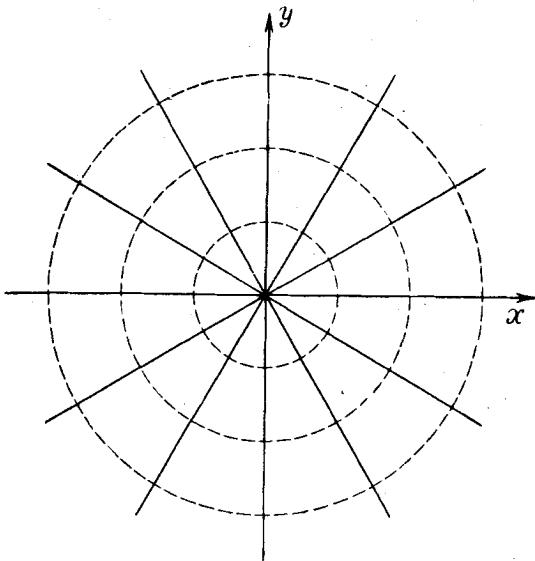
$$|x|^{\mu}|y|^{\lambda}| = c \quad (c = \text{const}),$$

и, следовательно, для любой из этих кривых существует положительное число δ , такое, что все точки данной кривой находятся от начала координат на расстоянии, большем, чем δ ,

Предположим, что $\lambda = -\mu$, и рассмотрим разобранную выше наглядную интерпретацию. В этом случае параболоид будет гиперболическим параболоидом, проекции его линий уровня имеют уравнения

$$x^2 - y^2 = c \quad (c = \text{const}),$$

т. е. образуют семейство равнобочных гипербол, в то время как



Фиг. 11. Узел.

линии стока проектируются в семейство равнобочных гипербол

$$xy = c \quad (c = \text{const}),$$

асимптотами которых являются оси x и y (фиг. 12).

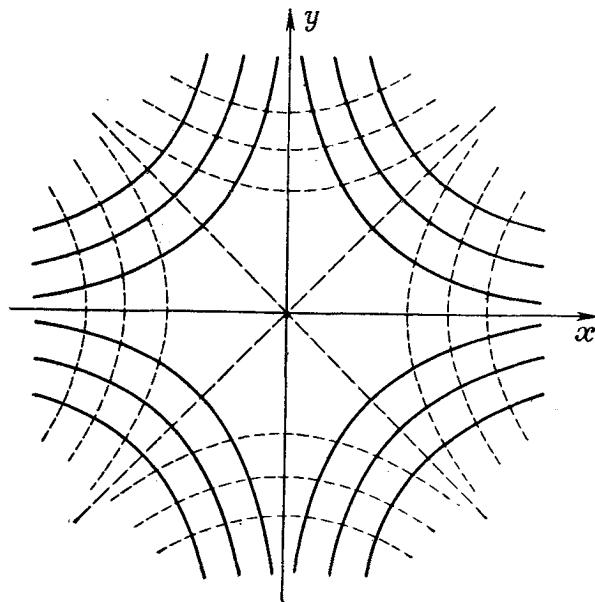
Этим оправдывается название „седло“, которым пользуются для особой точки в начале координат, так как линии уровня седлообразной поверхности имеют вид, изображенный на фиг. 12. Седло характеризуется условиями $\Delta > 0$, $\alpha\delta - \beta\gamma < 0$.

в) Рассмотрим теперь решения уравнения (19₂) ($\Delta < 0$). Если $\alpha + \delta = 0$, то $\rho_1 = 0$, $dy/dx = -x/y$, $d(x^2 + y^2) = 0$,

$$x^2 + y^2 = c \quad (c = \text{const}), \tag{22}$$

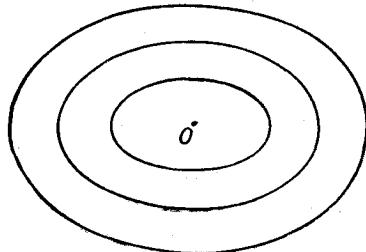
т. е. интегральные кривые являются окружностями, а интегральные кривые исходного уравнения — эллипсами (так как они получаются из интегральных кривых $x^2 + y^2 = c$ с помощью аффинного преобразования).

В этом случае особая точка в начале координат называется *центром*; *центр характеризуется*, таким образом, *двумя условиями* $\Delta < 0$, $\alpha + \delta = 0$ (фиг. 13).



Ф и г. 12. Седло.

г) Предположим теперь, что $\Delta < 0$, $\alpha + \delta \neq 0$. Тогда в уравнении (19₂) ρ_1 и ρ_2 не равны нулю и при переходе к полярным координатам



Ф и г. 13. Центр.

Частью координат, обходя вокруг него, причем, каков бы ни был круг с центром в начале координат, точка при движении по интегральной кривой попадает в этот круг и остается в нем (см. фиг. 14). Говорят, что особая точка в начале координат является *фокусом для рассматриваемого уравнения*.

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

получаем

$$\frac{dr}{r} = \frac{\rho_1}{\rho_2} d\varphi, \quad r = ce^{\frac{\rho_1}{\rho_2} \varphi} (c = \text{const}).$$

Интегральные кривые являются в этом случае *логарифмическими спиральями*; интегральные кривые исходного уравнения также имеют спиралевидную форму. Они асимптотически приближаются к началу координат, обходя вокруг него, причем, каков бы ни был круг с центром в начале координат, точка при движении по интегральной кривой попадает в этот круг и остается в нем (см. фиг. 14). Говорят, что особая точка в начале координат является *фокусом для рассматриваемого уравнения*.

ваемого уравнения; фокус характеризуется тем, что $\Delta < 0$ и $\alpha + \delta \neq 0$.

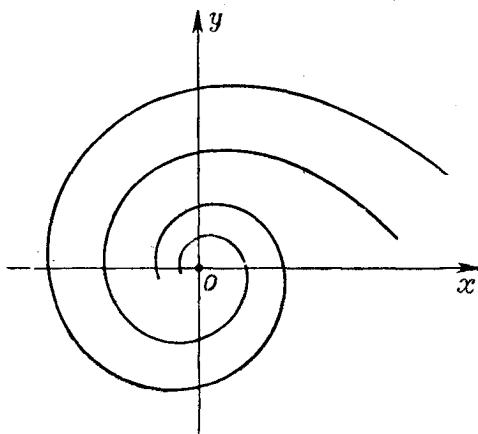
д) Изучим, наконец, решения уравнения (19₃) ($\Delta = 0$)

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{x}.$$

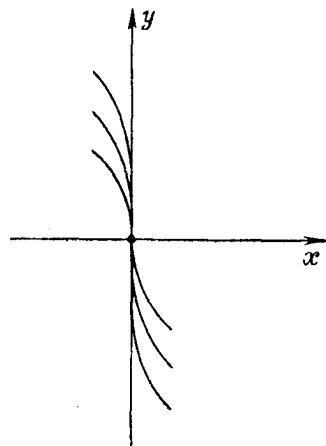
Они имеют вид

$$y = cx + x \ln|x| \quad (c = \text{const}),$$

и потому $\lim_{x \rightarrow 0} y = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} y' = -\infty$, а следовательно, все интегральные



Фиг. 14. Фокус.



Фиг. 15. Узел.

кривые касаются в начале координат оси y (фиг. 15); особая точка в начале координат является *узлом*.

е) Итак, мы доказали следующую теорему:

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y' = \frac{\gamma x + \delta y}{\alpha x + \beta y} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0),$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — действительные числа, $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Тогда начало координат ($x = 0, y = 0$) является особой точкой этого уравнения, а именно

узлом, если $(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma = 0$ или

$$(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma > 0 \quad \text{и} \quad \alpha\delta - \beta\gamma > 0,$$

седлом, если $(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma > 0$ и $\alpha\delta - \beta\gamma < 0$,

фокусом, если $(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma < 0$ и $\alpha + \delta \neq 0$,

центром, если $(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma < 0$ и $\alpha + \delta = 0$,

5. Интегральные кривые уравнения $dy/dx = Q(x, y)/P(x, y)$. Циклы и спирали. Изучение поведения интегральных кривых для уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}, \quad (1)$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — многочлены с действительными коэффициентами от действительных переменных x и y в окрестности *особой точки*, где $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$, было проведено Пуанкаре [3]; позже Бендиксон [1] исследовал случай, когда $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ являются функциями, непрерывными вместе со своими частными производными первого порядка по x и y , а также случай, когда $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ являются голоморфными функциями от x и y и разлагаются в степенные ряды с действительными коэффициентами. Относительно этих исследований мы отсылаем читателя к известным учебникам Пикара [3], т. 3, стр. 1—61, Гурса [1], т. 2, стр. 440—456, библиография на стр. 455, и к книгам Бутру [1] и Дулака [1], [2].

Легко доказать, что:

1) Две различные интегральные кривые дифференциального уравнения (1) могут пересекаться только в особых точках этого уравнения.

2) Кратными точками интегральной кривой уравнения (1) могут быть только особые точки этого уравнения. В самом деле, если точка (x_0, y_0) не является особой точкой для этого уравнения, то интегральная кривая, проходящая через точку (x_0, y_0) , однозначно определена и не имеет особенностей в этой точке.

Рассматривая действительные интегральные кривые в целом и считая, что входящие в узел или в фокус интегральные кривые оканчиваются в этой точке, а входящие в седло могут рассматриваться как продолжаемые соответствующим образом (см. Бендиксон [1], стр. 205), можно доказать следующую теорему:

Если интегральная кривая лежит в конечной области, содержащей конечное число особых точек уравнения (1), то возможны три случая: а) интегральная кривая замкнута (является циклом); б) интегральная кривая является спиралью (асимптотически приближается к циклу); в) интегральная кривая останавливается в особой точке (Бендиксон [1], стр. 210, теорема VII).

Относительно других исследований об особых точках см. кроме цитированных выше книг и статей работы Перрона [6], И. Г. Петровского [1], Лонна [1], Фроммера [1], Хаага [1], Дигеля [1], Форстера [1], Любина [1], Мизеса [1]. См. также Асколи [2]¹⁾.

Для того чтобы проиллюстрировать сформулированную выше теорему, рассмотрим, например, уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y(x^2+y^2-1)}{-y+x(x^2+y^2-1)}. \quad (23)$$

¹⁾ На русском языке см. также В. В. Немыцкий и В. В. Степанов [1].
— Прим. перев.

Подстановкой $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ это уравнение приводится к уравнению

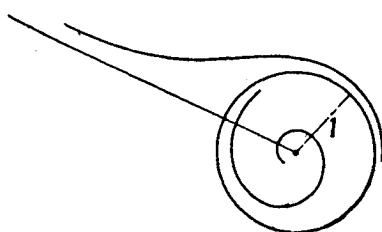
$$\frac{dr}{d\varphi} = r(r^2 - 1),$$

общее решение которого имеет вид

$$r = (1 + ce^{2\varphi})^{-1/2} \quad (c = \text{const}). \quad (24)$$

Если $c = 0$, то соответствующая интегральная кривая является окружностью Γ с центром в начале координат и радиусом 1. Если $c > 0$, то соответствующая интегральная кривая лежит внутри Γ , причем $\lim_{\varphi \rightarrow +\infty} r = 0$, $\lim_{\varphi \rightarrow -\infty} r = 1$, поэтому кривая имеет в начале координат фокус и приближается асимптотически к окружности Γ . Если, наконец, $c < 0$, $c = -c_1$, то кривая (24) действительна, когда φ изменяется от $-\infty$ до $-(\ln c_1)/2$, и лежит вне Γ , причем $\lim_{\varphi \rightarrow -\infty} r = 1$, $\lim_{\varphi \rightarrow -(\ln c_1)/2} r = +\infty$.

Следовательно, в последнем случае r возрастает от 1 до ∞ , когда φ изменяется от $-\infty$ до $-(\ln c_1)/2$, и поэтому Γ является асимптотическим кругом для нашей кривой, а прямая $\varphi = -(\ln c_1)/2$ — асимптотой для этой кривой. Точки перегиба кривой лежат на окружности $r = \sqrt[4]{2}$ ¹⁾ (фиг. 16).



Фиг. 16.

§ 2. Особые решения

1. Общее решение. Особые решения. а) Пусть дано уравнение

$$y' = f(x, y), \quad (1)$$

где функция $f(x, y)$ непрерывна в двумерной области C и удовлетворяет условию Липшица относительно y . Если точка (x_0, y_0) лежит внутри области C , то из теоремы существования (см. гл. I, § 3, п. 1) вытекает существование одного и только одного решения

$$y = y(x; x_0, y_0)$$

этого уравнения, определенного на отрезке $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ и удовлетворяющего начальному условию $y(x_0; x_0, y_0) = y_0$. Иными словами, каждой точке P некоторого отрезка прямой $x = x_0$ (ординату этой точки мы обозначим через y_0) соответствует одна и только одна

1) Относительно точек перегиба и асимптот кривых в полярных координатах см. Сансоне [5], II, стр. 87 и 368,

интегральная кривая уравнения (1), проходящая через P . Мы назвали $y(x; x_0, y_0)$ общим решением уравнения (1).

Пусть вообще дано дифференциальное уравнение

$$F(x, y; p) = 0, \quad (p = dy/dx), \quad (2)$$

где функция $F(x, y, p)$ определена во всех точках (x, y) некоторой области C при значениях p , принадлежащих некоторому отрезку. Если при любом значении постоянной величины c , принадлежащем некоторому отрезку, уравнение

$$\Phi(x, y; c) = 0 \quad (3)$$

определяет интегральную кривую уравнения (2), лежащую в C , или, как говорят, *частное решение уравнения* (2), и если для любой точки (x_0, y_0) области C существует по крайней мере одно значение c_0 величины c , такое, что $\Phi(x_0, y_0; c_0) = 0$, то говорят, что (3) представляет *общее решение* уравнения (2).

Например, пусть дано линейное дифференциальное уравнение

$$y'(x) + P(x)y - Q(x) = 0, \quad (4)$$

где функции $P(x)$ и $Q(x)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$y(x) = e^{-\int_{\alpha}^x P(x) dx} \left[\int_{\alpha}^x Q(x) e^{\int_{\alpha}^x P(x) dx} dx + c \right] \quad (c = \text{const}), \quad (5)$$

и любое решение уравнения (4) может быть получено из (5) при соответствующем значении постоянной величины c (гл. II, § 1, п. 5).

Клеро в своем мемуаре [1] заметил, что существуют дифференциальные уравнения, решаемые с помощью дифференцирования, причем получаемые таким путем решения не содержатся среди решений, получаемых обычным способом. Почти одновременно с ним Л. Эйлер [1] показал, что существуют решения дифференциальных уравнений, не содержащиеся в общем решении; так, например, уравнение $dx - A(x)dy = 0$, где функция $A(x)$ непрерывна и $A(x) \neq 0$ при $x \neq 0$, $A(0) = 0$, имеет решение $x = 0$, которое не содержится в общем решении

$$y + c = \int dx/A(x) \quad (1).$$

Другие исследования о решениях дифференциальных уравнений, не содержащихся в общем решении, были проведены Кондорсе,

1) При рассмотрении дифференциального уравнения вида $F(x, y; dy/dx) = 0$ принимаются во внимание как решения вида $y = y(x)$, так и решения вида $x = x(y)$.

Л. Эйлером и Даламбером, но лишь Лагранжу принадлежат общие результаты о таких решениях (см. Лагранж [1], [2]).

В первой из своих работ Лагранж указывает, что уравнение

$$xdx + ydy = \sqrt{x^2 + y^2 - b^2} dy \quad (b = \text{const}),$$

кроме общего решения

$$x^2 - (b^2 + c^2) = 2cy \quad (c = \text{const}), \quad (6)$$

состоящего из семейства парабол и прямых $x = \pm b$, обладает решением $x^2 + y^2 = b^2$, не содержащимся в (6). Он назвал это решение частным, теперь такое решение называется *особым решением*. Легко видеть, что окружность $x^2 + y^2 = b^2$ является огибающей семейства парабол. Лагранж и использовал теорию огибающих для доказательства существования особых решений дифференциальных уравнений.

Вообще, если существует решение уравнения (2), огибающее семейство интегральных кривых этого уравнения, то такое решение называется *особым*.

Особое решение может совпадать с одним из частных решений, но прилагательное *особое* подчеркивает, что это решение может также рассматриваться и как огибающая семейства частных решений.

б) Заметим, что если уравнение (3) представляет общее решение уравнения (2), то особое решение может быть найдено по общему правилу нахождения огибающих (см. п. 6 и 7). Однако, как мы сейчас покажем, особое решение может быть найдено и без предварительного нахождения общего решения уравнения (2).

Пусть в уравнении (2) функция F непрерывна относительно (x, y, p) вместе со своими частными производными первого порядка, когда (x, y) изменяется в области C , а p пробегает отрезок $[r, s]$. Предположим, что числа x_0, y_0, p_0 , где точка (x_0, y_0) лежит *внутри* C , а p_0 — в промежутке (r, s) , удовлетворяют уравнению

$$F(x_0, y_0; p_0) = 0,$$

причем

$$F_p(x_0, y_0; p_0) \neq 0^1).$$

По теореме о неявных функциях в некоторой окрестности C_1 точки (x_0, y_0) существует одна и только одна функция

$$p = f(x, y), \quad (7)$$

непрерывная в C_1 вместе со своими производными первого порядка, удовлетворяющая тождественно уравнению $F(x, y; f(x, y)) = 0$ и такая, что $f(x_0, y_0) = p_0$. Уравнение (7) эквивалентно в C_1 уравнению (2), и по теореме существования и единственности через точку

¹⁾ Символ $F_p(x_0, y_0; p_0)$ обозначает $\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_{(x_0, y_0; p_0)} = \frac{\partial F}{\partial p_0}$.

(x_0, y_0) проходит одно и только одно решение уравнения (2), поэтому через эту точку не может проходить особое решение. Отсюда следует, что если при сделанных выше предположениях через точку (x_0, y_0) проходит особое решение уравнения с угловым коэффициентом p_0 , то числа $(x_0, y_0; p_0)$ удовлетворяют одновременно двум уравнениям:

$$F(x_0, y_0; p_0) = 0, \quad F_p(x_0, y_0; p_0) = 0.$$

Мы будем говорить, что линейный элемент $(x_0, y_0; p_0)$ (гл. I, § 6, п. 1) является точечно особым для уравнения (2), если числа $(x_0, y_0; p_0)$ одновременно удовлетворяют двум уравнениям

$$F(x, y; p) = 0, \quad F_p(x, y; p) = 0. \quad (8)$$

(Это удобное определение принадлежит Заремба [1].) Таким образом, если $(x_0, y_0; p_0)$ является точечно особым линейным элементом, то в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) уравнение (2) нельзя привести к нормальной форме (1).

Может случиться, что бесконечное множество точечно особых линейных элементов огибается такой кривой $\Gamma: y = y(x)$, что при любом x выражения $x, y = y(x), p = y'(x)$ обращают уравнение (8) в тождество. Обобщая понятие особого решения, назовем *особым решением уравнения (2) любую огибающую бесконечного множества точечно особых линейных элементов*.

Заремба [1] показал, что при несколько более жестких условиях, накладываемых на функцию F и ее производные первых двух порядков, кривую Γ можно также рассматривать как огибающую некоторого семейства частных решений уравнения (2).

2. Уравнение $F(x, y; p) = 0$ в случае, когда F является многочленом относительно p . В этом параграфе п. 2—5 посвящены изучению решений, огибающих точечно особые линейные элементы, т. е. изучению системы (8). При этом мы ограничиваемся изучением уравнений первого порядка. Относительно уравнений высшего порядка см. Бургатти [1], Кун и Гордон [1], Церф [1].

Для лучшего уяснения возникающих при этом обстоятельств рассмотрим сначала уравнение

$$\begin{aligned} F(x, y; p) &= A_0(x, y)p^n + A_1(x, y)p^{n-1} + \dots + \\ &\quad + A_{n-1}(x, y)p + A_n(x, y) = 0 \quad (p = dy/dx), \end{aligned} \quad (9)$$

коэффициенты которого $A_r(x, y)$ ($r = 0, 1, \dots, n$), являются голоморфными функциями от x и y в окрестности некоторой точки (x_0, y_0) . Пусть числа $(x_0, y_0; p_0)$ удовлетворяют уравнениям

$$F(x_0, y_0; p_0) = 0, \quad F_p(x_0, y_0; p_0) = 0. \quad (10)$$

Тогда число p_0 является кратным корнем уравнения (9) (если вместо x и y подставить x_0 и y_0). Предположим для определенности, что

$$\frac{\partial F}{\partial p_0} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial p_0^2} = 0, \dots, \quad \frac{\partial^{\mu-1} F}{\partial p_0^{\mu-1}} = 0, \quad \frac{\partial^\mu F}{\partial p_0^\mu} \neq 0 \quad (\mu \geq 2). \quad (11)$$

Полагая

$$x = x_0 + X, \quad y = y_0 + p_0 X + Y, \quad P = dY/dX, \quad (12)$$

получаем, что $P = dy/dx = p_0 + dY/dX = p_0 + P$, а потому уравнение (9) можно записать в виде

$$F(x_0 + X, y_0 + p_0 X + Y, p_0 + P) = 0. \quad (13)$$

Из непрерывности решений уравнения (9) и их первых производных при $x = x_0$ следует, что $\lim_{X \rightarrow 0} Y = 0$, $\lim_{X \rightarrow 0} P = 0$, а из последнего равенства (12) вытекает, что Y является бесконечно малой порядка высшего, чем X . Поэтому, пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка, чем X , мы можем записать уравнение (13) в виде

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_0} + \frac{\partial F}{\partial y_0} p_0 \right) X + \frac{\partial^\mu F}{\partial p_0^\mu} \frac{P^\mu}{\mu!} + \dots = 0.$$

Предположим, кроме того, что

$$\frac{\partial F}{\partial x_0} + \frac{\partial F}{\partial y_0} p_0 \neq 0. \quad (14)$$

Тогда¹⁾

$$P = \frac{dY}{dX} = b_1 X^{\frac{1}{\mu}} + b_2 X^{\frac{2}{\mu}} + \dots \quad (b_1 \neq 0),$$

а, следовательно,

$$Y = c_1 X^{1+\frac{1}{\mu}} + c_2 X^{1+\frac{2}{\mu}} + \dots \quad [c_1 = \mu b_1 / (\mu + 1) \neq 0],$$

и из (12) вытекает, что решение $y(x)$ уравнения (9), удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$, разлагается в ряд вида

$$y = y_0 + p_0(x - x_0) + c_1(x - x_0)^{1+\frac{1}{\mu}} + \dots$$

Таким образом, решение $y(x)$ имеет в точке x_0 алгебраическую критическую точку.

1) См. Б. А. Фукс и В. И. Левин [1], стр. 48.—Прим. перев.

Отсюда следует теорема:

Если в точке $(x_0, y_0; p_0)$ имеют место соотношения

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial p} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial^{p-1} F}{\partial p^{p-1}} = 0, \quad \frac{\partial^p F}{\partial p^p} \neq 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0 \quad (p \geq 2),$$

то уравнение интегральной кривой уравнения (9), проходящей через точку (x_0, y_0) , имеет вид

$$y = y_0 + p_0(x - x_0) + c_1(x - x_0)^{1+\frac{1}{p}} + \dots \quad (c_1 \neq 0)$$

и точка (x_0, y_0) является для этой кривой кратной точкой с совпадающими касательными.

В частности, если $p = 2$, т. е. если p_0 , является двойным корнем уравнения (9), то через точку (x_0, y_0) проходит решение

$$[y - y_0 - p_0(x - x_0)]^2 = c(x - x_0)^3 + \dots \quad (c \neq 0)$$

этого уравнения, и значит точка (x_0, y_0) является точкой заострения для проходящей через нее интегральной кривой.

3. p -дискриминант. Теорема Дарбу — Кели. а) Рассмотрим многочлены $F(x, y; p)$ и $F_p(x, y; p)$ от p и обозначим через $\Delta_p F(x, y; p)$ наибольший общий делитель этих многочленов. Если рассматривать (9) как алгебраическое уравнение относительно p , то, как известно из высшей алгебры¹⁾, Δ_p выражается в виде определителя $(2n-1)$ -го порядка:

$$\Delta_p F(x, y; p) = \begin{vmatrix} A_0 & A_1 \dots & A_{n-2} & A_{n-1} & A_n & 0 \dots & 0 \\ 0 & A_0 \dots & A_{n-3} & A_{n-2} & A_{n-1} & A_n \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \dots & A_n \\ nA_0 & (n-1)A_1 \dots & 2A_{n-2} & A_{n-1} & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & nA_0 \dots & 3A_{n-3} & 2A_{n-2} & A_{n-1} & 0 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots & 0 & nA_0 & (n-1)A_1, (n-2)A_2 \dots & A_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Функция $\Delta_p F(x, y; p)$ называется p -дискриминантом уравнения (9), а кривая g , уравнение которой имеет вид

$$\Delta_p F(x, y; p) = 0, \tag{15}$$

называется p -дискриминантной кривой.

Заметим, что угловой коэффициент касательной к кривой g , проведенной в некоторой точке (x_0, y_0) этой кривой [получаемый диф-

¹⁾ См., например, А. Г. Курош [1], стр. 231. — Прим. перев.

ференцированием уравнения (15)], отличается, вообще говоря, от соответствующего кратного корня p_0 уравнения (9). Отсюда следует, что хотя любой точке кривой g соответствует точечно особый линейный элемент, но кривая g , вообще говоря, не является огибающей совокупности этих линейных элементов, т. е. кривая g не является, вообще говоря, особым решением. В силу этого, если вдоль некоторого отрезка кривой g имеем $\frac{\partial F}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ [p вычислено из уравнения (9)], то кривая g является геометрическим местом особых точек интегральных кривых уравнения (9), в которых направления касательных совпадают.

Рассмотрим, например, уравнение $p^2 - x = 0$. Тогда $F_p = 2p$, а поэтому из $\Delta_p F = 0$ следует, что $x = 0$. Но $\frac{\partial F}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial y} = -1$, и, следовательно, прямая $x = 0$ является геометрическим местом точек заострения интегральных кривых. Заметим, что общее решение нашего уравнения имеет вид $(y - c)^2 = \frac{4}{9}x^3$ и точки заострения $(0, -c)$ семейства интегральных кривых действительно лежат на оси y .

б) Доказанная в „а“ теорема содержится в качестве частного случая в следующей теореме Дарбу — Кели (Дарбу [1], Кели [1]).

Пусть дано дифференциальное уравнение первого порядка

$$F(x, y; p) = 0 \quad (p = dy/dx). \quad (2)$$

Изключим p из этого уравнения и из уравнения

$$F_p(x, y; p) = 0$$

и обозначим результат исключения через $\Delta_p F(x, y; p)$. Кривая g , уравнение которой имеет вид $\Delta_p F(x, y; p) = 0$ (p -дискриминантная кривая), вообще не является особым решением уравнения (2), но является геометрическим местом точек заострения интегральных кривых этого уравнения.

Относительно доказательства теоремы Дарбу — Кели в аналитическом случае см. Пикар [3], т. III, стр. 45—52. Доказательство этой теоремы в действительной области для случая, когда функция F имеет непрерывные производные до третьего порядка включительно, дано Заремба [2], а для случая, когда функция F имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно, — Картаном [1]. Теорема в форме Кардана имеет следующую формулировку:

Пусть в трехмерной области D действительная функция $F(x, y; p)$ действительных переменных x, y, p имеет непрерывные частные производные первых двух порядков, и во внутренней точке $(x_0, y_0; p_0)$ этой области имеем

$$F(x_0, y_0; p_0) = 0, \quad F_p(x_0, y_0; p_0) = 0,$$

$$F_x(x_0, y_0; p_0) + p_0 F_y(x_0, y_0; p_0) \neq 0, \quad F_{pp}(x_0, y_0; p_0) \neq 0.$$

Без потери общности можно считать, что

$$F_x(x_0, y_0; p_0) + p_0 F_y(x_0, y_0; p_0) > 0, \quad F_{pp}(x_0, y_0; p_0) < 0.$$

Тогда в промежутке $(x_0 - h, x_0)$, где $h > 0$, не существует решения дифференциального уравнения (2), непрерывного вместе со своей первой производной и удовлетворяющего начальным условиям

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad dy/dx = p_0.$$

В промежутке же $(x_0, x_0 + h)$, где h — достаточно малое положительное число, существуют два и только два таких решения и точка (x_0, y_0) является точкой заострения соответствующей интегральной кривой.

Мы отсылаем читателя к цитированной выше работе Картана, ограничиваясь здесь изложением основной идеи рассуждений (Гурса [1], т. II, стр. 461—463).

Дифференцируя уравнение (2), получаем

$$(F_x + pF_y) dx + F_p dp = 0.$$

Поэтому x , y , p удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{dx}{-F_p} = \frac{dy}{-pF_p} = \frac{dp}{F_x + pF_y}.$$

Если при начальных значениях $(x_0, y_0; p_0)$ имеем $F_p = 0$ и $F_x + pF_y \neq 0$, то к уравнению (2) нельзя применить теорему существования решений, но эту теорему можно применить к эквивалентной системе уравнений

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{F_p}{F_x + pF_y}, \quad \frac{dy}{dp} = -\frac{pF_p}{F_x + pF_y}.$$

Интегральная кривая этой системы, соответствующая тройке чисел $(x_0, y_0; p_0)$, удовлетворяет в точке (x_0, y_0) начальным условиям

$$\frac{dx}{dp} = 0, \quad \frac{dy}{dp} = 0$$

и, следовательно, имеет точку заострения (x_0, y_0) .

4. Необходимые условия и достаточные условия для существования особой интегральной кривой. Дадим теперь необходимые условия и достаточные условия для существования особой интегральной кривой.

a) Пусть дано уравнение

$$F(x, y; p) = 0, \tag{2}$$

где F — действительная функция трех аргументов x , y , p , определенная в трехмерной области D и непрерывная в этой области

вместе со своими частными производными первого порядка. Пусть кривая Γ является особой интегральной кривой класса 2 (т. е. изображаемой параметрическими уравнениями, правые части которых обладают на отрезке, где определена эта кривая, непрерывными производными первого и второго порядков; см. Тонелли [6], т. I, стр. 347). Будем считать, что при движении точки (x, y) по кривой Γ точка $(x, y, dy/dx)$ остается внутри области D .

По определению, вдоль Γ имеем

$$F_p(x, y; p) = 0 \quad (p = dy/dx).$$

Дифференцируя уравнение (2) по x , получаем, что

$$F_x + F_y p + F_p (dp/dx) = 0,$$

и, следовательно,

$$F_x + pF_y = 0.$$

Таким образом, для существования особого решения уравнения (2) класса 2 необходимо, чтобы существовала непрерывная кривая с непрерывно изменяющейся касательной, вдоль которой одновременно выполняются три уравнения

$$\left. \begin{aligned} F(x, y; p) &= 0, & F_p(x, y; p) &= 0, \\ F_x(x, y; p) + pF_y(x, y; p) &= 0 & (p = dy/dx). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

б) Пусть, обратно, параметрические уравнения

$$x = x(\lambda), \quad y = y(\lambda)$$

кривой Γ класса 2 удовлетворяют уравнениям

$$\left. \begin{aligned} F(x, y; \lambda) &= 0, & F_p(x, y; \lambda) &= 0, \\ F_x(x, y; \lambda) + \lambda F_y(x, y; \lambda) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

и пусть вдоль Γ

$$F_y(x, y; \lambda) \neq 0. \quad (18)$$

Дифференцируя вдоль Γ по x первое из равенств (17), получаем

$$F_x(x, y; \lambda) + pF_y(x, y; \lambda) = 0 \quad (p = dy/dx).$$

Сравнивая это соотношение с третьим из равенств (17), получаем $(p - \lambda) F_y(x, y; \lambda) = 0$, и, в силу (18), имеем $\lambda = p$. Но тогда из первого равенства (17) вытекает, что Γ является особой интегральной кривой.

Итак, мы доказали, что если параметрические уравнения

$$x = x(p), \quad y = y(p)$$

кривой Γ класса 2 удовлетворяют условиям

$$F(x, y; p) = 0, \quad F_p(x, y; p) = 0, \quad F_x(x, y; p) + pF_y(x, y; p) = 0,$$

$$F_y(x, y; p) \neq 0,$$

то кривая Γ является особой интегральной кривой уравнения

$$F(x, y; dy/dx) = 0.$$

Рассмотрим, например, уравнение $p^2 - y^2 = 0$; для него $F_p = 2p$, следовательно $p = 0$, $y = 0$ и p -дискриминантной кривой является прямая $y = 0$. Далее, $F_x + pF_y = 0$, $F_y = -1$, а поэтому ось x является особым решением. Общее решение этого уравнения состоит из парабол $y = \frac{1}{4}(x + c)^2$, огибаемых осью абсцисс.

5. Кривая касаний. а) К p -дискриминантной кривой может принадлежать также геометрическое место точек касания интегральных кривых, определение которого будет сейчас дано.

Пусть через каждую точку (x, y) кривой g проходят два различных частных решения уравнения (2), касающихся друг друга в этой точке, причем угловой коэффициент λ кривой g в точке (x, y) отличен от углового коэффициента решений, выходящих из этой точки; тогда кривая g называется геометрическим местом точек касания интегральных кривых уравнения (2)¹⁾.

Кривая g является частью p -дискриминантной кривой, и нетрудно найти необходимые условия, которым должна удовлетворять функция $F(x, y; p)$, для того, чтобы p -дискриминантная кривая содержала геометрическое место точек касания интегральных кривых, являющееся кривой класса 2.

Мы можем считать координаты (x, y) текущей точки кривой g функциями $x(p)$, $y(p)$ углового коэффициента p интегральных кривых, выходящих из точки (x, y) . Тогда

$$F[x(p), y(p); p] = 0, \quad F_p[x(p), y(p); p] = 0.$$

Дифференцируя первое из этих равенств, получаем

$$F_x[x(p), y(p); p] + \lambda F_y[x(p), y(p); p] = 0.$$

Так как через точку (x, y) проходят две интегральные кривые с угловым коэффициентом p , то $F_p(x, y; p) = 0$ и

$$F_x[x(p), y(p); p] + pF_y[x(p), y(p); p] = 0.$$

Но, по предположению, $\lambda \neq p$, а поэтому из последних двух уравнений вытекает, что

$$F_x[x(p), y(p); p] = 0, \quad F_y[x(p), y(p); p] = 0.$$

Таким образом, для того, чтобы p -дискриминантная кривая содержала геометрическое место точек касания интегральных кри-

¹⁾ Мы предполагаем в наших рассуждениях, что точка $(x, y; \lambda)$ остается внутри трехмерной области D , в которой определена функция $F(x, y; p)$, непрерывная в этой области вместе со своими частными производными первого порядка.

вых, необходимо существование непрерывных функций $x(p)$, $y(p)$, удовлетворяющих одновременно четырем уравнениям:

$$F(x, y, p) = 0, \quad F_x(x, y, p) = 0, \quad F_y(x, y, p) = 0, \quad F_p(x, y, p) = 0.$$

б) Рассмотрим, например, уравнение

$$(x - y)^2(1 + p^2)^3 = a^2(1 + p^3)^2 \quad (a > 0)$$

(Миллер [1], стр. 32). Имеем

$$x - y = a(1 + p^3)(1 + p^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

Дифференцируя это равенство, получаем

$$1 - p = -3a \frac{p(1-p)}{(1+p^2)^{\frac{5}{2}}} \frac{dp}{dx},$$

откуда следует, что либо

$$1 - p = 0,$$

либо

$$1 = -3ap(1 + p^2)^{-\frac{5}{2}} \frac{dp}{dx}.$$

При $p = 1$ уравнение принимает вид

$$x - y = \pm a/\sqrt{2}.$$

Из второго уравнения следует, что

$$x - c = a(1 + p^2)^{-\frac{3}{2}},$$

и, следовательно, $1 + p^2 = a^{\frac{2}{3}}(x - c)^{-\frac{3}{2}}$,

$$1 + p^3 = \{[a^{\frac{2}{3}} - (x - c)^{\frac{2}{3}}]^{\frac{3}{2}} + (x - c)\}(x - c)^{-1}.$$

Подставляя в исходное уравнение, получаем

$$(x - c)^{\frac{2}{3}} + (y - c)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

т. е. общее решение данного уравнения состоит из семейства равных астроид, центры которых лежат на прямой $x = y$ (фиг. 17).

Имеем

$$F = (x - y)^2(1 + p^2)^3 - a^2(1 + p^3)^2,$$

$$F_x = 2(x - y)(1 + p^2)^3,$$

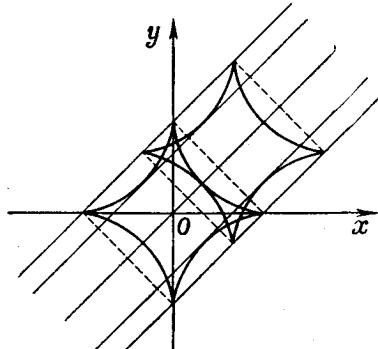
$$F_y = -2(x - y)(1 + p^2)^3,$$

$$F_p =$$

$$= 6p[(1 + p^2)^2(x - y)^2 - a^2p(1 + p^3)],$$

следовательно, решения системы $F = 0$, $F_p = 0$ имеют вид

$$p = 0, \quad x - y = \pm a, \quad p = 1, \quad x - y = \pm a/\sqrt{2}, \quad p = -1, \quad x = y.$$



Ф и г. 17.

Прямые $x - y = \pm a$ являются геометрическим местом точек заострения:

$$[F_x + pF_y = 2(x - y) = \pm 2a \neq 0].$$

Прямые $x - y = \pm a/\sqrt{2}$ представляют собой особые решения:

$$[F_x + pF_y = 16(x - y) - 16(x - y) = 0,$$

$$F_y = -16(\pm a/\sqrt{2}) \neq 0],$$

и прямая $x = y$ является геометрическим местом точек касания интегральных кривых $[F_x = 0, F_y = 0]$.

6. *c*-дискриминантная кривая. Рассмотрим теперь вопрос о нахождении особых решений путем использования выражения для общего решения.

а) Пусть функция $F(x, y; p)$ действительных переменных $x, y; p$ непрерывна, когда (x, y) изменяется в двумерной области C , а p — на некотором отрезке, и пусть общее решение уравнения

$$F(x, y; p) = 0 \quad (2)$$

имеет вид

$$\Phi(x, y; c) = 0. \quad (3)$$

Иными словами, пусть при любом значении c уравнение (3) дает интегральную кривую для (2), лежащую в области C , а для любой точки (x_0, y_0) из C найдется по крайней мере одно значение c_0 для c , такое, что $\Phi(x_0, y_0; c_0) = 0$.

Рассмотрим систему двух уравнений

$$\Phi(x, y; c) = 0, \quad \Phi_c(x, y; c) = 0 \quad (19)$$

(через $\Phi_c(x, y; c)$ обозначено $\frac{\partial \Phi(x, y; c)}{\partial c}$). Из теории огибающих известно, что огибающая кривая Γ семейства (3) получается исключением параметра c из уравнений (19).

Уравнение

$$\Delta_c \Phi(x, y; c) = 0, \quad (20)$$

получаемое исключением параметра c из уравнений (19), называется уравнением *c*-дискриминантной кривой.

Хорошо известно, что *c*-дискриминантная кривая может состоять не только из точек, принадлежащих возможно существующей огибающей, но и из точек, обладающих другими геометрическими свойствами. Поэтому целесообразно напомнить некоторые результаты теории огибающих.

б) Предположим, что для точки $(x_0, y_0; c_0)$, лежащей внутри области существования функции $\Phi(x, y; c)$, имеем

$$\Phi(x_0, y_0; c_0) = 0, \quad \Phi_c(x_0, y_0; c_0) = 0,$$