а при $Rs > s_0$ имеет место аналогичная формула

$$\mathfrak{L}\{F'; s\} = s\mathfrak{L}\{F; s\} - F(0).$$

Из доказанной теоремы вытекает: *Если функция $F(t)$ обладает при $t \geqslant 0$ производными $F', F'', \ldots, F^{(\nu-1)} (\nu \geqslant 1)$ и если функция $F^{(\nu-1)}$ абсолютно непрерывна на любом конечном отрезке, а $\mathfrak{L}\{F^{(\nu)}; s\}$ сходится при некотором действительном значении $s_0 > 0$, то при s_0 сходятся и $\mathfrak{L}\{F\}, \mathfrak{L}\{F'\}, \ldots, \mathfrak{L}\{F^{(\nu-1)}\}$, причем*

$$\mathfrak{L}\{F^{(\nu)}; s_0\} = s_0^{\nu}\mathfrak{L}\{F; s_0\} - F(0)\, s_0^{\nu-1} - F'(0)\, s_0^{\nu-2} - \ldots - F^{(\nu-1)}(0).$$

При $Rs > s_0$ имеет место аналогичная формула

$$\mathfrak{L}\{F^{(\nu)}; s\} = s^{\nu}\mathfrak{L}\{F; s\} - F(0)\, s^{\nu-1} - F'(0)\, s^{\nu-2} - \ldots - F^{(\nu-1)}(0).$$

4. О соответствии между оригиналом и изображением. Характер соответствия между оригиналом и изображением уточняется следующей теоремой Лерха ([1], стр. 347):

Если интеграл Лапласа

$$f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t)\, dt$$

сходится при $s = s_0$ и если изображение обращается в нуль в точках $s = s_0 + n\sigma$, $\sigma > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, то

$$\int_0^t F(t)\, dt = 0 \quad \text{при } t > 0. \tag{7}$$

Отсюда следует, что функция $F(t)$ почти всюду равна нулю, т. е. равна нулю всюду, за исключением множества меры нуль [1]).

В самом деле при $Rs > Rs_0$ (п. 1, „б“)

$$f(s) = (s - s_0) \int_0^{+\infty} e^{-(s-s_0)t} \Phi(t)\, dt,$$

где

$$\Phi(t) = \int_0^t e^{-s_0\tau} F(\tau)\, d\tau,$$

и по сделанному предположению

$$\int_0^{+\infty} e^{-n\sigma t} \Phi(t)\, dt = 0.$$

---

[1]) См. П. С. Александров и А. Н. Колмогоров [1], стр. 235. — *Прим. перев.*

Полагая

$$e^{-\sigma t}=x,\ -\sigma t=\ln x,\ t=-(\ln x)/\sigma,\ \Phi\left(-\frac{\ln x}{\sigma}\right)=\psi(x),$$

получаем

$$\frac{1}{\sigma}\int_0^1 x^{n-1}\psi(x)\,dx=0\quad(n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Но $\psi(x)$ — непрерывная функция, а потому если все ее моменты равны нулю, то она тождественно равна нулю [1]). Таким образом,

$$\int_0^t e^{-s_0\tau}F(\tau)\,d\tau=0\quad(t\geqslant 0).$$

Полагая теперь

$$\int_0^t F(\tau)\,d\tau=G(t),$$

получаем

$$0=e^{-s_0\tau}G(\tau)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}+s_0\int_0^t e^{-s_0\tau}G(\tau)\,d\tau,$$

$$G(t)+s_0e^{s_0t}\int_0^t e^{-s_0\tau}G(\tau)\,d\tau=0, \tag{8}$$

и, дифференцируя по t, имеем

$$G'(t)+s_0\left[s_0e^{s_0t}\int_0^t e^{-s_0\tau}G(\tau)\,d\tau+G(t)\right]=0.$$

В силу (8)

$$G'(t)=0,\quad G(t)=\text{const}.$$

Но $G(0)=0$, откуда и следует справедливость формулы (7). Теорема доказана.

Из доказанной теоремы вытекает следствие: *Пусть* $\mathfrak{L}_s\{F_1\}=\mathfrak{L}_s\{F_2\}$ *при* $Rs>\beta$, *или же* $\mathfrak{L}_s\{F_1\}=\mathfrak{L}_s\{F_2\}$ *в бесконечном множестве точек, расположенных на действительной оси или на прямой, параллельной действительной оси, и образующих возрастающую арифметическую прогрессию; тогда почти всюду* $F_1(t)=F_2(t)$.

В частности, если функции $F_1(t)$ и $F_2(t)$ непрерывны, то $F_1(t)=F_2(t)$.

---

[1]) См. И. П. Натансон [2], стр. 433. — *Прим. перев.*

5. Теорема о свертке. а) Перейдем теперь к изучению понятия *свертки двух функций*, которое понадобится нам в следующем параграфе при рассмотрении приложений преобразования Лапласа к решению систем дифференциальных уравнений.

Назовем *сверткой двух функций* $F_1(t)$ и $F_2(t)$ класса 1 и обозначим через $F_1 * F_2$ функцию $F(t)$, определяемую равенством

$$F(t) = \int_0^t F_1(\tau) F_2(t-\tau)\, d\tau = F_1 * F_2. \tag{9}$$

Очевидно, что

$$F_1 * F_2 = F_2 * F_1. \tag{10}$$

В „г" мы проверим, что

$$(F_1 * F_2) * F_3 = F_1 * (F_2 * F_3). \tag{11}$$

б) Имеет место следующая теорема:

Если функции $F_1(t)$, $F_1'(t)$, $F_2(t)$ *принадлежат классу* 1 *и если существует* $\lim\limits_{t \to +0} F_1(t) = F_1(0)$, *то при любом значении* t, *для которого функция* $F_2(t)$ *является производной справа* (слева) *от* $\int\limits_0^t F_2(\tau)\, d\tau$, *в частности, в любой точке непрерывности* $F_2(t)$, *функция* $\Phi(t) = F_1 * F_2$ *имеет производную справа* (слева), *причем*

$$\Phi'(t) = F_1' * F_2 + F_1(0) F_2(t). \tag{12}$$

В самом деле,

$$\Phi(t) = \int_0^t F_2(t-\tau) \left\{ \int_0^\tau F_1'(x)\, dx + F_1(0) \right\} d\tau =$$

$$= \int_0^t F_2(t-\tau)\, d\tau \int_0^\tau F_1'(x)\, dx + F_1(0) \int_0^t F_2(t-\tau)\, d\tau.$$

Сделаем в первом интеграле замену переменных $y = -\tau + x + t$, $z = x$, а во втором — замену $t - \tau = u$. Тогда мы получим, что

$$\Phi(t) = \int_0^t dy \int_0^y F_1'(z) F_2(y-z)\, dz + F_1(0) \int_0^t F_2(u)\, du.$$

Дифференцируя обе части, убеждаемся в справедливости формулы (12).

в) Имеет место следующая теорема о свертке:

Если при $s = s_0$ *интегралы* $\mathfrak{L}\{F_1\}$ и $\mathfrak{L}\{F_2\}$ *абсолютно сходятся, то и* $\mathfrak{L}\{F_1 * F_2\}$ *абсолютно сходится при* $s = s_0$, *причем*

$$\mathfrak{L}\{F_1 * F_2\} = \mathfrak{L}\{F_1\} \mathfrak{L}\{F_2\}. \tag{13}$$

Из предположения об абсолютной сходимости $\mathfrak{L}\{F_1\}$ и $\mathfrak{L}\{F_2\}$ следует, что

$$\mathfrak{L}\{F_1\}\mathfrak{L}\{F_2\} = \int_0^{+\infty} e^{-s_0 u} F_1(u)\,du \int_0^{+\infty} e^{-s_0 v} F_2(v)\,dv =$$

$$= \iint\limits_{\sigma(u \geqslant 0,\ v \geqslant 0)} e^{-s_0(u+v)} F_1(u) F_2(v)\,du\,dv.$$

Замена переменных $u = t - \tau$, $v = \tau$ дает нам, что

$$\mathfrak{L}\{F_1\}\mathfrak{L}\{F_2\} = \iint\limits_{\sigma(0 \leqslant \tau \leqslant t)} e^{-s_0 t} F_1(t-\tau) F_2(\tau)\,dt\,d\tau =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-st}\left[\int_0^t F_1(t-\tau) F_2(\tau)\,d\tau\right] dt.$$

Теорема доказана.

г) Легко доказать теперь справедливость формулы (11).

Пусть функции $F_1(t)$, $F_2(t)$, $F_3(t)$ являются функциями класса 1 при $0 \leqslant t \leqslant T$; положим $F_1(t) \equiv 0$, $F_2(t) \equiv 0$, $F_3(t) \equiv 0$ при $t > T$. Тогда $\mathfrak{L}\{F_1\}$, $\mathfrak{L}\{F_2\}$, $\mathfrak{L}(F_1 * F_2)$ абсолютно сходятся при любом s и по формуле (13) имеем

$$\mathfrak{L}\{(F_1 * F_2) * F_3\} = \mathfrak{L}\{F_1 * F_2\}\mathfrak{L}\{F_3\} = \mathfrak{L}\{F_1\} \cdot \mathfrak{L}\{F_2\} \cdot \mathfrak{L}\{F_3\},$$

$$\mathfrak{L}\{F_1 * (F_2 * F_3)\} = \mathfrak{L}\{F_1\}\mathfrak{L}\{F_2\}\mathfrak{L}\{F_3\},$$

поэтому $\mathfrak{L}\{(F_1 * F_2) * F_3 - F_1 * (F_2 * F_3)\} = 0$, и в силу непрерывности $(F_1 * F_2) * F_3 - F_1 * (F_2 * F_3)$ (см. п. 4) равенство (11) имеет место.

6. Преобразование Лапласа целых функций экспоненциального типа. Формула обращения Пинкерле. а) Следующие теоремы служат для получения формулы обращения Пинкерле интеграла Лапласа в комплексной области (Пинкерле [3], стр. 127).

Для того чтобы радиус сходимости ряда

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{s^{n+1}} \tag{14}$$

был конечен, т. е. для того чтобы этот ряд не расходился при всех значениях s, необходимо и достаточно, чтобы функция $F(t)$,

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n, \tag{15}$$

была целой функцией экспоненциального типа.

Напомним, что по введенному Прингсгеймом определению целая функция $F(t)$ называется *функцией первого порядка нормального типа* ρ или, короче, функцией *экспоненциального типа*, если для любого $\eta > 0$ при достаточно больших значениях $|t|$ имеет место неравенство

$$|F(t)| < e^{(\rho+\eta)|t|}. \tag{16}$$

Докажем теперь, что указанное нами условие необходимо.

Пусть радиус сходимости ρ ряда (14) конечен, т. е. пусть этот ряд сходится при $|s| > \rho$; по теореме Коши — Адамара [1]) имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho.$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое целое число N, что при $n > N$ имеем $|a_n| < (\rho+\varepsilon)^n$. Следовательно, найдется и такое число $A > 0$, что

$$|a_n| < A(\rho+\varepsilon)^n \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Ряд, составленный из модулей членов ряда (15), мажорируется рядом

$$A\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\rho+\varepsilon)^n}{n!} t^n = Ae^{(\rho+\varepsilon)t}$$

и сходится при любом t; отсюда следует, что $|F(t)| < Ae^{(\rho+\varepsilon)t}$, чем и доказана справедливость неравенства (16).

Можно доказать также и достаточность нашего условия (см. Деч [1], стр. 62—63).

б) *Если функция $F(t)$ в* (15) *является целой функцией экспоненциального типа, то ряд* (14) *имеет конечный радиус сходимости ρ, и при $Rs > \rho$ имеем*

$$f(s) = \mathfrak{L}_s\{F\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}F(t)\,dt,$$

т. е. *функция $f(s)$ может быть представлена интегралом Лапласа в полуплоскости $Rs > \rho$.*

Обратно, функция $F(t)$ при любом значении t дается интегралом

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{ts}f(s)\,ds$$

(*формула обращения Пинкерле*), *где C — любой пробегаемый в положительном направлении замкнутый путь, ограничивающий область, внутри которой лежит круг радиуса ρ с центром в начале координат.*

---

[1]) См. И. И. Привалов [1], стр. 65. — *Прим. перев.*

В самом деле, из изложенного в „а“ следует, что

$$|F(t)| < Ae^{(\rho+\varepsilon)|t|}.$$

Но так как при $Rs > \rho$ имеем

$$\int_0^{+\infty} \left|e^{-st}F(t)\right| dt \leqslant A\int_0^{+\infty} e^{-(Rs)t}e^{(\rho+\varepsilon)t}\,dt \leqslant A\int_0^{+\infty} e^{[(\rho-Rs)+\varepsilon]t}\,dt,$$

то интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-st}F(t)\,dt$ сходится при $Rs > \rho$.

Но тогда

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}F(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-st}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}t^n\right]dt,$$

и так так в правой части законно почленное интегрирование[1]), то [см. п. 2, (111)]

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}F(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{+\infty} e^{-st}\frac{a_n}{n!}t^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{s^{n+1}} = f(s).$$

---

[1]) Мы используем здесь следующую теорему: пусть функции $\varphi(t)$, $f_n(t)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ принадлежат классу 1, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$ равномерно сходится в любом конечном отрезке $[a, b]$, $0 < a \leqslant t \leqslant b$. Тогда равенство

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t)\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)\right)dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty} \varphi(t)f_n(t)\,dt$$

справедливо, если выполняется одно из следующих двух условий: интеграл

$$\int_0^{+\infty} |\varphi(t)|\left\{\sum_{n=0}^{\infty}|f_n(t)|\right\}dt$$

сходится или ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{+\infty} |\varphi(t)|\,|f_n(t)|\,dt$ сходится (см. Бромвич [1], стр. 500). В нашем случае

$$\varphi(t) = e^{-st}, \quad \sum_{n=0}^{\infty}|f_n(t)| = \sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{a_n}{n!}t^n\right| < Ae^{(\rho+\varepsilon)t},$$

следовательно, если $Rs > \rho$, то выполняется первое из сформулированных выше условий.

Наоборот, если мы рассмотрим интеграл $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C e^{ts}f(s)\,ds$, взятый вдоль указанного в формулировке замкнутого пути C, и заметим, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{s^{n+1}}$ равномерно сходится, когда s изменяется вдоль C, то получим, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C e^{ts}f(s)\,ds=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C e^{ts}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{s^{n+1}}\,ds=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{e^{ts}}{s^{n+1}}\,ds.$$

Но по теореме Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{e^{ts}}{s^{n+1}}\,ds=\frac{1}{n!}\frac{d^n e^{ts}}{ds^n}\bigg|_{s=0}=\frac{t^n}{n!},$$

следовательно

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C e^{ts}f(s)\,ds=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{t^n}{n!}=F(t).$$

Теорема доказана.

7. Формулы обращения для преобразований Фурье и Лапласа. а) Для того чтобы получить другие формулы обращения интеграла Лапласа, напомним теорему обращения для интеграла Фурье (Титчмарш [1], стр. 58).

Пусть функция $F(x)$ действительна и регулярна[1]) при любом действительном значении x, интегрируема в смысле Лебега на любом конечном отрезке, и пусть несобственные интегралы от этой функции на промежутках $(-\infty, -a)$, $(a, +\infty)$, $a>0$ абсолютно сходятся. Тогда при любом конечном значении *действительной* переменной y существует $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{-n}^{+n}e^{-iyx}F(x)\,dx$, или, как говорят, существует *главное значение по Коши* интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-iyx}F(x)\,dx$. Функция (комплексная) *действительной* переменной y,

$$f(y)=\text{V. P.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-iyx}F(x)\,dx=\mathfrak{F}\{F(x);\ y\},^{2)} \tag{17}$$

называется *преобразованием Фурье* функции $F(x)$.

---

[1]) Термин *регулярная функция* означает, что все точки разрыва такой функции $F(x)$ являются точками разрыва первого рода, причем в этих точках $2F(x)=F(x+0)+F(x-0)$.

[2]) Символ V. P. перед интегралом обозначает, что интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Символ $\mathfrak{F}$ обозначает преобразование Фурье.

Теорема обращения для интеграла Фурье гласит, что при указанных выше предположениях для любого значения x, в некоторой окрестности которого функция $F(x)$ имеет *ограниченное изменение*, имеет место *формула обращения Фурье*

$$F(x) = \text{V. P.} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} f(y)\, dy. \tag{18}$$

б) Пусть теперь *функция $F(t)$ регулярна при любом действительном значении t, интегрируема в смысле Лебега на любом конечном отрезке, и пусть при $\alpha_1 < x < \alpha_2$ сходится интеграл*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xt} |F(t)|\, dt.$$

В формуле двустороннего преобразования Лапласа

$$f(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} F(t)\, dt \tag{19}$$

интеграл в правой части равенства абсолютно сходится при $\alpha_1 < Rs < \alpha_2$. Если положить $s = x + iy$, то

$$f(x+iy) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyt} [e^{-xt} F(t)]\, dt,$$

и если функция $F(t)$ имеет ограниченное изменение в некоторой окрестности точки t, то по формуле обращения Фурье (18) имеем

$$e^{-xt} F(t) = \text{V. P.} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity} f(x+iy)\, dy.$$

Поэтому

$$F(t) = \text{V. P.} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t(x+iy)} f(x+iy)\, dy \quad [\alpha_1 < x < \alpha_2]. \tag{20}$$

Таким образом, *при сделанных относительно $F(t)$ предположениях для любой точки t, в некоторой окрестности которой функция $F(t)$ имеет ограниченное изменение, имеет место формула обращения* (20) *для преобразования* (19).

Если сделать в формуле (20) замену переменной $x + iy = s$, то получим также

$$F(t) = \text{V. P.} \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{ts} f(s)\, ds \quad [\alpha_1 < x < \alpha_2]. \tag{20'}$$

Эта формула показывает, что правая часть не зависит от абсциссы x прямолинейного пути интегрирования, концы которого лежат в бесконечности в точках $x - i\infty$, $x + i\infty$.

в) Из доказанной выше теоремы можно получить *формулу обращения Лапласа для односторонних преобразований Лапласа.*

Пусть, в самом деле, функция $F(t)$ действительна и определена при $t \geqslant 0$. Положим $F(t) = 0$ при $t < 0$. Тогда справедлива следующая теорема: *Пусть действительная функция $F(t)$ определена при $t \geqslant 0$, регулярна, ограничена и измерима в смысле Лебега на любом конечном отрезке $[t_1, t_2]$, $0 \leqslant t_1 < t_2$, и пусть существует конечный предел*

$$\lim_{\omega \to +\infty} \int_0^{\omega} |F(t)|\, dt,$$

а преобразование Лапласа

$$f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t)\, dt \tag{21}$$

абсолютно сходится при $Rs > \alpha$. Тогда, если функция $F(t)$ имеет ограниченное изменение в некоторой окрестности точки $t > 0$, то имеет место формула обращения

$$F(t) = \text{V. P.} \frac{1}{2\pi i} \int_{x - i\infty}^{x + i\infty} e^{ts} f(s)\, ds \quad (x > \alpha). \tag{22}$$

В случае же, когда функция $F(t)$ имеет ограниченное изменение на некотором отрезке вида $[0, t]$, то для применения формулы (22) в точке $t = 0$ надо заменить в левой части $F(t)$ на $\lim\limits_{t \to +0} F(t)/2$.

§ 7. Приложения преобразования Лапласа к дифференциальным уравнениям, коэффициентами которых являются постоянные или многочлены, и к системам дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

1. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Нахождение решения, удовлетворяющего начальным условиям. а) Этот параграф посвящен решению задачи Коши для дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений [1]).

[1]) См. Деч [2], стр. 24, [3], [1], стр. 321—339, Стахо [1], ван дер Поль [1]. Вместо преобразования Лапласа для решения систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами может быть использовано преобразование Фурье, которое мы напомнили в § 6 п. 7 (см. Кембелл и Фостер [1], Левинсон [1]).

Как уже было отмечено в § 5, п. 1, метод решения состоит в переходе от заданных уравнений к уравнениям относительно преобразований Лапласа искомых функций. Это преобразование упрощает задачу, и мы можем найти изображения искомых функций, после чего можно найти искомые функции по формулам обращения для преобразований Лапласа.

Отметим, что этот метод имеет особое практическое значение, так как при его применении можно пользоваться таблицами, содержащими преобразования Лапласа многих часто встречающихся функций[1]).

б) Пусть дано уравнение

$$p(D)\,Y = F(t) \qquad (D = d/dt), \tag{1}$$

где

$$p(D)\,Y = Y^{(n)} + a_{n-1}Y^{(n-1)} + a_{n-2}Y^{(n-2)} + \ldots + a_1Y' + a_0Y,$$

$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ — постоянные, функция $F(t)$ непрерывна при $t \geqslant 0$ и принадлежит классу L[2]), и пусть требуется найти решение уравнения (1) при заданных значениях $Y(0), Y'(0), \ldots, Y^{(n-1)}(0)$.

Предположим, что $Y^{(n)}(t)$ является функцией класса L; тогда и функции $Y^{(n-1)}, \ldots, Y', Y$ принадлежат этому классу. Преобразуя обе части уравнения (1) с помощью преобразования Лапласа и полагая

$$\mathfrak{L}\{Y\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}Y(t)\,dt = y(s), \quad \mathfrak{L}\{F\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}F(t)\,dt = f(s),$$

получаем (§ 6, п. 3, „б“)

$$\begin{aligned} s^n y &- [Y(0)s^{n-1} + Y'(0)s^{n-2} + \ldots + Y^{(n-1)}(0)] + \\ &+ a_{n-1}\{s^{n-1}y - [Y(0)s^{n-2} + Y'(0)s^{n-3} + \ldots + Y^{(n-2)}(0)]\} + \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ &+ a_1\{sy - Y(0)\} + \\ &+ a_0 y = f(s), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} y(s) = \frac{f(s)}{p(s)} &+ Y(0)\frac{s^{n-1} + a_{n-1}s^{n-2} + \ldots + a_2 s + a_1}{p(s)} + \\ &+ Y'(0)\frac{s^{n-2} + a_{n-1}s^{n-3} + \ldots + a_2}{p(s)} + \\ &+ \ldots + Y^{(n-2)}(0)\frac{s + a_{n-1}}{p(s)} + Y^{(n-1)}(0)\frac{1}{p(s)}, \end{aligned} \tag{2}$$

$$p(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \ldots + a_1 s + a_0.$$

---

[1]) См., например, В. А. Диткин и П. И. Кузнецов [1]. — *Прим. перев.*

[2]) Метод может быть применен и в случае, когда функция $F(t)$ непрерывна при $t > 0$ и принадлежит классу L, а начальные условия имеют вид $\lim\limits_{t \to +0} Y(t) = Y(0), \ldots, \lim\limits_{t \to +0} Y^{(n-1)}(t) = Y_{n-1}(0)$.

Таким образом, мы нашли функцию $y(s)$. Обращая теперь функциональное уравнение $\mathfrak{L}\{Y\} = y(s)$, мы найдем искомую функцию $Y(t)$. Выполним это обращение.

в) Начнем с построения частного решения уравнения (1), удовлетворяющего начальным данным

$$Y(0) = Y'(0) = \ldots = Y^{(n-1)}(0) = 0 \tag{3}$$

(существование и единственность такого решения доказаны в гл. II, § 1, п. 1, „в").

Пусть корни $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ характеристического уравнения $p(\rho) = 0$ попарно различны ($p'(\rho_\nu) \neq 0$). Тогда

$$q(s) = \frac{1}{p(s)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{d_k}{s - \rho_k},$$

где числа d_k равны вычетам функции $q(s)$ в точках ρ_k, т. е. $d_k = 1/p'(\rho_k)$, и

$$q(s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p'(\rho_k)(s - \rho_k)}.$$

Следовательно [§ 6, п. 2, (IV)],

$$q(s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p'(\rho_k)} \int_0^{+\infty} e^{-st} e^{\rho_k t}\, dt$$

или

$$q(s) = \frac{1}{p(s)} = \int_0^{+\infty} e^{-st} Q(t)\, dt = \mathfrak{L}\{Q(t)\},$$

где

$$Q(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p'(\rho_k)} e^{\rho_k t}. \tag{4}$$

Принимая во внимание формулы (2) и (3) и применяя теорему о свертке (§ 6, п. 5), имеем

$$\mathfrak{L}\{Y(t)\} = y(s) = f(s)\frac{1}{p(s)} = \mathfrak{L}\{F(t)\}\,\mathfrak{L}\{Q(t)\} = \mathfrak{L}\{F(t) * Q(t)\}$$

и, следовательно,

$$Y(t) = F(t) * Q(t) = \sum_{k=1}^{n} F(t) * \frac{e^{\rho_k t}}{p'(\rho_k)}.$$

Таким образом, мы получили искомую формулу

$$Y(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\rho_k t}}{p'(\rho_k)} \int_0^t e^{-\rho_k \tau} F(\tau)\, d\tau. \tag{1}$$

Докажем непосредственно, что функция $Y(t)$ удовлетворяет уравнению (1) и начальным условиям (3). Для этого покажем сначала, что

$$Q(0)=Q'(0)=\ldots=Q^{(n-2)}(0)=0;\ Q^{(n-1)}(0)=1. \tag{5}$$

В самом деле, функция $Q(t)$ является целой функцией экспоненциального типа, причем

$$Q(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{Q^{(k)}(0)}{k!}t^k.$$

По теореме Пинкерле (§ 6, п. 6, „б“)

$$q(s)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{Q^{(k)}(0)}{s^{k+1}}. \tag{6}$$

Но $p(s)$ является многочленом степени n от s, и коэффициент при s^n в $p(s)$ равен 1; поэтому

$$q(s)=\frac{1}{p(s)}=\frac{1}{s^n}+\frac{C_{n+1}}{s^{n+1}}+\frac{C_{n+2}}{s^{n+2}}+\ldots. \tag{7}$$

Сравнивая формулы (6) и (7), убеждаемся в справедливости равенств (5).

Принимая во внимание выражение (4) для $Q(t)$, мы можем записать равенства (5) в виде

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\rho_k^l}{p'(\rho_k)}=\begin{cases}0 & \text{при}\quad 0\leqslant l\leqslant n-2,\\ 1 & \text{при}\quad l=n-1.\end{cases}$$

При $l=0,\ 1,\ \ldots,\ n-2$ эти формулы были уже получены нами в гл. VII, § 3, п. 1, „г“.

Из формулы

$$Y(t)=F(t)*Q(t)$$

мы выводим последовательно, принимая во внимание (5), что

$$Y'(t)=F(t)*Q'(t),\ \ldots,\ Y^{(n-1)}(t)=F(t)*Q^{(n-1)}(t),$$

$$Y^{(n)}(t)=F(t)*Q^{(n)}(t)+F(t)$$

(см. § 6, п. 5, „б“). Поэтому $Y(t)$ удовлетворяет начальным условиям (3).

Кроме того, имеем

$$Y^{(n)}+a_{n-1}Y^{(n-1)}+\ldots+a_0Y=$$
$$=F(t)*[Q^{(n)}(t)+a_{n-1}Q^{(n-1)}(t)+\ldots+a_0Q(t)]+F(t)=$$
$$=F(t)*\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{\rho_k t}}{p'(\rho_k)}[\rho_k^n+a_{n-1}\rho_k^{n-1}+\ldots+a_0]+F(t)=F(t).$$

Наше утверждение доказано.

г) Построим теперь решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям (3), в случае, когда различные корни $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r$ характеристического уравнения имеют соответственно кратности $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$ $(\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_r=n)$.

По известной теореме алгебры можно положить

$$q(s)=\frac{1}{p(s)}=\sum_{k=1}^{r}\left[\frac{d_{k1}}{s-\rho_k}+\frac{d_{k2}}{(s-\rho_k)^2}+\ldots+\frac{d_{k\nu_k}}{(s-\rho_k)^{\nu_k}}\right], \tag{8}$$

где, согласно теории вычетов, $d_{k\mu}$ выражаются следующим образом:

$$d_{k\mu}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{(s-\rho_k)^{\mu-1}}{p(s)}ds \quad (\mu=1, 2, \ldots, \nu_k).$$

Здесь C — пробегаемый в положительном направлении простой замкнутый контур, окружающий точку $s=\rho_k$, причем этот контур настолько мал, что все остальные корни характеристического уравнения лежат вне C[1]).

Но тогда[2])

$$q(s)=\int_0^{+\infty}e^{-st}Q(t)\,dt=\mathfrak{L}\{Q(t)\}, \tag{9$_1$}$$

где

$$Q(t)=\sum_{k=1}^{r}\left[d_{k1}+d_{k2}\frac{t}{1!}+\ldots+d_{k\nu_k}\frac{t^{\nu_k-1}}{(\nu_k-1)!}\right]e^{\rho_k t}. \tag{9$_2$}$$

Так как

$$\mathfrak{L}\{Y(t)\}=y(s)=f(s)\frac{1}{p(s)}=f(s)q(s)=$$
$$=\mathfrak{L}\{F(t)\}\mathfrak{L}\{Q(t)\}=\mathfrak{L}\{F(t)*Q(t)\},$$

---

[1]) Числа $d_{k\mu}$ можно также найти, освободившись в формуле (8) от дробей и сравнив коэффициенты при одинаковых степенях s.

[2]) Заметим, что в силу формулы (III) из § 6, п. 2, при $Ra>-1$, $R(s-\rho)>0$ имеем

$$\int_0^{+\infty}e^{-st}e^{\rho t}t^a\,dt=\int_0^{+\infty}e^{-(s-\rho)t}t^a\,dt=\frac{\Gamma(a+1)}{(s-\rho)^{a+1}},$$

то

$$Y(t) = F(t) * Q(t)$$

или

$$Y(t) = \sum_{k=1}^{r} e^{\rho_k t} \int_0^t \left[d_{k1} + d_{k2} \frac{t-\tau}{1!} + \ldots + d_{k\nu_k} \frac{(t-\tau)^{\nu_k - 1}}{(\nu_k - 1)!} \right] e^{-\rho_k \tau} F(\tau)\, d\tau. \quad (1')$$

Можно доказать, независимо от теоремы существования и единственности решения, удовлетворяющего данным начальным условиям, что полученная из формулы (1′) функция $Y(t)$ удовлетворяет уравнению (1) и начальным условиям (3) (см. Деч [1], стр. 327).

д) Для того, чтобы решить задачу Коши для уравнения (1), достаточно предварительно построить решения U_l однородного уравнения $p(D)Y = 0$, удовлетворяющие начальным условиям

$$\left.\begin{aligned} &U_l(0) = 0,\ U_l'(0) = 0,\ \ldots,\ U_l^{(l-1)}(0) = 0, \\ &U_l^{(l)}(0) = 1,\ U_l^{(l+1)}(0) = 0,\ \ldots,\ U_l^{(n-1)}(0) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

В самом деле, тогда решение уравнения (1), принимающее вместе со своими производными до $(n-)1$-го порядка включительно заданные значения $Y(0)$, $Y'(0)$, ..., $Y^{(n-1)}(0)$, имеет вид

$$Y(t) = \sum_{k=1}^{r} e^{\rho_k t} \int_0^t \left[d_{k1} + d_{k2} \frac{t-\tau}{1!} + \ldots + d_{k\nu_k} \frac{(t-\tau)^{\nu_k - 1}}{(\nu_k - 1)!} \right] e^{-\rho_k \tau} F(\tau)\, d\tau + \\ + \sum_{l=0}^{n-1} Y^{(l)}(0)\, U_l(t). \quad (11)$$

Для определения $U_l(t)$ рассмотрим их преобразования Лапласа $y_l(s)$; имеем

$$y_l(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} U_l(t)\, dt,$$

и из (2) следует, что

$$y_l(s) = \frac{s^{n-l-1} + a_{n-1} s^{n-l-2} + \ldots + a_{l+1}}{p(s)} \quad (l = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

Из (8) и (9_1) следует, что

$$1/p(s) = q(s) = \mathfrak{L}\{Q(t)\},$$

а из (5) получаем[1]) в силу результатов, полученных в § 6, п. 3, „б“, что

$$\mathfrak{L}\{Q^{(\nu)}\} = s^{\nu}\mathfrak{L}\{Q\} \quad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1),$$
$$\mathfrak{L}\{Q^{(n)}\} = s^{n}\mathfrak{L}\{Q\} - 1.$$

---

[1]) Рассуждения, с помощью которых были установлены равенства (5), сохраняют свою силу и в случае, когда уравнение $p(s) = 0$ имеет кратные корни.

Отсюда следует, что

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} U_l(t)\,dt = y_l(s) =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-st} [Q^{(n-l-1)}(t) + a_{n-1} Q^{(n-l-2)}(t) + \ldots + a_{l+1} Q(t)]\,dt,$$

а поэтому

$$U_l(t) = Q^{(n-l-1)}(t) + a_{n-1} Q^{(n-l-2)}(t) + \ldots + a_{l+1} Q(t) \qquad (12)$$

$$(l = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1;\ a_n = 1).$$

Формулы (11) *и* (12), *где* $Q(t)$ *дается выражением* (9_2), *решают поставленную задачу.*

2. Дифференциальные уравнения, коэффициентами которых являются многочлены. В § 5, п. 2, мы рассматривали дифференциальное уравнение n-го порядка, коэффициентами которого были многочлены первой степени относительно независимой переменной (уравнения Лапласа). Мы показали, что можно найти решения этих уравнений с помощью частного вида преобразования Лапласа. Укажем кратко на причину, по которой применение преобразования Лапласа оказалось удачным.

Пусть дано уравнение

$$Y^{(n)} + a_{n-1}(t)\,Y^{(n-1)} + a_{n-2}(t)\,Y^{(n-2)} + \ldots +$$
$$+ a_1(t)\,Y' + a_0(t)\,Y = F(t), \qquad (13)$$

где $a_0(t),\ a_1(t),\ \ldots,\ a_{n-1}(t)$ — многочлены степени m от t и $F(t)$ — непрерывная при $t \geqslant 0$ функция класса L.

Полагая

$$y(s) = \mathfrak{L}\{Y(t)\},$$

имеем (§ 6, п. 1, „ж“, п. 3, „б“)

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} t^k Y^{(l)}(t)\,dt = (-1)^k \frac{d^k}{ds^k} \int_0^{+\infty} e^{-st} Y^{(l)}(t)\,dt =$$

$$= (-1)^k \frac{d^k}{ds^k} [s^l y(s) - Y(0)\,s^{l-1} - Y'(0)\,s^{l-2} - \ldots - Y^{(l-1)}(0)]$$

$$(k = 0,\ 1,\ \ldots,\ m).$$

Таким образом, если применить к обеим частям заданного уравнения (13) преобразование Лапласа, то оно превратится в дифференциальное уравнение m-го порядка относительно изображения $y(s)$ функции $Y(t)$. *Если* $m < n$ (в частности, если $m = 1$), *то задача упрощается.*

3. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Нахождение решения, удовлетворяющего начальным условиям. а) Рассмотрим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} &p_{11}(D)\,Y_1+p_{12}(D)\,Y_2+\ldots+p_{1n}(D)\,Y_n=F_1(t),\\ &p_{21}(D)\,Y_1+p_{22}(D)\,Y_2+\ldots+p_{2n}(D)\,Y_n=F_2(t),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &p_{n1}(D)\,Y_1+p_{n2}(D)\,Y_2+\ldots+p_{nn}(D)\,Y_n=F_n(t), \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

где $F_1(t)$, $F_2(t)$, ..., $F_n(t)$ — заданные функции от t, непрерывные при $t\geqslant 0$ и принадлежащие классу L, Y_1, Y_2, ..., Y_n — искомые функции, а $p_{ik}(D)$ — линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. Будем для простоты считать их операторами второго порядка

$$p_{ik}(D)=a_{ik}D^2+b_{ik}D+c_{ik}. \tag{15}$$

(i, $k=1$, 2, ..., n; a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} — постоянные).

Поставим задачу (Коши) *об определении решения* $Y_1(t)$, $Y_2(t)$, ..., $Y_n(t)$ *по заданным начальным значениям* $Y_k(0)$, $Y'_k(0)$ ($k=1$, 2, ..., n).

Выполняя преобразование Лапласа над каждым из уравнений системы (14) и полагая

$$\mathfrak{L}\{Y_k\}=y_k(s),\ \mathfrak{L}\{F_k\}=f_k\quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{16}$$

получим для нахождения функций y_1, y_2, ..., y_n систему линейных уравнений (§ 6, п. 3, „б“):

$$\left.\begin{aligned} &p_{11}(s)\,y_1+p_{12}(s)\,y_2+\ldots+p_{1n}(s)\,y_n=\\ &\qquad=f_1(s)+\sum_{k=1}^{n}(a_{1k}s+b_{1k})\,Y_k(0)+\sum_{k=1}^{n}a_{1k}Y'_k(0),\\ &p_{21}(s)\,y_1+p_{22}(s)\,y_2+\ldots+p_{2n}(s)\,y_n=\\ &\qquad=f_2(s)+\sum_{k=1}^{n}(a_{2k}s+b_{2k})\,Y_k(0)+\sum_{k=1}^{n}a_{2k}Y'_k(0),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &p_{n1}(s)\,y_1+p_{n2}(s)\,y_2+\ldots+p_{nn}(s)\,y_n=\\ &\qquad=f_n(s)+\sum_{k=1}^{n}(a_{nk}s+b_{nk})\,Y_k(0)+\sum_{k=1}^{n}a_{nk}Y'_k(0). \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

б) Для решения поставленной задачи поступаем так же, как и в п. 1. Предположим, что требуется найти решение системы (14), удовлетворяющее начальным условиям

$$Y_k(0)=Y'_k(0)=0\quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{18}$$

Тогда система (17) примет вид

$$\left.\begin{array}{l} p_{11}(s)y_1+\ldots+p_{1n}(s)y_n=f_1(s), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_{n1}(s)y_1+\ldots+p_{nn}(s)y_n=f_n(s). \end{array}\right\} \tag{19}$$

Полагая

$$\Delta(s)=\begin{vmatrix} p_{11}(s) & \ldots & p_{1n}(s) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{1n}(s) & \ldots & p_{nn}(s) \end{vmatrix} \tag{20}$$

и обозначая через $\Delta_{ik}(s)$ алгебраическое дополнение элемента $p_{ik}(s)$ в $\Delta(s)$, получаем из системы (19), что

$$\Delta(s)\,y_k(s)=\sum_{l=1}^{n}\Delta_{lk}(s)f_l(s) \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{21}$$

При сделанных нами предположениях $\Delta(s)$ и $\Delta_{lk}(s)$ являются многочленами, степень которых не превосходит соответственно $2n$ и $2(n-1)$.

в) Рассмотрим крайние случаи, когда $\Delta(s)$ либо имеет степень $2n$, либо тождественно равно нулю.

Предположим сначала, что степень $\Delta(s)$ *равна* $2n$ (это предположение сохраняется и в „г“ и „д“)[1].

Тогда из системы (21) получаем, что

$$y_k(s)=\sum_{l=1}^{n}\frac{\Delta_{lk}(s)}{\Delta(s)}f_l(s).$$

Соответствующие $Y_k(t)$ находятся так же, как и в предыдущем пункте.

Предположим, что *корни* $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r$ *характеристического уравнения* $\Delta(s)=0$ имеют соответственно кратности $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$ $(\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_r=2n)$. Так как степень $\Delta_{lk}(s)$ меньше степени $\Delta(s)$, то можно найти вполне определенные числа $d_{ij}^{(lk)}$, такие, что имеет место тождество

$$\frac{\Delta_{lk}(s)}{\Delta(s)}=\sum_{i=1}^{r}\left[\frac{d_{i1}^{(lk)}}{s-\rho_i}+\ldots+\frac{d_{i,\nu_i}^{(lk)}}{(s-\rho_i)^{\nu_i}}\right].$$

Если обозначить через $Q_{lk}(t)$ такую функцию, что

$$\mathfrak{L}\{Q_{lk}(t)\}=\frac{\Delta_{lk}(s)}{\Delta(s)}, \tag{22$_1$}$$

[1]) Если степень $\Delta(s)$ меньше, чем $2n$, и $\Delta(s)$ не равно тождественно нулю, то для нахождения решения по начальным условиям удобно перейти к диагональной системе, эквивалентной данной системе (§ 3, п. 2 и 3).

то (см. (9_2))

$$Q_{lk}(t)=\sum_{i=1}^{r}\left[d_{i1}^{(lk)}+d_{i2}^{(lk)}\frac{t}{1!}+\ldots+d_{i\nu_i}^{(lk)}\frac{t^{\nu_i-1}}{(\nu_i-1)!}\right]e^{\rho_i t}. \qquad (22_2)$$

С помощью обычных рассуждений получаем соотношение

$$Y_k(t)=\sum_{l=1}^{n}Q_{lk}(t)*F_l(t) \quad (Q_{l,\,k}(0)=0]. \qquad (23)$$

Нетрудно проверить, что *если $F_l(t)$ являются определенными при $t\geqslant 0$ непрерывными функциями класса L, то формулы* (23) *дают эффективное выражение решения системы* (14), *удовлетворяющего начальным условиям* (18) (см. Деч [1], стр. 331).

г) Найдем теперь решение системы (14), предполагая известными значения

$$Y_k(0),\ Y'_k(0) \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

и предполагая, что $F_1(t)\equiv 0$, $F_2(t)\equiv 0$, ..., $F_n(t)\equiv 0$, т. е. что система однородна.

В этом случае система (17) имеет вид

$$\left.\begin{aligned}
&p_{11}(s)y_1+p_{12}(s)y_2+\ldots+p_{1n}(s)y_n=\\
&\qquad=\sum_{k=1}^{n}(a_{1k}s+b_{1k})Y_k(0)+\sum_{k=1}^{n}a_{1k}Y'_k(0),\\
&p_{21}(s)y_1+p_{22}(s)y_2+\ldots+p_{2n}(s)y_n=\\
&\qquad=\sum_{k=1}^{n}(a_{2k}s+b_{2k})Y_k(0)+\sum_{k=1}^{n}a_{2k}Y'_k(0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&p_{n1}(s)y_1+p_{n2}(s)y_2+\ldots+p_{nn}(s)y_n=\\
&\qquad=\sum_{k=1}^{n}(a_{nk}s+b_{nk})Y_k(0)+\sum_{k=1}^{n}a_{nk}Y'_k(0).
\end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

Пользуясь введенными ранее обозначениями, имеем

$$y_k(s)=\sum_{l=1}^{n}\frac{\Delta_{lk}(s)}{\Delta(s)}\left[\sum_{\nu=1}^{n}(a_{l\nu}s+b_{l\nu})Y_\nu(0)+\sum_{\nu=1}^{n}a_{l\nu}Y'_\nu(0)\right] \qquad (25)$$

$$(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Принимая во внимание формулу (22_1) и соотношение

$$\mathfrak{L}\{Q'_{lk}(t)\}=s\mathfrak{L}\{Q_{lk}(t)\}-Q_{lk}(0)=s\mathfrak{L}\{Q_{lk}(t)\}$$

(см. § 6, п. 3, „б"), получаем из формулы (25) выражение

$$Y_k(t)=\sum_{\nu=1}^{n} Y_\nu(0)\sum_{l=1}^{n}[a_{l\nu}Q'_{lk}(t)+b_{l\nu}Q_{lk}(t)]+$$
$$+\sum_{\nu=1}^{n} Y'_\nu(0)\sum_{l=1}^{n} a_{l\nu}Q_{lk}(t) \qquad (26)$$
$$(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Нетрудно проверить, что если система (14) однородна, то функции (26) удовлетворяют как самой системе, так и поставленным начальным условиям.

д) Из изложенного в „в" и „г" вытекает, что если $\Delta(s)$ имеет степень $2n$ относительно s, то решение системы (14), удовлетворяющее заданным начальным условиям, имеет вид

$$Y_k(t)=\sum_{l=1}^{n} Q_{lk}(t)*F_l(t)+$$
$$+\sum_{\nu=1}^{n} Y_\nu(0)\sum_{l=1}^{n}[a_{l\nu}Q'_{lk}(t)+b_{l\nu}Q_{lk}(t)]+\sum_{\nu=1}^{n} Y'_\nu(0)\sum_{l=1}^{n} a_{l\nu}Q_{lk}(t) \qquad (27)$$
$$(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

е) Рассмотрим, наконец, случай, когда *определитель* $\Delta(s)$ *тождественно равен нулю*, и будем искать решения $Y_1(t)$, $Y_2(t)$, ..., $Y_n(t)$ системы (14), принимающие при $t=0$ вместе со своими первыми производными заданные значения, а также выясним, при каких условиях такие решения существуют (см. примечание в § 3, п. 1, „б").

Пусть ранг матрицы $\Delta(s)$ равен r. Тогда существует отличный от нуля минор r-го порядка, скажем

$$\begin{Vmatrix} p_{11}(s) & \ldots & p_{1r}(s) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{r1}(s) & \ldots & p_{rr}(s) \end{Vmatrix}.$$

Как хорошо известно из алгебры, существуют такие множители $\lambda_\nu^{(i)}(s)$ $(i=r+1,\ \ldots,\ n;\ \nu=1,\ 2,\ \ldots,\ r)$, что имеет место разложение

$$p_{ik}(s)=\sum_{\nu=1}^{r}\lambda_\nu^{(i)}(s)\,p_{\nu k}(s)\ (i=r+1,\ \ldots,\ n;\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Для разрешимости системы (17) необходимо и достаточно, чтобы между правыми частями уравнений этой системы имели место соот-

ветствующие соотношения

$$f_i(s)+\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}s+b_{ik})Y_k(0)+\sum_{k=1}^{n}a_{ik}Y'_k(0)=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{r}\lambda_\nu^{(i)}(s)\left[f_\nu(s)+\sum_{k=1}^{n}(a_{\nu k}s+b_{\nu k})Y_k(0)+\sum_{k=1}^{n}a_{\nu k}Y'_k(0)\right]$$

$$(i=r+1,\ldots,n).$$

Для решения системы (14) достаточно ограничиться в этом случае первыми r из уравнений этой системы, выбрав в качестве $Y_{r+1}(t),\ldots,Y_n(t)$ любые функции, принимающие при $t=0$ вместе со своими первыми производными заданные значения, такие, что их вторая производная принадлежит классу L.

4. Преобразование Лапласа и операционное исчисление Хевисайда. а) В § 1, 3, 4 этой главы были изложены некоторые алгебраические свойства линейных дифференциальных операторов, которыми мы воспользовались для нахождения общего решения дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений. В п. 1, 2, 3 этого параграфа мы путем использования преобразования Лапласа определили решения уравнений и систем, удовлетворяющие заданным начальным условиям. В электротехнике обычно находят решения, удовлетворяющие заданным начальным условиям, с помощью так называемого операционного исчисления Хевисайда[1]). Это исчисление было использовано Хевисайдом для того, чтобы избежать применения дифференциального и интегрального исчислений при решении некоторых дифференциальных уравнений, связанных с теорией электрических цепей, и свести решение таких уравнений к решению задач алгебраического характера.

Мы изложим бегло операционный метод Хевисайда и покажем связь этого метода с преобразованием Лапласа.

б) Начнем со следующего примера. Рассмотрим уравнение

$$V=ri+L\frac{di}{dt} \tag{28}$$

(V, r, L — положительные числа). Здесь i — сила тока в некоторой электрической цепи, V — напряжение, r — сопротивление, L — коэффициент самоиндукции (индуктивность). Найдем решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $i(0)=0$.

Если положить

$$\frac{d}{dt}=p$$

(в исчислении Хевисайда пишут символ p вместо D), то уравнение (28)

[1]) См., например, Гарднер и Бэрнс [1]. — *Прим. перев.*

примет вид

$$V=(r+Lp)\,i. \tag{28'}$$

Для решения этого уравнения применим алгебраический метод Хевисайда, обоснование которого будет дано позже.

Из уравнения (28′) имеем

$$i=\frac{V}{r+Lp}. \tag{28''}$$

Разлагая правую часть в ряд по степеням $1/p$, получаем

$$i=\frac{V}{Lp}\frac{1}{1+\frac{r}{Lp}}=\frac{V}{Lp}\left(1-\frac{r}{Lp}+\frac{r^2}{L^2p^2}-\ldots\right),$$

$$i=V\left(\frac{1}{L}\frac{1}{p}-\frac{r}{L^2}\frac{1}{p^2}+\frac{r^2}{L^3}\frac{1}{p^2}-\ldots\right). \tag{29}$$

Символ $1/p$ представляет функцию, производная которой равна 1, и которая обращается в нуль при $t=0$, вообще $1/p^n$ представляет функцию, n-я производная от которой равна 1, и которая обращается в нуль при $t=0$ вместе со своими производными до $(n-1)$-го порядка включительно. Иными словами,

$$\frac{1}{p}1=\frac{t}{1!},\ \frac{1}{p^2}1=\frac{t^2}{2!},\ \ldots,\ \frac{1}{p^n}1=\frac{t^n}{n!},\ \ldots. \tag{30}$$

Тогда равенство (29) дает

$$i=V\left(\frac{1}{L}t-\frac{r}{L^2}\frac{t^2}{2!}+\frac{r^2}{L^3}\frac{t^3}{3!}-\ldots\right),$$

$$i=\frac{V}{r}\left(1-e^{-\frac{r}{L}t}\right). \tag{31}$$

Полученное выражение для i дает как раз решение уравнения (28), обращающееся в нуль при $t=0$.

Заметим, наконец, что к формуле (31) можно прийти, применяя метод из § 1, п. 5, „а“; в самом деле, разлагая правую часть формулы (28″) *по степеням* p, получаем следующее выражение для общего решения уравнения (28):

$$i=\frac{V}{r}\frac{1}{1+p\frac{L}{r}}+Ce^{-\frac{r}{L}t}=\frac{V}{r}\left(1-p\frac{L}{r}+p^2\frac{L^2}{r^2}-\ldots\right)+Ce^{-\frac{r}{L}t},$$

$$i=\frac{V}{r}+Ce^{-\frac{r}{L}t}.$$

Принимая во внимание, что $i(0)=0$, получаем отсюда выражение (31).

в) Прежде чем дать обоснование операционного исчисления, приведем еще один пример, в котором *полезно разложение по степеням* $1/p$, и выведем так называемую формулу Хевисайда.

Обобщая формулы (30), условимся понимать под символом $\frac{1}{(p-\rho)^\nu} F(t)$ (ρ — постоянная) функцию $Y(t)$, удовлетворяющую уравнению $(D-\rho)^\nu Y = F(t)$ и обращающуюся в нуль вместе со своими производными до $(\nu-1)$-го порядка включительно в точке $t=0$.

Имеем (см. § 1, п. 3, „б")

$$\frac{1}{p^\nu} F(t) = \int_0^t \frac{(t-u)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} F(u)\,du. \tag{32}$$

Покажем, как, исходя из этой формулы, можно вычислить по методу Хевисайда $1/(p-\rho)^\nu \cdot F(t)$.

Разлагая $1/(p-\rho)^\nu$ *в ряд по степеням* $1/p$, имеем

$$\frac{1}{(p-\rho)^\nu} F(t) = \frac{1}{p^\nu}\left(1-\frac{\rho}{p}\right)^{-\nu} F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\nu}{k} \frac{\rho^k}{p^{\nu+k}} F(t),$$

$$\frac{1}{(p-\rho)^\nu} F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\nu+k-1)!}{k!\,(\nu-1)!} \frac{\rho^k}{p^{\nu+k}} F(t), \tag{33}$$

и в силу (32)

$$\frac{1}{(p-\rho)^\nu} F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t \frac{\rho^k (t-u)^{\nu+k-1}}{k!\,(\nu-1)!} F(u)\,du =$$

$$= \int_0^t \frac{(t-u)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} e^{\rho(t-u)} F(u)\,du.$$

Отсюда вытекает формула Хевисайда, доказанная нами в § 1, п. 3, „в",

$$\frac{1}{(p-\rho)^\nu} F(t) = e^{\rho t} \int_0^t \frac{(t-u)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} e^{-\rho u} F(u)\,du, \tag{34}$$

или же

$$\frac{1}{(p-\rho)^\nu} F(t) = e^{-\rho t} \frac{1}{p^\nu} [e^{-\rho t} F(t)]. \tag{34'}$$

г) В описанном выше методе и вообще в методе Хевисайда имеются два существенных момента: разложение выражения для искомой функции в *ряд по степеням* $1/p$, например вида рядов (29) или (33) (без каких-либо рассмотрений о сходимости получающегося ряда), и подстановка вместо $1/p^n$ выражения $t^n/n!$.

Покажем, на чем основана успешность метода Хевисайда. Рассмотрим, например, уравнение (28). Если положить

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} i(t)\,dt = I(p)$$

и сделать в обеих частях уравнения (28) преобразование Лапласа, то получим [см. п. 1, формула (2)]

$$\frac{V}{p(r+Lp)}=I(p),$$

$$I(p)=V\left[\frac{1}{L}\frac{1}{p^2}-\frac{r}{L^2}\frac{1}{p^3}+\frac{r^2}{L^3}\frac{1}{p^4}-\ldots\right].$$

Здесь $1/p^2$, $1/p^3, \ldots, 1/p^{n+1}, \ldots$ являются как раз преобразованиями Лапласа функций $t/1!$, $t^2/2!, \ldots, t^n/n!, \ldots$ (что соответствует подстановке Хевисайда), следовательно

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt}\, i(t)\, dt=$$

$$=V\left[\frac{1}{L}\int_0^{+\infty} e^{-pt}\frac{t}{1!}\,dt-\frac{r}{L^2}\int_0^{+\infty} e^{-pt}\frac{t^2}{2!}\,dt+\frac{r^2}{L^3}\int_0^{+\infty} e^{-pt}\frac{t^2}{3!}\,dt-\ldots\right].$$

Так как в правой части законна замена суммы интегралов интегралом от суммы, мы приходим сразу к выражению (31).

Метод Хевисайда не предполагает обоснования перехода от (28) к (31); поэтому этот метод имеет, вообще говоря, эвристический характер, и решения, получаемые этим методом, требуют соответствующей проверки.

Как мы увидим в § 9, функциональное операторное исчисление Джорджи дает несколько иной подход к этим вопросам.

§ 8. Метод Бромвича интегралов в комплексной области

Метод Бромвича ([2], стр. 401—410, см. также Джеффрей [3], стр. 22—23, Титчмарш [1], стр. 355—361) решения задачи Коши для систем однородных уравнений с постоянными коэффициентами основан на формуле обращения Пинкерле для интеграла Лапласа, выведенной в § 6, п. 6. Мы проиллюстрируем этот метод на примере, хотя сам метод имеет общий характер.

Пусть требуется решить систему уравнений

$$(D^2-4D)X-(D-1)Y=0, \tag{1}$$

$$(D+6)X+(D^2-D)Y=0 \quad (D=d/dt),$$

рассмотренную нами ранее в § 3, п. 3, „г“.

Указанный там метод дает следующее выражение для общего решения:

$$\left.\begin{aligned} X&=2c_1e^{-t}+c_3e^{2t}+2c_4e^{3t},\\ Y&=-5c_1e^{-t}+c_2e^{t}-4c_3e^{2t}-3c_4e^{3t},\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 — произвольные постоянные. Если начальные условия имеют вид

$$X(0)=X_0, \quad X'(0)=X_1, \quad Y(0)=Y_0, \quad Y'(0)=Y_1, \tag{3}$$

то постоянные c_1, c_2, c_3, c_4 должны быть равны

$$\left.\begin{aligned} c_1&=\frac{1}{24}[6X_0-X_1-Y_0+Y_1], \quad c_2=\frac{1}{4}[18X_0-7X_1+7Y_0-3Y_1],\\ c_3&=\frac{1}{3}[3X_0-2X_1+Y_0-Y_1], \quad c_4=\frac{1}{8}[-2X_0+3X_1-Y_0+Y_1]. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Выражения для X и Y можно найти непосредственно с помощью следующего рассуждения.

$X(t)$ и $Y(t)$ являются целыми функциями экспоненциального типа. Поэтому можно положить (§ 6, п. 6), что

$$X(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C e^{st}\xi(s)\,ds, \quad Y(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C e^{st}\eta(s)\,ds, \tag{5}$$

где в качестве пути интегрирования C можно выбрать окружность с центром в начале координат достаточно большого радиуса R, пробегаемую в положительном направлении, а $\xi(s)$ и $\eta(s)$ являются голоморфными функциями в области $|s|<R$, стремящимися к нулю на бесконечности [см. § 6, п. 6, формула (14)].

Подставляя выражения (5) в систему (1), получаем

$$\int\limits_C \{\xi(s)(s^2-4s)-\eta(s)(s-1)\}\,e^{ts}\,ds=0,$$

$$\int\limits_C \{\xi(s)(s+6)+\eta(s)(s^2-s)\}\,e^{ts}\,ds=0.$$

Если положить

$$\left.\begin{aligned} \xi(s)(s^2-4s)-\eta(s)(s-1)&=p(s),\\ \xi(s)(s+6)+\eta(s)(s^2-s)&=q(s), \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

то функции $p(s)$ и $q(s)$ будут голоморфными в области $|s|>R$, за исключением бесконечно удаленной точки, в которой они имеют полюс первого порядка.

По известной теореме[1]) получаем, что

$$p(s) = a + bs, \quad q(s) = \alpha + \beta s, \tag{7}$$

где a, b, α, β — постоянные.

Из (5) следует, что

$$X_0 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \xi(s)\,ds, \qquad X_1 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C s\xi(s)\,ds,$$

и, по разложению в ряд Лорана, при достаточно больших $|s|$

$$\xi(s) = \frac{X_0}{s} + \frac{X_1}{s^2} + O\left(\frac{1}{|s^3|}\right). \tag{8_1}$$

Аналогично

$$\eta(s) = \frac{Y_0}{s} + \frac{Y_1}{s^2} + O\left(\frac{1}{|s^3|}\right). \tag{8_2}$$

Подставляя выражения (8_1), (8_2) в первое равенство (6) и принимая во внимание (7), получаем, что

$$(s^2 - 4s)\left[\frac{X_0}{s} + \frac{X_1}{s^2} + O\left(\frac{1}{|s^3|}\right)\right] - (s-1)\left[\frac{Y_0}{s} + \right.$$
$$\left. + \frac{Y_1}{s^2} + O\left(\frac{1}{|s^3|}\right)\right] = p(s).$$

Сравнивая свободные члены и члены, содержащие первую степень s, убеждаемся, что

$$(s-4)X_0 + X_1 - Y_0 = p(s). \tag{9_1}$$

Поступая аналогичным образом со вторым равенством (6), получаем

$$X_0 + (s-1)Y_0 + Y_1 = q(s). \tag{9_2}$$

Решая систему (6) относительно $\xi(s)$ и $\eta(s)$, находим

$$\left.\begin{aligned} \xi(s) &= \frac{sp+q}{(s+1)(s-2)(s-3)}, \\ \eta(s) &= \frac{-(s+6)p + (s^2-4s)q}{(s^2-1)(s-2)(s-3)}, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

где p и q даются выражениями (9_1) и (9_2).

---

[1]) Теорема, на которую мы опираемся, формулируется следующим образом: Если функция $\Phi(s)$ голоморфна при $|s| \geqslant R > 0$, за исключением бесконечно удаленной точки, в которой она имеет полюс порядка n, и если для любого действительного или комплексного t имеем $\int\limits_C \Phi(s)\,e^{ts}\,ds = 0$, где C — замкнутая кривая, охватывающая окружность радиуса R с центром в начале координат, то $\Phi(s) = a_0 + a_1 s + \ldots + a_n s^n$, т. е. $\Phi(s)$ совпадает со своей главной частью (см. Титчмарш [1], стр. 66).

Если подставить теперь выражения (10) в формулы (5) и вычислить интегралы с помощью теории вычетов, то получатся выражения для решения системы (1), удовлетворяющего начальным условиям (3).

Например, для $X(t)$ члены, соответствующие полюсам $s=-1$, $s=2$, $s=3$, равны соответственно

$$\frac{-p(-1)+q(-1)}{[(s+1)(s-2)(s-3)]'_{s=-1}}e^{-t}=\frac{6X_0-X_1-Y_0+Y_1}{12}e^{-t},$$

$$\frac{2p(2)+q(2)}{-3}e^{2t}=\frac{3X_0-2X_1+Y_0-Y_1}{3}e^{2t},$$

$$\frac{3p(3)+q(3)}{4}e^{3t}=\frac{-2X_0+3X_1-Y_0+Y_1}{4}e^{3t}.$$

Мы получаем таким образом для $X(t)$ выражение (2), в которое вместо c_1, c_2, c_3, c_4 подставлены выражения (4).

§ 9. Функциональное операторное исчисление Джорджи и дифференциальные уравнения

1. Функциональное исчисление Джорджи. а) Как отмечалось в § 7, п. 4, „г“, метод Хевисайда дает лишь эвристический способ нахождения решений дифференциальных уравнений. Строгий аспект метода впервые был дан Джорджи[1]). Независимо от Хевисайда он разработал в 1904 г. свой метод использования символического исчисления при изучении процессов, связанных с непериодическим переменным током в электрических цепях. Его метод, названный *функциональным исчислением*, позволяет не только решать уравнения, описывающие эти процессы, но и получать некоторые результаты в тех случаях, когда соответствующие уравнения неизвестны или выводятся с трудом.

В этом параграфе мы дадим некоторые сведения о методе Джорджи.

б) Пусть аналитическая функция $f(\omega)$ существует во всей комплексной плоскости, имеет конечное число особых точек в любой ограниченной части плоскости и голоморфна в полуплоскости $R\omega \geqslant 0$. Мы намереваемся, согласно Джорджи, поставить в соответствие функции $f(\omega)$ оператор $f(\Delta)$, обладающий следующими свойствами:

1) этот оператор дистрибутивен, то есть при постоянных c_1 и c_2

$$f(\Delta)[c_1V_1(t)+c_2V_2(t)]=c_1f(\Delta)V_1(t)+c_2f(\Delta)V_2(t);$$

2) при постоянном h

$$e^{h\Delta}V(t)=V(t+h);$$

---

[1]) Джорджи [1], [2], [3], [4]. См. также Винер [1], Сбрана [2], Граффи [1], [2].

3) если $f(\Delta) \equiv \Delta$, то оператор Δ совпадает с операцией дифференцирования, т. е.

$$\Delta V(t) = dV/dt;$$

4) над символами $f(\Delta)$ можно действовать по обычным алгебраическим законам, причем

$$f(\Delta)[g(\Delta)V(t)] = [f(\Delta)g(\Delta)]V(t);$$

5) при решении задач, касающихся переменного тока любого вида в некоторой цепи, составленной из постоянных сопротивлений, индуктивностей и емкостей, можно решать задачу так же, как и для постоянного тока, рассматривая каждую индуктивность L как сопротивление $L\Delta$, а каждую емкость k как проводимость $k\Delta$ (см. п. 2, „б", „в").

Исходя из преобразования Лапласа, Джорджи дал следующее определение для *фундаментального значения оператора* $f(\Delta)V(t)$.

Пусть функция $f(\omega)$ аналитична во всей комплексной плоскости, имеет конечное число особых точек в любой ограниченной части плоскости и голоморфна в полуплоскости $R\omega \geqslant 0$. Пусть, далее, $V(t)$ — любая действительная или комплексная функция действительной переменной t, определенная в промежутке $(-\infty, +\infty)$. Относительно $V(t)$ предположим также, что она имеет ограниченное изменение, регулярна и абсолютно интегрируема в промежутке $(-\infty, +\infty)$[1]) (Джорджи называет такие функции *физическими*). Тогда символ $f(\Delta)$ обозначает такой оператор, что фундаментальное значение выражения $f(\Delta)V(t)$ дается формулой

$$f(\Delta)V(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ T \to +\infty}} \int_C \left[Q(\alpha, \omega) f(\omega) e^{\omega t} \int_{-T}^{T} V(\tau) e^{-\omega\tau} d\tau \right] d\omega,$$

где C — прямолинейный путь, соединяющий точки $-i\infty$, $i\infty$, а множитель $Q(\alpha, \omega)$ — целая функция относительно комплексных переменных α, ω, такая, что $Q(0, \omega) = 1$, и введенная для обеспечения сходимости правой части при любом действительном значении переменной t.

При изменении пути C выражение $f(\Delta)V(t)$ может изменяться лишь на величину, соответствующую всевозможным значениям $f(\Delta)(0)$, которую Джорджи назвал *дополнительным членом*. Поэтому вообще имеем

$$f(\Delta)V(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ T \to +\infty}} \int_C \left[Q(\alpha, \omega) f(\omega) e^{t} \int_{-T}^{T} V(\tau) e^{-\omega\tau} d\tau \right] d\omega + f(\Delta)(0).$$

---

[1]) Вместо того чтобы предполагать ограниченность изменения функции $V(t)$ на промежутке $(-\infty, +\infty)$, можно предположить, что промежуток $(-\infty, +\infty)$ разлагается на счетное множество непересекающихся промежутков, *внутри* каждого из которых $V(t)$ имеет ограниченное изменение и регулярна.

Можно доказать, что при таком определении операторы $f(\Delta)$ обладают указанными выше свойствами 1) — 5). Кроме того,

$$f(\Delta)\,e^{\rho t} = f(\rho)\,e^{\rho t}; \tag{1}$$

$$\Delta^{\nu} V(t) = d^{\nu} V(t)/dt^{\nu} \qquad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots); \tag{2}$$

$$\Delta^{-\nu} V(t) = \frac{1}{(\nu-1)!}\int_{t_0}^{t} (t-u)^{\nu-1} V(u)\,du + c_0 + c_1 t + \ldots + c_{\nu-1} t^{\nu-1} \tag{3}$$

$$(\nu = 1,\ 2, \ldots),$$

где $c_0,\ c_1,\ \ldots,\ c_{\nu-1}$ — произвольные постоянные [§ 1, п. 3, формула (8)].

$$f(\Delta - \rho)\,V(t) = e^{\rho t} f(\Delta)\,[e^{-\rho t} V(t)], \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[f(x,\ \Delta)\,V(t)] = \left[\frac{\partial}{\partial x} f(x,\ \Delta)\right] V(t). \tag{5}$$

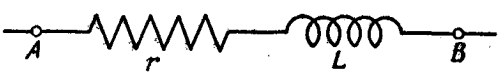
В частности, из формул (3) и (4) при постоянном ρ следует соотношение [§ 1, п. 3, формула (8_2)]

$$\frac{1}{\Delta - \rho}\,V(t) = e^{\rho t}\,\frac{1}{\Delta}\,e^{-\rho t} V(t) = e^{\rho t}\int_{t_0}^{t} e^{-\rho\tau} V(\tau)\,d\tau + c e^{\rho t} \tag{6}$$

$$(c = \text{const}).$$

Из соображений краткости мы опускаем доказательства этих утверждений. В следующем п. 2 мы приведем некоторые приложения указанных выше свойств.

2. Приложения к расчету электрических цепей. а) Пусть мы имеем цепь AB с последовательно включенными сопротивлением r и



Фиг. 18.

индуктивностью L (фиг. 18). Обозначим через $V(t)$ и $i(t)$ соответственно напряжение и силу тока, выраженные как функции времени t. Тогда имеем

$$V = ir + L\frac{di}{dt},$$

$$V = (r + L\Delta)\,i,$$

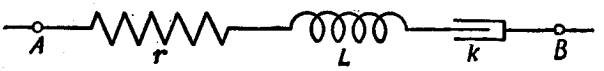
$$i = \frac{1}{r + L\Delta}\,V = \frac{1}{L}\,\frac{1}{\Delta + \frac{r}{L}}\,V$$

и из (6) ($\rho = -r/L$) получаем

$$i(t) = \frac{1}{L} e^{-\frac{r}{L}} \int_{t_0}^{t} e^{\frac{r}{L}\tau} V(\tau)\, d\tau + i_0 e^{-\frac{r}{L}(t-t_0)},$$

где через i_0 обозначена сила тока в момент времени $t = t_0$.

б) Пусть мы имеем цепь AB с последовательно включенными сопротивлением r, индуктивностью L и емкостью k (фиг. 19).



Фиг. 19.

Обозначим через $V(t)$ и $i(t)$ соответственно напряжение и силу тока в момент времени t. Тогда (см. п. 1, свойство 5)) имеем

$$V(t) = ir + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{k}\int_{t_0}^{t} i(t)\, dt,$$

$$V = \left(r + L\Delta + \frac{1}{k\Delta}\right) i,$$

$$i = \frac{k\Delta}{kL\Delta^2 + kr\Delta + 1} V(t).$$

Обозначим через $-\rho_1$, $-\rho_2$ корни уравнения $kL\rho^2 + kr\rho + 1 = 0$. Тогда, если $\rho_1 \neq \rho_2$, то

$$\frac{k\rho}{kL\rho^2 + k\rho + 1} = \frac{\alpha_1}{\Delta + \rho_1} + \frac{\alpha_2}{\Delta + \rho_2} \quad (\alpha_1,\ \alpha_2 \text{ — постоянные}),$$

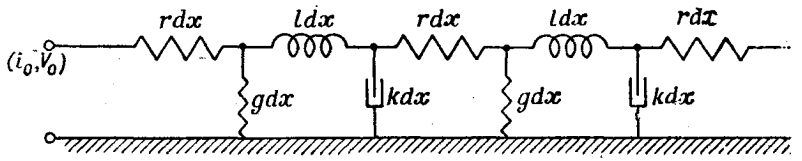
и из равенства (6) получаем, что

$$i(t) = \alpha_1 e^{-\rho_1 t} \int_{t_0}^{t} e^{\rho_1 \tau} V(\tau)\, d\tau + \alpha_2 e^{-\rho_2 t} \int_{t_0}^{t} e^{\rho_2 \tau} V(\tau)\, d\tau + c_1 e^{-\rho_1 t} + c_2 e^{-\rho_2 t},$$

где c_1 и c_2 — постоянные, зависящие от начального состояния системы.

в) Рассмотрим теперь распространение непериодических возмущений в одномерной системе. Пусть луч $0 \leqslant x < +\infty$ представляет собой бесконечный в одну сторону проводник, сопротивление единицы длины которого равно r. Ток выходит из точки $x = 0$ и идет по проводнику, который заземлен на бесконечности (потенциал земли принимаем равным нулю). Пусть, кроме того, имеется утечка тока от проводника к земле с проводимостью на единицу длины, равной g,

Предположим еще, что единственный источник тока находится в точке $x=0$ (фиг. 20).



Фиг. 20.

Пусть V_0 и i_0 являются соответственно напряжением и силой тока в точке $x=0$, а $V(x)$ и $i(x)$ — напряжением и силой тока в точке с абсциссой x. Тогда

$$V(0)=V_0, \qquad V(+\infty)=0. \tag{7}$$

Падение напряжения вдоль элемента длины dx равно $ir\,dx$, утечка тока от проводника к земле равна на этом элементе $Vg\,dx$. Отсюда следует, что

$$-dV=ir\,dx, \qquad -di=Vg\,dx,$$

$$dV/dx=-ir, \qquad di/dx=-Vg \tag{8}$$

и, следовательно,

$$\frac{d^2V}{dx^2}-grV=0, \tag{9_1}$$

$$\frac{d^2i}{dx^2}-gri=0. \tag{9_2}$$

Интегрируя первое из этих уравнений, получаем

$$V(x)=c_1e^{x\sqrt{gr}}+c_2e^{-x\sqrt{gr}},$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные и, по условию (7),

$$V(x)=V_0e^{-x\sqrt{gr}}. \tag{10}$$

Первое из равенств (8) показывает тогда, что

$$i(x)=-\frac{1}{r}\frac{dV}{dx}=\sqrt{\frac{g}{r}}\,V_0e^{-x\sqrt{gr}}=i_0e^{-x\sqrt{gr}}.$$

Следовательно, в любой точке проводника

$$i(x)=\sqrt{\frac{g}{r}}\,V(x) \quad (=i_0e^{-x\sqrt{gr}}) \tag{11}$$

и, в частности,

$$i_0=\sqrt{\frac{g}{r}}\,V_0. \tag{12}$$

Таким образом, рассматриваемая цепь эквивалентна цепи с проводимостью $\sqrt{g/r}$ (сопротивлением $\sqrt{r/g}$).

Если же по проводнику течет переменный ток, индуктивность на единицу длины равна l, а связь проводника с землей состоит из параллельно включенных, равномерно распределенных проводимостей g на единицу длины и емкостей k на единицу длины (см. фиг. 20), то уравнения, которым удовлетворяют V и i, получаются путем подстановки в (9_1) вместо обычного сопротивления r функционального сопротивления $r+l\Delta$, а вместо обычной проводимости g функциональной проводимости $g+k\Delta$ ($\Delta=d/dt$ (см. п. 1, условие 5)). Таким образом получается уравнение в частных производных

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=(g+k\Delta)(r+l\Delta)\,V$$

или

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=kl\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}+(gl+kr)\frac{\partial V}{\partial t}+grV. \tag{13}$$

Это — так называемое *уравнение распространения возмущения в одном направлении.*

Поступая по тому же принципу с формулами (10), (11), (12), получаем выражения для $V(x, t)$, $i(x, t)$, $i_0(t)$:

$$\left.\begin{aligned} V(x, t)&=e^{-x\sqrt{(g+k\Delta)(r+l\Delta)}}\,V_0(t),\\ i(x, t)&=e^{-x\sqrt{(g+k\Delta)(r+l\Delta)}}\,i_0(t),\\ i_0(t)&=\sqrt{(g+k\Delta)/(r+l\Delta)}\,V_0(t). \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Эти выражения могут быть записаны и без использования уравнения (13), а входящие в них операторы

$$e^{-x\sqrt{(g+k\Delta)(r+l\Delta)}},\quad \sqrt{(g+k\Delta)/(r+l\Delta)}$$

можно преобразовать по методу Джорджи таким образом, что для них получаются выражения, удобные для использования, в том числе и с точки зрения численного анализа[1]).

---

[1]) См. Джорджи [4] гл. XIV, стр. 274. Относительно приложения функциональных операторов к решению уравнений в частных производных см. Фантаппие [1], [2], [3].

См., кроме того, относительно приложений функциональных преобразований цитированную выше книгу Деча [1], стр. 19 и след.

Глава XI

ЧИСЛЕННОЕ, ГРАФИЧЕСКОЕ И МЕХАНИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Численное решение систем дифференциальных уравнений по методу последовательных приближений

1. Общие замечания. В практике часто встречается следующая задача: дано дифференциальное уравнение или система дифференциальных уравнений, и требуется найти численно решение этого уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям, с погрешностью, не превосходящей некоторой определенной величины. Существование решения, обеспечиваемое общими теоремами или же физическими соображениями, имеет часто второстепенное значение по сравнению с вычислением значений этого решения в некоторых точках (как говорят, табулированием решения) или с нахождением приближенного выражения для решения на всем отрезке существования с погрешностью, меньшей некоторой заранее заданной величины.

В аналитическом случае интегрирование по методу Эйлера при помощи рядов (гл. III, § 1, п. 1) дает возможность аппроксимировать решение во всей области существования, так как, беря достаточно много членов ряда, мы можем получить требуемую точность. Для систем линейных уравнений изящный метод численного решения дает использование матричного исчисления (гл. II, § 2, п. 3).

Для линейных уравнений и систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами при искомых функциях и их производных важным средством численного решения является применение преобразований Лапласа и Бромвича и функционального операторного исчисления Джорджи (см. § 7, 8, 9 из гл. X). В случае же, когда мы не можем воспользоваться ни аналитичностью, ни линейностью, как это имеет место в общем случае, для численного решения могут быть использованы методы, с помощью которых доказывалось существование решения в гл. I. Мы делали соответствующие замечания в гл. I, § 3, п. 3, относительно метода последовательных приближений и в гл. I, § 6, п. 1, „а“, п. 3, относительно метода Коши — Липшица. В этом параграфе мы подвергнем изучению первый из этих методов, а в § 4 — второй. В § 2 и 3 будут рассмотрены методы, более удобные для табулирования решения.

Вопросы, касающиеся вычисления решения при больших значениях переменных или параметров, рассматривались в гл. VII и здесь рассматриваться не будут.

2. Оценка погрешности приближения при методе последовательных приближений. Метод последовательных приближений Пикара — Пеано весьма удобен, с теоретической точки зрения, для приближенного вычисления решений дифференциальных уравнений во всей области их существования; этот процесс быстро сходится, и формула (14) из гл. I, § 3, дает верхний предел погрешности при каждом приближении.

Как мы уже видели, если в прямоугольном параллелепипеде R с центром в точке $(\alpha;\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_m)$, определенном неравенствами

$$-a \leqslant x-\alpha \leqslant a, \quad -b \leqslant y_i-\beta_i \leqslant b \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

функции $f_i(x;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m)$ непрерывны, удовлетворяют неравенствам

$$|f_i(x;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m)| \leqslant M,$$

и условию Липшица относительно переменных $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m$

$$|f_i(x;\ \bar{y}_1,\ \bar{y}_2,\ \ldots,\ \bar{y}_m)-f_i(x;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m| \leqslant L\sum_{k=1}^{m}|\bar{y}_k-y_k|,$$
$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

то система дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dx}=f_i(x;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m) \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$$

имеет одно и только одно решение $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_m(x)$, определенное на отрезке $[\alpha-\delta,\ \alpha+\delta]$, где $\delta=\min(a,\ b/M)$, и удовлетворяющее начальным условиям

$$y_i(\alpha)=\beta_i \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$$

(гл. I, § 3, п. 4, „в").

Положим

$$y_i^{(1)}=\beta_i+\int_{\alpha}^{x} f_i(x;\ u_1(x),\ u_2(x),\ \ldots,\ u_m(x))\,dx \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

где $u_1(x),\ u_2(x),\ \ldots,\ u_m(x)$ — некоторая система функций, непрерывных на отрезке $[\alpha-a,\ \alpha+a]$ и удовлетворяющих неравенствам

$$|u_i(x)-\beta_i| \leqslant b \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

а в остальном произвольных, и определим последовательность функций $\{y_i^{(r)}(x)\}$ формулой

$$y_i^{(r+1)}(x)=\beta_i+\int_{\alpha}^{x} f_i(x;\ y_1^{(r)},\ y_2^{(r)},\ \ldots,\ y_m^{(r)})\,dx$$
$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ r=1,\ 2,\ \ldots).$$

Как мы видели в гл. I, *разность между* $y_i(x)$ и *r-тым приближением* $y_i^{(r)}(x)$ *удовлетворяет неравенствам*

$$|y_i(x)-y_i^{(r)}(x)|\leqslant 2b\frac{[mL\,|x-\alpha|]^r}{r!}\quad (r=1,\ 2,\ \ldots).$$

Однако легко показать на примере, что применение метода последовательных приближений к решению конкретных задач часто наталкивается на существенные трудности при вычислении самих последовательных приближений. Например, если нужно найти решение уравнения

$$y'=(y-x)/(y+x),$$

удовлетворяющее начальному условию $y(0)=1$ [1]), то мы получаем следующую последовательность приближений:

$$y^{(1)}=1+\int_0^x\frac{1-x}{1+x}\,dx=1+\int_0^x\left(\frac{2}{1+x}-1\right)dx=$$
$$=1-x+2\ln(1+x),$$
$$y^{(2)}=1+\int_0^x\frac{1-2x+2\ln(1+x)}{1+2\ln(1+x)}\,dx=1+\int_0^x\left(1-\frac{2x}{1+2\ln(1+x)}\right)dx.$$

Интеграл, стоящий в правой части второй формулы, не выражается в элементарных функциях.

В § 2 и 3 будут изложены численные методы, не требующие квадратур. Заметим, что эти методы применяются и в тех случаях, когда известны выражения решения в замкнутой форме, но для вычисления численных значений этого решения нужны слишком трудоемкие процессы.

§ 2. Методы численного решения Эйлера и Рунге — Кутта

1. Метод Эйлера и видоизмененный метод Эйлера. а) Метод Эйлера был описан нами в гл. I, § 6, в связи с доказательством теоремы существования по методу Коши — Липшица. Он основан на следующем принципе: если через точку (x, y) проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y),\tag{1}$$

то для заданного приращения h аргумента x соответствующее приращение k функции y можно *приближенно* вычислить по формуле

$$k=f(x,\ y)\,h.$$

[1]) Относительно вычисления значения $y(1)$ см. § 2, п. 3, „в".

Поэтому, если из точки (x_0, y_0) выходит интегральная кривая Г уравнения (1), имеющая уравнение

$$y = y(x) \qquad [y(x_0) = y_0],$$

то приращение k_1 функции y, соответствующее приращению h_1 независимой переменной x, приблизительно равно

$$k_1 = f(x_0, y_0) h_1.$$

Приращение же k_2, соответствующее точке $(x_0 + h_1, y_0 + k_1)$ и приращению h_2 независимой переменной, выражается формулой

$$k_2 = f(x_0 + h_1, y_0 + k_1) h_2.$$

Вообще, полагая

$$y_m = y_{m-1} + k_m \quad (m = 1, 2, \ldots), \tag{2_1}$$

$$k_m = f(x_0 + h_1 + \ldots + h_{m-1}, \quad y_0 + k_1 + \ldots + k_{m-1}) h_m, \tag{2_2}$$

имеем

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= y_0 + k_1, \\ y_2 &= y_1 + k_2 = y_0 + k_1 + k_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m &= y_0 + k_1 + k_2 + \ldots + k_m \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

(см. гл. I, § 6, п. 2), и y_m *приближенно равно значению* $y(x)$ *в точке с абсциссой* $x_0 + h_1 + h_2 + \ldots + h_m$.

С точки зрения численного анализа, этот метод, весьма медленный, может быть применен лишь к малым отрезкам и лишь при условии, что функция $f(x, y)$ мало изменяется при изменении x и y.

Мы покажем в п. 2, „а“, что *при условии существования у функции* $f(x, y)$ *непрерывных частных производных второго порядка погрешность, которую мы делаем, беря в качестве значения* $y_1 = y(x_0 + h_1)$ *величину* $y_0 + f(x_0, y_0) h_1$, *является величиной порядка* h_1^2.

б) В приложениях применяется видоизмененный метод Эйлера.

Пусть надо найти значение $y(x)$ в точке $x_1 = x_0 + h_1$,

$$y_1 = y(x_0 + h_1).$$

Указанный в „а“ метод дает в качестве *первого приближения для* y_1 *значение*

$$y_1^{(1)} = y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 h_1, \tag{4}$$

так как

$$\left(\frac{dy}{dy}\right)_0 = f(x_0, y_0). \tag{5}$$

Приближенное значение для dy/dx в точке (x_1, y_1), которое мы обозначим через $(dy/dx)_1^{(1)}$, равно

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1^{(1)} = f(x_0 + h_1, y_1^{(1)}). \tag{6}$$

dy/dx принимает на концах отрезка $[x_0, x_0 + h_1]$ значения $(dy/dx)_0$ и $(dy/dx)_1^{(1)}$, и *в качестве второго приближения* для y_1 можно взять

$$y_1^{(2)} = y_0 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_1^{(1)}\right] h_1. \tag{7}$$

Полагая далее

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1^{(2)} = f(x_0 + h_1, y_1^{(2)}), \tag{8}$$

возьмем в качестве *третьего приближения* для y_1 величину

$$y_1^{(3)} = y_0 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_1^{(2)}\right] h_1. \tag{9}$$

Мы покажем в п. 2, „б", что *при условии существования у функции $f(x, y)$ непрерывных частных производных третьего порядка погрешность, которую мы делаем, беря в качестве значения $y_1 = y(x_0 + h_1)$ величину $y_1^{(3)}$, является величиной порядка h_1^3.*

2. Оценка погрешности. а) Мы хотим оценить погрешность формулы Эйлера. Предположим, что функция $f(x, y)$ обладает непрерывными частными производными второго порядка. Положим

$$\left.\begin{aligned} &f = f(x_0, y_0), \\ &f_1 = f_x(x_0, y_0),\ f_2 = f_y(x_0, y_0), \\ &f_{11} = f_{xx}(x_0, y_0),\ f_{12} = f_{xy}(x_0, y_0),\ f_{22} = f_{yy}(x_0, y_0). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} &y'(x_0) = f, \\ &y''(x_0) = f_1 + f_2 f, \\ &y'''(x_0) = f_{11} + 2f_{12}f + f_{22}f^2 + f_2(f_1 + f_2 f), \end{aligned}\right\}$$

поэтому

$$k_1 = y(x_0 + h_1) - y(x_0) = y'(x_0)h_1 + \\ + \frac{1}{2!}y''(x_0)h_1^2 + \frac{1}{3!}y'''(x_0)h_1^3 + \ldots,$$

$$k_1 = fh_1 + \frac{1}{2}(f_1 + f_2 f)h_1^2 + \\ + \frac{1}{6}[f_{11} + 2f_{12}f + f_{22}f^2 + f_2(f_1 + f_2 f)]h_1^3 + \ldots \tag{11}$$

Отсюда следует, что погрешность, получаемая при употреблении *метода Эйлера*, описанного в п. 1, „а", и заключающегося в том, что *в качестве приближенного значения для k_1 берут величину fh_1, является величиной порядка h_1^2, и что главная часть погрешности равна*

$$\frac{1}{2}(f_1+f_2f)h_1^2.$$

б) Для оценки погрешности формулы (9) заметим, что

$$y_1^{(1)}=y_0+fh_1,$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1^{(1)}=f(x_0+h_1,\ y_0+fh_1)=f+(f_1+f_2f)h_1+\ldots,$$

$$y_1^{(2)}=y_0+fh_1+\frac{1}{2}(f_1+f_2f)h_1^2+\ldots,$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1^{(2)}=f\left[x_0+h_1,\ y_0+fh_1+\frac{1}{2}(f_1+f_2f)h_1^2+\ldots\right]=$$

$$=f+(f_1+f_2f)h_1+\frac{1}{2}f_2(f_1+f_2f)h_1^2+\frac{1}{2}[f_{11}+2f_{12}f+f_{22}f^2]h_1^2+\ldots,$$

$$y_1^{(3)}-y_0=fh_1+\frac{1}{2}(f_1+f_2f)h_1^2+$$

$$+\frac{1}{4}[f_2(f_1+f_2f)+(f_{11}+2f_{12}+f_{22}f^2)]h_1^3+\ldots$$

Сравнивая это значение с формулой (11), получаем, что *погрешность, получающаяся, если взять в качестве приближенного значения для $y_1=y(x+h_1)$ величину $y_1^{(3)}$, является величиной порядка h_1^3, причем главная часть погрешности равна*

$$\frac{1}{12}[f_2(f_1+f_2f)+(f_{11}+2f_{12}f+f_{22}f^2)]h_1^3.$$

3. Метод Рунге — Кутта численного решения дифференциальных уравнений. В этом пункте мы рассмотрим численное решение дифференциальных уравнений по методу Рунге — Кутта, а в п. 4 изложим применение этого метода к системам дифференциальных уравнений. Этот метод основан на формуле парабол (Симпсона) и может с успехом применяться во всех случаях, когда заданное уравнение имеет достаточно простой вид (см. Рунге [1], Кутта [1], Рунге и Кениг [1], стр. 286—300).

а) Пусть требуется решить уравнение

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y). \tag{1}$$

Положим

$$k_1=f(x_0,\ y_0)h,\quad k_2=f\left(x_0+\frac{h}{2},\ y_0+\frac{k_1}{2}\right)h,$$

$$k_3=f\left(x_0+\frac{h}{2},\ y_0+\frac{k_2}{2}\right)h,\quad k_4=f(x_0+h,\ y_0+k_3)h$$

и примем в качестве приближенного значения решения уравнения (1) в точке x_0+h величину y_0+k, где

$$k=\frac{1}{3}\left[\frac{k_1+k_4}{2}+(k_2+k_3)\right]. \tag{12}$$

Докажем, что *при условии существования непрерывных частных производных четвертого порядка у функции* $f(x, y)$ *разность*

$$y(x_0+h)-y(x_0)-\frac{1}{3}\left[\frac{k_1+k_4}{2}+(k_2+k_3)\right]$$

является величиной порядка h^5.

В самом деле, имеем, используя обозначения из п. 2, „а“,

$$y(x_0+h)-y(x_0)=fh+\frac{1}{2}(f_1+f_2f)h^2+$$
$$+\frac{1}{6}[f_{11}+2f_{12}f+f_{22}f^2+f_2(f_1+f_2f)]h^3+$$
$$+\frac{1}{24}[f_{x^3}+3f_{x^2y}f+3f_{xy^2}f^2+f_{y^3}f^3+3(f_{12}+f_{22}f)(f_1+f_2f)+$$
$$+f_2(f_{11}+2f_{12}f+f_{22}f^2)+f_2^2(f_1+f_2f)]h^4+\ldots.$$

Нетрудно проверить, что члены в выражении k вплоть до членов порядка h^4 совпадают с соответствующими членами разности $y(x_0+h)-y(x_0)$. Этим и доказано, что при сделанных предположениях погрешность является величиной порядка h^5.

б) Исходя из известных начальных значений (x_0, y_0), находят описанным выше образом приближенное значение $y(x_0+h)\approx y_0+k$ и применяют тот же метод к начальным данным (x_0+h, y_0+k) для вычисления значения $y(x_0+h+h_1)$ и т. д.

в) Вычисления практически удобно располагать в виде следующей таблицы:

x	y	$f(x, y)$	$hf=k$	(k)
x	y	$f(x, y)$	k_1	$\frac{1}{2}(k_1+k_4)$
$x+\frac{h}{2}$	$y+\frac{k_1}{2}$	$f\left(x+\frac{h}{2}, y+\frac{k_1}{2}\right)$	k_2	$\frac{k_2+k_3}{\text{сумма}}$
$x+\frac{h}{2}$	$y+\frac{k_2}{2}$	$f\left(x+\frac{h}{2}, y+\frac{k_2}{2}\right)$	k_3	
$x+h$	$y+k_3$	$f(x+h, y+k_3)$	k_4	$k=\frac{1}{3}$ суммы
$x+h$	$y+k$			

Пусть, например, дано дифференциальное уравнение

$$y' = (y - x)/(y + x) \tag{13}$$

(см. Рунге [1], стр. 171), и пусть требуется найти значение при $x = 1$ частного решения $y(1)$ этого уравнения, удовлетворяющего начальному условию $y(0) = 1$.

Легко проверить, что общее решение уравнения (13) имеет вид

$$\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \text{const},$$

а поэтому рассматриваемое частное решение задается неявным уравнением

$$\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \frac{\pi}{2}. \tag{14}$$

Применим для вычисления $y(1)$ метод Рунге — Кутта, последовательно вычисляя

$$y(0{,}2),\ y(0{,}5),\ y(1).$$

Результаты вычислений приведены в следующей таблице (вычисления велись до четвертого десятичного знака):

x	y	$f(x,y) = (y-x)/(y+x)$	$hf = k$	(k)
0	1	1	0,2 k_1	0,1707
0,1	1,1	0,8333	0,1666 k_2	0,3327
0,1	1,0833	0,8309	0,1661 k_3	0,5034
0,2	1,1661	0,7071	0,1414 k_4	0,1678
0,2	0,1678	0,7075	0,2122	0,1744
0,35	1,2739	0,5689	0,1706	0,3395
0,35	1,2531	0,5633	0,1689	0,5139
0,5	1,3367	0,4555	0,1366	0,1713
0,5	1,3391	0,4562	0,2281	0,1635
0,75	1,4531	0,3191	0,1595	0,3136
0,75	1,4188	0,3803	0,1541	0,4771
1	1,4932	0,1978	0,0989	0,1590
1	1,4981			

Если положить в уравнении (14) $x = 1$, то найдем, что y заключено между 1,4982 и 1,4983 (для облегчения вычислений целесообразно положить в уравнении (14) $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, тогда (14) запишется в виде $\pi/2 - \varphi = \ln r$).

4. Применение метода Рунге — Кутта к численному решению систем дифференциальных уравнений. а) Метод Рунге — Кутта можно применить также и для численного решения систем дифференциальных уравнений (см. Рунге и Кениг [1], стр. 311—316). Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dx}=f_i(x;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m)\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$$

и пусть эта система имеет одно и только одно решение, определенное на отрезке $[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$ и удовлетворяющее начальным условиям

$$y_i(x_0)=y_i^0\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Для нахождения значений

$$y_1(x_0+h),\ y_2(x_0+h),\ \ldots,\ y_m(x_0+h)$$

вычислим выражения

$$k_1^{(i)}=f_i(x_0;\ y_1^{(0)},\ y_2^{(0)},\ \ldots,\ y_m^{(0)})\,h,$$

$$k_2^{(i)}=f_i\left(x_0+\frac{h}{2};\ y_1^{(0)}+\frac{k_1^{(1)}}{2},\ y_2^{(0)}+\frac{k_1^{(2)}}{2},\ \ldots,\ y_m^{(0)}+\frac{k_1^{(m)}}{2}\right)h,$$

$$k_3^{(i)}=f_i\left(x_0+\frac{h}{2};\ y_1^{(0)}+\frac{k_2^{(1)}}{2},\ y_2^{(0)}+\frac{k_2^{(2)}}{2},\ \ldots,\ y_m^{(0)}+\frac{k_2^{(m)}}{2}\right)h,$$

$$k_4^{(i)}=f_i(x+h;\ y_1^{(0)}+k_3^{(1)},\ y_2^{(0)}+k_3^{(2)},\ \ldots,\ y_m^{(0)}+k_3^{(m)})\,h$$

и положим

$$y_i(x_0+h)\sim y_i(x_0)+\frac{1}{3}\left[\frac{k_1^{(i)}+k_4^{(i)}}{2}+(k_2^{(i)}+k_3^{(i)})\right]$$
$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Полагая, что функции $f_i(x;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m)$ имеют непрерывные частные производные до четвертого порядка включительно, можно доказать методом, указанным в п. 3, „а“, что погрешность

$$y_i(x_0+h)-y_i(x_0)-\frac{1}{3}\left[\frac{k_1^{(i)}+k_4^{(i)}}{2}+k_2^{(i)}+k_3^{(i)}\right]$$

является величиной порядка h^5.

б) Почти излишне указывать, что при нахождении решения уравнения

$$y^{(m)}=f(x;\ y,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(m-1)}),$$

в случае, когда начальные условия

$$y(x_0)=y_0^{(0)},\ y'(x_0)=y_1^{(0)},\ y''(x_0)=y_2^{(0)},\ \ldots,$$
$$y^{(m-1)}(x_0)=y_{m-1}^{(0)}$$

определяют одно и только одно решение на отрезке $[x_0-\delta, x_0+\delta]$, для одновременного вычисления

$$y(x_0+h),\ y'(x_0+h),\ y''(x_0+h),\ \ldots,\ y^{(m-1)}(x_0+h)$$

достаточно решить систему (гл. I, § 1, п. 2)

$$y_1'=y_2,\ y_2'=y_3,\ \ldots,\ y_{m-1}'=y_m,\ y_m'=f(x;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m)$$

$$[y=y_1]$$

при начальных условиях

$$y_1(x_0)=y_0^{(0)},\ y_2(x_0)=y_1^{(0)},\ y_3(x_0)=y_2^{(0)},\ \ldots,\ y_m(x_0)=y_{m-1}^{(0)}.$$

§ 3. Численное решение дифференциальных уравнений с помощью аппроксимационных многочленов

1. Основы метода. Оценка погрешности. а) В этом параграфе мы опишем численные методы решения, основанные на приближенном представлении непрерывных функций многочленами. Конкретное приложение методов требует лишь использования обычных методов исчисления конечных разностей, поэтому, как и при использовании методов, описанных в § 2, не приходится прибегать к квадратурам[1]).

б) Предположим, что нам известны значения решения уравнения

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y) \tag{1}$$

в $n+1$ *равноудаленных* точках

$$x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n;\ x_r-x_{r-1}=h \quad (r=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{2}$$

Положим

$$f(x,\ y(x))=F(x).$$

Нам известны $n+1$ значений

$$f(x_i,\ y_i)=F(x_i)=y_i \quad (i=0,\ 1,\ \ldots,\ n)$$

производной dy/dx в $n+1$ точках (2). Обозначим через

$$\mathfrak{L}_n(x;\ x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)$$

многочлен не более чем n-й степени, удовлетворяющий $n+1$ соотношениям

$$\mathfrak{L}_n(x_i;\ x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)=y_i' \quad (i=0,\ 1,\ \ldots,\ n).$$

Мы можем тогда принять в качестве приближенного выражения для dy/dx этот многочлен $\mathfrak{L}_n(x;\ x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)$.

---

[1]) При редактировании этого параграфа мы использовали работу Линделёфа [1].

Для того чтобы построить этот многочлен, заметим, что если образовать таблицу так называемых *горизонтальных разностей*

$$\begin{array}{l} y'_0 \\ y'_1 \ \Delta_1 y'_1 \\ y'_2 \ \Delta_1 y'_2 \ \Delta_2 y'_2 \\ y'_3 \ \Delta_1 y'_3 \ \Delta_2 y'_3 \ \Delta_3 y'_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y'_n \ \Delta_1 y'_n \ \Delta_2 y'_n \ \Delta_3 y'_n \ \dots \ \Delta_n y'_n \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_1 y'_s = y'_s - y'_{s-1} \quad (s = 1, 2, \dots, n), \\ \Delta_k y'_s = \Delta_{k-1} y'_s - \Delta_{k-1} y'_{s-1} \quad (k = 2, \dots, n;\ s = k, \dots, n), \end{array}\right\} \tag{3}$$

то

$$\mathfrak{L}_n(x;\ x_0, x_1, \dots, x_n) = y'_n + \frac{1}{1!}\frac{\Delta_1 y'_n}{h}(x - x_n) +$$

$$+ \frac{1}{2!}\frac{\Delta_2 y'_n}{h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \frac{1}{3!}\frac{\Delta_3 y'_n}{h^3}(x - x_n)(x - x_{n-1}) \times$$

$$\times (x - x_{n-2}) + \dots + \frac{1}{n!}\frac{\Delta_n y'_n}{h^n}(x - x_n) \dots (x - x_1).$$

Для доказательства достаточно проверить соотношение

$$y'_i = \mathfrak{L}_n(x_i;\ x_0, x_1, \dots, x_n) = y'_n +$$

$$+ \frac{1}{1!}\frac{\Delta_1 y'_n}{h}(x_i - x_n) + \frac{1}{2!}\frac{\Delta_2 y'_n}{h^2}(x_i - x_n)(x_i - x_{n-1}) + \dots +$$

$$+ \frac{1}{(n-i)!}\frac{\Delta_{n-i} y'_n}{h^{n-i}}(x_i - x_n) \dots (x_i - x_{i+1});$$

$$y'_i = y'_n - \binom{n-i}{1}\Delta_1 y'_n + \binom{n-i}{2}\Delta_2 y'_n + \dots + (-1)^i \binom{n-i}{n-i}\Delta_{n-i} y'_n$$

или, в символических обозначениях, соотношение

$$y'_i = (1 - \Delta)^{(n-i)} y'_n.$$

Но оно является непосредственным следствием формул (3).

Нетрудно найти по хорошо известному методу выражение для разности

$$f(x, y(x)) - \mathfrak{L}_n(x;\ x_0, x_1, \dots, x_n) = F(x) - \mathfrak{L}_n(x;\ x_0, x_1, \dots, x_n)$$

при условии, что функция $f(x, y(x))$ обладает непрерывными частными производными до $(n+1)$-го порядка включительно [при этом

предположении существуют и непрерывны функции $y(x)$, $y'(x)$, ..., $y^{(n+2)}(x)$]. Возьмем некоторую точку $\bar{x}$, отличную от точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$, и найдем такое число c, что разность

$$f(x, y(x)) - \mathfrak{L}_n(x; x_0, x_1, \ldots, x_n) - c\frac{(x-x_n)\ldots(x-x_0)}{(n+1)!}$$

обращается в нуль при $x=\bar{x}$; тогда эта разность обращается в нуль в $n+2$ различных точках $x_0, x_1, \ldots, x_n, \bar{x}$, а поэтому *существует точка* ξ, *лежащая внутри наибольшего отрезка, содержащего все точки* $x_0, x_1, \ldots, x_n, \bar{x}$, в которой обращается в нуль $(n+1)$-я производная этой разности. Отсюда в силу уравнения $y'=f(x, y(x))$ следует, что

$$y^{(n+2)}(\xi) = c,$$

и потому при любом значении x

$$F(x) = \mathfrak{L}_n(x; x_0, x_1, \ldots, x_n) + \\ + \frac{y^{(n+2)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_n)(x-x_{n-1})\ldots(x-x_0),$$

где точка ξ *зависит от* $x_0, x_1, \ldots, x_n, x$ *и лежит внутри наибольшего отрезка, содержащего все точки* $x_0, x_1, \ldots, x_n, x$.

Полагая

$$x = x_n + hu,$$

получаем

$$\mathfrak{L}_n(x_n+hu; x_0, x_1, \ldots, x_n) = y'_n + \frac{u}{1!}\Delta_1 y'_n + \frac{u(u+1)}{2!}\Delta_2 y'_n + \\ + \frac{u(u+1)(u+2)}{3!}\Delta_3 y'_n + \ldots + \frac{u(u+1)\ldots(u+n-1)}{n!}\Delta_n y'_n, \quad (4)$$

$$F(x_n+hu) = \mathfrak{L}_n(x_n+hu; x_0, x_1, \ldots, x_n) + R_n, \quad (5)$$

$$R_n = \frac{y^{(n+2)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}u(u+1)\ldots(u+n). \quad (6)$$

Для определения значения y в точке x_n+h при $h>0$ заменим точное равенство

$$y(x_n+h) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_n+h} F(x)\,dx = y(x_n) + h\int_0^1 F(x_n+hu)\,du \quad (7)$$

приближенным

$$y(x_n+h) \sim y(x_n) + h\int_0^1 \mathfrak{L}_n(x_n+hu; x_0, x_1, \ldots, x_n)\,du. \quad (8)$$

Для оценки погрешности заметим, что *если обозначить через M наибольшее значение модуля функции $y^{(n+2)}(x)$ на отрезке $[x_0, x_0+h]$, то погрешность не превосходит*

$$M\frac{h^{n+2}}{(n+1)!}\int_0^1 u(u+1)(u+2)\ldots(u+n)\,du\,^{1)}.$$

2. Формула Адамса. Предположим, что каким-либо способом найдены значения

$$F(x_0),\ F(x_1),\ \ldots,\ F(x_5)\qquad [F(x_i)=f(x_i,\ y(x_i));\quad i=0,\ 1,\ \ldots,\ 5]$$

функции $F(x)$ в *шести* равноотстоящих точках

$$x_0,\ x_1=x_0+h,\ \ldots,\ x_5=x_0+5h,$$

и положим.

$$y'_i=F(x_i)\quad (i=0;\ 1,\ \ldots,\ 5).$$

Тогда

$$\mathfrak{L}_5(x_5+hu;\ x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_5)=y'_5+\frac{u}{1!}\Delta_1 y'_5+\frac{u(u+1)}{2!}\Delta_2 y'_5+$$
$$+\frac{u(u+1)(u+2)}{3!}\Delta_3 y'_5+\ldots+\frac{u(u+1)\ldots(u+4)}{5!}\Delta_5 y'_5 \tag{9}$$

и из формулы (8) получается *формула Адамса* (Бэшфорт, Адамс [1], Уиттекер и Робинсон [1], глава XIV, стр. 339, А. Н. Крылов [1], стр. 299)

$$y(x_5+h)\sim y(x_5)+$$
$$+h\left[y'_5+\frac{1}{2}\Delta_1 y'_5+\frac{5}{12}\Delta_2 y'_5+\frac{3}{8}\Delta_3 y'_5+\frac{251}{720}\Delta_4 y'_5+\frac{95}{288}\Delta_5 y'_5\right]. \tag{10}$$

Разность между точным значением $y(x_5+h)$ и значением, вычисленным по этой формуле, является величиной порядка h^7 (Толлмин [1]).

3. Формула Нистрема. Весьма простая и чрезвычайно полезная формула дана Нистремом [1] для случая, рассмотренного в п. 2.

Очевидно, что

$$y(x_5+h)-y(x_5-h)=\int_{x_5-h}^{x_5+h} y'(x)\,dx.$$

---

1) Относительно сходимости метода см. Тамаркин [3].

Поэтому

$$y(x_5+h)-y(x_5-h)\sim\int\limits_{x_5-h}^{x_5+h}\mathfrak{L}_5(x;\ x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_5)\,dx=$$

$$=h\int\limits_{-1}^{1}\mathfrak{L}_5(x_5+hu;\ x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_2)\,du.$$

Принимая во внимание формулу (9), получаем формулу Нистрема

$$y(x_5+h)\sim y(x_4)+$$

$$+h\left\{2y_5'+\frac{1}{3}[\Delta_2y_5'+\Delta_3y_5'+\Delta_4y_5'+\Delta_5y_5']\right\}-\frac{h}{90}\{\Delta_4y_5'+2\Delta_5y_5'\}.\quad(11)$$

Разность между левой и правой частями этой формулы является величиной порядка h^7.

4. Формула Штермера для численного решения уравнения $y''=f(x,\ y)$. а) При изучении траектории заряженной частицы в магнитном поле Штермер [1] систематически использовал весьма простую формулу, которую он вывел для численного решения уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f(x,\ y).\qquad(12)$$

Как мы увидим в п. 5, его метод применим и к системам вида

$$y_i''=f_i(x;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m)\,(i=1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Предположим, что требуется численно решить уравнение (12) и что нам известны значения $y(x)$, а тем самым и $y''(x)$, в шести равноотстоящих точках

$$x_0,\ x_1=x_0+h,\ \ldots,\ x_5=x_0+5h.$$

Обозначим значения $y''(x)$ в этих точках через

$$y_0'',\ y_1'',\ \ldots,\ y_5''$$

и постараемся найти $y(x_5+h)$.

Положим

$$f(t,\ y(t))=F(t)\quad[F(x_i)=y_i''\quad(i=0,\ 1,\ \ldots,\ 5)].$$

Тогда из уравнения (12) имеем

$$y'(x)-y'(x_5)=\int\limits_{x_5}^{x}F(t)\,dt.$$

Умножая на dx и интегрируя от x_5 до x_5+h, получаем

$$y(x_5+h)-y(x_5)-hy'(x_5)=\int\limits_{x_5}^{x_5+h} dx \int\limits_{x_5}^{x} F(t)\,dt.$$

Заменим в полученной формуле h на $-h$ и сложим обе формулы. Тогда получим, что

$$y(x_5+h)=2y(x_5)-y(x_5-h)+$$
$$+\int\limits_{x_5}^{x_5+h} dx \int\limits_{x_5}^{x} F(t)\,dt+\int\limits_{x_5}^{x_5-h} dx \int\limits_{x_5}^{x} F(t)\,dt. \qquad (13)$$

Образуем таблицу *горизонтальных разностей*

$$\begin{array}{llllll}
y_0'' & & & & & \\
y_1'' & \Delta_1 y_1'' & & & & \\
y_2'' & \Delta_1 y_2'' & \Delta_2 y_2'' & & & \\
y_3'' & \Delta_1 y_3'' & \Delta_2 y_3'' & \Delta_3 y_3'' & & \\
y_4'' & \Delta_1 y_4'' & \Delta_2 y_4'' & \Delta_3 y_4'' & \Delta_4 y_4'' & \\
y_5'' & \Delta_1 y_5'' & \Delta_2 y_5'' & \Delta_3 y_5'' & \Delta_4 y_5'' & \Delta_5 y_5''
\end{array}$$

Построим по сделанному в п. 1, „б“, замечанию многочлен *пятой степени*

$$\mathfrak{L}_5(t;\ x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_5)=y_5''+\frac{1}{1!}\frac{\Delta_1 y_5''}{h}(t-x_5)+$$
$$+\frac{1}{2!}\frac{\Delta_2 y_5''}{h^2}(t-x_5)(t-x_4)+\ldots+\frac{1}{5!}\frac{\Delta_5 y_5''}{h^5}(t-x_5)(t-x_4)\ldots(t-x_1)$$

и подставим в формулу (13) вместо $F(t)$ многочлен $\mathfrak{L}_5$.

Тогда получим, что

$$\int\limits_{x_5}^{x_5+h} dx \int\limits_{x_5}^{x} F(t)\,dt \sim h^2\int\limits_0^1 dv \int\limits_0^v \mathfrak{L}_5(x_5+hu;\ x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_5)\,du=$$
$$=h^2\int\limits_0^1\Big[vy_5''+\frac{v^2}{2}\Delta_1 y_5''+\frac{1}{2!}\Big(\frac{v^3}{3}+\frac{v^2}{2}\Big)\Delta_2 y_5''+$$
$$+\frac{1}{3!}\Big(\frac{v^4}{4}+v^3+v^2\Big)\Delta_3 y_5''+\frac{1}{4!}\Big(\frac{v^5}{5}+\frac{3}{2}v^4+\frac{11}{3}v^3+3v^2\Big)\Delta_4 y_5''+$$
$$+\frac{1}{5!}\Big(\frac{v^6}{6}+2v^5+\frac{35}{4}v^4+\frac{50}{3}v^3+12v^2\Big)\Delta_5 y_5''\Big]\,dv.$$

Поступая аналогичным образом со вторым интегралом, стоящим в правой части равенства (13), получаем (интегралы от степеней v с четным показателем взаимно уничтожаются):

$$y(x_5+h) \sim 2y(x_5) - y(x_5-h) + h^2 \int_0^1 \Big[2vy_5'' + \frac{1}{2!}\frac{2}{3}v^3\Delta_2 y_5'' +$$

$$+ \frac{1}{3!}2v^3\Delta_3 y_5'' + \frac{1}{4!}\left(\frac{2}{5}v^5 + \frac{22}{3}v^3\right)\Delta_4 y_5'' + \frac{1}{5!}\left(4v^5 + \frac{100}{3}v^3\right)\Delta_5 y_5''\Big]\,dv.$$

Отсюда и следует *формула Штермера*

$$y(x_5+h) \sim 2y(x_5) - y(x_5-h) + h^2\Big\{y_5'' +$$

$$+ \frac{1}{12}\Big[\Delta_2 y_5'' + \Delta_3 y_5'' + \Delta_4 y_5'' + \Delta_5 y_5'' - \frac{1}{20}\Delta_4 y_5'' - \frac{1}{10}\Delta_5 y_5''\Big]\Big\}. \quad (14)$$

Если функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до шестого порядка включительно (отсюда следует, что функция $y(x)$ имеет производные до *восьмого* порядка включительно), то разность между левой и правой частями формулы (14) является величиной порядка h^8. В самом деле, в двойных интегралах, стоящих в формуле (13), погрешность, получающаяся при замене подинтегральной функции, является величиной порядка h^6, а площадь каждой из областей, на которые распространено интегрирование, равна $h^2/2$.

б) Рассмотрим, например, решение $y(x)$ уравнения

$$y'' = x^2 y,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Мы видели (гл. III, § 2, п. 3 „б“), что это решение разлагается в степенной ряд

$$y = 1 + \frac{1}{3\cdot 4}x^4 + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8}x^8 + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot 11\cdot 12}x^{12} + \ldots,$$

а поэтому при $|x| < 1$ погрешность, допускаемая при отбрасывании членов ряда, идущих за членом $x^{4n}/3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot\ldots\cdot(4n-1)4n$, не превосходит

$$\frac{x^{4n+4}}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot\ldots\cdot(4n+3)(4n+4)(1-x^4)}.$$

Отсюда находим

$$y(\pm 0{,}1) = 1{,}000\,008\,333,$$
$$y(\pm 0{,}2) = 1{,}000\,133\,337,$$
$$y(\pm 0{,}3) = 1{,}000\,675\,097.$$

Если положить в формуле Штермера $x_0 = -0{,}2$; $x_1 = -0{,}1$; ... ...; $x_5 = 0{,}3$; $h = 0{,}1$, то получим

$$y(\pm 0{,}4) = 1{,}002\,134\,264,$$

в то время как значение $y(\pm 0{,}4)$ с девятью десятичными знаками равно 1,002 134 309; погрешность, следовательно, равна $45 \cdot 10^{-9}$.

5. Формула Штермера для решения системы уравнений вида $y_i'' = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_m)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. а) Переходя к решению систем, заметим сначала, что если дана система дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dx} = G_i(x;\ y_1, y_2, \ldots, y_m) \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

и если законна операция дифференцирования, то

$$\frac{d^2y_i}{dx^2} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial G_i}{\partial y_k}\frac{dy_k}{dx} + \frac{\partial G_i}{\partial x} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial G_i}{\partial y_k} G_k + \frac{\partial G_i}{\partial x}.$$

Поэтому мы можем ограничиться рассмотрением численного решения систем дифференциальных уравнений в форме Штермера

$$\frac{d^2y_i}{dx^2} = f_i(x;\ y_1, y_2, \ldots, y_m) \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{15}$$

б) Предположим, что функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$ являются решением системы (15), и положим

$$f_i(x;\ y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)) = F_i(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Предполагая известными значения функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$ в шести равноотстоящих точках $x_0, x_1, \ldots, x_5$, положим

$$F_i(x_k) = y_{ik}''\ (i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 0, 1, \ldots, 5)$$

и образуем для $y_{i0}'', y_{i1}'', \ldots, y_{i5}''$ соответствующие таблицы *горизонтальных разностей.*

Повторяя рассуждения из п. 4, получаем формулу Штермера

$$y_i(x_5 + h) \sim 2y_i(x_5) - y_i(x_5 - h) + \\ + h^2\left\{y_{i5}'' + \frac{1}{12}\left[\Delta_2 y_{i5}'' + \Delta_3 y_{i5}'' + \Delta_4 y_{i5}'' + \Delta_5 y_{i5}'' - \right.\right. \\ \left.\left. - \frac{1}{20}\Delta_4 y_{i5}'' - \frac{1}{10}\Delta_5 y_{i5}''\right]\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{16}$$

Если функции $f_i(x;\ y_1, \ldots, y_m)$ обладают непрерывными частными производными по всем своим аргументам до *шестого* порядка включительно (а тогда $y_i(x)$ обладает непрерывными производными до *восьмого* порядка включительно), то разность между левой и правой частями формулы (16) является величиной порядка h^8.

§ 4. Метод Коши — Липшица

1. Метод Коши — Липшица для систем дифференциальных уравнений. Как мы видели в § 2, п. 1, „а", метод Эйлера для численного решения уравнения $y' = f(x, y)$ основан на методе Коши — Липшица доказательства теоремы существования (см. гл. I, § 6). Покажем, что тот же метод может быть применен для численного решения нормальной системы дифференциальных уравнений первого порядка.

Пусть дана система уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_i}{dx} = f_i(x;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m), \\ &y_i(\alpha) = \beta_i \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где функции f_i заданы в прямоугольном параллелепипеде R, определенном неравенствами

$$\alpha - a \leqslant x \leqslant \alpha + a, \quad b_i' \leqslant y_i \leqslant b_i'' \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

и пусть I — отрезок $[\alpha - \delta,\ \alpha + \delta]$, на котором можно определить функции

$$y_i = y_i(x),$$

являющиеся решениями системы (1); пусть x — некоторая точка отрезка I, в которой надо найти значения $y_i(x)$. Положим для определенности, что $x > \alpha$.

Разделим отрезок $[\alpha,\ x]$ на n равных частей $n - 1$ точками

$$x = \alpha + s\,\frac{x - \alpha}{n} \qquad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n - 1)$$

и положим

$$\left.\begin{aligned} &\xi_i^{(1)} = \beta_i + f_i(\alpha;\ \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_m)(x_1 - \alpha), \\ &\xi_i^{(2)} = \xi_i^{(1)} + f_i(x_1;\ \xi_1^{(1)},\ \xi_2^{(1)},\ \ldots,\ \xi_m^{(1)})(x_2 - x_1), \\ &\xi_i^{(3)} = \xi_i^{(2)} + f_i(x_2;\ \xi_1^{(2)},\ \xi_2^{(2)},\ \ldots,\ \xi_m^{(2)})(x_3 - x_2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\xi_i^{(n)} = \xi_i^{(n-1)} + f_i(x_{n-1};\ \xi_1^{(n-1)},\ \xi_2^{(n-1)},\ \ldots,\ \xi_m^{(n-1)})(x - x_{n-1}) \\ &\qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Из теоремы Коши — Липшица следует, что при некоторых условиях

$$\lim_{n \to \infty} \xi_i^{(n)} = y_i(x). \tag{3}$$

Поэтому на практике можно считать значения $\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots, \xi_m^{(n)}$ приближенными значениями для $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$ [1]).

2. Видоизменение Пиконе и оценка погрешности приближения. Для того чтобы оценить погрешность, сделаем, следуя Пиконе, некоторые предположения о дифференцируемости функций f_i по их аргументам и изменим несколько метод определения значений $\xi_i^{(n)}$ (Пиконе [1]).

Предположим, что *функции f_i обладают непрерывными частными производными по своим аргументам до $(\nu+1)$-го порядка включительно* $(\nu \geqslant 0)$. Полагая

$$f_i^{(1)} = f_i,\ f_i^{(2)} = \frac{\partial f_i^{(1)}}{\partial x} + \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial f_i^{(1)}}{\partial y_r} f_r, \ldots,$$

$$f_i^{(\nu+1)} = \frac{\partial f_i^{(\nu)}}{\partial x} + \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial f_i^{(\nu)}}{\partial y_r} f_r \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{4}$$

получим из уравнения (1), что

$$\frac{d^k y_i}{dx^k} = f_i^{(k)}(x;\ y_1, y_2, \ldots, y_m)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, \nu+1). \tag{5}$$

Применяя формулу Тейлора, взятую до члена ν-го порядка, и смещая последовательно начальную точку α в точки $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, получаем формулы, аналогичные формуле (2),

$$\left.\begin{aligned}
\xi_i^{(1)} &= \beta_i + \sum_{k=1}^{\nu} f_i^{(k)}(\alpha;\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m) \frac{(x_1-\alpha)^k}{k!},\\
\xi_i^{(2)} &= \xi_i^{(2)} + \sum_{k=1}^{\nu} f_i^{(k)}(x_1;\ \xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \ldots, \xi_m^{(1)}) \frac{(x_2-x_1)^k}{k!},\\
\xi_i^{(3)} &= \xi_i^{(2)} + \sum_{k=1}^{\nu} f_i^{(k)}(x_2;\ \xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}, \ldots, \xi_m^{(2)}) \frac{(x_3-x_2)^k}{k!},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\xi_i^{(n)} &= \xi_i^{(n-1)} + \sum_{k=1}^{\nu} f_i^{(k)}(x_{n-1};\ \xi_1^{(n-1)}, \xi_2^{(n-1)}, \ldots, \xi_m^{(n-1)}) \frac{(x-x_{n-1})^k}{k!}\\
&\qquad (i = 1, 2, \ldots, m).
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

[1]) Другой метод численного решения системы (1) может быть получен с помощью формул Тонелли (20_1), (20_2) из гл. I, § 6, п. 3.