можно искать частное решение в виде

$$y_1 = x^s \mathrm{e}^{\alpha x}(R_m(x)\cos\beta x + T_m(x)\sin\beta x), \tag{7}$$

где $s = 0$, если $\alpha + \beta i$ не корень характеристического уравнения, и s равно кратности корня $\alpha + \beta i$ в противном случае, а R_m и T_m — многочлены степени m, равной наибольшей из степеней многочленов P и Q. Чтобы найти коэффициенты многочленов R_m и T_m, надо подставить решение (7) в уравнение и приравнять коэффициенты при подобных членах.

Еще один метод отыскания частного решения уравнения с вещественными коэффициентами и правой частью вида (6) состоит в следующем. Сначала решают уравнение с правой частью $P(x)\mathrm{e}^{(\alpha+\beta i)x}$. Вещественная часть этого решения будет решением уравнения с правой частью $P(x)\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$, а мнимая — решением уравнения с правой частью $P(x)\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$.

Если правая часть уравнения равна сумме нескольких функций вида $P(x)\mathrm{e}^{\gamma x}$ и вида (6), то частное решение отыскивается по следующему правилу.

Частное решение линейного уравнения с правой частью $f_1 + \ldots + f_p$ равно сумме частных решений уравнений с той же левой частью и правыми частями $f_1, \ldots, f_p$.

Общее решение линейного неоднородного уравнения во всех случаях равно сумме частного решения этого уравнения и общего решения однородного уравнения с той же левой частью.

Пример. Решить уравнение

$$y''' - 6y'' + 9y' = x\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{3x}\cos 2x. \tag{8}$$

Характеристическое уравнение $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda = 0$ имеет корень $\lambda = 3$ кратности 2 и корень $\lambda = 0$ кратности 1. Поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид $y_0 = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{3x} + C_3$.

Правая часть (8) состоит из двух слагаемых вида (6); для первого $\gamma = \alpha + \beta i = 3$, а для второго $\alpha + \beta i = 3 + 2i$. Так как эти числа различны, то надо искать отдельно частные решения уравнений

$$y''' - 6y'' + 9y' = x\mathrm{e}^{3x}, \tag{9}$$

$$y''' - 6y'' + 9y' = \mathrm{e}^{3x}\cos 2x. \tag{10}$$

Число $\gamma = 3$ является корнем кратности $s = 2$, поэтому частное решение уравнения (9) согласно (4) имеет вид $y_1 = x^2(ax + b)\mathrm{e}^{3x}$. Подставив $y = y_1$ в (9), найдем $a = 1/18$, $b = -1/18$.

Далее, число $\alpha + \beta i = 3 + 2i$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому частное решение уравнения (10) согласно (7) имеет вид $y_2 = \mathrm{e}^{3x}(c\cos 2x + d\sin 2x)$. Подставив $y = y_2$ в (10), найдем $c = -3/52$, $d = -1/26$.

Общее решение уравнения (8) равно $y = y_0 + y_1 + y_2$, где y_0, y_1, y_2 уже найдены.

3. Линейное неоднородное уравнение

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x) \tag{11}$$

с любой правой частью $f(x)$ решается методом вариации постоянных. Пусть найдено общее решение $y = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n$ линейного однородного уравнения с той же левой частью. Тогда решение уравнения (11) ищется в виде

$$y = C_1(x) y_1 + \ldots + C_n(x) y_n.$$

Функции $C_i(x)$ определяются из системы

$$\begin{aligned} C_1' y_1 + \ldots + C_n' y_n &= 0 \\ C_1' y_1' + \ldots + C_n' y_n' &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \\ C_1' y_1^{(n-2)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-2)} &= 0 \\ a_0(C_1' y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)}) &= f(x). \end{aligned}$$

4. Уравнение Эйлера

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x) \tag{12}$$

сводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами заменой независимого переменного $x = \mathrm{e}^t$ при $x > 0$ (или $x = -\mathrm{e}^t$ при $x < 0$). Для полученного уравнения с постоянными коэффициентами характеристическое уравнение имеет вид

$$a_0 \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)\ldots(\lambda - n + 1) + \ldots + a_{n-2}\lambda(\lambda - 1) + a_{n-1}\lambda + a_n = 0.$$

При составлении этого уравнения каждое произведение $x^k y^{(k)}$ в (12) заменяется на произведение k убывающих на 1 чисел: $\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)\ldots(\lambda - k + 1)$.

Пример. Решить уравнение

$$x^3 y''' - x^2 y'' + 2xy' - 2y = x^3. \tag{13}$$

Сразу пишем характеристическое уравнение и решаем его:

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)-\lambda(\lambda-1)+2\lambda-2=0, \tag{14}$$

$$(\lambda-1)(\lambda^2-3\lambda+2)=0,\ \lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=2.$$

При таких λ общее решение однородного уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид (согласно п. 1)

$$y_0=(C_1+C_2t)\mathrm{e}^t+C_3\mathrm{e}^{2t}.$$

Чтобы решить неоднородное уравнение (13), сначала раскроем скобки в (14): $\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2=0$. По этому характеристическому уравнению составляем левую часть дифференциального уравнения, а правую часть получаем из правой части (13) заменой $x=\mathrm{e}^t$:

$$y_t'''-4y_t''+5y_t'-2y=\mathrm{e}^{3t}.$$

Так как число 3 не является корнем характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде $y_1=a\mathrm{e}^{3t}$. Подставляя в уравнение, находим $a=1/4$.

Следовательно, общее решение имеет вид

$$y=y_0+y_1=(C_1+C_2t)\mathrm{e}^t+C_3\mathrm{e}^{2t}+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{3t}=$$

$$=(C_1+C_2\ln x)x+C_3x^2+\frac{1}{4}x^3\quad(x>0).$$

При $x<0$ получается аналогичная формула, но с $\ln|x|$ вместо $\ln x$.

5. Для решения задач **635—640** и **879** можно пользоваться следующими законами теории электрических цепей (см. также [3], § 13).

Для каждого узла цепи сумма всех притекающих токов равна сумме вытекающих токов.

Алгебраическая сумма напряжений источников тока, содержащихся в любом замкнутом контуре цепи, равна алгебраической сумме падений напряжений на всех остальных участках этого контура.

Падение напряжения на сопротивлении R равно RI; падение напряжения на самоиндукции L равно $L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$; падение напряжения на конденсаторе емкости C равно q/C, где $q=q(t)$ — заряд конденсатора в момент t; при этом $\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=I$; во всех трех случаях $I=I(t)$ — сила тока, протекающего через рассматриваемый участок цепи в данный момент t. В этих формулах I выражается в амперах, R — в омах, L — в генри, q — в кулонах, C — в фарадах, t — в секундах, напряжение — в вольтах.

Пример. Последовательно включены: источник тока, напряжение которого меняется по закону $E = V\sin\omega t$, сопротивление R и емкость C. Найти силу тока в цепи при установившемся режиме[1].

Решение. Сила тока $I = I(t)$ на любом участке цепи одна и та же (по закону о последовательном соединении). Падение напряжения на сопротивлении равно RI, а на емкости q/C. Следовательно, $RI + \dfrac{q}{C} = V\sin\omega t$. Дифференцируя и пользуясь тем, что $\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = I$, получим уравнение

$$R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{I}{C} = V\omega\cos\omega t. \tag{15}$$

Это — линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Для отыскания установившегося режима найдем периодическое решение этого уравнения. Исходя из вида правой части уравнения, ищем решение в виде

$$I = A_1\cos\omega t + B_1\sin\omega t. \tag{16}$$

Подставляя (16) в (15) и приравнивая коэффициенты при подобных членах, получим систему двух уравнений, из которой можно найти A_1 и B_1. Но в электротехнике важнее знать не коэффициенты A_1 и B_1, а амплитуду изменения силы тока. Поэтому выражение (16) переписывают в виде

$$I = A\sin(\omega t - \varphi). \tag{17}$$

Подставляя (17) в (15), переходя к тригонометрическим функциям углов ωt и φ, приравнивая коэффициенты сначала при $\sin\omega t$, а затем при $\cos\omega t$, получим

$$RA\omega\sin\varphi + \frac{A}{C}\cos\varphi = 0, \quad RA\omega\cos\varphi - \frac{A}{C}\sin\varphi = V\omega.$$

Отсюда найдем

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{1}{RC\omega}, \quad A = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (\omega C)^{-2}}}.$$

Поясним, почему найденное периодическое решение называется установившимся режимом. Общее решение уравнения (15) равно

[1] Установившимся режимом называется такой, при котором сила тока постоянна или меняется периодически.

сумме найденного частного решения (17) и общего решения линейного однородного уравнения

$$R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+\frac{I}{C}=0. \tag{18}$$

Так как решение уравнения (18) $I=K\mathrm{e}^{-t/RC}$ (здесь K — произвольная постоянная) стремится к нулю при $t\to+\infty$, то любое решение уравнения (15) при $t\to+\infty$ неограниченно приближается (и притом весьма быстро) к найденному периодическому решению (17).

Решить уравнения **511—548**.

511. $y''+y'-2y=0.$

512. $y''+4y'+3y=0.$

513. $y''-2y'=0.$

514. $2y''-5y'+2y=0.$

515. $y''-4y'+5y=0.$

516. $y''+2y'+10y=0.$

517. $y''+4y=0.$

518. $y'''-8y=0.$

519. $y^{\mathrm{IV}}-y=0.$

520. $y^{\mathrm{IV}}+4y=0.$

521. $y^{\mathrm{VI}}+64y=0.$

522. $y''-2y'+y=0.$

523. $4y''+4y'+y=0.$

524. $y^{\mathrm{V}}-6y^{\mathrm{IV}}+9y'''=0.$

525. $y^{\mathrm{V}}-10y'''+9y'=0.$

526. $y^{\mathrm{IV}}+2y''+y=0.$

527. $y'''-3y''+3y'-y=0.$

528. $y'''-y''-y'+y=0.$

529. $y^{\mathrm{IV}}-5y''+4y=0.$

530. $y^{\mathrm{V}}+8y'''+16y'=0.$

531. $y'''-3y'+2y=0.$

532. $y^{\mathrm{IV}}+4y''+3y=0.$

533. $y''-2y'-3y=\mathrm{e}^{4x}.$

534. $y''+y=4x\mathrm{e}^{x}.$

535. $y''-y=2\mathrm{e}^{x}-x^2.$

536. $y''+y'-2y=3x\mathrm{e}^{x}.$

537. $y''-3y'+2y=\sin x.$

538. $y''+y=4\sin x.$

539. $y''-5y'+4y=4x^2\mathrm{e}^{2x}.$

540. $y'' - 3y' + 2y = x\cos x$.

541. $y'' + 3y' - 4y = \mathrm{e}^{-4x} + x\mathrm{e}^{-x}$.

542. $y'' + 2y' - 3y = x^2\mathrm{e}^{x}$.

543. $y'' - 4y' + 8y = \mathrm{e}^{2x} + \sin 2x$.

544. $y'' - 9y = \mathrm{e}^{3x}\cos x$.

545. $y'' - 2y' + y = 6x\mathrm{e}^{x}$.

546. $y'' + y = x\sin x$.

547. $y'' + 4y' + 4y = x\mathrm{e}^{2x}$.

548. $y'' - 5y' = 3x^2 + \sin 5x$.

В задачах **549—574** для каждого из данных уравнений написать его частное решение с неопределенными коэффициентами (числовых значений коэффициентов не находить).

549. $y'' - 2y' + 2y = \mathrm{e}^{x} + x\cos x$.

550. $y'' + 6y' + 10y = 3x\mathrm{e}^{-3x} - 2\mathrm{e}^{3x}\cos x$.

551. $y'' - 8y' + 20y = 5x\mathrm{e}^{4x}\sin 2x$.

552. $y'' + 7y' + 10y = x\mathrm{e}^{-2x}\cos 5x$.

553. $y'' - 2y' + 5y = 2x\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{x}\sin 2x$.

554. $y'' - 2y' + y = 2x\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{x}\sin 2x$.

555. $y'' - 8y' + 17y = \mathrm{e}^{4x}(x^2 - 3x\sin x)$.

556. $y''' + y' = \sin x + x\cos x$.

557. $y''' - 2y'' + 4y' - 8y = \mathrm{e}^{2x}\sin 2x + 2x^2$.

558. $y'' - 6y' + 8y = 5x\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^{4x}\sin x$.

559. $y'' + 2y' + y = x(\mathrm{e}^{-x} - \cos x)$.

560. $y''' - y'' - y' + y = 3\mathrm{e}^{x} + 5x\sin x$.

561. $y'' - 6y' + 13y = x^2\mathrm{e}^{3x} - 3\cos 2x$.

562. $y'' - 9y = \mathrm{e}^{-3x}(x^2 + \sin 3x)$.

563. $y^{\mathrm{IV}} + y'' = 7x - 3\cos x$.

564. $y'' + 4y = \cos x \cdot \cos 3x$.

565. $y''' - 4y'' + 3y' = x^2 + x\mathrm{e}^{2x}$.

566. $y'' - 4y' + 5y = \mathrm{e}^{2x} \sin^2 x$.

567. $y'' + 3y' + 2y = \mathrm{e}^{-x} \cos^2 x$.

568. $y'' - 2y' + 2y = (x + \mathrm{e}^x) \sin x$.

569. $y^{\mathrm{IV}} + 5y'' + 4y = \sin x \cdot \cos 2x$.

570. $y'' - 3y' + 2y = 2^x$.

571. $y'' - y = 4 \operatorname{sh} x$.

572. $y'' + 4y' + 3y = \operatorname{ch} x$.

573. $y'' + 4y = \operatorname{sh} x \cdot \sin 2x$.

574. $y'' + 2y' + 2y = \operatorname{ch} x \cdot \sin x$.

Решить уравнения **575—581** способом вариации постоянных.

575. $y'' - 2y' + y = \frac{\mathrm{e}^x}{x}$.

576. $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{\mathrm{e}^x + 1}$.

577. $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$.

578. $y'' + 4y = 2 \operatorname{tg} x$.

579. $y'' + 2y' + y = 3\mathrm{e}^{-x}\sqrt{x + 1}$.

580. $y'' + y = 2 \sec^3 x$.

581*. $x^3(y'' - y) = x^2 - 2$.

Найти решения уравнений **582—588**, удовлетворяющие указанным начальным условиям.

582. $y'' - 2y' + y = 0;\ \ y(2) = 1,\ \ y'(2) = -2$.

583. $y'' + y = 4\mathrm{e}^x;\ \ y(0) = 4,\ \ y'(0) = -3$.

584. $y'' - 2y' = 2\mathrm{e}^x;\ \ y(1) = -1,\ \ y'(1) = 0$.

585. $y'' + 2y' + 2y = x\mathrm{e}^{-x};\qquad y(0) = y'(0) = 0$.

586. $y''' - y' = 0;\ \ y(0) = 3,\ \ y'(0) = -1,\ \ y''(0) = 1$.

587. $y''' - 3y' - 2y = 9e^{2x};\;\; y(0) = 0,\; y'(0) = -3,$ $y''(0) = 3.$

588. $y^{\mathrm{IV}} + y'' = 2\cos x;\;\; y(0) = -2,\; y'(0) = 1,$ $y''(0) = y'''(0) = 0.$

В задачах **589—600** решить уравнения Эйлера

589. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$

590. $x^2y'' - xy' - 3y = 0.$

591. $x^3y''' + xy' - y = 0.$

592. $x^2y''' = 2y'.$

593. $x^2y'' - xy' + y = 8x^3.$

594. $x^2y'' + xy' + 4y = 10x.$

595. $x^3y'' - 2xy = 6\ln x.$

596. $x^2y'' - 3xy' + 5y = 3x^2.$

597. $x^2y'' - 6y = 5x^3 + 8x^2.$

598. $x^2y'' - 2y = \sin\ln x.$

599. $(x-2)^2y'' - 3(x-2)y' + 4y = x.$

600. $(2x+3)^3y''' + 3(2x+3)y' - 6y = 0.$

Применяя различные методы, решить уравнения **601—611**.

601. $y'' + 2y' + y = \cos ix.$

602. $y'' - 2y' + y = xe^x\sin^2 ix.$

603. $y'' + 2iy = 8e^x\sin x.$

604. $y'' + 2iy' - y = 8\cos x.$

605. $y''' - 8iy = \cos 2x.$

606. $y'' - \dfrac{2y}{x^2} = 3\ln(-x).$

607. $y'' + 2y' + y = xe^x + \dfrac{1}{xe^x}.$

608. $y'' + 2y' + 5y = \mathrm{e}^{-x}(\cos^2 x + \operatorname{tg} x)$.

609. $x^2 y'' - 2y = \dfrac{3x^2}{x+1}$.

610. $x^2 y'' - xy' + y = \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{x}{\ln x}$.

611*. $y'' + y = f(x)$.

612*. Какие условия достаточно наложить на функцию $f(x)$, чтобы все решения уравнения задачи **611** оставались ограниченными при $x \to +\infty$?

В задачах **613—618** построить линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (возможно более низкого порядка), имеющие данные частные решения.

613. $y_1 = x^2 \mathrm{e}^x$. **614.** $y_1 = \mathrm{e}^{2x} \cos x$.

615. $y_1 = x \sin x$. **616.** $y_1 = x\mathrm{e}^x \cos 2x$.

617. $y_1 = x\mathrm{e}^x,\ y_2 = \mathrm{e}^{-x}$. **618.** $y_1 = x,\ y_2 = \sin x$.

619. При каких a и b все решения уравнения $y'' + ay' + by = 0$ ограничены на всей числовой оси $-\infty < x < +\infty$?

620. При каких a и b все решения уравнения $y'' + ay' + by = 0$ стремятся к нулю при $x \to +\infty$?

621. При каких a и b уравнение $y'' + ay' + by = 0$ имеет хотя бы одно решение $y(x) \not\equiv 0$, стремящееся к нулю при $x \to +\infty$?

622. При каких a и b каждое решение уравнения $y'' + ay' + by = 0$, кроме решения $y(x) \equiv 0$, монотонно возрастает по абсолютной величине, начиная с некоторого x?

623. При каких a и b каждое решение уравнения $y'' + ay' + by = 0$ обращается в нуль на бесконечном множестве точек x?

624*. При каких a и b все решения уравнения $y'' + ay' + by = 0$ удовлетворяют соотношению $y = o(\mathrm{e}^{-x})$ при $x \to +\infty$?

625*. Для заданного $b > 0$ подобрать такое a, при котором решение уравнения $y'' + ay' + by = 0$ с начальными условиями

$y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ возможно быстрее стремится к нулю при $x \to +\infty$.

626. При каких k и ω уравнение $y'' + k^2 y = \sin \omega t$ имеет хотя бы одно периодическое решение?

627. Найти периодическое решение уравнения $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = \sin \omega t$ и нарисовать график зависимости его амплитуды от величины ω.

628. Найти периодическое решение уравнения $\ddot{x} + \dot{x} + 4x = e^{i\omega t}$ и на комплексной плоскости начертить кривую, которую пробегает амплитудный множитель этого решения при изменении ω от 0 до $+\infty$.

629*. Дано уравнение $y'' + ay' + by = f(x)$, причем $|f(x)| \leqslant m$ $(-\infty < x < \infty)$, а корни характеристического уравнения $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. Найти решение, ограниченное при $-\infty < x < \infty$. Показать, что а) все остальные решения неограниченно приближаются к этому решению при $x \to +\infty$, б) если $f(x)$ периодическая, то это решение тоже периодическое.

Указание. Применить метод вариации постоянных. Нижние пределы полученных интегралов взять бесконечными такого знака, чтобы интегралы сходились.

В задачах **630—632** принять, что при отклонении груза от положения равновесия на расстояние x пружина действует на него с силой kx, направленной к положению равновесия.

630. Найти период свободных колебаний массы m, подвешенной к пружине, если движение происходит без сопротивления.

631. Один конец пружины закреплен неподвижно, а к другому прикреплен груз массы m. При движении груза со скоростью v сила сопротивления равна hv. При $t = 0$ грузу, находившемуся в положении равновесия, сообщена скорость v_0. Исследовать движение груза в случаях $h^2 < 4km$ и $h^2 > 4km$.

632. Решить предыдущую задачу при дополнительном условии, что к грузу приложена еще периодическая внешняя сила $f = b \sin \omega t$. Показать, что при любых начальных условиях движение груза будет приближаться к периодическому и найти это периодическое движение (вынужденные колебания).

633. На конце упругого стержня укреплена масса m. Другой конец стержня вибрирует так, что его смещение в момент t равно $B\sin\omega t$. Упругая сила, возникающая в стержне, пропорциональна разности смещений его концов. Найти амплитуду A вынужденных колебаний массы m. Может ли быть $A > B$? (Массой стержня и трением пренебречь.)

634. Частица массы m движется по оси Ox, отталкиваясь от точки $x = 0$ с силой $3mr_0$ и притягиваясь к точке $x = 1$ с силой $4mr_1$, где r_0 и r_1 — расстояния до этих точек. Определить движение частицы с начальными условиями

$$x(0) = 2, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

635. Электрическая цепь состоит из последовательно включенных источника постоянного тока, дающего напряжение V, сопротивления R, самоиндукции L и выключателя, который включается при $t = 0$. Найти зависимость силы тока от времени (при $t > 0$).

636. Решить предыдущую задачу, заменив самоиндукцию L конденсатором емкости C. Конденсатор до замыкания цепи не заряжен.

637. Последовательно включены сопротивление R и конденсатор емкости C, заряд которого при $t = 0$ равен q. Цепь замыкается при $t = 0$. Найти силу тока в цепи при $t > 0$.

638. Последовательно включены самоиндукция L, сопротивление R и конденсатор емкости C, заряд которого при $t = 0$ равен q. Цепь замыкается при $t = 0$. Найти силу тока в цепи и частоту колебаний в том случае, когда разряд носит колебательный характер.

639. Последовательно включены источник тока, напряжение которого меняется по закону $E=V\sin\omega t$, сопротивление R и самоиндукция L. Найти силу тока в цепи (установившийся режим).

640. Последовательно включены источник тока, напряжение которого меняется по закону $E = V\sin\omega t$, сопротивление R, самоиндукция L и емкость C. Найти силу тока в цепи (установившийся режим). При какой частоте ω сила тока наибольшая?

§ 12. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1. Большинство задач этого параграфа решается с помощью методов общей теории линейных дифференциальных уравнений (см. [1], гл. V, § 2, § 3 или [4], гл. 2, § 3, § 5) и методов качественного исследования линейных уравнений второго порядка (см. [1], гл. VI, § 2, п. 1, п. 3). К остальным задачам даны указания или ссылки на литературу.

2. Если известно частное решение y_1 линейного однородного уравнения n-го порядка, то порядок уравнения можно понизить, сохраняя линейность уравнения. Для этого в уравнение надо подставить $y = y_1 z$ и затем понизить порядок заменой $z' = u$.

Чтобы найти общее решение линейного однородного уравнения второго порядка $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$, у которого известно одно частное решение y_1, можно понизить порядок уравнения указанным выше способом. Однако удобнее воспользоваться формулой Остроградского — Лиувилля:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = C\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}, \quad p(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)},$$

где y_1 и y_2 — любые два решения данного уравнения.

Пример. Пусть известно частное решение $y_1 = x$ уравнения

$$(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 0. \tag{1}$$

По формуле Остроградского — Лиувилля получим

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = C\mathrm{e}^{-\int\left(\frac{-2x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x}; \quad y_1y_2' - y_1'y_2 = C(x^2+1).$$

Так как функция y_1 известна, то мы получили линейное уравнение первого порядка относительно y_2. Проще всего оно решается следующим способом. Разделив обе части уравнения на y_1^2, получим слева производную от дроби y_2/y_1

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{y_1y_2' - y_1'y_2}{y_1^2} = \frac{C(x^2+1)}{y_1^2}.$$

Так как $y_1 = x$, то

$$\frac{y_2}{y_1} = \int C\cdot\frac{x^2+1}{x^2}\,\mathrm{d}x + C_2 = C\left(x - \frac{1}{x}\right) + C_2;$$

$$y_2 = C(x^2-1) + C_2x.$$

Это — общее решение уравнения (1).

3. Общего метода для отыскания частного решения линейного уравнения второго порядка не существует. В некоторых случаях решение удается найти путем подбора.

Пример. Найти частное решение уравнения

$$(1-2x^2)y''+2y'+4y=0, \qquad (2)$$

являющееся алгебраическим многочленом (если такое решение существует).

Сначала найдем степень многочлена. Подставляя $y=x^n+\ldots$ в уравнение (2) и выписывая только члены с самой старшей степенью буквы x, получим: $-2x^2\cdot n(n-1)x^{n-2}+\ldots+ +4x^n+\ldots=0$. Приравнивая нулю коэффициент при старшей степени x, получим: $-2n(n-1)+4=0$; $n^2-n-2=0$. Отсюда $n_1=2$; корень $n_2=-1$ не годен (степень многочлена — целое положительное число). Итак, многочлен может быть только второй степени. Ищем его в виде $y=x^2+ax+b$. Подставляя в уравнение (2), получим $(4a+4)x+ +2+2a+4b=0$. Следовательно, $4a+4=0$, $2+2a+4b=0$. Отсюда $a=-1$, $b=0$. Итак, многочлен $y=x^2-x$ является частным решением.

4. При решении задач **738—750** воспользоваться следующими утверждениями, вытекающими, например, из § 7 гл. V книги [5].

Пусть $|f(t)|\leqslant\frac{c}{t^{1+\alpha}}$ при $t_0\leqslant t<\infty$; c, $\alpha=\mathrm{const}>0$. Тогда

1) уравнение $u''+(1+f(t))u=0$ имеет два таких линейно независимых решения, что при $t\to+\infty$

$$u_1(t)=\cos t+O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right),\ u_2(t)=\sin t+O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right);$$

2) уравнение $u''-(1-f(t))u=0$ имеет два таких линейно независимых решения, что при $t\to+\infty$

$$u_1(t)=\mathrm{e}^t\left(1+O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)\right),\ u_2(t)=\mathrm{e}^{-t}\left(1+O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)\right).$$

В задачах **641—662** исследовать, являются ли данные функции линейно зависимыми. В каждой задаче функции рассматриваются в той области, в которой они все определены.

641. $x+2,\ x-2.$

642. $6x+9,\ 8x+12.$

643. $\sin x,\ \cos x.$

644. $1,\ x,\ x^2.$

645. $4-x,\ 2x+3,\ 6x+8.$

646. $x^2+2,\ 3x^2-1,\ x+4.$

647. $x^2-x+3,\ 2x^2+x,\ 2x-4.$

648. $e^x,\ e^{2x},\ e^{3x}.$

649. $x,\ e^x,\ xe^x.$

650. $1,\ \sin^2 x,\ \cos 2x.$

651. $\operatorname{sh} x,\ \operatorname{ch} x,\ 2+e^x.$

652. $\ln(x^2),\ \ln 3x,\ 7.$

653. $x,\ 0,\ e^x.$

654. $\operatorname{sh} x,\ \operatorname{ch} x,\ 2e^x-1,\ 3e^x+5.$

655. $2^x,\ 3^x,\ 6^x.$

656. $\sin x,\ \cos x,\ \sin 2x.$

657. $\sin x,\ \sin(x+2),\ \cos(x-5).$

658. $\sqrt{x},\ \sqrt{x+1},\ \sqrt{x+2}.$

659. $\operatorname{arctg} x,\ \operatorname{arcctg} x,\ 1.$

660. $x^2,\ x|x|.$

661. $x,\ |x|,\ 2x+\sqrt{4x^2}.$

662. $x,\ x^3,\ |x^3|.$

663. а) Являются ли линейно зависимыми на отрезке $[a,\ b]$ функции, графики которых изображены на рис. 1? б) Тот же вопрос для рис. 2.

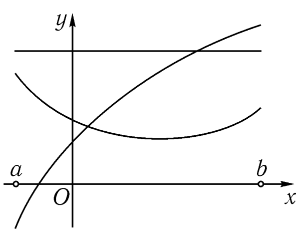

Рис. 1

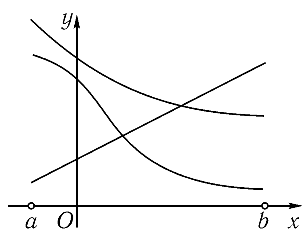

Рис. 2

664. Известно, что для функций $y_1,\ \ldots,\ y_n$ детерминант Вронского в точке x_0 равен нулю, а в точке x_1 не равен нулю. Можно ли что-нибудь сказать о линейной зависимости (или независимости) этих функций на отрезке $[x_0,\ x_1]$?

665. Детерминант Вронского для функций $y_1,\ \ldots,\ y_n$ равен нулю при всех x. Могут ли быть эти функции линейно зависимыми? Линейно независимыми?

666. Что можно сказать о детерминанте Вронского функций $y_1, \ldots, y_n$, если только известно, а) что они линейно зависимы? б) что они линейно независимы?

667. Функции $y_1 = x$, $y_2 = x^5$, $y_3 = |x^5|$ удовлетворяют уравнению $x^2y'' - 5xy' + 5y = 0$. Являются ли они линейно зависимыми на интервале $(-1, 1)$? Объяснить ответ.

668. Доказать, что два решения уравнения $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ (с непрерывными коэффициентами), имеющие максимум при одном и том же значении x, линейно зависимы.

669. Даны 4 решения уравнения $y''' + xy = 0$, графики которых касаются друг друга в одной точке. Сколько линейно независимых имеется среди этих решений?

670. Пользуясь известным утверждением об интервале существования решения линейного уравнения ([1], гл. V, конец § 1), определить, на каком интервале существует решение данного уравнения с указанными начальными условиями (не решая уравнения): а) $(x + 1)y'' - 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$; б) $y'' + y\operatorname{tg} x = 0$, $y(5) = 1$, $y'(5) = 0$.

671. Могут ли графики двух решений уравнения $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0$ (с непрерывными коэффициентами) на плоскости x, y а) пересекаться, б) касаться друг друга?

672. При каких n уравнение задачи **671** может иметь частное решение $y = x^3$?

673. Линейное однородное уравнение какого порядка на интервале $(0, 1)$ может иметь такие четыре частных решения: $y_1 = x^2 - 2x + 2$, $y_2 = (x - 2)^2$, $y_3 = x^2 + x - 1$, $y_4 = 1 - x$?

В каждой из задач **674—680** составить линейное однородное дифференциальное уравнение (возможно меньшего порядка), имеющее данные частные решения.

674. $1,\ \cos x$.

675. $x,\ e^x$.

676. $3x,\ x - 2,\ e^x + 1$.

677. $x^2 - 3x,\ 2x^2 + 9,\ 2x + 3$.

678. $e^x,\ \operatorname{sh} x,\ \operatorname{ch} x$.

679. $x,\ x^2,\ e^x$.

680. $x,\ x^3,\ |x^3|$.

В задачах **681—701** найти общие решения данных уравнений, зная их частные решения. В тех задачах, где частное решение не дано, можно искать его путем подбора, например, в виде показательной функции $y_1 = e^{ax}$ или алгебраического многочлена $y_1 = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots$

681. $(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 0.$

682. $x^2(x+1)y'' - 2y = 0;\ y_1 = 1 + \frac{1}{x}.$

683. $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0.$

684. $xy'' + 2y' - xy = 0;\ y_1 = \frac{e^x}{x}.$

685. $y'' - 2(1 + \operatorname{tg}^2 x)y = 0;\ y_1 = \operatorname{tg} x.$

686. $x(x-1)y'' - xy' + y = 0.$

687. $(e^x + 1)y'' - 2y' - e^x y = 0;\ y_1 = e^x - 1.$

688. $x^2 y'' \ln x - xy' + y = 0.$

689. $y'' - y' \operatorname{tg} x + 2y = 0;\ y_1 = \sin x.$

690. $(x^2 - 1)y'' + (x-3)y' - y = 0.$

691. $xy'' - (x+1)y' - 2(x-1)y = 0.$

692. $y'' + 4xy' + (4x^2 + 2)y = 0;\ y_1 = e^{ax^2}.$

693. $xy'' - (2x+1)y' + 2y = 0.$

694. $x(2x+1)y'' + 2(x+1)y' - 2y = 0.$

695. $x(x+4)y'' - (2x+4)y' + 2y = 0.$

696. $x(x^2+6)y'' - 4(x^2+3)y' + 6xy = 0.$

697. $(x^2+1)y'' - 2y = 0.$

698. $2x(x+2)y'' + (2-x)y' + y = 0.$

699. $xy''' - y'' - xy' + y = 0;\ y_1 = x,\ y_2 = e^x.$

700. $x^2(2x-1)y''' + (4x-3)xy'' - 2xy' + 2y = 0;$ $y_1 = x,\ y_2 = 1/x.$

701. $(x^2 - 2x + 3)y''' - (x^2+1)y'' + 2xy' - 2y = 0;$ $y_1 = x,\ y_2 = e^x.$

В задачах **702**, **703** найти общее решение линейного неоднородного уравнения, если известно, что частное решение соответствующего однородного уравнения является многочленом.

702. $(x+1)xy'' + (x+2)y' - y = x + \frac{1}{x}$.

703. $(2x+1)y'' + (2x-1)y' - 2y = x^2 + x$.

В задачах **704**, **705**, зная два частных решения линейного неоднородного уравнения второго порядка, найти его общее решение.

704. $(x^2-1)y'' + 4xy' + 2y = 6x$; $y_1 = x$, $y_2 = \frac{x^2+x+1}{x+1}$.

705. $(3x^3+x)y'' + 2y' - 6xy = 4 - 12x^2$; $y_1 = 2x$, $y_2 = (x+1)^2$.

В уравнениях **706—710** линейной заменой искомой функции $y = a(x)z$ уничтожить член с первой производной.

706. $x^2y'' - 2xy' + (x^2+2)y = 0$.

707. $x^2y'' - 4xy' + (6-x^2)y = 0$.

708. $(1+x^2)y'' + 4xy' + 2y = 0$.

709. $x^2y'' + 2x^2y' + (x^2-2)y = 0$.

710. $xy'' + y' + xy = 0$.

В уравнениях **711—715** заменой независимого переменного $t = \varphi(x)$ уничтожить член с первой производной.

711. $xy'' - y' - 4x^3y = 0$.

712. $(1+x^2)y'' + xy' + y = 0$.

713. $x^2(1-x^2)y'' + 2(x-x^3)y' - 2y = 0$.

714. $y'' - y' + e^{4x}y = 0$.

715. $2xy'' + y' + xy = 0$.

716. Зная три частных решения $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x^2$ линейного неоднородного уравнения второго порядка, написать его общее решение.

717. Что можно сказать о функции $p(x)$, если известно, что все решения уравнения $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ при $x \to \infty$ стремятся к нулю вместе со своими первыми производными?

Указание. Воспользоваться формулой Лиувилля.

718. Доказать, что в случае $q(x) < 0$ решения уравнения $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ не могут иметь положительных максимумов.

719. Где могут лежать точки перегиба графиков решений уравнения $y'' + q(x)y = 0$?

720. Могут ли графики двух решений уравнения $y'' + q(x)y = 0$ (функция $q(x)$ непрерывна) располагаться так, как на рис. 3,*а*? рис. 3,*б*? рис. 3,*в*? рис. 3,*г*?

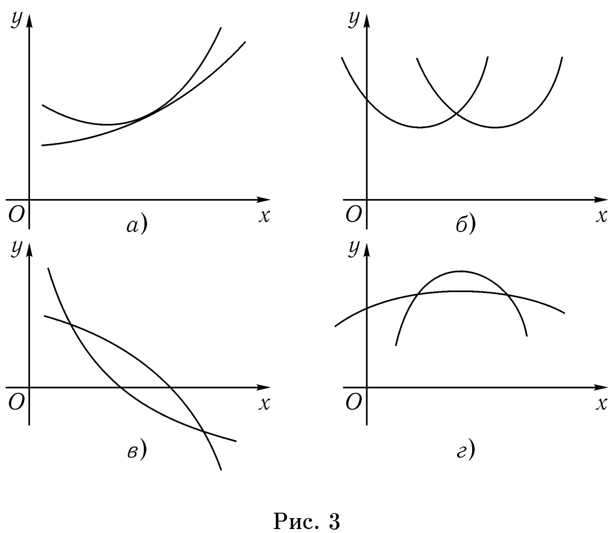

Рис. 3

721. Доказать, что отношение двух любых линейно независимых решений уравнения $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ (с непрерывными коэффициентами) не может иметь точек локального максимума.

722. Доказать, что в случае $q(x) > 0$ для любого решения уравнения $y'' + q(x)y = 0$ отношение $y'(x)/y(x)$ убывает при возрастании x на интервале, где $y(x) \neq 0$.

723. Доказать, что в случае $q(x) \leqslant 0$ все решения уравнения $y'' + q(x)y = 0$ с положительными начальными условиями $y(x_0) > 0$, $y'(x_0) > 0$ остаются положительными при всех $x > x_0$.

724. Доказать, что решение уравнения $y'' - x^2y = 0$ с начальными условиями $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ есть четная функция, всюду положительная.

725*. Доказать, что в случае $q(x) \leqslant 0$ краевая задача

$$y'' + q(x)y = 0, \quad y(x_1) = a, \quad y(x_2) = b$$

при любых a, b и $x_1 \neq x_2$ имеет единственное решение. Доказать, что это решение — монотонная функция, если $b = 0$.

726. Найти расстояние между двумя соседними нулями любого (не тождественно равного нулю) решения уравнения $y'' + my = 0$, где $m = \text{const} > 0$. Сколько нулей может содержаться на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$?

В задачах **727—730**, используя результат предыдущей задачи и теорему сравнения (см. [1], гл. VI, § 2, п. 3), оценить сверху и снизу расстояние между двумя соседними нулями любого (не тождественно равного нулю) решения следующих уравнений на заданном отрезке.

727. $y'' + 2xy = 0, \qquad 20 \leqslant x \leqslant 45.$

728. $xy'' + y = 0, \qquad 25 \leqslant x \leqslant 100.$

729. $y'' - 2xy' + (x+1)^2y = 0, \qquad 4 \leqslant x \leqslant 19.$

730. $y'' - 2e^xy' + e^{2x}y = 0, \qquad 2 \leqslant x \leqslant 6.$

731*. Доказать, что любое решение уравнения $y''+xy = 0$ на отрезке $-25 \leqslant x \leqslant 25$ имеет не менее 15 нулей.

732. Пусть $x_1, x_2, \ \ldots$ — расположенные в порядке возрастания последовательные нули решения уравнения $y'' + q(x)y = 0$, где $q(x) > 0$; при $x_1 \leqslant x < \infty$ функция $q(x)$ непрерывна и возрастает. Доказать, что $x_{n+1} - x_n < x_n - x_{n-1}$ (т. е. расстояние между соседними нулями убывает).

733. В предыдущей задаче обозначим через c конечный или бесконечный предел функции $q(x)$ при $x \to \infty$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = \pi/\sqrt{c}$.

734*. Пусть y и z — решения уравнений $y'' + q(x)y = 0$ и $z'' + Q(x)z = 0$ с совпадающими начальными условиями $y(x_0) = z(x_0)$, $y'(x_0) = z'(x_0)$ и на интервале (x_0, x_1) имеем $Q(x) > q(x)$, $y(x) > 0$, $z(x) > 0$. Доказать, что на этом интервале отношение $z(x)/y(x)$ убывает.

735*. Пусть выполнены условия задачи **732** и пусть $b_n = \max\limits_{x_n \leqslant x \leqslant x_{n+1}} |y(x)|$. Доказать, что $b_1 > b_2 > b_3 > \ldots$

736*. Пусть в задаче **733** предел c конечный. Доказать, что $b_n \to B > 0$ при $n \to \infty$ (в обозначениях задачи **735**).

737*. Заменой независимого переменного $t = \varphi(x)$ привести уравнение $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} \pm \frac{y}{(\psi(x))^4} = 0$ к виду $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + b(t)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \pm y = 0$, затем избавиться от первой производной заменой $y = a(t)u$. (Это преобразование называется преобразованием Лиувилля. Во многих случаях оно позволяет привести уравнение $y'' + q(x)y = 0$ к уравнению аналогичного вида, но с «почти постоянным» (слабо меняющимися на интервале (t_0, ∞)) коэффициентом при y. Это облегчает исследование асимптотического поведения решения при $x \to \infty$.)

В задачах **738—748** исследовать асимптотическое поведение при $x \to +\infty$ решений данных уравнений, пользуясь преобразованием Лиувилля (см. задачу **737**) и утверждениями п. 4 (стр. 77).

738. $y'' + x^4 y = 0$.

739. $y'' - x^2 y = 0$.

740. $y'' + x^2 y = 0$.

741. $y'' + \mathrm{e}^{2x} y = 0$.

742. $xy'' - y = 0$.

743. $y'' - xy = 0$.

744. $xy'' + 2y' + y = 0$.

745. $y'' - 2(x-1)y' + x^2 y = 0$.

746*. $y'' + (x^4 + 1)y = 0$.

747*. $(x^2 + 1)y'' - y = 0$.

748*. $x^2 y'' + y \ln^2 x = 0$.

В задачах **749—750** получить более точное асимптотическое представление решений данных уравнений, применяя два раза преобразование Лиувилля.

749*. $y'' - 4x^2y = 0.$

750*. $xy'' + y = 0.$

§ 13. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

1. Для отыскания решения краевой задачи

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_1, \tag{1}$$

$$\alpha y'(x_0) + \beta y(x_0) = 0, \quad \gamma y'(x_1) + \delta y(x_1) = 0 \tag{2}$$

надо подставить общее решение уравнения (1) в краевые условия (2) и из этих условий определить (если это возможно) значения произвольных постоянных, входящих в формулу общего решения. В отличие от задачи с начальными условиями (задачи Коши), краевая задача не всегда имеет решение.

2. Функцией Грина краевой задачи (1), (2) называется функция $G(x, s)$, определенная при $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, $x_0 < s < x_1$, и при каждом фиксированном s из отрезка $[x_0, x_1]$ обладающая свойствами (как функция от x):

1) при $x \neq s$ она удовлетворяет уравнению

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0; \tag{3}$$

2) при $x = x_0$ и $x = x_1$ она удовлетворяет заданным краевым условиям (2);

3) при $x = s$ она непрерывна по x, а ее производная по x имеет скачок, равный $1/a_0(s)$, т. е.

$$G(s+0,\ s) = G(s-0,\ s), \quad G'_x\Big|_{x=s+0} = G'_x\Big|_{x=s-0} + \frac{1}{a_0(s)}\,. \tag{4}$$

Чтобы найти функцию Грина краевой задачи (1), (2), надо найти два решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ (отличных от $y(x) \equiv 0$) уравнения (3), удовлетворяющие соответственно первому и второму из краевых условий (2). Если $y_1(x)$ не удовлетворяет сразу обоим краевым условиям, то функция Грина существует и ее можно искать в виде

$$G(x,\ s) = \begin{cases} ay_1(x) & (x_0 \leqslant x \leqslant s), \\ by_2(x) & (s \leqslant x \leqslant x_1). \end{cases} \tag{5}$$

Функции a и b зависят от s и определяются из требования, чтобы функция (5) удовлетворяла условиям (4), т. е.

$$by_2(s) = ay_1(s), \quad by_2'(s) = ay_1'(s) + \frac{1}{a_0(s)}.$$

3. Если функция Грина $G(x, s)$ существует, то решение краевой задачи (1), (2) выражается формулой

$$y(x) = \int\limits_{x_0}^{x_1} G(x, s) f(s)\, \mathrm{d}s.$$

4. Собственным значением задачи

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = \lambda y, \tag{6}$$

$$\alpha y'(x_0) + \beta y(x_0) = 0, \quad \gamma y'(x_1) + \delta y(x_1) = 0 \tag{7}$$

называется такое число λ, при котором уравнение (6) имеет решение $y(x) \not\equiv 0$, удовлетворяющее краевым условиям (7). Это решение $y(x)$ называется собственной функцией.

Найти решения уравнений **751—762**, удовлетворяющие указанным краевым условиям.

751. $y'' - y = 2x;\;\; y(0) = 0,\;\; y(1) = -1.$

752. $y'' + y' = 1;\;\; y'(0) = 0,\;\; y(1) = 1.$

753. $y'' - y' = 0;\;\; y(0) = -1,\;\; y'(1) - y(1) = 2.$

754. $y'' + y = 1;\;\; y(0) = 0,\;\; y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

755. $y'' + y = 1;\;\; y(0) = 0,\;\; y(\pi) = 0.$

756. $y'' + y = 2x - \pi;\;\; y(0) = 0,\;\; y(\pi) = 0.$

757. $y'' - y' - 2y = 0;\;\; y'(0) = 2,\;\; y(+\infty) = 0.$

758. $y'' - y = 1;\;\; y(0) = 0,\;\; y(x)$ ограничено при $x \to +\infty$.

759. $y'' - 2iy = 0;\;\; y(0) = -1,\;\; y(+\infty) = 0.$

760. $x^2y'' - 6y = 0;\;\; y(0)$ ограничено, $y(1) = 2.$

761. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0;\;\; y(x) = o(x)$ при $x \to 0$, $y(1) = 3.$

762. $x^2y'' + 5xy' + 3y = 0;\;\; y'(1) = 3,\;\; y(x) = O(x^{-2})$ при $x \to +\infty$.

763*. При каких a краевая задача $y'' + ay = 1$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$ не имеет решений?

Для каждой из краевых задач **764—779** построить функцию Грина.

764. $y'' = f(x)$; $y(0) = 0$, $y(1) = 0$.

765. $y'' + y = f(x)$; $y'(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

766. $y'' + y' = f(x)$; $y(0) = 0$, $y'(1) = 0$.

767. $y'' - y = f(x)$; $y'(0) = 0$, $y'(2) + y(2) = 0$.

768*. $y'' + y = f(x)$; $y(0) = y(\pi)$, $y'(0) = y'(\pi)$.

769. $x^2y'' + 2xy' = f(x)$; $y(1) = 0$, $y'(3) = 0$.

770. $xy'' - y' = f(x)$; $y'(1) = 0$, $y(2) = 0$.

771. $x^2y'' - 2y = f(x)$; $y(1) = 0$, $y(2) + 2y'(2) = 0$.

772. $y'' = f(x)$; $y(0) = 0$, $y(x)$ ограничено при $x \to +\infty$.

773. $y'' + y' = f(x)$; $y'(0) = 0$, $y(+\infty) = 0$.

774. $xy'' + y' = f(x)$; $y(1) = 0$, $y(x)$ ограничено при $x \to +\infty$.

775. $y'' + 4y' + 3y = f(x)$; $y(0) = 0$, $y(x) = O(\mathrm{e}^{-2x})$ при $x \to +\infty$.

776. $x^2y'' + xy' - y = f(x)$; $y(1) = 0$, $y(x)$ ограничено при $x \to +\infty$.

777. $x^2y'' + 2xy' - 2y = f(x)$; $y(0)$ ограничено, $y(1) = 0$.

778. $y'' - y = f(x)$, $y(x)$ ограничено при $x \to \pm\infty$.

779. $x^2y'' - 2y = f(x)$, $y(x)$ ограничено при $x \to 0$ и при $x \to +\infty$.

780. При каких a существует функция Грина краевой задачи $y'' + ay = f(x)$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$?

781*. Оценить сверху и снизу решение задачи $x^2y'' + 2xy' - 2y = f(x)$, $y(x)$ ограничено при $x \to 0$ и $x \to +\infty$, и его первую производную, если известно, что $0 \leqslant f(x) \leqslant m$.

Указание. Записать решение с помощью функции Грина.

В задачах **782—785** найти собственные значения и собственные функции.

782. $y'' = \lambda y; \quad y(0) = 0, \quad y(l) = 0.$

783. $y'' = \lambda y; \quad y'(0) = 0, \quad y'(l) = 0.$

784. $y'' = \lambda y; \quad y(0) = 0, \quad y'(l) = 0.$

785. $x^2 y'' = \lambda y; \quad y(1) = 0, \quad y(a) = 0 \quad (a > 1).$

§ 14. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1. Путем исключения неизвестных систему, вообще говоря, можно свести к уравнению более высокого порядка с одной неизвестной функцией (см. [1], гл. VII, § 1, п. 2 или [4], гл. 3, § 2). Этот способ удобен для решения лишь несложных систем.

Пример. Решить систему $\dot{x} = y + 1$, $\dot{y} = 2e^t - x$. Исключаем y. Из первого уравнения имеем $y = \dot{x} - 1$. Подставляя во второе уравнение, получаем $\ddot{x} = 2e^t - x$. Решив это уравнение второго порядка (методами § 11), найдем $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + e^t$. Значит, $y = \dot{x} - 1 = -C_1 \sin t + C_2 \cos t + e^t - 1$.

2. Для решения системы (где $\dot{x}$ означает $\frac{dx}{dt}$)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n, \end{cases} \tag{1}$$

или, в векторной записи, $\dot{x} = Ax$, где x — вектор, A — матрица:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

надо найти корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

Каждому простому корню λ_i характеристического уравнения соответствует решение $C_i v^i e^{\lambda_i t}$, где C_i — произвольная постоянная, v^i — собственный вектор матрицы A, соответствующий этому λ_i.

Если для кратного корня λ имеется столько линейно независимых собственных векторов $v^1, \ldots, v^k$, какова его кратность, то ему соответствует решение $C_1 v^1 e^{\lambda t} + \ldots + C_k v^k e^{\lambda t}$.

Если для корня λ кратности k имеется только m линейно независимых собственных векторов, и $m < k$, то решение, соответствующее этому λ, можно искать в виде произведения многочлена степени $k - m$ на $e^{\lambda t}$, т. е. в виде[1]

$$\begin{cases} x_1 = (a + bt + \ldots + dt^{k-m})\,e^{\lambda t}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = (p + qt + \ldots + st^{k-m})\,e^{\lambda t}. \end{cases} \qquad (3)$$

Чтобы найти коэффициенты $a, b, \ldots, s$, надо подставить решение (3) в систему (1). Приравняв коэффициенты подобных членов в левой и правой частях уравнений, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно $a, b, \ldots, s$. Надо найти общее решение этой системы. Коэффициенты $a, b, \ldots, s$ должны зависеть от k произвольных постоянных, где k — кратность корня λ.

Найдя для каждого λ решения указанного вида и сложив их, получим общее решение системы (1).

Пример. Решить систему

$$\dot x = 2x + y + z, \;\; \dot y = -2x - z, \;\; \dot z = 2x + y + 2z. \qquad (4)$$

Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ 2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad (5)$$

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$$

Для простого корня $\lambda_1 = 2$ находим собственный вектор (α, β, γ), решая систему

$$\begin{cases} \beta + \gamma = 0, \\ -2\alpha - 2\beta - \gamma = 0, \\ 2\alpha + \beta = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

[1] В случае $k \leqslant 3$ число $k - m$ нельзя уменьшить, а в случае $k \geqslant 4$ иногда можно, если известна жорданова форма матрицы A.

(коэффициенты этой системы равны элементам детерминанта (5) при $\lambda = 2$). Из (6) находим $2\alpha = -\beta = \gamma$. Значит, вектор $(1, -2, 2)$ — собственный, и

$$x = \mathrm{e}^{2t}, \quad y = -2\mathrm{e}^{2t}, \quad z = 2\mathrm{e}^{2t} \tag{7}$$

— частное решение системы (4).

Для кратного корня $\lambda = 1$ сначала определим число линейно независимых собственных векторов. При $\lambda = 1$ из (5) получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ее порядок $n = 3$, ранг $r = 2$. Число линейно независимых собственных векторов равно $m = n - r = 1$. Корень $\lambda = 1$ имеет кратность $k = 2$. Так как $k > m$, то решение надо искать в виде произведения многочлена степени $k - m = 1$ на $\mathrm{e}^{\lambda t}$, т. е. в виде

$$x = (a + bt)\mathrm{e}^{t}, \quad y = (c + dt)\mathrm{e}^{t}, \quad z = (f + gt)\mathrm{e}^{t}. \tag{8}$$

Чтобы найти коэффициенты a, b, $\ldots$, подставляем (8) в систему (4) и приравниваем коэффициенты при подобных членах. Получаем систему

$$\begin{aligned} b + d + g &= 0, & b &= a + c + f, \\ -2b - d - g &= 0, & d &= -2a - c - f, \\ 2b + d + g &= 0, & g &= 2a + c + f. \end{aligned} \tag{9}$$

Найдем общее решение этой системы. Из двух левых уравнений имеем $b = 0$, $g = -d$. Подставляя это в остальные уравнения, получаем

$$0 = a + c + f, \quad d = -2a - c - f \tag{10}$$

(остальные уравнения будут следствиями написанных). Решаем систему (10), например, относительно a и f:

$$a = -d, \quad f = d - c.$$

Таким образом, все неизвестные выражены через c и d. Положив $c = C_1$, $d = C_2$, имеем $a = -C_2$, $b = 0$, $f = C_2 - C_1$, $g = -C_2$. Общее решение системы (9) найдено.

Подставив найденные значения a, b, $\ldots$ в (8) и прибавив частное решение (7), умноженное на C_3, получим общее решение системы (4):

$$x = -C_2\mathrm{e}^{t} + C_3\mathrm{e}^{2t}, \quad y = (C_1 + C_2 t)\,\mathrm{e}^{t} - 2C_3\mathrm{e}^{2t},$$
$$z = (C_2 - C_1 - C_2 t)\,\mathrm{e}^{t} + 2C_3\mathrm{e}^{2t}.$$

3. Другой способ решения системы (1). Для любой матрицы существует базис, в котором матрица имеет жорданову форму. Каждой клетке порядка $p \geqslant 1$ жордановой формы соответствует серия $h_1, h_2, \ldots, h_p$ векторов базиса, удовлетворяющих уравнениям

$$\begin{aligned} Ah_1 &= \lambda h_1, h_1 \neq 0, \\ Ah_2 &= \lambda h_2 + h_1, \\ Ah_3 &= \lambda h_3 + h_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Ah_p &= \lambda h_p + h_{p-1}. \end{aligned} \tag{11}$$

Вектор h_1 называется собственным, а $h_2, h_3, \ldots, h_p$ — присоединенными. Каждой серии $h_1, h_2, \ldots, h_p$ соответствует p линейно независимых решений $x^1, x^2, \ldots, x^p$ системы $\dot{x} = Ax$ (верхний индекс указывает номер решения):

$$\begin{aligned} x^1 &= e^{\lambda t} h_1, \\ x^2 &= e^{\lambda t}\left(\frac{t}{1!}h_1 + h_2\right), \\ x^3 &= e^{\lambda t}\left(\frac{t^2}{2!}h_1 + \frac{t}{1!}h_2 + h_3\right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^p &= e^{\lambda t}\left(\frac{t^{p-1}}{(p-1)!}h_1 + \frac{t^{p-2}}{(p-2)!}h_2 + \ldots + \frac{t}{1!}h_{p-1} + h_p\right). \end{aligned} \tag{12}$$

Общее число всех таких решений равно сумме порядков всех клеток жордановой формы, т. е. порядку матрицы. Они составляют фундаментальную систему решений системы $\dot{x} = Ax$.

Правило для запоминания формул (12). Собственному вектору h_1, соответствует решение $x^1 = e^{\lambda t}h_1$. Если везде отбросить $e^{\lambda t}$, то каждая строка правой части (12) получится интегрированием по t предыдущей строки, причем постоянную интегрирования надо взять равной следующему по порядку вектору серии.

4. В случае, когда имеются комплексные корни λ, изложенные способы дают выражение решения через комплексные функции. Если при этом коэффициенты системы (1) вещественны, то можно выразить решение только через вещественные функции. Для этого надо воспользоваться тем, что вещественная и мнимая части комплексного решения, соответствующего корню $\lambda = \alpha + \beta i$ $(\beta \neq 0)$, являются линейно независимыми решениями.

Пример. Решить систему $\dot{x} = 4x - y$, $\dot{y} = 5x + 2y$.

Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0, \quad \lambda = 3 \pm 2i.$$

Для корня $\lambda = 3 + 2i$ находим собственный вектор (a, b):

$$\begin{cases} (1-2i)a - b = 0, \\ 5a - (1+2i)b = 0. \end{cases}$$

Можно взять $a = 1$, $b = 1 - 2i$. Имеем частное решение $x = \mathrm{e}^{(3+2i)t}$, $y = (1-2i)\mathrm{e}^{(3+2i)t}$.

Так как данная система с вещественными коэффициентами, то решение, соответствующее корню $\lambda = 3 - 2i$, можно не искать, оно будет комплексно сопряженным с найденным решением. Чтобы получить два вещественных решения, надо взять вещественную и мнимую части найденного комплексного решения. Так как $\mathrm{e}^{(3+2i)t} = \mathrm{e}^{3t}(\cos 2t + i \sin 2t)$, то

$$\begin{cases} x_1 = \mathrm{Re}\, \mathrm{e}^{(3+2i)t} = \mathrm{e}^{3t} \cos 2t, \\ y_1 = \mathrm{Re}(1-2i)\mathrm{e}^{(3+2i)t} = \mathrm{e}^{3y}(\cos 2t + 2\sin 2t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = \mathrm{Im}\, \mathrm{e}^{(3+2i)t} = \mathrm{e}^{3t} \sin 2t, \\ y_2 = \mathrm{Im}(1-2i)\mathrm{e}^{(3+2i)t} = \mathrm{e}^{3t}(\sin 2t - 2\cos 2t). \end{cases}$$

Общее решение выражается через два найденных линейно независимых решения:

$$x = C_1 x_1 + C_2 x_2 = C_1\, \mathrm{e}^{3t} \cos 2t + C_2\, \mathrm{e}^{3t} \sin 2t,$$

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1\, \mathrm{e}^{3t}(\cos 2t + 2\sin 2t) + C_2\, \mathrm{e}^{3t}(\sin 2t - 2\cos 2t).$$

5. Чтобы решить систему

$$\begin{cases} a_{10}x^{(m)} + a_{11}x^{(m-1)} + \ldots + a_{1m}x + \\ \qquad + b_{10}y^{(n)} + b_{11}y^{(n-1)} + \ldots + b_{1n}y = 0, \\ a_{20}x^{(p)} + a_{21}x^{(p-1)} + \ldots + a_{2p}x + \\ \qquad + b_{20}y^{(q)} + b_{21}y^{(q-1)} + \ldots + b_{2q}y = 0, \end{cases}$$

не приведенную к нормальному виду, надо составить характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{10}\lambda^m + a_{11}\lambda^{m-1} + \ldots + a_{1m} & b_{10}\lambda^n + b_{11}\lambda^{n-1} + \ldots + b_{1n} \\ a_{20}\lambda^p + a_{21}\lambda^{p-1} + \ldots + a_{2p} & b_{20}\lambda^q + b_{21}\lambda^{q-1} + \ldots + b_{2q} \end{vmatrix} = 0$$

и найти его корни. После этого решение отыскивается тем же способом, как в п. 2.

Аналогично решаются системы трех и более уравнений.

6. Частное решение линейной неоднородной системы с постоянными коэффициентами

$$\dot{x}_i = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n + f_i(t), \quad i = 1, \ldots, n \tag{13}$$

можно искать методом неопределенных коэффициентов в том случае, когда функции $f_i(t)$ состоят из сумм и произведений функций $b_0 + b_1 t + \ldots + b_m t^m$, $\mathrm{e}^{\alpha t}$, $\cos\beta t$, $\sin\beta t$. Это делается по тем же правилам, что для одного линейного уравнения с постоянными коэффициентами, см. п. 2 § 11, со следующим изменением. Если $f_i(t) = P_{m_i}(t)e^{\gamma t}$, где $P_{m_i}(t)$ — многочлен степени m_i, то частное решение системы (13) ищется не в виде $t^s Q_m(t)\,\mathrm{e}^{\gamma t}$, а в виде

$$x_i = Q^i_{m+s}(t)\,\mathrm{e}^{\gamma t}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{14}$$

где $Q^i_{m+s}(t)$ — многочлены степени $m+s$ с неизвестными коэффициентами, $m = \max m_i$, $s = 0$, если γ — не корень характеристического уравнения (2), а если γ — корень, то s можно взять равным кратности этого корня (или, точнее, s на 1 больше наибольшей из степеней многочленов, на которые умножается $\mathrm{e}^{\gamma t}$ в общем решении однородной системы). Неизвестные коэффициенты многочленов определяются путем подстановки выражений (14) в данную систему (13) и сравнения коэффициентов подобных членов.

Аналогично определяются степени многочленов и в случае, когда $f_i(t)$ содержат $\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t$ и $\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t$, а число $\gamma = \alpha + \beta i$ является корнем характеристического уравнения.

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y + \mathrm{e}^{3t}(t + \sin t), \\ \dot{y} = x + 2y + t\,\mathrm{e}^{3t}\cos t. \end{cases} \tag{15}$$

Сначала для однородной системы $\dot{x} = 4x - y$, $\dot{y} = x + 2y$ находим корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ и как в п. 2 отыскиваем общее решение

$$x_0 = (C_1 t + C_2)\,\mathrm{e}^{3t}, \quad y_0 = (C_1 t + C_2 - C_1)\,\mathrm{e}^{3t}.$$

В системе (15) для функций $t\,\mathrm{e}^{3t}$, $\mathrm{e}^{3t}\sin t$, $t\,\mathrm{e}^{3t}\cos t$ числа $\alpha + \beta i$ соответственно равны 3, $3+i$, $3+i$. Поэтому надо отдельно найти частные решения систем

$$\dot{x} = 4x - y + t\,\mathrm{e}^{3t}, \qquad \dot{y} = x + 2y, \tag{16}$$

$$\dot{x} = 4x - y + \mathrm{e}^{3t}\sin t, \quad \dot{y} = x + 2y + t\,\mathrm{e}^{3t}\cos t. \tag{17}$$

Для системы (16) $\alpha+\beta i = 3 = \lambda_1 = \lambda_2$, $s = 2$, $m = 1$. Согласно (14), частное решение можно искать в виде

$$x_1 = (at^3 + bt^2 + ct + d)\,\mathrm{e}^{3t}, \quad y_1 = (ft^3 + gt^2 + ht + j)\,\mathrm{e}^{3t}.$$

Для системы (17) $\alpha + \beta i = 3 + i \neq \lambda_{1,2}$, $s = 0$, $m = 1$. Частное решение имеет вид

$$x_2 = (kt + l)\,\mathrm{e}^{3t} \sin t + (mt + n)\,\mathrm{e}^{3t} \cos t,$$

$$y_2 = (pt + q)\,\mathrm{e}^{3t} \sin t + (rt + s)\,\mathrm{e}^{3t} \cos t.$$

Отыскав значения коэффициентов a, b, $\ldots$, общее решение системы (15) напишем в виде

$$x = x_0 + x_1 + x_2, \quad y = y_0 + y_1 + y_2.$$

7. Решение неоднородной системы

$$\dot{x}_i = a_{i1}(t)x_1 + \ldots + a_{in}(t)x_n + f_i(t), \quad i = 1, \ldots, n$$

можно найти методом вариации постоянных, если известно общее решение однородной системы с теми же коэффициентами $a_{ik}(t)$. Для этого в формуле общего решения однородной системы надо заменить произвольные постоянные C_i на неизвестные функции $C_i(t)$. Полученные выражения для x_i надо подставить в данную неоднородную систему, и из этой системы найти $C_i(t)$.

8. Показательной функцией e^A матрицы A называется сумма ряда

$$\mathrm{e}^A = E + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \ldots, \tag{18}$$

где E — единичная матрица. Ряд сходится для любой матрицы A.

Свойства e^A:

а) если $A = CMC^{-1}$, то $\mathrm{e}^A = C\,\mathrm{e}^M\,C^{-1}$;

б) если $AB = BA$, то $\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A \cdot \mathrm{e}^B = \mathrm{e}^B \cdot \mathrm{e}^A$;

в) матрица $X(t) = \mathrm{e}^{tA}$ удовлетворяет уравнению $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = AX$; $X(0) = E$.

Методы отыскания e^A:

1) Путем решения системы дифференциальных уравнений. В силу свойства в) i-й столбец матрицы e^{tA} есть решение системы уравнений (в векторной записи) $\dot{x} = Ax$ с начальными условиями $x_i(0) = 1$, $x_k(0) = 0$ при $k \neq i$ (x_i — i-я координата вектора x).

2) Путем приведения матрицы к жордановой форме. Пусть известна такая матрица C, что матрица $C^{-1}AC = M$ имеет жорданову форму, т. е. состоит из клеток K_i. Каждая жорданова клетка имеет вид $K = \lambda E + F$, у матрицы F все элементы нули, кроме 1-го косого ряда над диагональю. Поэтому $F^m = 0$, где m — порядок матрицы F, и e^F легко найти с помощью ряда (18). Так как еще $\mathrm{e}^{\lambda E} = \mathrm{e}^{\lambda} E$, то

$$\mathrm{e}^K = \mathrm{e}^{\lambda E + F} = \mathrm{e}^{\lambda E} \cdot \mathrm{e}^F = \mathrm{e}^{\lambda} E \cdot \mathrm{e}^F = \mathrm{e}^{\lambda} \mathrm{e}^F .$$

Составив из клеток e^{K_i} матрицу e^M, найдем e^A с помощью свойства а). Доказательства и пример см. в [5], гл. 1, §§ 12–14.

В задачах **786—812** решить данные системы уравнений ($\dot{x}$ означает $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, и т. д.; для облегчения работы в некоторых задачах указаны корни характеристического уравнения).

786. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$

787. $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = y - 4x. \end{cases}$

788. $\begin{cases} \dot{x} + x - 8y = 0, \\ \dot{y} - x - y = 0. \end{cases}$

789. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 3y - 2x. \end{cases}$

790. $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y, \\ \dot{y} = 3x + y. \end{cases}$

791. $\begin{cases} \dot{x} + x + 5y = 0, \\ \dot{y} - x - y = 0. \end{cases}$

792. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 4y - x. \end{cases}$

793. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, \\ \dot{y} = 4x - y. \end{cases}$

794. $\begin{cases} \dot{x} = 2y - 3x, \\ \dot{y} = y - 2x. \end{cases}$

795. $\begin{cases} \dot{x} - 5x - 3y = 0, \\ \dot{y} + 3x + y = 0. \end{cases}$

796. $\begin{cases} \dot{x} = x + z - y, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = 2x - y \end{cases}$
$(\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -1).$

797. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - z, \\ \dot{y} = y - x + z, \\ \dot{z} = x - z \end{cases}$
$(\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -1).$

798. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z, \\ \dot{y} = x + 2y - z, \\ \dot{z} = x - y + 2z \end{cases}$
$(\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3).$

799. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y + z, \\ \dot{y} = x + y + z, \\ \dot{z} = 4x - y + 4z \end{cases}$
$(\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 5).$

800. $\begin{cases} \dot{x} = 4y - 2z - 3x, \\ \dot{y} = z + x, \\ \dot{z} = 6x - 6y + 5z \end{cases}$ $(\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -1)$.

801. $\begin{cases} \dot{x} = x - y - z, \\ \dot{y} = x + y, \\ \dot{z} = 3x + z \end{cases}$ $(\lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i)$.

802. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = x + 3y - z, \\ \dot{z} = 2y + 3z - x \end{cases}$ $(\lambda_1 = 2,\ \lambda_{2,3} = 3 \pm i)$.

803. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2z - y, \\ \dot{y} = x + 2z, \\ \dot{z} = y - 2x - z \end{cases}$ $(\lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = \pm i)$.

804. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y - z, \\ \dot{y} = x + 2y - z, \\ \dot{z} = x - y + 2z \end{cases}$ $(\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 3)$.

805. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z, \\ \dot{y} = 3x - 2y - 3z, \\ \dot{z} = 2z - x + y \end{cases}$ $(\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 1)$.

806. $\begin{cases} \dot{x} = y - 2x - 2z, \\ \dot{y} = x - 2y + 2z, \\ \dot{z} = 3x - 3y + 5z \end{cases}$ $(\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = \lambda_3 = -1)$.

807. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y - z, \\ \dot{y} = 3x - 4y - 3z, \\ \dot{z} = 2x - 4y \end{cases}$ $(\lambda_1 = \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -5)$.

808. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + z, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = 2z - y \end{cases}$ $(\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2)$.

809. $\begin{cases} \dot{x} = y - 2z - x, \\ \dot{y} = 4x + y, \\ \dot{z} = 2x + y - z \end{cases}$ $(\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = -1)$.

810. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 2y + 4z, \\ \dot{z} = x - z \end{cases}$ $(\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 3)$.

811. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z, \\ \dot{y} = 2x - y - 2z, \\ \dot{z} = 2z - x + y \end{cases}$ $(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1)$.

812. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y, \\ \dot{y} = 3x + y - z, \\ \dot{z} = x + z \end{cases}$ $(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2)$.

В задачах **813—825** решить системы, не приведенные к нормальному виду.

813. $\begin{cases} \ddot{x} = 2x - 3y, \\ \ddot{y} = x - 2y. \end{cases}$

814. $\begin{cases} \ddot{x} = 3x + 4y, \\ \ddot{y} = -x - y. \end{cases}$

815. $\begin{cases} \ddot{x} = 2y, \\ \ddot{y} = -2x. \end{cases}$

816. $\begin{cases} \ddot{x} = 3x - y - z, \\ \ddot{y} = -x + 3y - z, \\ \ddot{z} = -x - y + 3z. \end{cases}$

817. $\begin{cases} 2\dot{x} - 5\dot{y} = 4y - x, \\ 3\dot{x} - 4\dot{y} = 2x - y. \end{cases}$

818. $\begin{cases} \ddot{x} + \dot{x} + \dot{y} - 2y = 0, \\ \dot{x} - \dot{y} + x = 0. \end{cases}$

819. $\begin{cases} \ddot{x} - 2\ddot{y} + \dot{y} + x - 3y = 0, \\ 4\ddot{y} - 2\ddot{x} - \dot{x} - 2x + 5y = 0. \end{cases}$

820. $\begin{cases} \ddot{x} - x + 2\ddot{y} - 2y = 0, \\ \dot{x} - x + \dot{y} + y = 0. \end{cases}$

821. $\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} + 2x = 0, \\ 3\dot{x} + \ddot{y} - 8y = 0. \end{cases}$

822. $\begin{cases} \ddot{x} + 3\ddot{y} - x = 0, \\ \dot{x} + 3\dot{y} - 2y = 0. \end{cases}$

823. $\begin{cases} \ddot{x} + 5\dot{x} + 2\dot{y} + y = 0, \\ 3\ddot{x} + 5x + \dot{y} + 3y = 0. \end{cases}$

824. $\begin{cases} \ddot{x} + 4\dot{x} - 2x - 2\dot{y} - y = 0, \\ \ddot{x} - 4\dot{x} - \ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = 0. \end{cases}$

825. $\begin{cases} 2\ddot{x} + 2\dot{x} + x + 3\ddot{y} + \dot{y} + y = 0, \\ \ddot{x} + 4\dot{x} - x + 3\ddot{y} + 2\dot{y} - y = 0. \end{cases}$

В задачах **826—845** решить линейные неоднородные системы.

826. $\begin{cases} \dot{x} = y + 2e^{t}, \\ \dot{y} = x + t^2. \end{cases}$

827. $\begin{cases} \dot{x} = y - 5\cos t, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$

828. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y + 4e^{5t}, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$

829. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y + 4e^{-2t}, \\ \dot{y} = 2x - 2y. \end{cases}$

830. $\begin{cases} \dot{x} = 4x + y - e^{2t}, \\ \dot{y} = y - 2x. \end{cases}$

831. $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x + 1, \\ \dot{y} = 3y - 2x. \end{cases}$

832. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y + 2e^{3t}, \\ \dot{y} = x + y + 5e^{-t}. \end{cases}$

833. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + e^{t}, \\ \dot{y} = -2x + 2t. \end{cases}$

834. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = x - 5\sin t. \end{cases}$ **835.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y, \\ \dot{y} = x - 3y + 3\,\mathrm{e}^t. \end{cases}$

836. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = y - 2x + 18t. \end{cases}$ **837.** $\begin{cases} \dot{x} = x+2y+16t\,\mathrm{e}^t, \\ \dot{y} = 2x - 2y. \end{cases}$

838. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 4y - 8, \\ \dot{y} = 3x + 6y. \end{cases}$ **839.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y, \\ \dot{y} = x-2y+2\sin t. \end{cases}$

840. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + 2\sin t, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$ **841.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x + 2\,\mathrm{e}^t. \end{cases}$

842. $\begin{cases} \dot{x} = 4x-3y+\sin t, \\ \dot{y} = 2x-y-2\cos t. \end{cases}$ **843.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + 2\,\mathrm{e}^t, \\ \dot{y} = x + 2y - 3\,\mathrm{e}^{4t}. \end{cases}$

844. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + 8t, \\ \dot{y} = 5x - y. \end{cases}$ **845.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = 2y - x - 5\,\mathrm{e}^t \sin t. \end{cases}$

В задачах **846—850** данные системы решить методом вариации постоянных.

846. $\begin{cases} \dot{x} = y+\operatorname{tg}^2 t-1, \\ \dot{y} = -x + \operatorname{tg} t. \end{cases}$ **847.** $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x, \\ \dot{y} = 4y-3x+\dfrac{\mathrm{e}^{3t}}{\mathrm{e}^{2t}+1}. \end{cases}$

848. $\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + \dfrac{2}{\mathrm{e}^t - 1}, \\ \dot{y} = 6x + 3y - \dfrac{3}{\mathrm{e}^t - 1}. \end{cases}$

849. $\begin{cases} \dot{x} = x-y+\dfrac{1}{\cos t}, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$ **850.** $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 2x-y+15\,\mathrm{e}^t \sqrt{t}. \end{cases}$

Решить системы **851—866**, записанные в векторной форме: $\dot{x} = Ax$, где x — вектор, A — данная матрица.

851. $\dot{x} = Ax, \ A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$

852. $\dot{x} = Ax, \ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

853. $\dot{x} = Ax, \ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$

854. $\dot{x} = Ax, \ A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$

855. $\dot{x} = Ax, \ A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$

856. $\dot{x} = Ax, \ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$

857. $\dot{x} = Ax, \ A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$

858. $\dot{x} = Ax, \ A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$

859. $\dot{x} = Ax, \ A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$

860. $\dot{x} = Ax, \ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

861. $\dot{x} = Ax, \ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

862. $\dot{x} = Ax, \ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

863. $\dot{x} = Ax, \ A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$

864. $\dot{x} = Ax, \ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$

865. $\dot{x} = Ax, \ A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$

866. $\dot{x} = Ax,\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$

В задачах **867—873** найти показательную функцию e^A данной матрицы A.

867. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$ **868.** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$

869. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$ **870.** $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

871. $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$ **872.** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

873. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

В задачах **874** и **875** найти $\det e^A$, не вычисляя матрицу e^A.

874. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$ **875.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$

876. Тело массы m движется на плоскости x, y, притягиваясь к точке $(0, 0)$ с силой a^2mr, где r — расстояние до этой точки. Найти движение тела при начальных условиях $x(0) = d$, $y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $\dot{y}(0) = v$ и траекторию этого движения.

877. Один конец пружины закреплен неподвижно в точке 0, а к другому прикреплен груз массы $3m$, соединенный другой пружиной с грузом массы $2m$. Оба груза двигаются без трения по одной прямой, проходящей через точку 0. Каждая из пружин растягивается на величину x под действием силы a^2mx. Найти возможные периодические движения системы.

878. На концах вала закреплены два шкива, моменты инерции которых I_1 и I_2. При повороте одного шкива относительно другого на любой угол φ вследствие деформации вала возникают упругие силы с крутящим моментом $K\varphi$. Найти частоту крутильных колебаний вала при отсутствии внешних сил.

879. К источнику тока с напряжением $E = V\sin\omega t$ последовательно присоединено сопротивление R. Далее цепь разветвляется на две ветви, в одной из которых включена самоиндукция L, а в другой — емкость C (рис. 4). Найти силу тока в цепи (установившийся режим), проходящего через сопротивление R. При какой частоте ω сила тока наибольшая? Наименьшая?

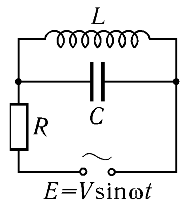

Рис. 4

Указание. О составлении дифференциальных уравнений в задачах об электрических цепях см. п. 5 § 11.

880*. Какое условие достаточно наложить на собственные значения матрицы A, чтобы система уравнений (в векторной записи) $\dot{x} = Ax + f(t)$ имела периодическое решение при всякой непрерывной вектор-функции $f(t)$ периода ω?

Указание. Применив метод вариации постоянных в векторной форме, выразить общее решение через фундаментальную матрицу e^{tA}, функцию $f(t)$ и начальные условия. Воспользоваться условием периодичности.

§ 15. УСТОЙЧИВОСТЬ

1. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

или, в векторной записи

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x = (x_1, \ldots, x_n). \tag{2}$$

Пусть все f_i и $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}$ непрерывны при $t_0 \leqslant t < \infty$.

Решение $x = \varphi(t)$ системы (2) называется устойчивым по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всякого решения $x(t)$ той же системы, начальное значение которого удовлетворяет неравенству

$$|x(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta, \tag{3}$$

при всех $t \geqslant t_0$ выполняется неравенство

$$|x(t) - \varphi(t)| < \varepsilon.$$

Если же для некоторого $\varepsilon > 0$ такого δ не существует, то решение $\varphi(t)$ называется неустойчивым.

Решение $\varphi(t)$ называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и, кроме того, все решения с достаточно близкими начальными условиями неограниченно приближаются к $\varphi(t)$ при $t \to +\infty$, т.е. если из неравенства (3) следует $x(t) - \varphi(t) \to 0\ (t \to +\infty)$.

Наличие или отсутствие устойчивости не зависит от выбора t_0.

Вопрос об устойчивости данного решения $x = \varphi(t)$ системы (2) сводится к вопросу об устойчивости нулевого решения $y(t) \equiv 0$ другой системы, получаемой из (2) заменой искомой функции $x - \varphi(t) = y$.

2. Исследование на устойчивость по первому приближению. Пусть $x_i(t) \equiv 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ — решение системы (1). Чтобы его исследовать на устойчивость, надо выделить из функций f_i линейную часть вблизи точки $x_1 = \ldots = x_n = 0$, например, по формуле Тейлора. Полученную систему часто можно исследовать с помощью следующей теоремы.

Теорема Ляпунова. *Рассмотрим систему*

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n + \psi_i(t, x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

где a_{ik} — постоянные, а ψ_i — бесконечно малые выше первого порядка, точнее, при $|x| < \varepsilon_0$

$$|\psi_i| \leqslant \gamma(x)|x|,\ i = 1, \ldots, n,\ \gamma(x) \to 0 \text{ при } |x| \to 0, \tag{5}$$

где $|x| = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}$.

Тогда если все собственные значения матрицы (a_{ik}), $i, k = 1, \ldots, n$, имеют отрицательные вещественные части, то нулевое решение системы (4) асимптотически устойчиво; если же хоть одно собственное значение имеет положительную вещественную часть, то нулевое решение неустойчиво.

Пример. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{4+4y} - 2\,\mathrm{e}^{x+y}, \\ \dot{y} = \sin ax + \ln(1-4y), \quad a = \mathrm{const}. \end{cases}$$

Выделяя линейную часть функций по формуле Тейлора, получаем

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - y + \psi_1(x,\,y), \\ \dot{y} = ax - 4y + \psi_2(x,\,y), \end{cases}$$

где функции ψ_1 и ψ_2 равны $O(x^2+y^2)$ и, значит, удовлетворяют условию (5). Находим собственные значения матрицы коэффициентов

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ a & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0, \;\; \lambda^2 + 6\lambda + 8 + a = 0, \;\; \lambda_{1,\,2} = -3 \pm \sqrt{1-a}.$$

При $a > 1$ корни комплексные, $\operatorname{Re}\lambda_{1,\,2} = -3 < 0$, а при $-8 < a \leqslant 1$ корни вещественные отрицательные, значит, в этих случаях нулевое решение асимптотически устойчиво.

При $a < -8$ один корень положителен, значит, нулевое решение неустойчиво.

При $a = -8$ имеем $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -6$ и вопрос об устойчивости не решается с помощью изложенной теоремы.

3. Исследование на устойчивость с помощью функции Ляпунова. Производной от функции $v(t,\,x_1,\,\ldots,\,x_n)$ в силу системы (1) называется функция

$$\left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right|_{(1)} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x_1} f_1 + \ldots + \frac{\partial v}{\partial x_n} f_n,$$

где $f_1,\,\ldots,\,f_n$ — правые части системы (1).

Теорема Ляпунова. *Если существует дифференцируемая функция $v(x_1,\,\ldots,\,x_n)$, удовлетворяющая в области $|x| < \varepsilon_0$ условиям*

1) $v > 0$ *при* $x \neq 0$, $v(0) = 0$,

2) $\left.\dfrac{dv}{dt}\right|_{(1)} \leqslant 0$ *при* $|x| < \varepsilon_0$, $t > t_0$,

то нулевое решение системы (1) *устойчиво по Ляпунову.*

Если вместо условия 2) *выполнено более сильное условие*

3) $\left.\dfrac{dv}{dt}\right|_{(1)} \leqslant -w(x) < 0$ *при* $0 < |x| < \varepsilon_0$, $t > t_0$,

а функция $w(x)$ *непрерывна при* $|x| < \varepsilon_0$, *то нулевое решение системы* (1) *асимптотически устойчиво.*

Теорема Четаева. *Пусть система* (1) *обладает нулевым решением. Пусть в некоторой области* V *пространства* $x_1, \ldots, x_n$ *существует дифференцируемая функция* $v(x_1, \ldots \ldots, x_n)$, *причем*

1) *точка* $x = 0$ *принадлежит границе области* V,

2) $v = 0$ *на границе области* V *при* $|x| < \varepsilon_0$,

3) *в области* V *при* $t > t_0$ *имеем* $v > 0$, $\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)} \geqslant w(x) > 0$,

функция $w(x)$ *непрерывна.*

Тогда нулевое решение системы (1) *неустойчиво.*

Не существует общего метода построения функции Ляпунова v (когда решение системы (1) неизвестно). В ряде случаев функцию Ляпунова удается построить в виде квадратичной формы $v = \sum\limits_{i,\,j} b_{ij}x_ix_j$ или в виде суммы квадратичной формы и интегралов от нелинейных функций, входящих в правую часть данной системы.

4. Условия отрицательности всех вещественных частей корней уравнения

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \quad a_0 > 0, \tag{6}$$

с вещественными коэффициентами.

а) Необходимое условие: *все* $a_i > 0$. В случае $n \leqslant 2$ это условие является и достаточным.

б) Условие Рауса—Гурвица: *необходимо и достаточно, чтобы были положительными все главные диагональные миноры матрицы Гурвица*

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{pmatrix}.$$

На главной диагонали этой матрицы стоят числа $a_1, a_2, \ldots \ldots, a_n$. В каждой строке индекс каждого числа на 1 меньше индекса предыдущего числа. Числа a_i с индексами $i > n$ или $i < 0$ заменяются нулями.

Главные диагональные миноры матрицы Гурвица:

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \ldots \tag{7}$$

в) Условия Льенара — Шипара. *Необходимо и достаточно, чтобы все* $a_i > 0$ *и чтобы* $\Delta_{n-1} > 0$, $\Delta_{n-3} > 0$, $\Delta_{n-5} > 0, \ldots,$ *где* Δ_i *те же, что в* (7).

Эти условия равносильны условиям Рауса–Гурвица, но удобнее, так как содержат меньше детерминантов.

Пример. При каких a и b корни уравнения $\lambda^4 + 2\lambda^3 + a\lambda^2 + 3\lambda + b = 0$ имеют отрицательные вещественные части?

Пишем условия Льенара—Шипара:

$$a > 0, \quad b > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & a & 2 \\ 0 & b & 3 \end{vmatrix} = 6a - 4b - 9 > 0, \quad \Delta_1 = 2 > 0.$$

Отсюда получаем условия $b > 0$, $6a > 4b + 9$.

г) Критерий Михайлова. *Необходимо и достаточно, чтобы на комплексной плоскости точка* $f(i\omega)$, *где* $f(\lambda)$ — *левая часть* (6), *при изменении* ω *от* 0 *до* $+\infty$ *не проходила через начало координат и сделала поворот вокруг него на угол* $n\pi/2$ *в положительном направлении.*

Другая (эквивалентная) формулировка критерия Михайлова: *Необходимо и достаточно, чтобы* $a_n a_{n-1} > 0$ *и чтобы корни многочленов*

$$p(\xi) = a_n - a_{n-2}\xi + a_{n-4}\xi^2 - \ldots,$$
$$q(\eta) = a_{n-1} - a_{n-3}\eta + a_{n-5}\eta^2 - \ldots$$

были все положительными, различными и чередующимися, начиная с корня ξ_1, *т. е.*

$$0 < \xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \eta_2 < \ldots$$

(Заметим, что многочлен (6) при $\lambda = i\omega$ равен $p(\omega^2) + i\omega q(\omega^2)$.)

Пример. $f(\lambda) = \lambda^5 + 2\lambda^4 + 7\lambda^3 + 8\lambda^2 + 10\lambda + 6$. Здесь $a_n = 6 > 0$, $a_{n-1} = 10 > 0$, а многочлены $p(\xi) = 6 - 8\xi + 2\xi^2$, $q(\eta) = 10 - 7\eta + \eta^2$ имеют корни $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 3$, $\eta_1 = 2$, $\eta_2 = 5$. Значит, $0 < \xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \eta_2$. По критерию Михайлова все корни многочлена $f(\lambda)$ имеют отрицательные вещественные части.

5. Условия устойчивости нулевого решения линейной системы с периодическими коэффициентами см. в [5], гл. III, § 16.

Задачи **881—898** решаются с помощью определения устойчивости.

881. Пользуясь определением устойчивости по Ляпунову, выяснить, устойчивы ли решения данных уравнений с указанными начальными условиями

а) $3(t-1)\dot{x} = x, \quad x(2) = 0.$ б) $\dot{x} = 4x - t^2x, \quad x(0) = 0.$

в) $\dot{x} = t - x, \quad x(0) = 1.$ г) $2t\dot{x} = x - x^3, \quad x(1) = 0.$

В задачах **882—888** начертить на плоскости x, y траектории данных систем вблизи точки $(0, 0)$ и по чертежу выяснить, устойчиво ли нулевое решение.

882. $\dot{x} = -x,\ \dot{y} = -2y.$ **883.** $\dot{x} = x,\ \dot{y} = 2y.$

884. $\dot{x} = -x,\ \dot{y} = y.$ **885.** $\dot{x} = -y,\ \dot{y} = 2x^3.$

886. $\dot{x} = y,\ \dot{y} = -\sin x.$ **887.** $\dot{x} = y,\ \dot{y} = x^3(1+y^2).$

888. $\dot{x} = -y\cos x,\ \dot{y} = \sin x.$

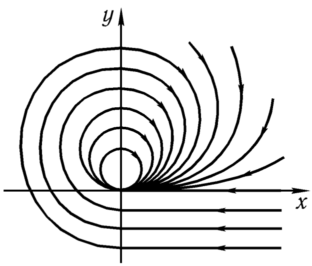

Рис. 5

889. Траектории системы уравнений $\frac{dx}{dt} = P(x, y)$, $\frac{dy}{dt} = Q(x, y)$, где функции P, P'_x, P'_y, Q, Q'_x, Q'_y непрерывны, изображены на фазовой плоскости (рис. 5). Что можно сказать о поведении решений при $t \to +\infty$? Является ли нулевое решение асимптотически устойчивым? Является ли оно устойчивым по Ляпунову?

В задачах **890—892** выяснить, является ли устойчивым нулевое решение системы, если известно, что общее решение этой системы имеет указанный вид.

890. $x = C_1\cos^2 t - C_2 e^{-t}; \quad y = C_1t^4 e^{-t} + 2C_2.$

891. $x = \dfrac{C_1 - C_2t}{1+t^2},\ y = (C_1t^3 + C_2)e^{-t}.$

892. $x = (C_1 - C_2t)e^{-t},\ y = \dfrac{C_1\sqrt[3]{t}}{\ln(t^2+2)} + C_2.$

893. Доказать, что для устойчивости по Ляпунову нулевого решения уравнения $\frac{dx}{dt} = a(t)x$ (где функция $a(t)$ непрерывна) необходимо и достаточно, чтобы

$$\varlimsup_{t\to+\infty}\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s < +\infty.$$

894. Доказать, что если какое-нибудь одно решение линейной системы дифференциальных уравнений устойчиво по Ляпунову, то устойчивы все решения этой системы.

895. Доказать, что если каждое решение линейной однородной системы остается ограниченным при $t \to +\infty$, то нулевое решение устойчиво по Ляпунову.

896. Доказать, что если каждое решение линейной однородной системы стремится к нулю при $t \to +\infty$, то нулевое решение асимптотически устойчиво.

897. Доказать, что если линейная однородная система имеет хотя бы одно неограниченное при $t \to +\infty$ решение, то нулевое решение неустойчиво.

898. Устойчиво ли нулевое решение системы $\dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2$, $\dot{x}_2 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2$, если известно, что $a_{11}(t) + a_{22}(t) \to b > 0$ при $t \to +\infty$?

В задачах **899—906** с помощью теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению исследовать на устойчивость нулевое решение

899. $\begin{cases} \dot{x} = 2xy - x + y, \\ \dot{y} = 5x^4 + y^3 + 2x - 3y. \end{cases}$

900. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 2x, \\ \dot{y} = 3x^2 - x + 3y. \end{cases}$

901. $\begin{cases} \dot{x} = \mathrm{e}^{x+2y} - \cos 3x, \\ \dot{y} = \sqrt{4+8x} - 2\,\mathrm{e}^{y}. \end{cases}$

902. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(4y + \mathrm{e}^{-3x}), \\ \dot{y} = 2y - 1 + \sqrt[3]{1-6x}. \end{cases}$

903. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(3\,\mathrm{e}^{y} - 2\cos x), \\ \dot{y} = 2\,\mathrm{e}^{x} - \sqrt[3]{8+12y}. \end{cases}$

904. $\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{tg}(y - x), \\ \dot{y} = 2^y - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right). \end{cases}$

905. $\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{tg}(z - y) - 2x, \\ \dot{y} = \sqrt{9 + 12x} - 3\,\mathrm{e}^y, \\ \dot{z} = -3y. \end{cases}$

906. $\begin{cases} \dot{x} = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-3z}, \\ \dot{y} = 4z - 3\sin(x + y), \\ \dot{z} = \ln(1 + z - 3x). \end{cases}$

В задачах **907—912** исследовать, при каких значениях параметров a и b асимптотически устойчиво нулевое решение.

907. $\begin{cases} \dot{x} = ax - 2y + x^2, \\ \dot{y} = x + y + xy. \end{cases}$ **908.** $\begin{cases} \dot{x} = ax + y + x^2, \\ \dot{y} = x + ay + y^2. \end{cases}$

909. $\begin{cases} \dot{x} = x + ay + y^2, \\ \dot{y} = bx - 3y - x^2. \end{cases}$ **910.** $\begin{cases} \dot{x} = y + \sin x, \\ \dot{y} = ax + by. \end{cases}$

911. $\begin{cases} \dot{x} = 2\,\mathrm{e}^{-x} - \sqrt{4 + ay}, \\ \dot{y} = \ln(1 + x + ay). \end{cases}$ **912.** $\begin{cases} \dot{x} = \ln(\mathrm{e} + ax) - \mathrm{e}^y, \\ \dot{y} = bx + \operatorname{tg} y. \end{cases}$

913. Исследовать, устойчиво ли решение $x = -t^2$, $y = t$ системы

$$\dot{x} = y^2 - 2ty - 2y - x, \quad \dot{y} = 2x + 2t^2 + \mathrm{e}^{2t - 2y}.$$

914. Исследовать, устойчиво ли решение $x = \cos t$, $y = 2\sin t$ системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln\left(x + 2\sin^2\dfrac{t}{2}\right) - \dfrac{y}{2}, \\ \dot{y} = (4 - x^2)\cos t - 2x\sin^2 t - \cos^3 t. \end{cases}$$

В задачах **915—922** для данных систем найти все положения равновесия и исследовать их на устойчивость.

915. $\begin{cases} \dot{x} = y - x^2 - x, \\ \dot{y} = 3x - x^2 - y. \end{cases}$ **916.** $\begin{cases} \dot{x} = (x - 1)(y - 1), \\ \dot{y} = xy - 2. \end{cases}$

917. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \sin(x+y). \end{cases}$

918. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(-x+y^2), \\ \dot{y} = x-y-1. \end{cases}$

919. $\begin{cases} \dot{x} = 3-\sqrt{4+x^2+y}, \\ \dot{y} = \ln(x^2-3). \end{cases}$

920. $\begin{cases} \dot{x} = \mathrm{e}^y-\mathrm{e}^x, \\ \dot{y} = \sqrt{3x+y^2}-2. \end{cases}$

921. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(1+y+\sin x), \\ \dot{y} = 2+\sqrt[3]{3\sin x-8}. \end{cases}$

922. $\begin{cases} \dot{x} = -\sin y, \\ \dot{y} = 2x+\sqrt{1-3x-\sin y}. \end{cases}$

В задачах **923—931** исследовать устойчивость нулевого решения, построив функцию Ляпунова и применив теоремы Ляпунова или Четаева.

923. $\begin{cases} \dot{x} = x^3-y, \\ \dot{y} = x+y^3. \end{cases}$

924. $\begin{cases} \dot{x} = y-x+xy, \\ \dot{y} = x-y-x^2-y^3. \end{cases}$

925. $\begin{cases} \dot{x} = 2y^3-x^5, \\ \dot{y} = -x-y^3+y^5. \end{cases}$

926. $\begin{cases} \dot{x} = xy-x^3+y^3, \\ \dot{y} = x^2-y^3. \end{cases}$

927. $\begin{cases} \dot{x} = y-3x-x^3, \\ \dot{y} = 6x-2y. \end{cases}$

928. $\begin{cases} \dot{x} = 2y-x-y^3, \\ \dot{y} = x-2y. \end{cases}$

929. $\begin{cases} \dot{x} = -x-xy, \\ \dot{y} = y^3-x^3. \end{cases}$

930. $\begin{cases} \dot{x} = x-y-xy^2, \\ \dot{y} = 2x-y-y^3. \end{cases}$

931*. $\begin{cases} \dot{x} = -f_1(x)-f_2(y), \\ \dot{y} = f_3(x)-f_4(y). \end{cases}$

где $\operatorname{sgn} f_i(z) = \operatorname{sgn} z,\ i = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$

В задачах **932—948** исследовать устойчивость нулевого решения, пользуясь известными условиями отрицательности вещественных частей всех корней многочлена, например, условиями Рауса—Гурвица или критерием Михайлова.

932. $y''' + y'' + y' + 2y = 0.$

933. $y''' + 2y'' + 2y' + 3y = 0.$

934. $y^{\mathrm{IV}} + 2y''' + 4y'' + 3y' + 2y = 0.$

935. $y^{\mathrm{IV}} + 2y''' + 3y'' + 7y' + 2y = 0.$

936. $y^{\mathrm{IV}} + 2y''' + 6y'' + 5y' + 6y = 0.$

937. $y^{\mathrm{IV}} + 8y''' + 14y'' + 36y' + 45y = 0.$

938. $y^{\mathrm{IV}} + 13y''' + 16y'' + 55y' + 76y = 0.$

939. $y^{\mathrm{IV}} + 3y''' + 26y'' + 74y' + 85y = 0.$

940. $y^{\mathrm{IV}} + 3{,}1y''' + 5{,}2y'' + 9{,}8y' + 5{,}8y = 0.$

941. $y^{\mathrm{V}} + 2y^{\mathrm{IV}} + 4y''' + 6y'' + 5y' + 4y = 0.$

942. $y^{\mathrm{V}} + 2y^{\mathrm{IV}} + 5y''' + 6y'' + 5y' + 2y = 0.$

943. $y^{\mathrm{V}} + 3y^{\mathrm{IV}} + 6y''' + 7y'' + 4y' + 4y = 0.$

944. $y^{\mathrm{V}} + 4y^{\mathrm{IV}} + 9y''' + 16y'' + 19y' + 13y = 0.$

945. $y^{\mathrm{V}} + 4y^{\mathrm{IV}} + 16y''' + 25y'' + 13y' + 9y = 0.$

946. $y^{\mathrm{V}} + 3y^{\mathrm{IV}} + 10y''' + 22y'' + 23y' + 12y = 0.$

947. $y^{\mathrm{V}} + 5y^{\mathrm{IV}} + 15y''' + 48y'' + 44y' + 74y = 0.$

948. $y^{\mathrm{V}} + 2y^{\mathrm{IV}} + 14y''' + 36y'' + 23y' + 68y = 0.$

В задачах **949—958** исследовать, при каких значениях параметров a и b нулевое решение асимптотически устойчиво.

949. $y''' + ay'' + by' + 2y = 0.$

950. $y''' + 3y'' + ay' + by = 0.$

951. $y^{\mathrm{IV}} + 2y''' + 3y'' + 2y' + ay = 0.$

952. $y^{\mathrm{IV}} + ay''' + y'' + 2y' + y = 0.$

953. $ay^{\mathrm{IV}} + y''' + y'' + y' + by = 0.$

954. $y^{\mathrm{IV}} + y''' + ay'' + y' + by = 0.$

955. $y^{\mathrm{IV}} + ay''' + 4y'' + 2y' + by = 0.$

956. $y^{\mathrm{IV}} + 2y''' + ay'' + by' + y = 0.$

957. $y^{\mathrm{IV}} + ay''' + 4y'' + by' + y = 0.$

958. $y^{\mathrm{IV}} + 2y''' + 4y'' + ay' + by = 0.$

Для исследования устойчивости уравнений с периодическими коэффициентами в задачах **959** и **960** надо найти матрицу монодромии и вычислить мультипликаторы, см. [5], гл. III, § 15, § 16.

959. Исследовать на устойчивость нулевое решение уравнения $\ddot{x} + p(t)x = 0$, $p(t) = a^2$ $(0 < t < \pi)$, $p(t) = b^2$ $(\pi < t < 2\pi)$, $p(t+2\pi) \equiv p(t)$, при следующих значениях параметров:

а) $a = 0{,}5$, $b = 0$; б) $a = 0{,}5$, $b = 1$;

в) $a = 0{,}5$, $b = 1{,}5$; г) $a = 0{,}75$, $b = 0$;

д) $a = 1$, $b = 0$; е) $a = 1$, $b = 1{,}5$.

960. Исследовать, при каких a и b устойчиво нулевое решение системы с периодическими коэффициентами

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = A(t)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}, \quad A(t+2) \equiv A(t),$$

$$A(t) = \begin{pmatrix}0 & a\\ 0 & 0\end{pmatrix} \text{ при } 0 < t < 1, \quad A(t) = \begin{pmatrix}0 & 0\\ b & 0\end{pmatrix} \text{ при } 1 < t < 2.$$

§ 16. ОСОБЫЕ ТОЧКИ

1. Особой точкой системы

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \tag{1}$$

или уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}, \tag{2}$$

где функции P и Q непрерывно дифференцируемы, называется такая точка, в которой $P(x, y) = 0$, $Q(x, y) = 0$.

2. Для исследования особой точки системы

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy \tag{3}$$

или уравнения

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{cx + dy}{ax + by} \tag{4}$$

надо найти корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Если корни вещественные, различные и одного знака, то особая точка — узел (рис. 6,*а*), если разных знаков — седло (рис. 6,*б*), если корни комплексные с вещественной частью, отличной от нуля, то особая точка — фокус (рис. 6,*в*), если чисто мнимые, — центр (рис. 6,*г*); если корни равные и ненулевые (т. е. $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$), то особая точка может быть вырожденным узлом (рис. 6,*д*) или дикритическим узлом (рис. 6,*е*), причем дикритический узел имеет место только в случае системы $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax$; $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ay$ $\left(\text{или уравнения } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x}\right)$, а во всех остальных случаях при $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ особая точка является вырожденным узлом.

Если же один или оба корня уравнения (5) равны нулю, то $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$ и, следовательно, дробь в правой части уравнения (4) сокращается. Уравнение принимает вид $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = k$, и решения на плоскости x, y изображаются параллельными прямыми.

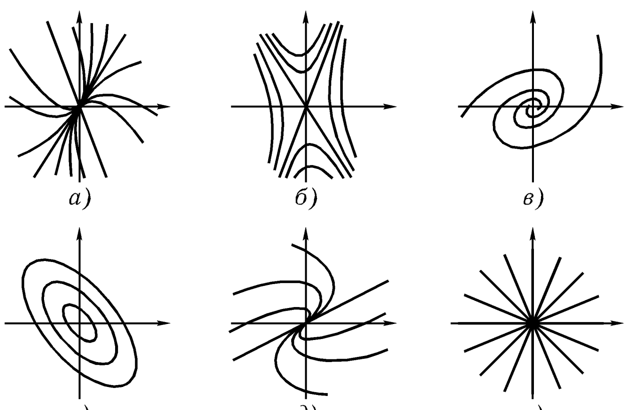

Рис. 6

Чтобы начертить траектории (кривые, изображающие решения на плоскости x, y) в случае узла, седла и вырожденного узла, надо прежде всего найти те решения, которые изображаются прямыми, проходящими через особую точку. Эти прямые всегда направлены вдоль собственных векторов матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, составленной из коэффициентов данной системы (3). В случае узла кривые касаются той прямой, которая направлена вдоль собственного вектора, соответствующего меньшему по абсолютной величине значению λ.

В случае особой точки типа фокус надо определить направление закручивания траекторий. Для этого надо, во-первых, исследовать устойчивость этой точки по знаку $\mathrm{Re}\,\lambda$ и, во-вторых, определить, в каком направлении вокруг особой точки происходит движение по траекториям. Для этого достаточно построить в какой-нибудь точке $(x,\, y)$ вектор скорости $\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)$, определяемый по формулам (3).

Аналогично исследуется направление движения в случае вырожденного узла.

Пример 1. Исследовать особую точку $x = 0$, $y = 0$ системы

$$\dot{x} = 2x, \quad \dot{y} = x + y. \tag{6}$$

Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (2-\lambda)(1-\lambda) = 0, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2.$$

Корни вещественные, различные и одного знака. Следовательно, особая точка — узел (того же типа, что на рис. 6,*а*). Для $\lambda_1 = 1$ находим собственный вектор (0, 1), а для $\lambda_2 = 2$ — вектор (1, 1). На плоскости x, y строим прямые, направленные вдоль этих векторов, а затем кривые, касающиеся в начале координат первой из этих прямых, так как $|\lambda_1| < |\lambda_2|$, см. рис. 7.

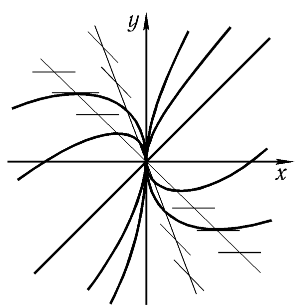

Рис. 7

Другой способ построения интегральных кривых. Разделив одно из уравнений (6) на другое, получим уравнение вида (4)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x+y}{2x} \quad \left(\text{или } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{2x}{x+y}\right).$$

Прямые, проходящие через особую точку, ищем в виде $y = kx$ (а также $x = 0$). Подставляя в написанные уравнения, находим $k = 1$. Значит, $y = x$ и $x = 0$ — искомые прямые. Остальные интегральные кривые строятся с помощью изоклин (рис. 7).

Пример 2. Исследовать особую точку уравнения

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{4x - 3y}{x - 2y}. \tag{7}$$

Находим корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0; \quad \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0; \quad \lambda = -1 \pm 2i.$$

Особая точка — фокус. Переходим от уравнения (7) к системе

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x - 2y, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 4x - 3y. \tag{8}$$

Строим в точке (1, 0) вектор скорости $\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)$. В силу (8) он равен $(x - 2y,\ 4x - 3y)$. В точке $x = 1$, $y = 0$ получаем вектор (1, 4) (рис. 8,*а*). Следовательно, возрастанию t соответствует движение по траекториям против часовой стрелки. Так как вещественная часть корней λ равна $-1 < 0$, то особая точка асимптотически устойчива, следовательно, при возрастании t решения неограниченно приближаются к особой точке. Итак, при движении против часовой стрелки интегральные кривые приближаются к началу координат (рис. 8,*б*).

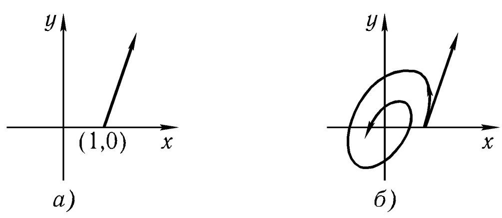

Рис. 8

3. Для исследования особой точки более общей системы (1) или уравнения (2) надо перенести начало координат в исследуемую особую точку и разложить функции P и Q в окрестности этой точки по формуле Тейлора, ограничиваясь членами первого порядка. Тогда система (1) примет вид

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = ax_1 + by_1 + \varphi(x_1, y_1), \quad \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} = cx_1 + dy_1 + \psi(x_1, y_1), \tag{9}$$