Б. П. Демидович

СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Б.П.ДЕМИДОВИЧ

СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

13-е издание, исправленное

Рекомендовано Государственным комитетом Российской Федерации по высшему образованию в качестве учебного пособия для студентов математических и физических специальностей высших учебных заведений

Издательство
Московского университета
Издательство ЧеРо
1997

ББК 22.161
Д30
УДК 517(075.8)

Рецензент: кафедра высшей математики МФТИ
Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Московского университета

Демидович Б.П.

Д30 **Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учеб. пособие. — 13-е изд., испр. — М.: Изд-во Моск. ун-та, ЧеРо, 1997. — 624 с.**

ISBN 5-211-03645-X

В сборник (11-е изд. — 1995 г.) включено свыше 4000 задач и упражнений по важнейшим разделам математического анализа: введение в анализ; дифференциальное исчисление фукнций одной переменной; неопределенный и определенный интегралы; ряды; дифференциальное исчисление функций нескольких переменных; интегралы, зависящие от параметра; кратные и криволинейные интегралы. Почти ко всем задачам даны ответы. В приложении помещены таблицы.

Для студентов физических и механико-математических специальностей высших учебных заведений.

Учебное издание

Демидович Борис Павлович

СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Зав. редакцией *Л.А.Николова.*
Художественный редактор *Л.В.Мухина.*

Н/К

ЛР № 040414 от 18.04.97.

Подписано в печать 3.06.96. Формат 84x108/32. Бумага офсетная. Офсетная печать. Усл. печ. л. 32,2. Тираж 5000 экз. Изд. № 6151. Заказ № 2383

Ордена "Знак Почета" издательство Московского университета 103009, Москва, Большая Никитская ул., 5/7

Издательство "ЧеРо" Москва, Большой Власьевский пер., д. 11, к. 208 т. 241 3390, 938 2346

Великолукская городская типография Упринформпечати Псковской области, 182100, г. Великие Луки, ул. Полиграфистов, 78/12

ISBN 5-211-03645-X

© Демидович Б.П.,1996

БОРИС ПАВЛОВИЧ ДЕМИДОВИЧ
(1906—1977)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ФУНКЦИИ ОДНОЙ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Отдел I. **Введение в анализ** 7

§ 1. Вещественные числа 7
§ 2. Теория последовательностей 12
§ 3. Понятие функции 26
§ 4. Графическое изображение функции 35
§ 5. Предел функции 47
§ 6. *O*-символика 72
§ 7. Непрерывность функции 77
§ 8. Обратная функция. Функции, заданные параметрически 87
§ 9. Равномерная непрерывность функции . . . 90
§ 10. Функциональные уравнения 94

Отдел II. **Дифференциальное исчисление функций одной переменной** 96

§ 1. Производная явной функции 96
§ 2. Производная обратной функции. Производная функции, заданной параметрически. Производная функции, заданной в неявном виде 114
§ 3. Геометрический смысл производной 117
§ 4. Дифференциал функции 120
§ 5. Производные и дифференциалы высших порядков 124
§ 6. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши 134
§ 7. Возрастание и убывание функции. Неравенства 140
§ 8. Направление вогнутости. Точки перегиба . . 144
§ 9. Раскрытие неопределенностей 147
§ 10. Формула Тейлора 151
§ 11. Экстремум функции. Наибольшее и наименьшее значения функции 156
§ 12. Построение графиков функций по характерным точкам 161
§ 13. Задачи на максимум и минимум функций . . . 164
§ 14. Касание кривых. Круг кривизны. Эволюта 167
§ 15. Приближенное решение уравнений 170

Отдел III. **Неопределенный интеграл** 172
§ 1. Простейшие неопределенные интегралы . . . 172
§ 2. Интегрирование рациональных функций . . . 184
§ 3. Интегрирование некоторых иррациональных функций 187
§ 4. Интегрирование тригонометрических функций 192
§ 5. Интегрирование различных трансцендентных функций 198
§ 6. Разные примеры на интегрирование функций 201

Отдел IV. **Определенный интеграл** 204
§ 1. Определенный интеграл как предел суммы . . 204
§ 2. Вычисление определенных интегралов с помощью неопределенных 208
§ 3. Теоремы о среднем 219
§ 4. Несобственные интегралы 223
§ 5. Вычисление площадей 230
§ 6. Вычисление длин дуг 234
§ 7. Вычисление объемов 236
§ 8. Вычисление площадей поверхностей вращения 239
§ 9. Вычисление моментов. Координаты центра тяжести 240
§ 10. Задачи из механики и физики 242
§ 11. Приближенное вычисление определенных интегралов 244

Отдел V. **Ряды** 246
§ 1. Числовые ряды. Признаки сходимости знакопостоянных рядов 246
§ 2. Признаки сходимости знакопеременных рядов 259
§ 3. Действия над рядами 267
§ 4. Функциональные ряды 268
§ 5. Степенные ряды 281
§ 6. Ряды Фурье 294
§ 7. Суммирование рядов 300
§ 8. Нахождение определенных интегралов с помощью рядов 305
§ 9. Бесконечные произведения 307
§ 10. Формула Стирлинга 314
§ 11. Приближение непрерывных функций многочленами 315

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Отдел VI. **Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных** 318
§ 1. Предел функции. Непрерывность 318
§ 2. Частные производные. Дифференциал функции 324
§ 3. Дифференцирование неявных функций 338
§ 4. Замена переменных 348
§ 5. Геометрические приложения 361
§ 6. Формула Тейлора 367
§ 7. Экстремум функции нескольких переменных 370

ОГЛАВЛЕНИЕ

Отдел VII. Интегралы, зависящие от параметра . . 379

§ 1. Собственные интегралы, зависящие от параметра 379
§ 2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость интегралов 385
§ 3. Дифференцирование и интегрирование несобственных интегралов под знаком интеграла . . 392
§ 4. Эйлеровы интегралы 400
§ 5. Интегральная формула Фурье 404

Отдел VIII. Кратные и криволинейные интегралы . 406

§ 1. Двойные интегралы 406
§ 2. Вычисление площадей 414
§ 3. Вычисление объемов 416
§ 4. Вычисление площадей поверхностей 419
§ 5. Приложения двойных интегралов к механике 421
§ 6. Тройные интегралы 424
§ 7. Вычисление объемов с помощью тройных интегралов 428
§ 8. Приложения тройных интегралов к механике 431
§ 9. Несобственные двойные и тройные интегралы 435
§ 10. Многократные интегралы 439
§ 11. Криволинейные интегралы 443
§ 12. Формула Грина 452
§ 13. Физические приложения криволинейных интегралов 456
§ 14. Поверхностные интегралы 460
§ 15. Формула Стокса 464
§ 16. Формула Остроградского 466
§ 17. Элементы теории поля 471

Ответы 480

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ФУНКЦИИ ОДНОЙ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

ОТДЕЛ I

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

§ 1. Вещественные числа

1°. Метод математической индукции. Чтобы доказать, что некоторая теорема верна для всякого натурального числа n, достаточно доказать: 1) что эта теорема справедлива для $n = 1$ и 2) что если эта теорема справедлива для какого-нибудь натурального числа n, то она справедлива также и для следующего натурального числа $n + 1$.

2°. Сечение. Разбиение рациональных чисел на два класса A и B называется *сечением*, если выполнены следующие условия: 1) оба класса не пусты; 2) каждое рациональное число попадает в один и только в один класс и 3) любое число, принадлежащее классу A (*нижний класс*), меньше произвольного числа, принадлежащего классу B (*верхний класс*). Сечение A/B определяет: а) рациональное число, если или нижний класс A имеет наибольшее число или же верхний класс B имеет наименьшее число, и б) иррациональное число, если класс A не имеет наибольшего числа, а класс B — наименьшего числа. Числа рациональные и иррациональные носят название *вещественных* или *действительных* *).

3°. Абсолютная величина. Если x — вещественное число, то *абсолютной величиной* $|x|$ называется неотрицательное число, определяемое следующими условиями:

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{если } x < 0; \\ x, & \text{если } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Для любых вещественных чисел x и y имеет место неравенство

$$|x| - |y| \leqslant |x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

4°. Верхняя и нижняя грани. Пусть $X = \{x\}$ — ограниченное множество вещественных чисел. Число

$$m = \inf \{x\}$$

называется *нижней гранью* множества X, если:

---

*) В дальнейшем под словом число мы будем понимать вещественное число, если не оговорено противное.

1) каждое $x \in X$ *) удовлетворяет неравенству

$$x \geqslant m;$$

2) каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует $x' \in X$ такое, что

$$x' < m + \varepsilon.$$

Аналогично число

$$M = \sup\{x\}$$

называется *верхней гранью* множества X, если:

1) каждое $x \in X$ удовлетворяет неравенству

$$x \leqslant M,$$

2) для любого $\varepsilon > 0$ существует $x'' \in X$ такое, что

$$x'' > M - \varepsilon.$$

Если множество X не ограничено снизу, то принято говорить, что

$$\inf\{x\} = -\infty;$$

если же множество X не ограничено сверху, то полагают

$$\sup\{x\} = +\infty.$$

5°. Абсолютная и относительная погрешности. Если a ($a \neq 0$) есть точное значение измеряемой величины, а x — приближенное значение этой величины, то

$$\Delta = |x - a|$$

называется *абсолютной погрешностью*, а

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|}$$

— *относительной погрешностью* измеряемой величины.

Говорят, что число x имеет *n верных знаков*, если абсолютная погрешность этого числа не превышает половины единицы разряда, выражаемого n-й значащей цифрой.

Применяя метод математической индукции, доказать, что для любого натурального числа n справедливы следующие равенства:

1. $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

---

*) Запись $x \in X$ означает, что число x принадлежит множеству X.

2. $1^2+2^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. $1^3+2^3+\ldots+n^3=(1+2+\ldots+n)^2$.

4. $1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}=2^n-1$.

5. Пусть $a^{[n]}=a(a-h)\ldots[a-(n-1)h]$ и $a^{[0]}=1$.

Доказать, что $(a+b)^{[n]}=\sum\limits_{m=0}^{n}C_n^m a^{[n-m]}b^{[m]}$, где C_n^m — число сочетаний из n элементов по m. Вывести отсюда формулу *бинома Ньютона*.

6. Доказать *неравенство Бернулли*:

$$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\ldots+x_n,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — числа одного и того же знака, бо́льшие — 1.

7. Доказать, что если $x>-1$, то справедливо неравенство

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx \quad (n>1),$$

причем знак равенства имеет место лишь при $x=0$.

8. Доказать неравенство

$$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \text{ при } n>1.$$

Указание. Использовать неравенство

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>2 \quad (n=1, 2, \ldots).$$

9. Доказать неравенство

$$2!\cdot 4!\ldots(2n)!>[(n+1)!]^n \text{ при } n>1.$$

10. Доказать неравенство

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

10.1. Доказать неравенства:

а) $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$ $(n\geqslant 2)$;

б) $n^{n+1}>(n+1)^n$ $(n\geqslant 3)$:

в) $\left|\sin\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sin x_k \quad (0 \leqslant x_k \leqslant \pi;$

$k = 1, 2, \ldots, n);$

г) $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$.

11. Пусть c — положительное число, не являющееся точным квадратом целого числа, и A/B — сечение, определяющее вещественное число $\sqrt{c}$, где в класс B входят все положительные рациональные числа b такие, что $b^2 > c$, а в класс A — все остальные рациональные числа. Доказать, что в классе A нет наибольшего числа, а в классе B нет наименьшего числа.

12. Сечение A/B, определяющее число $\sqrt[3]{2}$, строится следующим образом: класс A содержит все рациональные числа a такие, что $a^3 < 2$; класс B содержит все остальные рациональные числа. Доказать, что в классе A нет наибольшего числа, а в классе B — наименьшего.

13. Построив соответствующие сечения, доказать равенства:

а) $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{18}$; б) $\sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}$.

14. Построить сечение, определяющее число $2^{\sqrt{2}}$.

15. Доказать, что всякое непустое числовое множество, ограниченное снизу, имеет нижнюю грань, а всякое непустое числовое множество, ограниченное сверху, имеет верхнюю грань.

16. Показать, что множество всех правильных рациональных дробей m/n, где m и n — натуральные числа и $0 < m < n$, не имеет наименьшего и наибольшего элементов. Найти нижнюю и верхнюю грани этого множества.

17. Определить нижнюю и верхнюю грани множества рациональных чисел r, удовлетворяющих неравенству $r^2 < 2$.

18. Пусть $\{-x\}$ — множество чисел, противоположных числам $x \in \{x\}$. Доказать, что

а) $\inf\{-x\} = -\sup\{x\}$; б) $\sup\{-x\} = -\inf\{x\}$.

19. Пусть $\{x + y\}$ есть множество всех сумм $x + y$, где $x \in \{x\}$ и $y \in \{y\}$.

Доказать равенства:

а) $\inf\{x+y\} = \inf\{x\} + \inf\{y\}$;

б) $\sup\{x+y\} = \sup\{x\} + \sup\{y\}$.

20. Пусть $\{xy\}$ есть множество всех произведений xy, где $x \in \{x\}$ и $y \in \{y\}$, причем $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$.

Доказать равенства:

а) $\inf\{xy\} = \inf\{x\} \cdot \inf\{y\}$;

б) $\sup\{xy\} = \sup\{x\} \cdot \sup\{y\}$.

21. Доказать неравенства:

а) $|x-y| \geqslant ||x| - |y||$;

б) $|x + x_1 + \ldots + x_n| \geqslant$

$$\geqslant |x| - (|x_1| + \ldots + |x_n|)$$

Решить неравенства:

22. $|x+1|<0{,}01$. **23.** $|x-2| \geqslant 10$.

24. $|x|>|x+1|$. **25.** $|2x-1|<|x-1|$.

26. $|x+2|+|x-2| \leqslant 12$. **27.** $|x+2|-|x|>1$.

28. $||x+1|-|x-1||<1$. **29.** $|x(1-x)|<0{,}05$.

30. Доказать тождество

$$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2 = x^2.$$

31. При измерении длины в 10 см абсолютная погрешность составляла 0,5 мм; при измерении расстояния в 500 км абсолютная погрешность была равна 200 м. Какое измерение точнее?

32. Определить, сколько верных знаков содержит число $x = 2{,}3752$, если относительная погрешность этого числа составляет 1 %?

33. Число $x = 12{,}125$ содержит 3 верных знака. Определить, какова относительная погрешность этого числа.

34. Стороны прямоугольника равны:

$x = 2{,}50$ см $\pm$ 0,01 см, $y = 4{,}00$ см $\pm$ 0,02 см.

В каких границах заключается площадь S этого прямоугольника? Каковы абсолютная погрешность Δ и относительная погрешность δ площади прямоугольника, если за стороны его принять средние значения?

35. Вес тела $p = 12{,}59$ гс $\pm$ 0,01 гс, а его объем $v = 3{,}2$ см^3 $\pm$ 0,2 см^3. Определить удельный вес тела и оценить абсолютную и относительную погрешности удельного веса, если за вес тела и объем его принять средние значения.

36. Радиус круга $r = 7{,}2$ м $\pm$ 0,1 м. С какой минимальной относительной погрешностью может быть определена площадь круга, если принять $\pi = 3{,}14$?

37. Измерения прямоугольного параллелепипеда суть:

$$x = 24{,}7 \text{ м} \pm 0{,}2 \text{ м},$$

$$y = 6{,}5 \text{ м} \pm 0{,}1 \text{ м},$$

$$z = 1{,}2 \text{ м} \pm 0{,}1 \text{ м}.$$

В каких границах заключается объем v этого параллелепипеда? С какими абсолютной и относительной погрешностями может быть определен объем этого параллелепипеда, если за его измерения принять средние значения?

38. С какой абсолютной погрешностью следует измерить сторону квадрата x, где $2 \text{ м} < x < 3$ м, чтобы иметь возможность определить площадь этого квадрата с точностью до 0,001 м^2?

39. С какими абсолютными погрешностями Δ достаточно измерить стороны x и y прямоугольника, чтобы площадь его можно было вычислить с точностью до 0,01 м^2, если ориентировочно стороны прямоугольника не превышают 10 м каждая?

40. Пусть $\delta(x)$ и $\delta(y)$ — относительные погрешности чисел x и y, $\delta(xy)$ — относительная погрешность числа xy.

Доказать, что $\delta(xy) \leqslant \delta(x) + \delta(y) + \delta(x)\delta(y)$.

§ 2. Теория последовательностей

1°. Понятие предела последовательности. Говорят, что последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, или иначе x_n ($n = 1, 2, \ldots$), имеет своим пределом число a (короче, *сходится* к a), т. е.

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a,$$

если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N = N(\varepsilon)$ такое, что

$$|x_n - a| < \varepsilon \text{ при } n > N.$$

В частности, x_n называется *бесконечно малой*, если

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Последовательность, не имеющая предела, называется *расходящейся*.

2°. Признаки существования предела.

1) Если

$$y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$$

и

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = c,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c.$$

2) Монотонная и ограниченная последовательность имеет предел.

3) Критерий Коши. Для существования предела последовательности x_n необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало число $N = N(\varepsilon)$ такое, что

$$|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon,$$

если только $n > N$ и $p > 0$.

3°. Основные теоремы о пределах последовательностей. Предполагая, что существуют

$$\lim_{n\to\infty} x_n \text{ и } \lim_{n\to\infty} y_n,$$

имеем:

1) если $x_n \leqslant y_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$, если $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$.

4°. Число e. Последовательность

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

имеет конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}718\,281\,8284\ldots$$

5°. Бесконечный предел. Символическая запись

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

обозначает, что, каково бы ни было $E > 0$, существует число $N = N(E)$ такое, что

$$|x_n| > E \text{ при } n > N.$$

6°. Предельная точка. Число ξ (или символ ∞) называется *частичным пределом* (*предельной точкой*) данной последовательности x_n ($n = 1, 2, \ldots$), если существует ее подпоследовательность

$$x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots, x_{p_n}, \ldots \qquad (1 \leqslant p_1 < p_2 < \ldots)$$

такая, что

$$\lim_{n\to\infty} x_{p_n} = \xi.$$

Всякая ограниченная последовательность имеет по меньшей мере один конечный частичный предел (*принцип Больцано — Вейерштрасса*). Если этот частичный предел единственный, то он же является конечным пределом данной последовательности.

Наименьший частичный предел (конечный или бесконечный) последовательности x_n

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$$

называется *нижним пределом*, а наибольший частичный предел ее

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$$

называется *верхним пределом* этой последовательности.

Равенство

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$$

является необходимым и достаточным условием существования предела (конечного или бесконечного) последовательности x_n.

41. Пусть

$$x_n = \frac{n}{n+1} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1,$$

определив для каждого $\varepsilon > 0$ число $N = N(\varepsilon)$ такое, что

$$|x_n - 1| < \varepsilon, \text{ если } n > N.$$

Заполнить следующую таблицу:

ε	0,1	0,01	0,001	0,0001	. . .
N					

42. Доказать, что x_n ($n = 1, 2, \ldots$) есть *бесконечно малая* (т. е. имеет предел, равный 0), указав для всякого $\varepsilon > 0$ число $N = N(\varepsilon)$ такое, что $|x_n| < \varepsilon$ при $n > N$, если

а) $x_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$; б) $x_n = \dfrac{2n}{n^3+1}$;

в) $x_n = \dfrac{1}{n!}$; г) $x_n = (-1)^n \cdot 0{,}999^n$.

Для каждого из этих случаев заполнить следующую таблицу:

ε	0,1	0,001	0,0001	. . .
N				

43. Доказать, что последовательности

а) $x_n = (-1)^n n$, б) $x_n = 2^{\sqrt{n}}$, в) $x_n = \lg(\lg n)$ $(n \geqslant 2)$

имеют бесконечный предел при $n \to \infty$ (т. е. являются *бесконечно большими*), определив для всякого $E > 0$ число $N = N(E)$ такое, что $|x_n| > E$ при $n > N$.

Для каждого из этих случаев заполнить следующую таблицу:

E	10	100	1 000	10 000	. . .
N					

44. Показать, что $x_n = n^{(-1)^n}$ ($n = 1, 2, \ldots$) не ограничена, однако не является бесконечно большой при $n \to \infty$.

45. Сформулировать с помощью неравенств следующие утверждения:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Предполагая, что n пробегает натуральный ряд чисел, определить значения следующих выражений:

46. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10\,000n}{n^2+1}$. **47.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

48. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}$. **49.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$.

50. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+b^2+\ldots+b^n}$ $(|a|<1,\ |b|<1)$.

51. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\ldots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$.

52. $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n}-\ldots+\dfrac{(-1)^{n-1}n}{n}\right|$.

53. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{2^2}{n^3}+\ldots+\dfrac{(n-1)^2}{n^3}\right]$.

54. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{3^2}{n^3}+\ldots+\dfrac{(2n-1)^2}{n^3}\right]$.

55. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\ldots+\dfrac{2n-1}{2^n}\right)$.

56. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]$.

57. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\ \ldots\ \sqrt[2^n]{2}\right)$.

Доказать следующие равенства:

58. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n}=0$. **59.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!}=0$.

60. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n}=0$ $(a>1)$. **61.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!}=0$.

62. $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n=0$, если $|q|<1$.

63. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}=1$ $(a>0)$. **64.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_a n}{n}=0$ $(a>1)$.

65. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}=1$. **66.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$.

67. Какое выражение больше при достаточно больших n:

а) $100n + 200$ или $0{,}01n^2$?; б) 2^n или n^{1000}?;

в) 1000^n или $n!$?

68. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\right)=0.$$

Указание. См. пример 10.

69. Доказать, что последовательность

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

монотонно возрастает и ограничена сверху, а последовательность

$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

монотонно убывает и ограничена снизу. Отсюда вывести, что эти последовательности имеют общий предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e.$$

Указание. Составить отношения $\frac{x_{n+1}}{x_n}$, $\frac{y_n}{y_{n-1}}$ и воспользоваться неравенством примера 7.

70. Доказать, что

$$0<e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{3}{n} \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

При каких значениях показателя n выражение $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ будет отличаться от числа e меньше чем на 0,001?

71. Пусть $p_n/(n = 1,\ 2,\ \ldots)$ — произвольная последовательность чисел, стремящаяся к $+\infty$, и q_n $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$ — произвольная последовательность чисел, стремящаяся к $-\infty$ $(p_n,\ q_n \notin [-1,\ 0])$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n}=e.$$

72. Зная, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$, доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)=e.$$

Вывести отсюда формулу

$$e=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n!n}, \qquad (*)$$

где $0<\theta_n<1$, и вычислить число e с точностью до 10^{-5}.

73. Доказать, что число e иррационально.

74. Доказать неравенство

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n<n!<e\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

75. Доказать неравенства:

а) $$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n},$$

где n — любое натуральное число;

б) $1+\alpha<e^{\alpha}$,

где α — вещественное число, отличное от нуля.

76. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} n\,(a^{1/n}-1)=\ln a \quad (a>0)$,

где $\ln a$ есть логарифм числа a при основании $e=2{,}718\ldots$

Пользуясь теоремой о существовании предела монотонной и ограниченной последовательности, доказать сходимость следующих последовательностей:

77. $x_n=p_0+\frac{p_1}{10}+\ldots+\frac{p_n}{10^n} \quad (n=1,\ 2,\ \ldots)$,

где p_i $(i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ — целые неотрицательные числа, не превышающие 9, начиная с p_1.

78. $x_n=\frac{10}{1}\cdot\frac{11}{3}\ \ldots\ \frac{n+9}{2n-1}$.

79. $x_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ \ldots\ \left(1-\frac{1}{2^n}\right)$.

80. $x_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.

81. $x_1=\sqrt{2}$, $x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\ldots$, $x_n=$

$$=\sqrt{\underbrace{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}_{n\text{ корней}}}\ ,\ \ldots$$

Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость следующих последовательностей:

82. $x_n = a_0 + a_1 q + \ldots + a_n q^n$,
где $|a_k| < M$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ и $|q| < 1$.

83. $x_n = \dfrac{\sin 1}{2} + \dfrac{\sin 2}{2^2} + \ldots + \dfrac{\sin n}{2^n}$.

84. $x_n = \dfrac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \dfrac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \ldots + \dfrac{\cos n!}{n(n+1)}$.

85. $x_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2}$.

Указание. Воспользоваться неравенством

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

86. Говорят, что последовательность x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ имеет *ограниченное изменение*, если существует число C такое, что

$$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \ldots + |x_n - x_{n-1}| < C$$
$$(n = 2, 3, \ldots).$$

Доказать, что последовательность с ограниченным изменением сходится.

Построить пример сходящейся последовательности, не имеющей ограниченного изменения.

87. Сформулировать, что значит, что для данной последовательности не выполнен критерий Коши.

88. Пользуясь критерием Коши, доказать расходимость последовательности

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

89. Доказать, что если последовательность x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ сходится, то любая ее подпоследовательность x_{p_n} также сходится и имеет тот же самый предел:

$$\lim_{n\to\infty} x_{p_n} = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

90. Доказать, что монотонная последовательность будет сходящейся, если сходится некоторая ее подпоследовательность.

91. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|.$$

92. Если $x_n \to a$, то что можно сказать о пределе

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}?$$

93. Доказать, что сходящаяся числовая последовательность ограничена.

94. Доказать, что сходящаяся числовая последовательность достигает либо своей верхней грани, либо своей нижней грани, либо той и другой. Построить примеры последовательностей всех трех типов.

95. Доказать, что числовая последовательность x_n ($n = 1, 2, \ldots$), стремящаяся к $+\infty$, обязательно достигает своей нижней грани.

Найти наибольший член последовательности x_n ($n = 1, 2, \ldots$), если:

96. $x_n = \dfrac{n^3}{2^n}$. **97.** $x_n = \dfrac{\sqrt{n}}{100+n}$. **98.** $x_n = \dfrac{1000^n}{n!}$.

Найти наименьший член последовательности x_n ($n = 1, 2, \ldots$), если:

99. $x_n = n^2 - 9n - 100$. **100.** $x_n = n + \dfrac{100}{n}$.

Для последовательности x_n ($n = 1, 2, \ldots$) найти $\inf x_n$, $\sup x_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, если:

101. $x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$. **101.1.** $x_n = (-1)^{n-1}\left(2 + \dfrac{3}{n}\right)$.

102. $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$.

103. $x_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$.

104. $x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3\cdot(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

105. $x_n = \dfrac{n-1}{n+1}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$. **106.** $x_n = (-1)^n n$.

107. $x_n = -n[2+(-1)^n]$. **108.** $x_n = n^{(-1)^n}$.

109. $x_n = 1 + n\sin\dfrac{n\pi}{2}$. **110.** $x_n = \dfrac{1}{n - 10{,}2}$.

Найти $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ и $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$, если:

111. $x_n = \dfrac{n^2}{1+n}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$.

112. $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \cdot (-1)^n + \sin\dfrac{n\pi}{4}$.

113. $x_n = \dfrac{n}{n+1}\sin^2\dfrac{n\pi}{4}$.

114. $x_n = \sqrt[n]{1+2^{n\cdot(-1)^n}}$. 115. $x_n = \cos^n\dfrac{2n\pi}{3}$.

Найти частичные пределы следующих последовательностей:

116. $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{7}{8}, \ldots, \dfrac{1}{2^n}, \dfrac{2^n-1}{2^n}, \ldots$

117. $1, \dfrac{1}{2}, 1+\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, 1+\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, 1+\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \ldots$
$\ldots, \dfrac{1}{n}, 1+\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}, \ldots, \dfrac{1}{n-1}+\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n+1}, \ldots$

118. $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{2}{4}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}, \ldots$

119. $x_n = 3\cdot\left(1-\dfrac{1}{n}\right)+2(-1)^n$.

120. $x_n = \dfrac{1}{2}[(a+b)+(-1)^n(a-b)]$.

121. Построить пример числовой последовательности, имеющей в качестве своих частичных пределов данные числа

$$a_1, a_2, \ldots, a_p.$$

122. Построить пример числовой последовательности, для которой все члены данной числовой последовательности

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

являются ее частичными пределами. Какие еще частичные пределы обязательно имеет построенная последовательность?

123. Построить пример последовательности:

а) не имеющей конечных частичных пределов;

б) имеющей единственный конечный частичный предел, но не являющейся сходящейся;

в) имеющей бесконечное множество частичных пределов;

г) имеющей в качестве своего частичного предела каждое вещественное число.

124. Доказать, что последовательности x_n и $y_n = x_n\sqrt[n]{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ имеют одни и те же частичные пределы.

125. Доказать, что из ограниченной последовательности x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ всегда можно выделить сходящуюся подпоследовательность x_{p_n} $(n = 1, 2, \ldots)$.

126. Доказать, что если последовательность x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ не ограничена, то существует подпоследовательность x_{p_n} такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_{p_n} = \infty$.

127. Пусть последовательность x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ сходится, а последовательность y_n $(n = 1, 2, \ldots)$ расходится. Что можно утверждать о сходимости последовательностей:

а) $x_n + y_n$; б) $x_n y_n$?

Привести соответствующие примеры.

128. Пусть последовательности x_n и y_n $(n = 1, 2, \ldots)$ расходятся. Можно ли утверждать, что последовательности

а) $x_n + y_n$; б) $x_n y_n$

также расходятся? Привести соответствующие примеры.

129. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, и y_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — произвольная последовательность. Можно ли утверждать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$? Привести соответствующие примеры.

130. Пусть

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0.$$

Следует ли отсюда, что либо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, либо $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$?

Рассмотреть пример: $x_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$, $y_n = \dfrac{1-(-1)^n}{2}$ ($n = 1, 2, \ldots$).

131. Доказать, что

а) $$\varliminf_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} y_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} (x_n + y_n) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n$$

и

б) $$\varliminf_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} (x_n + y_n) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n.$$

Построить примеры, когда в этих соотношениях имеют место строгие неравенства.

132. Пусть $x_n \geqslant 0$ и $y_n \geqslant 0$ ($n = 1, 2, \ldots$). Доказать, что

а) $$\varliminf_{n\to\infty} x_n \cdot \varliminf_{n\to\infty} y_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} (x_n y_n) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} y_n$$

и

б) $$\varliminf_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} y_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} (x_n y_n) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} y_n.$$

Построить примеры, когда в этих соотношениях имеют место строгие неравенства.

133. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ существует, то, какова бы ни была последовательность y_n ($n = 1, 2, \ldots$), имеем:

а) $$\varlimsup_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n$$

и

б) $$\varlimsup_{n\to\infty} (x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} y_n \qquad (x_n \geqslant 0).$$

134. Доказать, что если для некоторой последовательности x_n ($n = 1, 2, \ldots$), какова бы ни была последовательность y_n ($n = 1, 2, \ldots$), имеет место по меньшей мере одно из равенств:

а) $$\varlimsup_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \varlimsup_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n$$

или

б) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(x_n y_n) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n \cdot \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,y_n \quad (x_n \geqslant 0)$,

то последовательность x_n — сходящаяся.

135. Доказать, что если $x_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{1}{x_n} = 1,$$

то последовательность x_n — сходящаяся.

136. Доказать, что если последовательность x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ ограничена и $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$, то частичные пределы этой последовательности расположены всюду плотно между ее нижним и верхним пределами:

$$l = \underline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n \quad \text{и} \quad L = \overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n,$$

то есть любое число из отрезка $[l, L]$ является частичным пределом данной последовательности.

137. Пусть числовая последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ удовлетворяет условию

$$0 \leqslant x_{m+n} \leqslant x_m + x_n \quad (m, n = 1, 2, \ldots).$$

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n}$ существует.

138. Доказать, что если последовательность x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ сходится, то последовательность средних арифметических

$$\xi_n = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

также сходится и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Обратное утверждение неверно: построить пример.

139. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = +\infty.$$

140. Доказать, что если последовательность x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ сходится и $x_n > 0$, то

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

141. Доказать, что если $x_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n},$$

предполагая, что предел, стоящий в правой части последнего равенства, существует.

142. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

143. Доказать теорему Штольца: если

а) $y_{n+1} > y_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$, в) существует $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$,

то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}.$$

144. Найти:

а) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{a^n}$ $(a > 1)$; б) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lg n}{n}$.

145. Доказать, что если p — натуральное число, то

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}} = \dfrac{1}{p+1}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^p} - \dfrac{n}{p+1}\right) = \dfrac{1}{2}$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^p + 3^p + \ldots + (2n-1)^p}{n^{p+1}} = \dfrac{2^p}{p+1}$

146. Доказать, что последовательность

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

сходится.

Таким образом, имеет место формула

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = C + \ln n + \varepsilon_n,$$

где $C = 0{,}577216\ldots$ — так называемая *постоянная Эйлера* и $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$.

147. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}\right)$.

148. Последовательность чисел x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ определяется следующими формулами:

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \qquad x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2} \quad (n = 3, 4, \ldots).$$

Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

149 (н). Пусть x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — последовательность чисел, определяемая следующей формулой:

$$x_0 > 0, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

150. Доказать, что последовательности x_n и y_n $(n = 1, 2, \ldots)$, определяемые следующими формулами:

$$x_1 = a, \quad y_1 = b, \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \qquad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2},$$

имеют общий предел

$$\mu(a, b) = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$$

(*арифметико-геометрическое среднее* чисел a и b).

§ 3. Понятие функции

1°. Понятие функции. Переменная y называется однозначной функцией f от переменной x в данной области изменения $X = \{x\}$, если каждому значению $x \in X$ ставится в соответствие одно определенное действительное значение $y = f(x)$, принадлежащее некоторому множеству $Y = \{y\}$.

Множество X носит название *области определения* или *области существования* функции $f(x)$; Y называется *множеством значений* этой функции.

В простейших случаях множество X представляет собой или *открытый промежуток* (*интервал*) $]a, b[= (a, b)$: $a < x < b$ или *полуоткрытые промежутки*

$$]a, b] = (a, b]: \ a < x \leqslant b, \quad [a, b[= [a, b): \ a \leqslant x < b,$$

или *замкнутый промежуток* (*сегмент*) $[a, b]$: $a \leqslant x \leqslant b$, где a и b — некоторые вещественные числа или символы $-\infty$ и $+\infty$ (в последних случаях равенства исключаются). Если каждому значению x из X соответствует одно или несколько значений $y = f(x)$, то y называется *многозначной функцией* от x.

2°. Обратная функция. Если под x понимать любое значение, удовлетворяющее уравнению

$$f(x) = y,$$

где y — фиксированное число, принадлежащее множеству зна-

чений Y функции $f(x)$, то это соответствие определяет на множестве Y некоторую, вообще говоря, многозначную функцию

$$x = f^{-1}(y),$$

называемую *обратной* по отношению к функции $f(x)$. Если функция $y = f(x)$ монотонна в строгом смысле, т. е. $f(x_2) > f(x_1)$ (или соответственно $f(x_2) < f(x_1)$) при $x_2 > x_1$, то обратная функция $x = f^{-1}(y)$ является однозначной и монотонной в том же смысле.

Определить области существования следующих функций:

151. $y = \dfrac{x^2}{1+x}$. 152. $y = \sqrt{3x - x^3}$.

153. $y = (x-2)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

154. а) $y = \log(x^2-4)$; б) $y = \log(x+2) + \log(x-2)$.

155. $y = \sqrt{\sin(\sqrt{x})}$. 156. $y = \sqrt{\cos x^2}$.

157. $y = \lg\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$. 158. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$.

159. $y = \arcsin\dfrac{2x}{1+x}$ 160. $y = \arccos(2\sin x,$

161. $y = \lg[\cos(\lg x)]$. 162(н). $y = (x + |x|)\sqrt{x \sin^2 \pi x}$.

163. $y = \operatorname{ctg} \pi x + \arccos(2^x)$.

164. $y = \arcsin(1-x) + \lg(\lg x)$. 165. $y = (2x)!$

165.1. $y = \log_2 \log_3 \log_4 x$. 165.2. $y = \sqrt[4]{\lg \operatorname{tg} x}$.

165.3. $y = \sqrt{\sin 2x} + \sqrt{\sin 3x}$ $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$.

Определить области существования и множество значений следующих функций:

166. $y = \sqrt{2 + x - x^2}$. 167. $y = \lg(1 - 2\cos x)$.

168. $y = \arccos\dfrac{2x}{1+x^2}$. 169. $y = \arcsin\left(\lg\dfrac{x}{10}\right)$.

170. $y = (-1)^x$.

171. В треугольник ABC (рис. 1), основание которого $AC = b$ и высота $BD = h$, вписан прямоугольник $KLMN$, высота которого $NM = x$. Выразить периметр

P прямоугольника $KLMN$ и его площадь S как функции от x.

Построить графики функций $P = P(x)$ и $S = S(x)$.

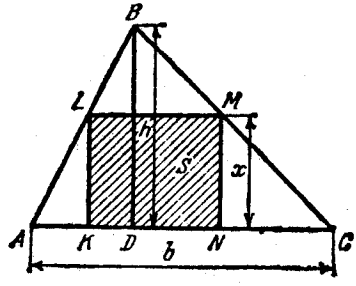

Рис. 1

172. В треугольнике ABC сторона $AB = 6$ см, сторона $AC = 8$ см и угол $BAC = x$. Выразить $BC = a$ и площадь $ABC = S$ как функции переменной x. Построить графики функций $a = a(x)$ и $S = S(x)$.

173. В равнобедренной трапеции $ABCD$ (рис. 2), основания которой $AD = a$ и $BC = b$ $(a > b)$, а высота $HB = h$, проведена прямая $MN \parallel HB$ и отстоящая от

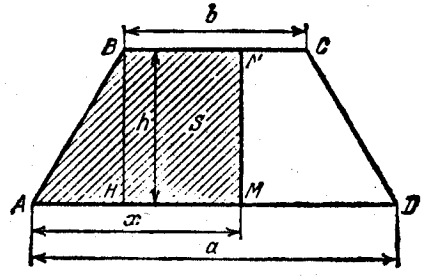

Рис. 2

вершины A на расстоянии $AM = x$. Выразить площадь S фигуры $ABNMA$ как функцию переменной x. Построить график функции: $S = S(x)$.

174. На сегменте $0 \leqslant x \leqslant 1$ оси Ox равномерно распределена масса, равная 2 г, а в точках этой оси $x = 2$ и $x = 3$ находятся сосредоточенные массы по 1 г в каждой. Составить аналитическое выражение

функции $m = m(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, численно равной массе, находящейся в интервале $(-\infty, x)$, и построить график этой функции.

175. Функция $y = \operatorname{sgn} x$ определяется следующим образом:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & \text{если } x<0; \\ 0, & \text{если } x=0; \\ 1, & \text{если } x>0. \end{cases}$$

Построить график этой функции. Показать, что

$$|x| = x \operatorname{sgn} x.$$

176. Функция $y = [x]$ (*целая часть* числа x) определяется следующим образом: если $x = n + r$, где n — целое число и $0 \leqslant r < 1$, то $[x] = n$.

Построить график этой функции.

177. Пусть

$$y = \pi(x) \quad (x \geqslant 0)$$

обозначает число простых чисел, не превышающих числа x. Построить график этой функции для значений аргумента $0 \leqslant x \leqslant 20$.

На какое множество E_y отображает множество E_x функция $y = f(x)$, если:

178(н). $y = x^2$, $E_x = \{-1 \leqslant x \leqslant 2\}$.

179. $y = \lg x$, $E_x = \{10 < x < 1000\}$.

180. $y = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x$, $E_x = \{-\infty < x < +\infty\}$.

181. $y = \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{4}$, $E_x = \{0 < |x| \leqslant 1\}$.

182. $y = |x|$, $E_x = \{1 \leqslant |x| \leqslant 2\}$.

Переменная x пробегает интервал $0 < x < 1$. Какое множество пробегает переменная y, если:

183. $y = a + (b-a)x$.

184. $y = \frac{1}{1-x}$.

185. $y = \frac{x}{2x-1}$.

186. $y = \sqrt{x - x^2}$.

187. $y = \operatorname{ctg} \pi x$.

188. $y = x + [2x]$.

189. Найти $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, если $f(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$.

190. Найти $f(-1)$, $f(-0{,}001)$, $f(100)$, если $f(x) = \lg(x^2)$.

191. Найти $f(0{,}9)$, $f(0{,}99)$, $f(0{,}999)$, $f(1)$, если $f(x) = 1 + [x]$.

192. Найти $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, если

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{при } -\infty < x \leqslant 0, \\ 2^x & \text{при } 0 < x < +\infty. \end{cases}$$

193. Найти $f(0)$, $f(-x)$, $f(x+1)$, $f(x)+1$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{f(x)}$, если

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x}.$$

194. Найти значения x, для которых: 1) $f(x) = 0$; 2) $f(x) > 0$; 3) $f(x) < 0$, если:

а) $f(x) = x - x^3$; б) $f(x) = \sin\frac{\pi}{x}$;

в) $f(x) = (x + |x|)(1 - x)$.

195. Найти $\varphi(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, если:

а) $f(x) = ax + b$; б) $f(x) = x^2$; в) $f(x) = a^x$.

196. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$. Показать, что

$$f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x) \equiv 0$$

197. Найти целую линейную функцию $f(x) = ax + b$, если $f(0) = -2$ и $f(3) = 5$.

Чему равны $f(1)$ и $f(2)$ (*линейная интерполяция*)?

198. Найти целую рациональную функцию второй степени: $f(x) = ax^2 + bx + c$, если

$$f(-2) = 0,\ f(0) = 1,\ f(1) = 5.$$

Чему равны $f(-1)$ и $f(0{,}5)$ (*квадратичная интерполяция*)?

199. Найти целую рациональную функцию третьей степени:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

если $f(-1) = 0$, $f(0) = 2$, $f(1) = -3$, $f(2) = 5$.

200. Найти функцию вида $f(x) = a + bc^x$, если $f(0) = 15$, $f(2) = 30$, $f(4) = 90$.

201. Доказать, что если для линейной функции

$$f(x) = ax + b$$

значения аргумента $x = x_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ образуют арифметическую прогрессию, то соответствующие значения функции $y_n = f(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ образуют также арифметическую прогрессию.

202. Доказать, что если для показательной функции

$$f(x) = a^x \quad (a > 0)$$

значения аргумента $x = x_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ образуют арифметическую прогрессию, то соответствующие значения функции $y_n = f(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ образуют геометрическую прогрессию).

203. Пусть функция $f(u)$ определена при $0 < u < 1$. Найти области определения функций:

а) $f(\sin x)$; б) $f(\ln x)$; в) $f\left(\frac{[x]}{x}\right)$.

204. Пусть $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$ $(a > 0)$. Показать, что

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)\,f(y).$$

205. Пусть $f(x) + f(y) = f(z)$. Определить z, если

а) $f(x) = ax$; б) $f(x) = \frac{1}{x}$;

в) $f(x) = \operatorname{arctg} x$ $(|x| < 1)$; г) $f(x) = \log\frac{1+x}{1-x}$.

Найти $\varphi[\varphi(x)]$, $\psi[\psi(x)]$, $\varphi[\psi(x)]$ и $\psi[\varphi(x)]$, если:

206. $\varphi(x) = x^2$ и $\psi(x) = 2^x$.

207. $\varphi(x) = \operatorname{sgn} x$ и $\psi(x) = \frac{1}{x}$.

208. $\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ x & \text{при } x > 0 \end{cases}$ и $\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ -x^2 & \text{при } x > 0. \end{cases}$

209. Найти $f\{f[f(x)]\}$, $f\{f[f(x)]\}$, если

$$f(x)=\frac{1}{1-x}.$$

210. Пусть $f_n(x)=\underbrace{f(f(\ldots f(x)))}_{n\text{ раз}}$. Найти $f_n(x)$, если $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

211. Найти $f(x)$, если $f(x+1)=x^2-3x+2$.

212. Найти $f(x)$, если $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$ $(|x|\geqslant 2)$.

213. Найти $f(x)$, если $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$ $(x>0)$.

213.1. Найти $f(x)$, если $f\left(\frac{x}{x+1}\right)=x^2$.

Доказать, что следующие функции являются монотонно возрастающими в указанных промежутках:

214. $f(x)=x^2$ $(0\leqslant x<+\infty)$.

215. $f(x)=\sin x$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

216. $f(x)=\operatorname{tg}x$ $\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$.

217. $f(x)=2x+\sin x$ $(-\infty<x<+\infty)$.

Доказать, что следующие функции являются монотонно убывающими в указанных промежутках:

218. $f(x)=x^2$ $(-\infty<x\leqslant 0)$.

219. $f(x)=\cos x$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$.

220. $f(x)=\operatorname{ctg}x$ $(0<x<\pi)$.

221. Исследовать на монотонность следующие функции:

а) $f(x)=ax+b$; б) $f(x)=ax^2+bx+c$;

в) $f(x)=x^3$; г) $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$;

д) $f(x)=a^x$ $(a>0)$.

222. Можно ли почленно логарифмировать неравенство?

223. Пусть $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x)$ — монотонно возрастающие функции. Доказать, что если

$$\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x),$$

то

$$\varphi[\varphi(x)] \leqslant f[f(x)] \leqslant \psi[\psi(x)].$$

Определить обратную функцию $x = \varphi(y)$ и ее область существования, если:

224. $y = 2x + 3$ $(-\infty < x < +\infty)$.

225. $y = x^2$; а) $-\infty < x \leqslant 0$; б) $0 \leqslant x < +\infty$.

226. $y = \dfrac{1-x}{1+x}$ $(x \neq -1)$.

227. $y = \sqrt{1-x^2}$; а) $-1 \leqslant x \leqslant 0$; б) $0 \leqslant x \leqslant 1$.

228. $y = \operatorname{sh} x$, где $\operatorname{sh} x = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

$(-\infty < x < +\infty)$.

229. $y = \operatorname{th} x$, где $\operatorname{th} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$(-\infty < x < +\infty)$.

230.

$$y = \begin{cases} x, & \text{если } -\infty < x < 1; \\ x^2, & \text{если } 1 \leqslant x \leqslant 4; \\ 2^x, & \text{если } 4 < x < +\infty. \end{cases}$$

231. Функция $f(x)$, определенная в симметричном интервале $(-l, l)$, называется *четной*, если

$$f(-x) \equiv f(x);$$

и *нечетной*, если

$$f(-x) \equiv -f(x).$$

Определить, какие из данных функций $f(x)$ являются четными, а какие нечетными:

а) $f(x) = 3x - x^3$; б) $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$;

в) $f(x)=a^x+a^{-x}$ $(a>0)$; г) $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$;

д) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

232. Доказать, что всякую функцию $f(x)$, определенную в симметричном интервале $(-l, l)$, можно представить в виде суммы четной и нечетной функций.

233. Функция $f(x)$, определенная на множестве E, называется периодической, если существует число $T>0$ (период функции — в широком смысле слова!) такое, что

$$f(x\pm T)\equiv f(x) \text{ при } x\in E.$$

Выяснить, какие из данных функций являются периодическими, и определить наименьший период их, если:

а) $f(x)=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x$;

б) $f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x$;

в) $f(x)=2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3\operatorname{tg}\frac{x}{3}$; г) $f(x)=\sin^2 x$;

д) $f(x)=\sin x^2$; е) $f(x)=\sqrt{\operatorname{tg} x}$;

ж) $f(x)=\operatorname{tg}\sqrt{x}$; з) $f(x)=\sin x+\sin\left(x\sqrt{2}\right)$.

234. Доказать, что для функции Дирихле

$$\chi(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x \text{ рационально,}\\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально,}\end{cases}$$

периодом является любое рациональное число.

235. Доказать, что сумма и произведение двух периодических функций, которые определены на общем множестве и периоды которых соизмеримы, есть функции также периодические.

235.1. Функция $f(x)$ называется *антипериодической*, если

$$f(x+T)\equiv -f(x)\ (T>0).$$

Доказать, что $f(x)$ — периодическая с периодом $2T$.

236. Доказать, что если для функции $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ выполнено равенство $f(x+T)=kf(x)$, где k и T — положительные постоянные, то $f(x)=a^x\varphi(x)$, где a — постоянная, а $\varphi(x)$ — периодическая функция с периодом T.

§ 4. Графическое изображение функции

1°. Для построения графика функции $y = f(x)$ поступают следующим образом: 1) определяют область существования функции: $X = \{x\}$; 2) выбирают достаточно густую сеть значений аргумента $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из X и составляют таблицу соответствующих значений функции

$$y_i = f(x_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

3) наносят систему точек $M_i(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ на координатную плоскость Oxy и соединяют их линией, характер которой учитывает положение промежуточных точек.

2°. Чтобы получить грамотный график функции, следует изучить общие свойства этой функции.

В первую очередь нужно: 1) решив уравнение $f(x) = 0$, определить точки пересечения графика функции с осью Ox (*нули функции*); 2) установить области изменения аргумента, где функция положительна или отрицательна; 3) если возможно, выяснить *промежутки монотонности* (возрастания или убывания) функции; 4) изучить поведение функции при неограниченном приближении аргумента к граничным точкам области существования функции.

В этом параграфе предполагается, что свойства простейших элементарных функций — степенной, показательной, тригонометрических и т. п., известны читателю.

Пользуясь этими свойствами, можно, не проделывая большой вычислительной работы, сразу рисовать эскизы графиков многих функций. Другие графики иногда удается свести к комбинации (сумме или произведению и т. п.) этих простейших графиков.

237. Построить график линейной однородной функции

$$y = ax$$

при $a = 0;\ 1/2;\ 1;\ 2;\ -1$.

238. Построить график линейной функции

$$y = x + b$$

при $b = 0,\ 1,\ 2,\ -1$.

239. Построить графики линейных функций:

а) $y = 2x + 3$; б) $y = 2 - 0{,}1x$; $y = -\frac{x}{2} - 1$.

240. Температурный коэффициент линейного расширения железа $a = 1{,}2 \cdot 10^{-6}$. Построить в подходящем масштабе график функции

$$l = f(T) \quad (-40° \leqslant T \leqslant 100°),$$

где T — температура в градусах и l — длина железного стержня при температуре T, если $l = 100$ см при $T = 0°$.

241. На числовой оси движутся две материальные точки. Первая в начальный момент времени $t = 0$ находилась на 20 м влево от начала координат и имела скорость $v_1 = 10$ м/с; вторая при $t = 0$ находилась на 30 м вправо от точки O и имела скорость $v_2 = -20$ м/с. Построить графики уравнений движений этих точек и найти время и место их встречи.

242. Построить графики целых рациональных функций 2-й степени (*параболы*):

а) $y = ax^2$ при $a = 1,\ 1/2,\ 2,\ -1$;

б) $y = (x - x_0)^2$ при $x_0 = 0,\ 1,\ 2,\ -1$;

в) $y = x^2 + c$ при $c = 0,\ 1,\ 2,\ -1$.

243. Построить график *квадратного трехчлена*

$$y = ax^2 + bc + c,$$

приведя его к виду

$$y = y_0 + a(x - x_0)^2.$$

Рассмотреть примеры:

а) $y = 8x - 2x^2$; б) $y = x^2 - 3x + 2$;

в) $y = -x^2 + 2x - 1$; г) $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.

244. Материальная точка брошена под углом $\alpha = 45°$ к плоскости горизонта с начальной скоростью $v_0 = 600$ м/с. Построить график траектории движения и найти наибольшую высоту подъема и дальность полета (приближенно считать $g \approx 10$ м/с^2; сопротивлением воздуха пренебречь).

Построить графики целых рациональных функций степени выше второй:

245. $y = x^3 + 1$. 246. $y = (1 - x^2)(2 + x)$.

247. $y = x^3 - x^4$. 248. $y = x(a - x)^2(a + x)^3$ $(a > 0)$.

Построить графики дробно-линейных функций (*гиперболы*):

249. $y = \frac{1}{x}$. 250. $y = \frac{1 - x}{1 + x}$.

251. Построить график дробно-линейной функции

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \qquad (ad - bc \neq 0, \quad c \neq 0),$$

приведя ее к виду

$$y = y_0 + \frac{m}{x - x_0}.$$

Рассмотреть пример $y = \frac{3x + 2}{2x - 3}$.

252. Газ при давлении $p_0 = 1$ кгс/м^2 занимает объем $v_0 = 12$ м^3. Построить график изменения объема v газа в зависимости от давления p, если температура газа остается постоянной (*закон Бойля—Мариотта*).

Построить графики дробных рациональных функций:

253. $y = x + \frac{1}{x}$ (гипербола).

254. $y = x^2 + \frac{1}{x}$ (трезубец Ньютона).

255. $y = x + \frac{1}{x^2}$.

256. $y = \frac{1}{1 + x^2}$ (кривая Аньези).

257. $y = \frac{2x}{1 + x^2}$ (серпантин Ньютона).

258. $y = \frac{1}{1 - x^2}$.

259. $y = \frac{x}{1 - x^2}$.

260. $y = \frac{1}{1 + x} - \frac{2}{x} + \frac{1}{1 - x}$.

261. $y = \frac{1}{1 + x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{1 - x}$.

262. $y = \frac{(x + 1)(x - 2)}{(x - 1)(x + 2)}$.

263. Построить эскиз графика функции

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a_1 x + b_1} \quad (a_1 \neq 0),$$

приведя ее к виду

$$y = kx + m + \frac{n}{x - x_0}.$$

Рассмотреть пример

$$y=\frac{x^2-4x+3}{x+1}.$$

264. Построить график абсолютной величины силы притяжения F материальной точки, находящейся на расстоянии x от притягивающего центра, если $F = 10$ кгс при $x = 1$ м (*закон Ньютона*).

265. Согласно закону *Ван-дер-Ваальса* объем v реального газа и его давление p при постоянной температуре связаны соотношением

$$\left(p+\frac{a}{v^2}\right)(v-b)=c.$$

Построить график функции $p = p(v)$, если $a = 2$ $b = 0{,}1$ и $c = 10$.

Построить графики иррациональных функций:

266. $y=\pm\sqrt{-x-2}$ (парабола).

267. $y=\pm x\sqrt{x}$ (парабола Нейля).

268. $y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{100-x^2}$ (эллипс).

269. $y=\pm\sqrt{x^2-1}$ (гипербола).

270. $y=\pm\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. **271.** $y=\pm x\sqrt{100-x^2}$.

272. $y=\pm x\sqrt{\frac{x}{10-x}}$ (циссоида).

273. $y=\pm\sqrt{(x^2-1)(9-x^2)}$.

274. Построить график степенной функции $y = x^n$ при: а) $n = 1, 3, 5$; б) $n = 2, 4, 6$.

275. Построить график степенной функции $y = x^n$ при: а) $n = -1, -3$; б) $n = -2, -4$.

276. Построить график радикала $y=\sqrt[m]{x}$ при: а) $m = 2, 4$; б) $m = 3, 5$.

277. Построить график радикала $y=\sqrt[m]{x^k}$, если: а) $m = 2$, $k = 1$; б) $m = 2$, $k = 3$; в) $m = 3$, $k = 1$; г) $m = 3$, $k = 2$; д) $m = 3$, $k = 4$; е) $m = 4$, $k = 2$; ж) $m = 4$, $k = 3$.

278. Построить график показательной функции $y = a^x$ при $a = 1/2,\ 1,\ 2,\ e,\ 10$.

279. Построить график сложной показательной функции $y = e^{y_1}$, если:

а) $y_1 = x^2$; б) $y_1 = -x^2$; в) $y_1 = \frac{1}{x}$;

г) $y_1 = \frac{1}{x^2}$; д) $y_1 = -\frac{1}{x^2}$; е) $y_1 = \frac{2x}{1-x^2}$.

280. Построить график логарифмической функции $y = \log_a x$ при $a = 1/2,\ 2,\ e,\ 10$.

281. Построить графики функций:

а) $y = \ln(-x)$; б) $y = -\ln x$.

282. Построить график сложной логарифмической функции $y = \ln y_1$, если:

а) $y_1 = 1 + x^2$; б) $y_1 = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$;

в) $y_1 = \frac{1-x}{1+x}$; г) $y_1 = \frac{1}{x^2}$; д) $y_1 = 1 + e^x$.

283. Построить график функции $y = \log_x 2$.

284. Построить график функции $y = A \sin x$ при $A = 1,\ 10,\ -2$.

285. Построить график функции $y = \sin(x - x_0)$, если $x_0 = 0,\ \pi/4,\ \pi/2,\ 3\pi/4,\ \pi$.

286. Построить график функции $y = \sin nx$, если $n = 1,\ 2,\ 3,\ 1/2,\ 1/3$.

287. Построить график функции

$$y = a \cos x + b \sin x,$$

приведя ее к виду

$$y = A \sin(x - x_0).$$

Рассмотреть пример: $y = 6 \cos x + 8 \sin x$.

Построить графики тригонометрических функций:

288. $y = \cos x$. 289. $y = \operatorname{tg} x$. 290. $y = \operatorname{ctg} x$.
291. $y = \sec x$. 292. $y = \operatorname{csc} x$. 293. $y = \sin^2 x$.
294. $y = \sin^3 x$. 295. $y = \operatorname{ctg}^2 x$.
296. $y = \sin x \cdot \sin 3x$. 297. $y = \pm\sqrt{\cos x}$.

Построить графики функций:

298. $y = \sin x^2$. 299. $y = \sin \frac{1}{x}$. 300. $y = \cos \frac{\pi}{x}$.

300.1. $y = \sin x$. $\sin \frac{1}{x}$. 301. $y = \operatorname{tg} \frac{\pi}{x}$.

301.1. $y = \sec \frac{1}{x}$. 302. $y = x\left(2 + \sin \frac{1}{x}\right)$.

303. $y = \pm \sqrt{1 - x^2} \sin \frac{\pi}{x}$. 304. $y = \frac{\sin x}{x}$

305. $y = e^x \cos x$. 306. $y = \pm 2^{-x} \sqrt{\sin \pi x}$.

307. $y = \frac{\cos x}{1 + x^2}$. 308. $y = \ln (\cos x)$.

309. $y = \cos (\ln x)$. 310. $y = e^{1/\sin x}$.

Построить графики обратных круговых функций:

311. $y = \arcsin x$. 312. $y = \arccos x$.

313. $y = \operatorname{arctg} x$. 314. $y = \operatorname{arcctg} x$.

315. $y = \arcsin \frac{1}{x}$. 316. $y = \arccos \frac{1}{x}$.

317. $y = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}$. 318. $y = \arcsin (\sin x)$.

319. $y = \arcsin (\cos x)$. 320. $y = \arccos (\cos x)$.

321. $y = \operatorname{arctg} (\operatorname{tg} x)$. 322. $y = \arcsin (2 \sin x)$.

323. Построить график функции

$$y = \arcsin y_1,$$

если:

а) $y_1 = 1 - \frac{x}{2}$; б) $y_1 = \frac{2x}{1 + x^2}$;

в) $y_1 = \frac{1 - x}{1 + x}$; г) $y_1 = e^x$.

324. Построить график функции $y = \operatorname{arctg} y_1$, если:

а) $y_1 = x^2$; б) $y_1 = \frac{1}{x^2}$; в) $y_1 = \ln x$,

г) $y_1 = \frac{1}{\sin x}$.

324.1. Построить графики функций:

а) $y=x^3-3x+2$; б) $y=\dfrac{x^3}{(1-x)(1+x)^2}$;

в) $y=\dfrac{x^2}{|x|-1}$; г) $y=\sqrt{x(1-x^2)}$;

д) $y=3\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$; е) $y=\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{1+x^2}$;

ж) $y=\dfrac{1}{1-2^{x/1-x}}$; з) $y=\lg(x^2-3x+2)$;

и) $y=\arcsin\left(\dfrac{3}{2}-\sin x\right)$;

к) $y=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-3}\right)$;

л) $y=\log_{\cos x}\sin x$; м) $y=(\sin x)^{\operatorname{ctg} x}$.

325. Зная график функции $y=f(x)$, построить графики функций:

а) $y=-f(x)$; б) $y=f(-x)$; в) $y=-f(-x)$.

326. Зная график функции $y=f(x)$, построить графики функций:

а) $y=f(x-x_0)$; б) $y=y_0+f(x-x_0)$;

в) $y=f(2x)$; г) $y=f(kx+b)$ $(k\neq 0)$.

326.1. Пусть

$$f(x)=\begin{cases}1-|x| & \text{при } |x|\leqslant 1;\\ 0 & \text{при } |x|>1.\end{cases}$$

Построить графики функций:

$$y=\frac{1}{2}[f(x-t)+f(x+t)]$$

при $t=0$, $t=1$ и $t=2$.

327. Построить графики функций:

а) $y=2+\sqrt{1-x}$; б) $y=1-e^{-x}$;

в) $y=\ln(1+x)$;

г) $y=-\arcsin(1+x)$; д) $y=3+2\cos 3x$.

328. Зная график функции $y = f(x)$, построить графики функций:

а) $y = |f(x)|$; б) $y = \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x))$;

в) $y = \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x))$.

329. Зная график функции $y = f(x)$, построить графики функций:

а) $y = f^2(x)$; б) $y = \sqrt{f(x)}$; в) $y = \ln f(x)$;

г) $y = f(f(x))$; д) $y = \operatorname{sgn} f(x)$; е) $y = [f(x)]$.

329.1. Пусть

$$f(x) = (x-a)(b-x) \quad (a < b).$$

Построить графики функций:

а) $y = f(x)$; б) $y = f^2(x)$; в) $y = \frac{1}{f(x)}$;

г) $y = \sqrt{f(x)}$; д) $y = e^{f(x)}$; е) $y = \lg f(x)$;

ж) $y = \operatorname{arcctg} f(x)$.

329.2. Построить графики функций:

а) $y = \arcsin[\sin f(x)]$; б) $y = \arcsin[\cos f(x)]$;

в) $y = \arccos[\sin f(x)]$; г) $y = \arccos[\cos f(x)]$;

д) $y = \operatorname{arctg}[\operatorname{tg} f(x)]$,

если: 1) $f(x) = x^2$; 2) $f(x) = x^3$.

330. Зная графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, построить графики функций:

а) $y = f(x) + g(x)$; б) $y = f(x)\,g(x)$; в) $y = f(g(x))$.

Применяя правило сложения графиков, построить графики следующих функций:

331. $y = 1 + x + e^x$. **332.** $y = (x+1)^{-2} + (x-1)^{-2}$.

333. $y = x + \sin x$. **334.** $y = x + \operatorname{arctg} x$.

335. $y = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x$.

336. $y = \sin x - \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x$.

337. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$. **338.** $y=|1-x|+|1+x|$.

339. $y=|1-x|-|1+x|$.

340. Построить графики гиперболических функций:

а) $y=\operatorname{ch} x$, где $\operatorname{ch} x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$;

б) $y=\operatorname{sh} x$, где $\operatorname{sh} x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$;

в) $y=\operatorname{th} x$, где $\operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$.

Применяя правило умножения графиков, построить графики функций:

341. $y=x\sin x$. **342.** $y=x\cos x$.

343. $y=x^2\sin^2 x$. **344.** $y=\frac{\sin x}{1+x^2}$.

345. $y=e^{-x^2}\cos 2x$. **346.** $y=x\operatorname{sgn}(\sin x)$.

347. $y=[x]\,|\sin \pi x|$. **348.** $y=\cos x\cdot\operatorname{sgn}(\sin x)$.

349. Пусть

$$f(x)=\begin{cases} 1-|x|, & \text{если } |x|\leqslant 1;\\ 0, & \text{если } |x|>1.\end{cases}$$

Построить график функции

$$y=f(x)\,f(a-x),$$

если:

а) $a=0$; б) $\alpha=1$; в) $a=2$.

350. Построить график функции

$$y=x+\sqrt{x}\operatorname{sgn}(\sin \pi x).$$

Построить график функции $y=\frac{1}{f(x)}$, если:

351. $f(x)=x^2(1-x^2)$. **352.** $f(x)=x(1-x)^2$.

353. $f(x)=\sin^2 x$. **354.** $f(x)=\ln x$.

355. $f(x)=e^x\sin x$.

356. Построить график сложной функции $y=f(u)$,

где $u = 2\sin x$, если:

$$f(u) = \begin{cases} -1 & \text{при } -\infty < u < -1; \\ u & \text{при } -1 \leqslant u \leqslant 1; \\ 1 & \text{при } 1 < u < +\infty. \end{cases}$$

357. Пусть

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(x + |x|) \text{ и } \psi(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x < 0; \\ x^2, & \text{если } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Построить графики функций:

а) $y = \varphi[\varphi(x)]$; б) $y = \varphi[\psi(x)]$;

в) $y = \psi[\varphi(x)]$; г) $y = \psi[\psi(x)]$.

358. Пусть

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| \leqslant 1; \\ 0, & \text{если } |x| > 1, \end{cases}$$

и

$$\psi(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & \text{если } |x| \leqslant 2; \\ 2, & \text{если } |x| > 2. \end{cases}$$

Построить графики функций:

а) $y = \varphi[\varphi(x)]$; б) $y = \varphi[\psi(x)]$;

в) $y = \psi[\varphi(x)]$; г) $y = \psi[\psi(x)]$.

359. Функцию $f(x)$, определенную в положительной области $x > 0$, продолжить в отрицательную область $x < 0$ таким образом, чтобы полученная функция была: 1) четной; 2) нечетной, если:

а) $f(x) = 1 - x$; б) $f(x) = 2x - x^2$; в) $f(x) = \sqrt{x}$;

г) $f(x) = \sin x$; д) $f(x) = e^x$; е) $f(x) = \ln x$.

Построить соответствующие графики функций.

360. Определить, относительно каких вертикальных осей симметричны графики функций:

а) $y = ax^2 + bx + c$; б) $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2}$;

в) $y = \sqrt{a + x} + \sqrt{b - x}$ $(0 < a < b)$;

г) $y = a + b\cos x$.

361. Определить, относительно каких центров симметричны графики функций:

а) $y = ax + b$; б) $y = \frac{ax+b}{cx+d}$;

в) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$;

г) $y = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$;

д) $y = 1 + \sqrt[3]{x-2}$.

362. Построить графики периодических функций:

а) $y = |\sin x|$; б) $y = \operatorname{sgn} \cos x$; в) $y = f(x)$,

где $f(x) = A\frac{x}{l}\left(2 - \frac{x}{l}\right)$, если $0 \leqslant x \leqslant 2l$ и $f(x + 2l) \equiv$

$\equiv f(x)$;

г) $y = [x] - 2\left[\frac{x}{2}\right]$;

д) $y = (x)$, где (x) — расстояние от числа x до ближайшего к нему целого числа.

363. Доказать, что если график функции $y = f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ симметричен относительно двух вертикальных осей $x = a$ и $x = b$ $(b > a)$, то функция $f(x)$ — периодическая.

364. Доказать, что если график функции $y = f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ симметричен относительно двух точек $A(a, y_0)$, и $B(b, y_1)$ $(b > a)$, то функция $f(x)$ есть сумма линейной функции и периодической функции. В частности, если $y_0 = y_1$, то функция $f(x)$ — периодическая.

365. Доказать, что если график функции $y = f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ симметричен относительно точки $A(a, y_0)$ и прямой $x = b$ $(b \neq a)$, то функция $f(x)$ — периодическая.

366. Построить график функции $y = f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, если $f(x + 1) = 2f(x)$ и $f(x) = x(1-x)$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$.

367. Построить график функции

$$y = f(x) \quad (-\infty < x < +\infty),$$

если $f(x + \pi) = f(x) + \sin x$ и $f(x) = 0$ при $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

368. Построить график функции $y = y(x)$, если:

а) $x = y - y^3$; б) $x = \dfrac{1-y}{1+y^2}$;

в) $x = y - \ln y$; г) $x^2 = \sin y$.

369. Построить графики функций $y = y(x)$, заданных параметрически, если:

а) $x = 1-t$, $y = 1-t^3$;

б) $x = t + \dfrac{1}{t}$, $y = t + \dfrac{1}{t^2}$;

в) $x = 10 \cos t$, $y = \sin t$ (эллипс);

г) $x = \operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t$ (гипербола);

д) $x = 5 \cos^2 t$, $y = 3 \sin^2 t$;

е) $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$ (циклоида);

ж) $x = \sqrt[t+1]{t}$, $y = \sqrt[t]{t+1}$, $(t > 0)$.

370. Построить графики неявных функций:

а) $x^2 - xy + y^2 = 1$ (эллипс);

б) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ (декартов лист);

в) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ (парабола);

г) $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ (астроида);

д) $\sin x = \sin y$; е) $\cos(\pi x^2) = \cos(\pi y)$;

ж) $x^y = y^x$ $(x > 0,\ y > 0)$; з) $x - |x| = y - |y|$.

370.1. Построить графики неявных функций:

а) $\min(x, y) = 1$; б) $\max(x, y) = 1$;

в) $\max(|x|, |y|) = 1$; г) $\min(x^2, y) = 1$.

371. Построить графики функций $r = r(\varphi)$ в полярной системе координат (r, φ), если:

а) $r = \varphi$ (спираль Архимеда);

б) $r = \dfrac{\pi}{\varphi}$ (гиперболическая спираль);

в) $r = \dfrac{\varphi}{\varphi + 1}$ $(0 \leqslant \varphi < +\infty)$;

г) $r = 2^{\varphi/2\pi}$ (логарифмическая спираль);

д) $r = 2(1 + \cos\varphi)$ (кардиоида);

е) $r = 10 \sin 3\varphi$ (трехлепестковая роза);

ж) $r^2 = 36 \cos 2\varphi$ (лемниската Бернулли);

з) $\varphi = \frac{r}{r-1} (r > 1)$;

и) $\varphi = 2\pi \sin r$.

371.1. Построить в полярных координатах r и φ графики следующих функций:

а) $\varphi = 4r - r^2$; б) $\varphi = \frac{12r}{1+r^2}$; в) $r^2 + \varphi^2 = 100$.

371.2. Построить в полярных координатах r и φ графики функций, заданных параметрически ($t \geqslant 0$ — параметр):

а) $\left.\begin{aligned} \varphi &= t\cos^2 t, \\ r &= t\sin^2 t, \end{aligned}\right\}$ б) $\left.\begin{aligned} \varphi &= 1 - 2^{-t} \sin \frac{\pi t}{2}, \\ r &= 1 - 2^{-t} \cos \frac{\pi r}{2}. \end{aligned}\right\}$

372. Приближенно решить уравнение

$$x^3 - 3x + 1 = 0,$$

построив график функции $y = x^3 - 3x + 1$.

Графически решить следующие уравнения:

373. $x^3 - 4x - 1 = 0$. **374.** $x^4 - 4x + 1 = 0$.

375. $x = 2^{-x}$. **376.** $\lg x = 0{,}1\, x$.

377. $10^x = x^2$. **378.** $\lg x = x$ $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$.

Графически решить системы уравнений:

379. $x + y^2 = 1$, $16x^2 + y = 4$.

380. $x^2 + y^2 = 100$, $y = 10\,(x^2 - x - 2)$.

§ 5. Предел функции

1°. Ограниченность функции. Функция $f(x)$ называется *ограниченной* на данном промежутке (a, b), если существуют некоторые числа m и M такие, что

$$m \leqslant f(x) \leqslant M$$

при $x \in (a, b)$.

Число $m_0 = \inf\limits_{x \in (a, b)} \{f(x)\} = \max m$ называется *нижней гранью* функции $f(x)$, а число $M_0 = \sup\limits_{x \in (a, b)} \{f(x)\} = \min M$ называется *верхней гранью* функции $f(x)$ на данном промежутке (a, b). Разность $M_0 - m_0$ называется *колебанием функции* на промежутке (a, b).

2°. Предел функции в точке. Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $X = \{x\}$, имеющем точку сгущения a. Запись

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \tag{1}$$

обозначает, что для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x, для которых $f(x)$ имеет смысл и которые удовлетворяют условию $0 < |x - a| < \delta$, справедливо неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Для существования предела функции (1) необходимо и достаточно, чтобы для каждой последовательности $x_n \to a$, $x_n \neq a$ ($x_n \in X$; $n = 1, 2, \ldots$), было выполнено равенство

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A.$$

Имеют место два замечательных предела:

$$1) \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad 2) \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e.$$

Критерий Коши. Предел функции $f(x)$ в точке a существует тогда и только тогда, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

как только $0 < |x' - a| < \delta$ и $0 < |x'' - a| < \delta$, где x' и x'' — любые точки из области определения функции $f(x)$.

3°. Односторонние пределы. Число A' называется *пределом слева* функции $f(x)$ в точке a:

$$A' = \lim_{x \to a - 0} f(x) = f(a - 0),$$

если

$$|A' - f(x)| < \varepsilon \text{ при } 0 < a - x < \delta(\varepsilon).$$

Аналогично, число A'' называется *пределом справа* функции $f(x)$ в точке a:

$$A'' = \lim_{x \to a + 0} f(x) = f(a + 0),$$

если

$$|A'' - f(x)| < \varepsilon \text{ при } 0 < x - a < \delta(\varepsilon).$$

Для существования предела функции $f(x)$ в точке a необходимо и достаточно, чтобы

$$f(a-0) = f(a+0).$$

4°. Бесконечный предел. Условная запись

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

обозначает, что для любого $E > 0$ справедливо неравенство:

$$|f(x)| > E, \text{ если только } 0 < |x-a| < \delta(E).$$

5°. Частичный предел. Если для некоторой последовательности $x_n \to a$ $(x_n \neq a)$ имеет место равенство

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = B,$$

то число (или символ ∞) B называется *частичным пределом* (соответственно конечным или бесконечным) *функции* $f(x)$ в точке a.

Наименьший и наибольший из этих частичных пределов обозначаются

$$\underline{\lim_{x \to a}} f(x) \quad \text{и} \quad \overline{\lim_{x \to a}} f(x)$$

и называются соответственно *нижним и верхним пределами* функции $f(x)$ в точке a.

Равенство

$$\underline{\lim_{x \to a}} f(x) = \overline{\lim_{x \to a}} f(x)$$

необходимо и достаточно для существования предела (соответственно конечного или бесконечного) функции $f(x)$ в точке a.

381. Показать, что функция, определяемая условиями:

$$f(x) = n, \text{ если } x = \frac{m}{n},$$

где m и n — взаимно простые целые числа и $n > 0$ и

$$f(x) = 0, \text{ если } x \text{ иррационально,}$$

конечна, но не ограничена в каждой точке x (т. е. не ограничена в любой окрестности этой точки).

382. Если функция $f(x)$ определена и локально ограничена в каждой точке: а) интервала, б) сегмента, то является ли эта функция ограниченной на данном интервале или соответственно сегменте?

Привести соответствующие примеры.

383. Показать, что функция $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1+x^4}$ ограничена в интервале $-\infty<x<+\infty$.

384. Показать, что функция $f(x)=\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$ не ограничена в любой окрестности точки $x=0$, однако не является бесконечно большой при $x\to 0$.

385. Исследовать на ограниченность функцию

$$f(x)=\ln x\cdot\sin^2\frac{\pi}{x}$$

в интервале $0<x<\varepsilon$.

386. Показать, что функция $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ в области $0\leqslant x<+\infty$ имеет нижнюю грань $m=0$ и верхнюю грань $M=1$.

387. Функция $f(x)$ определена и монотонно возрастает на сегменте $[a, b]$. Чему равны ее нижняя и верхняя грани на этом сегменте?

Определить нижнюю и верхнюю грани функций:

388. $f(x)=x^2$ на $[-2, 5)$.

389. $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ на $(-\infty, +\infty)$.

390. $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$ на $(0, +\infty)$.

391. $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ на $(0, +\infty)$.

392. $f(x)=\sin x$ на $(0, +\infty)$.

393. $f(x)=\sin x+\cos x$ на $[0, 2\pi]$.

394. $f(x)=2^x$ на $(-1, 2)$.

395. $f(x)=[x]$: а) на $(0, 2)$ и б) на $[0, 2]$.

396. $f(x)=x-[x]$ на $[0, 1]$.

397. Определить колебание функции

$$f(x)=x^2$$

на интервалах: а) (1; 3); б) (1,9; 2,1); в) (1,99; 2,01); г) (1,999; 2,001).