871. $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

872. $y=\operatorname{tg}x-\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3x+\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5x$.

873. $y=4\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2x}+\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^8x}$.

874. $y=\sec^2\frac{x}{a}+\operatorname{cosec}^2\frac{x}{a}$.

875. $y=\sin[\cos^2(\operatorname{tg}^3x)]$. 876. $y=e^{-x^2}$.

877. $y=2^{\operatorname{tg}1/x}$. 878. $y=e^x(x^2-2x+2)$.

879. $y=\left[\frac{1-x^2}{2}\sin x-\frac{(1-x)^2}{2}\cos x\right]e^{-x}$.

880. $y=e^x\left(1+\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)$.

881. $y=\frac{\ln 3\cdot\sin x+\cos x}{3^x}$.

882. $y=e^{ax}\,\frac{a\sin bx-b\cos bx}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

883. $y=e^x+e^{e^x}+e^{ee^x}$.

884. $y=\left(\frac{a}{b}\right)^x\left(\frac{b}{x}\right)^a\left(\frac{x}{a}\right)^b$ $(a>0,\ b>0)$.

885. $y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}$ $(a>0)$. 886. $y=\operatorname{ig}^3x^2$.

887. $y=\ln(\ln(\ln x))$. 888. $y=\ln(\ln^2(\ln^3x))$.

889. $y=\frac{1}{2}\ln(1+x)-\frac{1}{4}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2(1+x)}$.

890. $y=\frac{1}{4}\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

891. $y=\frac{1}{4(1+x^4)}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^4}{1+x^4}$.

892. $y=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\frac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

893. $y=\frac{1}{1-k}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{\sqrt{k}}{1-k}\ln\frac{1+x\sqrt{k}}{1-x\sqrt{k}}$

$(0<k<1)$.

894. $y=\sqrt{x+1}-\ln\left(1+\sqrt{x+1}\right)$.

**895.** $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

**896.** $y=x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}$.

**897.** $y=x\ln^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-$
$$-2\sqrt{1+x^2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+2x.$$

**898.** $y=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$.

**899.** $y=\frac{1}{2\sqrt{ab}}\ln\frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}$ $(a>0,\ b>0)$.

**900.** $y=\frac{2+3x^2}{x^4}\sqrt{1-x^2}+3\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$.

**901.** $y=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. **902.** $y=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$.

**903.** $y=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x+\ln\sin x$.

**904.** $y=\ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$.

**905.** $y=-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{\sin x}}$

**906.** $y=\ln\frac{b+a\cos x+\sqrt{b^2-a^2}\sin x}{a+b\cos x}$

$(0\leqslant|\alpha|<|b|)$.

**907.** $y=\frac{1}{x}(\ln^3 x+3\ln^2 x+6\ln x+6)$.

**908.** $y=\frac{1}{4x^4}\ln\frac{1}{x}-\frac{1}{16x^4}$.

**909.** $y=\frac{3}{2}\left(1-\sqrt[3]{1+x^2}\right)+3\ln\left(1+\sqrt[3]{1+x^2}\right)$.

**910.** $y=\ln\left[\frac{1}{x}+\ln\left(\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}\right)\right]$.

**911.** $y=x\left[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)\right]$.

**912.** $y=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\cos x\cdot\ln\operatorname{tg}x$.

**913.** $y=\arcsin\frac{x}{2}$.

**914.** $y=\arccos\frac{1-x}{\sqrt{2}}$. **915.** $y=\operatorname{arctg}\frac{x^2}{a}$.

**916.** $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{2}}{x}$. **917.** $y=\sqrt{x}-\operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

**918.** $y=x+\sqrt{1-x^2}\cdot\arccos x$.

**919.** $y=x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}$.

**920.** $y=\arccos\frac{1}{x}$. **921.** $y=\arcsin(\sin x)$.

**922.** $y=\arccos(\cos^2 x)$. **923.** $y=\arcsin(\sin x-\cos x)$.

**924.** $y=\arccos\sqrt{1-x^2}$. **925.** $y=\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$.

**926.** $y=\operatorname{arcctg}\left(\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\right)$.

**927.** $y=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$

$(a>b\geqslant 0)$

**928.** $y=\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$. **929.** $y=\frac{1}{\arccos^2(x^2)}$.

**930.** $y=\operatorname{arctg}x+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(x^3)$.

**931.** $y=\ln(1+\sin^2 x)-2\sin x\cdot\operatorname{arctg}(\sin x)$.

**932.** $y=\ln\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

**933.** $y=\ln\frac{x+a}{\sqrt{x^2+b^2}}+\frac{a}{b}\operatorname{arctg}\frac{x}{b}$ $(b\neq 0)$.

**934.** $y=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$ $(a>0)$.

**935.** $y=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

**936.** $y=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}-$

$-\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}$.

**937.** $y = x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x.$

**938.** $y = \frac{\arccos x}{x} + \frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}.$

**939.** $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1} - \frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}.$

**940.** $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}.$

**941.** $y = \frac{1}{12}\ln\frac{x^4-x^2+1}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2x^2-1}.$

**942.** $y = \frac{x^6}{1+x^{12}} - \operatorname{arcctg} x^6.$

**943.** $y = \ln\frac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}} + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{1+2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3}}.$

**944.** $y = \operatorname{arctg}\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}.$

**945.** $y = \operatorname{arcctg}\frac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}} \quad (a>0).$

**946.** $y = \frac{3-x}{2}\sqrt{1-2x-x^2} + 2\arcsin\frac{1+x}{\sqrt{2}}.$

**947.** $y = \frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}.$

**948.** $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x).$

**949.** $y = \sqrt{1-x^2}\cdot\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} +$

$$+\frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} + \arcsin x.$$

**950.** $y = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2.$

**951.** $y = \ln\left(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}\right).$

952. $y = \operatorname{arctg}\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$.

953. $y = \arcsin\left(\dfrac{\sin a \sin x}{1 - \cos a \cos x}\right)$.

954. $y = \dfrac{1}{4\sqrt{3}} \ln \dfrac{\sqrt{x^2+2} - x\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+2} + x\sqrt{3}} +$

$$+ \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2+2}}{x}.$$

955. $y = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \dfrac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}} -$

$$- \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{1+x^4} - x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4} + x\sqrt{2}}.$$

956. $y = \dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x^2} - \dfrac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arcctg} \dfrac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}$.

957. $y = \arccos(\sin x^2 - \cos x^2)$.

958. $y = \arcsin(\sin x^2) + \arccos(\cos x^2)$.

959. $y = e^{m \arcsin x}[\cos(m \arcsin x) + \sin(m \arcsin x)]$.

960. $y = \operatorname{arctg} e^x - \ln \sqrt{\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$.

960.1. $y = \sqrt{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{1 + x^4}}}$.

960.2. $y = \operatorname{arcctg} \dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{ctg} \dfrac{1}{x^2}}}$.

960.3. $y = \ln^2\left(\sec 2\sqrt[3]{x}\right)$.

961. $y = x + x^x + x^{x^x}$ $(x > 0)$.

962. $y = x^{x^a} + x^{a^x} + a^{x^x}$ $(a > 0,\ x > 0)$.

963. $y = \sqrt[x]{x}$ $(x > 0)$.

964. $y = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$.

965. $y = (\ln x)^x : x^{\ln x}$.

965.1. $y = \left[\dfrac{\arcsin(\sin^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)}\right]^{\operatorname{arctg}^2 x}$.

**966.** $y = \log_x e$. **967.** $y = \ln(\operatorname{ch} x) + \frac{1}{2\operatorname{ch}^2 x}$.

**968.** $y = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x} - \ln\left(\operatorname{cth}\frac{x}{2}\right)$.

**969.** $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.

**970.** $y = \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right)$.

**971.** $y = \frac{b}{a}x + \frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{a}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{th}\frac{x}{2}\right)$

$(0 \leqslant |b| < a)$.

**972.** Найти производную функции

$$y = \ln(\cos^2 x + \sqrt{1+\cos^4 x}),$$

вводя промежуточное переменное $u = \cos^2 x$.

Приемом, указанным в примере **972**, найти производные функций:

**973.** $y = (\arccos x)^2\left[\ln^2(\arccos x) - \ln(\arccos x) + \frac{1}{2}\right]$.

**974.** $y = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\sqrt[4]{1+x^4}\right) + \frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+1}{\sqrt[4]{1+x^4}-1}$.

**975.** $y = \frac{e^{-x}\arcsin(e^{-x^2})}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}} + \frac{1}{2}\ln(1-e^{-2x^2})$.

**976.** $y = \frac{a^x}{1+a^{2x}} - \frac{1-a^{2x}}{1+a^{2x}}\operatorname{arcctg} a^{-x}$.

**977.** Найти производные и построить графики функций и их производных, если:

а) $y = |x|$; б) $y = x|x|$; в) $y = \ln|x|$.

**978.** Найти производные следующих функций:

а) $y = |(x-1)^2(x+1)^3|$; б) $y = |\sin^3 x|$;

в) $y = \arccos\frac{1}{|x|}$; г) $y = [x]\sin^2 \pi x$.

Найти производные и построить графики функций и их производных:

979. $y=\begin{cases} 1-x & \text{при } -\infty<x<1; \\ (1-x)(2-x) & \text{при } 1\leqslant x\leqslant 2; \\ -(2-x) & \text{при } 2<x<+\infty. \end{cases}$

980. $y=\begin{cases} (x-a)^2(x-b)^2 & \text{при } a\leqslant x\leqslant b; \\ 0 & \text{вне отрезка } [a,\ b]. \end{cases}$

981. $y=\begin{cases} x & \text{при } x<0; \\ \ln(1+x) & \text{при } x\geqslant 0. \end{cases}$

982. $y=\begin{cases} \operatorname{arctg} x & \text{при } |x|\leqslant 1; \\ \frac{\pi}{4}\operatorname{sgn} x+\frac{x-1}{2} & \text{при } |x|>1. \end{cases}$

983. $y=\begin{cases} x^2e^{-x^2} & \text{при } |x|\leqslant 1; \\ \frac{1}{e} & \text{при } |x|>1. \end{cases}$

984. Производная от логарифма данной функции $y=f(x)$ называется *логарифмической производной* этой функции:

$$\frac{y'}{y}=\frac{d}{dx}\ln|f(x)|=\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Найти логарифмическую производную от функции $y$, если:

а) $y=x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$; б) $y=\frac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}$;

в) $y=(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_n)^{\alpha_n}$;

г) $y=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^n$.

985. Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — дифференцируемые функции от $x$. Найти производную от функции $y$, если:

а) $y=\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}$; б) $y=\operatorname{arctg}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$;

в) $y=\sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}$ $(\varphi(x)\neq 0;\ \psi(x)>0)$;

г) $y=\log_{\varphi(x)}\psi(x)$ $(\varphi(x)>0;\ \psi(x)>0)$.

**986.** Найти $y'$, если:

а) $y=f(x^2)$; б) $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$;

в) $y=f(e^x)\cdot e^{f(x)}$; г) $y=f\{f[f(x)]\}$,

где $f(u)$ — дифференцируемая функция.

**986.1.** Найти $f'(0)$, если

$$f(x)=x(x-1)(x-2)\ldots(x-1000).$$

**987.** Доказать следующее правило дифференцирования определителя $n$-го порядка:

$$\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \ldots & f_{1n}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{k1}(x) & f_{k2}(x) & \ldots & f_{kn}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \ldots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}' = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \ldots & f_{1n}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \ldots & f'_{kn}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \ldots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

**988.** Найти $F'(x)$, если

$$F(x)=\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix}.$$

**989.** Найти $F'(x)$, если

$$F(x)=\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}.$$

**990.** Дан график функции. Приближенно построить график ее производной.

**991.** Показать, что функция

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & \text{при } x\neq 0; \\ 0 & \text{при } x=0 \end{cases}$$

имеет разрывную производную.

**992.** При каком условии функция

$$f(x)=x^n\sin\frac{1}{x}\quad (x\neq 0) \text{ и } f(0)=0$$

а) непрерывна при $x=0$; б) дифференцируема при $x=0$; в) имеет непрерывную производную при $x=0$?

**993.** При каком условии функция

$$f(x)=|x|^n \sin\frac{1}{|x|^m}\ (x\neq 0) \text{ и } f(0)=0\ (m>0)$$

имеет: а) ограниченную производную в окрестности начала координат; б) неограниченную производную в этой окрестности?

**994.** Найти $f'(a)$, если

$$f(x)=(x-a)\,\varphi(x),$$

где функция $\varphi(x)$ непрерывна при $x=a$.

**995.** Показать, что функция

$$f(x)=|x-a|\varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — непрерывная функция и $\varphi(a)\neq 0$, не имеет производной в точке $a$.

Чему равны односторонние производные $f'_-(a)$ и $f'_+(a)$?

**996.** Построить пример непрерывной функции, не имеющей производной в данных точках: $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

**997.** Показать, что функция

$$f(x)=x^2\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|\quad (x\neq 0) \text{ и } f(0)=0$$

имеет точки недифференцируемости в любой окрестности точки $x=0$, но дифференцируема в этой точке.

Построить эскиз графика этой функции.

**998.** Показать, что функция

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{если } x \text{ рационально;}\\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально,}\end{cases}$$

имеет производную лишь при $x=0$.

**999.** Исследовать на дифференцируемость следующие функции:

а) $y=|(x-1)(x-2)^2(x-3)^3|$; б) $y=|\cos x|$;

в) $y=|\pi^2-x^2|\sin^2 x$; г) $y=\arcsin(\cos x)$;

д) $y=\begin{cases} \dfrac{x-1}{4}(x+1)^2 & \text{при } |x|\leqslant 1;\\ |x|-1 & \text{при } |x|>1.\end{cases}$

Для функции $f(x)$ определить левую производную $f'_-(x)$ и правую производную $f'_+(x)$, если:

**1000.** $f(x)=|x|$. **1001.** $f(x)=[x]\sin \pi x$.

1002. $f(x)=x\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|$ $(x\neq 0)$, $f(0)=0$.

1003. $f(x)=\sqrt{\sin x^2}$.

1004. $f(x)=\frac{x}{1+e^{1/x}}$ $(x\neq 0)$, $f(0)=0$.

1005. $f(x)=\sqrt{1-e^{-x^2}}$.

1006. $f(x)=|\ln|x||$ $(x\neq 0)$.

1007. $f(x)=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$.

1008. $f(x)=(x-2)\operatorname{arctg}\frac{1}{x-2}$ $(x\neq 2)$, $f(2)=0$.

1009. Показать, что функция $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ при $x\neq 0$ и $f(0)=0$ непрерывна при $x=0$, но не имеет в этой точке ни левой, ни правой производной.

1009.1. Пусть $x_0$ — точка разрыва 1-го рода функции $f(x)$. Выражения

$$f'_-(x_0)=\lim_{h\to -0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-0)}{h}$$

и

$$f'_+(x_0)=\lim_{h\to +0}\frac{e(x_0+h)-f(x_0+0)}{h}$$

называются *обобщенными односторонними* (соответственно левой и правой) *производными* функции $f(x)$ в точке $x_0$.

Найти $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$ в точках разрыва $x_0$ функции $f(x)$, если:

а) $f(x)=\sqrt{\frac{x^2+x^3}{x}}$; б) $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$;

в) $f(x)=\frac{1}{1+e^{1/x}}$.

1010. Пусть

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{если } x\leqslant x_0;\\ ax+b, & \text{если } x>x_0.\end{cases}$$

Как следует подобрать коэффициенты $a$ и $b$, чтобы функция $f(x)$ была непрерывной и дифференцируемой в точке $x = x_0$?

**1011.** Пусть

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \leqslant x_0; \\ ax + b, & \text{если } x > x_0, \end{cases}$$

где функция $f(x)$ дифференцируема слева при $x = x_0$.

При каком выборе коэффициентов $a$ и $b$ функция $F(x)$ будет непрерывной и дифференцируемой в точке $x_0$?

**1012.** На сегменте $a \leqslant x \leqslant b$ построить сопряжение двух полупрямых

$$y = k_1(x-a) \quad (-\infty < x < a),$$
$$y = k_2(x-b) \quad (b < x < +\infty)$$

с помощью кубической параболы

$$y = A(x-a)(x-b)(x-c),$$

(где параметры $A$ и $c$ подлежат определению).

**1013.** Часть кривой $y = \frac{m^2}{|x|}$ $(|x| > c)$ дополнить параболой

$$y = a + bx^2 \quad (|x| \leqslant c)$$

(где $a$ и $b$ — неизвестные параметры) так, чтобы получилась гладкая кривая.

**1014.** Можно ли утверждать, что сумма $F(x) = f(x) + g(x)$ не имеет производной в точке $x = x_0$, если: а) функция $f(x)$ имеет производную в точке $x_0$, а функция $g(x)$ не имеет производной в этой точке; б) обе функции $f(x)$ и $g(x)$ не имеют производной в точке $x_0$?

**1015.** Можно ли утверждать, что произведение

$$F(x) = f(x)\,g(x)$$

не имеет производной в точке $x = x_0$, если: а) функция $f(x)$ имеет производную в точке $x_0$, а функция $g(x)$ не имеет производной в этой точке; б) обе функции $f(x)$ и $g(x)$ не имеют производной в точке $x_0$?

Полагая $x_0 = 0$, рассмотреть примеры: а) $f(x) = x$, $g(x) = |x|$; б) $f(x) = |x|$, $g(x) = |x|$.

**1016.** Что можно сказать о дифференцируемости функции

$$F(x) = f(g(x))$$

в данной точке $x = x_0$, если: а) функция $f(x)$ имеет производную в точке $x = g(x_0)$, а функция $g(x)$ не имеет производной в точке $x = x_0$; б) функция $f(x)$ не имеет производной в точке $x = g(x_0)$, а функция $g(x)$ имеет производную в точке $x = x_0$; в) функция $f(x)$ не имеет производной в точке $x = g(x_0)$ и функция $g(x)$ не имеет производной в точке $x = x_0$?

Полагая $x_0 = 0$, рассмотреть примеры:

а) $f(x) = x^2$, $g(x) = |x|$, б) $f(x) = |x|$, $g(x) = x^2$

в) $f(x) = 2x + |x|$, $g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}|x|$.

**1017.** В каких точках график функции $y = x + \sqrt[3]{\sin x}$ имеет вертикальные касательные? Построить этот график.

**1018.** Может ли функция $f(x)$ в точке ее разрыва иметь: а) конечную производную; б) бесконечную производную?

Рассмотреть пример: $f(x) = \operatorname{sgn} x$.

**1019.** Если функция $f(x)$ дифференцируема в ограниченном интервале $(a, b)$ и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, то обязательно ли

1) $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \infty$; 2) $\lim\limits_{x \to a} |f'(x)| = +\infty$?

Рассмотреть пример: $f(x) = \frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}$ при $x \to 0$.

**1020.** Если функция $f(x)$ дифференцируема в ограниченном интервале $(a, b)$ и $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \infty$, то обязательно ли

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty?$$

Рассмотреть пример: $f(x) = \sqrt[3]{x}$ при $x \to 0$.

**1021.** Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в интервале $(x_0, +\infty)$ и существует $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Следует ли отсюда, что существует $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$?

Рассмотреть пример: $f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$.

**1022.** Пусть ограниченная функция $f(x)$ дифференцируема в интервале $(x_0, +\infty)$ и существует $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$; следует ли отсюда, что существует $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ конечный или бесконечный?

Рассмотреть пример: $f(x) = \cos(\ln x)$.

**1023.** Можно ли почленно дифференцировать неравенство между функциями?

**1024.** Вывести формулы для сумм:

$$P_n = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$$

и

$$Q_n = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \ldots + n^2x^{n-1}.$$

Указание. Рассмотреть $(x + x^2 + \ldots + x^n)'$.

**1025.** Вывести формулы для сумм:

$$S_n = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$$

и

$$T_n = \cos x + 2\cos 2x + \ldots + n\cos nx.$$

**1025.1.** Вывести формулу для суммы

$$S_n = \operatorname{ch} x + 2\operatorname{ch} 2x + \ldots + n\operatorname{ch} nx.$$

Указание. $S_n = (\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} 2x + \ldots + \operatorname{sh} nx)'$.

**1026.** Пользуясь тождеством

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\ldots\cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}},$$

вывести формулу для суммы

$$S_n = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}.$$

**1027.** Доказать, что производная четной дифференцируемой функции есть функция нечетная, а производная нечетной дифференцируемой функции есть функция четная.

Дать геометрическую интерпретацию этого факта.

**1028.** Доказать, что производная дифференцируемой периодической функции есть функция снова периодическая с тем же периодом.

**1029.** С какой скоростью возрастает площадь круга в тот момент, когда радиус этого круга $R = 10$ см, если радиус круга растет равномерно со скоростью 2 см/с?

**1030.** С какой скоростью изменяются площадь и диагональ прямоугольника в тот момент, когда одна сторона

его $x = 20$ м, а другая сторона $y = 15$ м, если первая сторона прямоугольника уменьшается со скоростью 1 м/с, а вторая возрастает со скоростью 2 м/с?

**1031.** Из одного и того же порта одновременно вышли пароход $A$ с направлением на север и пароход $B$ с направлением на восток. С какой скоростью возрастает расстояние между ними, если скорость парохода $A$ равна 30 км/ч, а парохода $B$ равна 40 км/ч?

**1032.** Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant 2; \\ 2x-2, \text{ если } 2 < x < +\infty, \end{cases}$$

и $S(x)$ — площадь, ограниченная кривой $y = f(x)$, осью $Ox$ и перпендикуляром к оси $Ox$, проведенным в точке $x$ $(x \geqslant 0)$.

Составить аналитическое выражение функции $S(x)$, найти производную $S'(x)$ и построить график функции $y = S'(x)$.

**1033.** Функция $S(x)$ есть площадь, ограниченная дугой окружности $y = \sqrt{a^2-x^2}$, осью $Ox$ и двумя перпендикулярами к оси $Ox$, проведенными в точках 0 и $x$ $(|x| \leqslant a)$.

Составить аналитическое выражение функции $S(x)$, найти производную $S'(x)$ и построить график этой производной.

## § 2. Производная обратной функции. Производная функции, заданной параметрически. Производная функции, заданной в неявном виде

1°. Производная обратной функции. Дифференцируемая функция $y = f(x)$ $(a < x < b)$ с производной $f'(x) \neq 0$ имеет однозначную непрерывную обратную функцию $x = f^{-1}(y)$, причем обратная функция также дифференцируема и справедлива формула

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

2°. Производная функции, заданной параметрически. Система уравнений

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t) \end{aligned}\right\} \quad (\alpha < t < \beta),$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — дифференцируемые функции и $\varphi'(t) \neq 0$,

определяет $y$, в некоторой области, как однозначную дифференцируемую функцию от $x$:

$$y = \psi(\varphi^{-1}(x)),$$

причем производная этой функции может быть найдена по формуле

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

3°. Производная функции, заданной в неявном виде. Если дифференцируемая функция $y = y(x)$ удовлетворяет уравнению

$$F(x, y) = 0,$$

то производная $y' = y'(x)$ этой неявной функции может быть найдена из уравнения

$$\frac{d}{dx}[F(x, y)] = 0,$$

где $F(x, y)$ рассматривается как сложная функция переменной $x$.

(Более подробно о дифференцировании неявных функций см. ч. II, отд. VI, § 3.)

**1034.** Показать, что существует однозначная функция $y = y(x)$, определяемая уравнением $y^3 + 3y = x$, и найти ее производную $y'_x$.

**1035.** Показать, что существует однозначная функция $y = y(x)$, определяемая уравнением

$$y - \varepsilon \sin y = x \quad (0 \leqslant \varepsilon < 1),$$

и найти производную $y'_x$.

**1036.** Определить области существования обратных функций $x = x(y)$ и найти их производные, если:

а) $y = x + \ln x$ $(x > 0)$; б) $y = x + e^x$;

в) $y = \operatorname{sh} x$; г) $y = \operatorname{th} x$.

**1037.** Выделить однозначные непрерывные ветви обратных функций $x = x(y)$, найти их производные и построить графики, если:

а) $y = 2x^2 - x^4$; б) $y = \dfrac{x^2}{1 + x^2}$; в) $y = 2e^{-x} - e^{-2x}$.

**1038.** Построить эскиз графика функции $y = y(x)$ и найти производную $y'_x$, если: $x = -1 + 2t - t^2$, $y = 2 - 3t + t^3$. Чему равна $y'_x(x)$ при $x = 0$ и при $x = -1$? В какой точке $M(x, y)$ производная $y'_x(x) = 0$?

Найти производные $y'_x$ (параметры положительны) если:

1039. $x = \sqrt[3]{1-\sqrt{t}}$, $y = \sqrt{1-\sqrt[3]{t}}$.

1040. $x = \sin^2 t$, $y = \cos^2 t$.

1041. $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

1042. $x = a\,\mathrm{ch}\, t$, $y = b\,\mathrm{sh}\, t$.

1043. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

1044. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

1045. $x = e^{2t}\cos^2 t$, $y = e^{2t}\sin^2 t$.

1046. $x = \arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $y = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

1047. Показать, что функция $y = y(x)$, определяемая системой уравнений

$$x = 2t + |t|, \quad y = 5t^2 + 4t|t|,$$

дифференцируема при $t = 0$, однако ее производная в этой точке не может быть найдена по обычной формуле.

Найти производные $y'_x$ от следующих функций, заданных в неявном виде:

1048. $x^2 + 2xy - y^2 = 2x$.

Чему равно $y'$ при $x = 2$ и $y = 4$ и при $x = 2$ и $y = 0$?

1049. $y^2 = 2px$ (парабола).

1050. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (эллипс).

1051. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ (парабола).

1052. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (астроида).

1053. $\mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ (логарифмическая спираль).

1054. Найти $y'_x$, если:

а) $r = a\varphi$ (спираль Архимеда);

б) $r = a(1 + \cos\varphi)$ (кардиоида);

в) $r = ae^{m\varphi}$ (логарифмическая спираль),

где $r = \sqrt{x^2+y^2}$ и $\varphi = \mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x}$ — полярные координаты.

## § 3. Геометрический смысл производной

1°. Уравнения касательной и нормали. Уравнения *касательной* $MT$ и *нормали* $MN$ к графику дифференцируемой функции $y = f(x)$ в точке его $M(x, y)$ (рис. 7) соответственно имеют вид:

$$Y - y = y'(X - x)$$

и

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x),$$

где $X$, $Y$ — текущие координаты касательной или нормали, а $y' = f'(x)$ — значение производной в точке касания.

2°. Отрезки касательной и нормали. Для отрезков касательной и нормали: $PT$ — подкасательная, $PN$ — поднормаль, $MT$ — касательная, $MN$—нормаль (рис. 7);

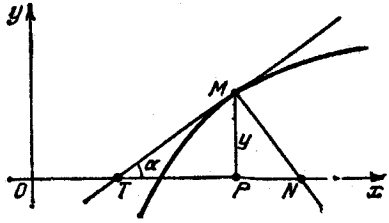


Рис. 7

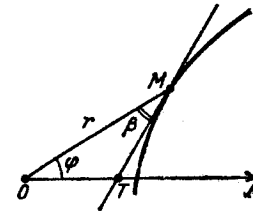


Рис. 8

учитывая, что $\operatorname{tg}\alpha = y'$, получаем следующие значения:

$$PT = \left|\frac{y}{y'}\right|, \qquad PN = |yy'|,$$

$$MT = \left|\frac{y}{y'}\right|\sqrt{1 + y'^2}, \qquad MN = |y|\sqrt{1 + y'^2}.$$

3°. Угол между касательной и радиусом-вектором точки касания. Если $r = f(\varphi)$ — уравнение кривой в полярной системе координат и $\beta$ — угол, образованный касательной $MT$ и радиусом-вектором $OM$ точки касания $M$ (рис. 8), то

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{r}{r'}.$$

**1055.** Написать уравнения касательной и нормали к кривой

$$y = (x + 1)\sqrt[3]{3 - x}$$

в точках: а) $A(-1, 0)$; б) $B(2, 3)$; в) $C(3, 0)$.

**1056.** В каких точках кривой $y = 2 + x - x^2$ касательная к ней а) параллельна оси $Ox$; б) параллельна биссектрисе первого координатного угла?

**1057.** Доказать, что парабола

$$y = a(x - x_1)(x - x_2) \qquad (a \neq 0,\ x_1 < x_2)$$

пересекает ось $Ox$ под углами $\alpha$ и $\beta$ $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2},\ 0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$, равными между собой.

**1058.** На кривой $y = 2 \sin x$ $(-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$ определить те участки ее, где «крутизна кривой» (т. е. $|y'|$) превышает 1.

**1059.** Функции $y = x$ и $y_1 = x + 0{,}01 \sin 1\,000\,\pi x$ отличаются друг от друга не больше чем на 0,01. Что можно сказать о максимальном значении разности производных этих функций?

Построить соответствующие графики.

**1060.** Под каким углом кривая $y = \ln x$ пересекает ось $Ox$?

**1061.** Под какими углами пересекаются кривые

$$y = x^2 \text{ и } x = y^2?$$

**1062.** Под какими углами пересекаются кривые

$$y = \sin x \text{ и } y = \cos x?$$

**1063.** При каком выборе параметра $n$ кривая

$$y = \operatorname{arctg} nx \quad (n > 0)$$

пересекает ось $Ox$ под углом, большим 89°?

**1063.1.** Показать, что кривая $y = |x|^\alpha$

а) при $0 < \alpha < 1$ касается оси $Oy$;

б) при $1 < \alpha < +\infty$ касается оси $Ox$.

**1063.2.** Показать, что для графика функции

$$y = \begin{cases} |x|^\alpha, & \text{если } \alpha \neq 0 \quad x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

предельное положение секущей, проходящей через точку $A$ (0, 1), есть ось $Oy$.

**1064.** Определить угол между левой и правой касательными к кривой: а) $y = \sqrt{1 - e^{-a^2x^2}}$ в точке $x = 0$; б) $y = \arcsin \frac{2x}{1 + x^2}$ в точке $x = 1$.

**1065.** Показать, что касательная к логарифмической спирали $r = ae^{m\varphi}$ ($a$ и $m$ — постоянные) образует постоянный угол с радиусом-вектором точки касания.

**1066.** Определив длину подкасательной к кривой $y = ax^n$, дать способ построения касательной к этой кривой.

**1067.** Доказать, что у параболы $y^2 = 2px$

а) подкасательная равна удвоенной абсциссе точки касания;

б) поднормаль постоянна.

Дать способ построения касательной к параболе.

**1068.** Доказать, что показательная кривая

$$y = a^x \quad (a > 0)$$

имеет постоянную подкасательную. Дать способ построения касательной к показательной кривой.

**1069.** Определить длину нормали к цепной линии

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$$

в любой ее точке $M(x_0, y_0)$.

**1070.** Доказать, что у астроиды

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \quad (a > 0)$$

длина отрезка касательной, заключенного между осями координат, есть величина постоянная.

**1071.** При каком соотношении между коэффициентами $a$, $b$ и $c$ парабола $y = ax^2 + bx + c$ касается оси $Ox$?

**1072.** При каком условии кубическая парабола

$$y = x^3 + px + q$$

касается оси $Ox$?

**1073.** При каком значении параметра $a$ парабола $y = ax^2$ касается кривой $y = \ln x$?

**1074.** Доказать, что кривые

$$y = f(x) \ (f(x) > 0) \text{ и } y = f(x) \sin ax,$$

где $f(x)$ — дифференцируемая функция, касаются друг друга в общих точках.

**1075.** Показать, что семейства гипербол $x^2 - y^2 = a$ и $xy = b$ образуют *ортогональную сетку*, т. е. кривые этих семейств пересекаются под прямыми углами.

**1076.** Доказать, что семейства парабол

$$y^2 = 4a(a-x) \quad (a > 0) \text{ и } y^2 = 4b(b+x) \quad (b > 0)$$

образуют ортогональную сетку.

**1077.** Написать уравнения касательной и нормали к кривой

$$x = 2t - t^2, \quad y = 3t - t^3$$

в точках: а) $t = 0$; б) $t = 1$.

**1078.** Написать уравнения касательной и нормали к кривой

$$x = \frac{2t + t^2}{1 + t^3}, \quad y = \frac{2t - t^2}{1 + t^3}$$

в точках: а) $t = 0$, б) $t = 1$, в) $t = \infty$.

**1079.** Написать уравнение касательной к циклоиде

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

в произвольной точке $t = t_0$. Дать способ построения касательной к циклоиде.

**1080.** Доказать, что трактриса

$$x = a\left(\ln \operatorname{tg} \frac{}{2} + \cos t\right), \quad y = a \sin t \quad (a > 0, \ 0 < t < \pi)$$

имеет отрезок касательной постоянной длины.

Написать уравнения касательной и нормали в заданных точках к следующим кривым:

**1081.** $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1, \quad M(6;\ 6,\ 4).$

**1082.** $xy + \ln y = 1, \quad M(1;\ 1).$

## § 4. Дифференциал функции

1°. Дифференциал функции. Если приращение функции $y = f(x)$ от независимой переменной $x$ может быть представлено в виде

$$\Delta y = A(x)\,dx + o(dx),$$

где $dx = \Delta x$, то линейная часть этого приращения называется *дифференциалом функции* $y$:

$$dy = A(x)\,dx.$$

Для существования дифференциала функции $y = f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы существовала конечная производная $y' = f'(x)$, причем имеем:

$$dy = y'\,dx. \tag{1}$$

Формула (1) сохраняет свою силу и в том случае, если переменная $x$ является функцией от новой независимой переменной (*свойство инвариантности первого дифференциала*).

2°. Оценка малых приращений функции. Для подсчета малых приращений дифференцируемой функции $f(x)$ можно пользоваться формулой

$$f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\,\Delta x,$$

относительная погрешность которой сколь угодно мала при достаточно малом $|\Delta x|$, если $f'(x)\neq 0$.

В частности, если независимая переменная $x$ определяется с предельной абсолютной погрешностью, равной $\Delta_x$, то $\Delta_y$ и $\delta_y$ — предельные абсолютная и относительная погрешности функции $y=f(x)$ — приближенно выражаются следующими формулами:

$$\Delta_y=|y'|\,\Delta_x$$

и

$$\delta_y=\left|\frac{y'}{y}\right|\Delta_x$$

**1083.** Для функции

$$f(x)=x^3-2x+1$$

определить: 1) $\Delta f(1)$; 2) $df(1)$ и сравнить их, если: а) $\Delta x=1$; б) $\Delta x=0{,}1$; в) $\Delta x=0{,}01$.

**1084.** Уравнение движения дается формулой

$$x=5t^2,$$

где $t$ измеряется в секундах и $x$ — в метрах.

Для момента времени $t=2$ с определить $\Delta x$ — приращение пути и $dx$ — дифференциал пути и сравнить их, если:

а) $\Delta t=1$ с; б) $\Delta t=0{,}1$ с; в) $\Delta t=0{,}001$ с.

Найти дифференциал функции $y$, если:

**1085.** $y=\dfrac{1}{x}$. **1086.** $y=\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}$ $(a\neq 0)$.

**1087.** $y=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|$. **1088.** $y=\ln\left|x+\sqrt{x^3+a}\right|$.

**1089.** $y=\arcsin\dfrac{x}{a}$ $(a\neq 0)$.

**1090.** Найти:

а) $d(xe^x)$; б) $d(\sin x - x\cos x)$; в) $d\left(\frac{1}{x^3}\right)$;

г) $d\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$; д) $d\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)$; е) $d\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$;

ж) $d\ln(1-x^2)$; з) $d\left(\arccos\frac{1}{|x|}\right)$;

и) $d\left[\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right]$.

Пусть $u$, $v$, $w$ — дифференцируемые функции от $x$. Найти дифференциал функции $y$, если:

**1091.** $y = uvw$. **1092.** $y = \frac{u}{v^2}$. **1093.** $y = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}$.

**1094.** $y = \operatorname{arctg}\frac{u}{v}$. **1095.** $y = \ln\sqrt{u^2+v^2}$.

**1096.** Найти: а) $\frac{d}{d(x^3)}(x^3-2x^6-x^9)$;

б) $\frac{d}{d(x^2)}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$; в) $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$; г) $\frac{d(\operatorname{tg} x)}{d(\operatorname{ctg} x)}$;

д) $\frac{d(\arcsin x)}{d(\arccos x)}$.

**1097.** В круговом секторе радиус $R = 100$ см и центральный угол $\alpha = 60°$. Насколько изменится площадь этого сектора, если: а) радиус его $R$ увеличить на 1 см; б) угол $\alpha$ уменьшить на 30′?

Дать точное и приближенное решения.

**1098.** Период колебания маятника (в секундах) определяется по формуле $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, где $l$ — длина маятника в сантиметрах и $g = 981$ см/с² — ускорение силы тяжести.

Насколько нужно изменить длину маятника $l = 20$ см, чтобы период $T$ увеличился на 0,05 с?

Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближенно следующие значения:

**1099.** $\sqrt[3]{1{,}02}$. **1100.** $\sin 29°$. **1101.** $\cos 151°$.

**1102.** $\operatorname{arctg} 1{,}05$. **1103.** $\lg 11$.

**1104.** Доказать приближенную формулу

$$\sqrt{a^2+x} \approx a+\frac{x}{2a} \qquad (a>0),$$

где $|x| \ll a$ (соотношение $A \ll B$ между положительными $A$ и $B$ означает, что $A$ весьма мало по сравнению с $B$).

С помощью этой формулы приближенно вычислить:

а) $\sqrt{5}$; б) $\sqrt{34}$; в) $\sqrt{120}$ и сравнить с табличными данными.

**1104.1.** Доказать формулу

$$\sqrt{a^2+x} = a+\frac{x}{2a}-r \qquad (a>0,\ x>0),$$

где

$$0<r<\frac{x^2}{8a^3}.$$

**1105.** Доказать приближенную формулу

$$\sqrt[n]{a^n+x} \approx a+\frac{x}{na^{n-1}} \qquad (a>0),$$

где $|x| \ll a$.

С помощью этой формулы приближенно вычислить:

а) $\sqrt[3]{9}$; б) $\sqrt[4]{80}$; в) $\sqrt[7]{100}$; г) $\sqrt[10]{1000}$.

**1106.** Сторона квадрата $x = 2{,}4$ м $\pm$ 0,05 м. С какими предельной абсолютной и относительной погрешностями можно вычислить площадь этого квадрата?

**1107.** С какой относительной погрешностью допустимо измерить радиус $R$ шара, чтобы объем его можно было определить с точностью до 1 %?

**1108.** Для определения ускорения силы тяжести с помощью колебания маятника пользуются формулой $g = 4\pi^2 l/T^2$, где $l$ — длина маятника, $T$ — полный период колебаний маятника. Как отразится на значении $g$ относительная погрешность $\delta$ при измерении: а) длины $l$; б) периода $T$?

**1109.** Определить абсолютную погрешность десятичного логарифма числа $x$ $(x>0)$, если относительная погрешность этого числа равна $\delta$.

**1110.** Доказать, что углы по логарифмической таблице тангенсов определяются точнее, чем по логарифмической таблице синусов с тем же самым числом десятичных знаков.

## § 5. Производные и дифференциалы высших порядков

1°. Основные определения. *Производные высших порядков* от функции $y = f(x)$ определяются последовательно соотношениями (предполагается, что соответствующие операции имеют смысл!):

$$f^{(n)}(x) = \{f^{(n-1)}(x)\}' \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Если функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f^{(n)}(x)$ на интервале $(a, b)$, то кратко пишут: $d(x) \in C^{(n)}(a, b)$. В частности, если $f(x)$ имеет непрерывные производные всех порядков на $(a, b)$, то употребляется запись: $f(x) \in C^{(\infty)}(a, b)$.

*Дифференциалы высших порядков* от функции $y = f(x)$ последовательно определяются формулами

$$d^n y = d(d^{n-1}y) \qquad (n = 2, 3, \ldots),$$

где принято $d^1 y = dy = y' dx$.

Если $x$ — независимая переменная, то полагают:

$$d^2 x = d^3 x = \ldots = 0.$$

В этом случае справедливы формулы

$$d^n y = y^{(n)} dx^n \quad \text{и} \quad y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

2°. Основные формулы:

I. $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \qquad (a > 0); \qquad (e^x)^{(n)} = e^x.$

II. $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$

III. $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$

IV. $(x^m)^{(n)} = m(m-1)\ldots(m-n+1)\, x^{m-n}.$

V. $(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

3°. Формула Лейбница. Если функции $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ имеют производные $n$-го порядка ($n$-кратно дифференцируемы) то

$$(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(i)} v^{(n-i)},$$

где $u^{(0)} = u$, $v^{(0)} = v$ и $C_n^i$ — число сочетаний из $n$ элементов по $i$.

Аналогично для дифференциала $d^n(uv)$ получаем:

$$d^n(uv) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i d^{n-i}u d^i v,$$

где положено $d^0u = u$ и $d^0v = v$.

Найти $y''$, если:

1111. $y = x\sqrt{1+x^2}$. 1112. $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1113. $y = e^{-x^2}$. 1114. $y = \operatorname{tg} x$.

1115. $y = (1+x^2)\operatorname{arctg} x$. 1116. $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1117. $y = x\ln x$. 1118. $y = \ln f(x)$.

1119. $y = x[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)]$.

1120. Найти $y(0)$, $y'(0)$ и $y''(0)$, если

$$y = e^{\sin x}\cos(\sin x).$$

Пусть $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ — дважды дифференцируемые функции. Найти $y''$, если:

1121. $y = u^2$. 1122. $y = \ln\frac{u}{v}$.

1123. $y = \sqrt{u^2+v^2}$. 1124. $y = u^v$ $(u > 0)$.

Пусть $f(x)$ — трижды дифференцируемая функция. Найти $y'$ и $y'''$, если:

1125. $y = f(x^2)$. 1126. $y = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

1127. $y = f(e^x)$. 1128. $y = f(\ln x)$.

1129. $y = f(\varphi(x))$, где $\varphi(x)$ — достаточное число раз дифференцируемая функция.

1130. Найти $d^2y$ для функции $y = e^x$ в двух случаях: а) $x$ — независимая переменная; б) $x$ — промежуточный аргумент.

Считая $x$ независимой переменной, найти $d^2y$, если:

1131. $y = \sqrt{1+x^2}$. 1132. $y = \frac{\ln x}{x}$. 1133. $y = x^x$.

Пусть $u$ и $v$ — дважды дифференцируемые функции от переменной $x$. Найти $d^2y$, если:

**1134.** $y = uv$. **1135.** $y = \frac{u}{v}$.

**1136.** $y = u^m v^n$ ($m$ и $n$ — постоянные).

**1137.** $y = a^u$ $(a > 0)$. **1138.** $y = \ln\sqrt{u^2+v^2}$.

**1139.** $y = \operatorname{arctg}\frac{u}{v}$.

Найти производные $y'_x$, $y''_{x^2}$, $y'''_{x^3}$ от функции $y = y(x)$, заданной параметрически, если:

**1140.** $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$.

**1141.** $x = a\cos t$, $y = a\sin t$.

**1142.** $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

**1143.** $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$.

**1144.** $x = f'(t)$, $y = tf'(t) - f(t)$.

**1145.** Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема достаточное число раз. Найти производные $x'$, $x''$, $x'''$, $x^{IV}$ обратной функции $x = f^{-1}(y)$, предполагая, что эти производные существуют.

Найти $y'_x$, $y''_{x^2}$, и $y'''_{x^3}$ от функции $y = y(x)$, заданной неявно:

**1146.** $x^2 + y^2 = 25$. Чему равны $y'$, $y''$ и $y'''$ в точке $M(3, 4)$?

**1147.** $y^2 = 2px$. **1148.** $x^2 - xy + y^2 = 1$.

Найти $y'_x$ и $y''_x$, если:

**1149.** $y^2 + 2\ln y = x^4$.

**1150.** $\sqrt{x^2+y^2} = ae^{\operatorname{arctg} y/x}$ $(a > 0)$.

**1151.** Пусть функция $f(x)$ определена и дважды дифференцируема при $x \leqslant x_0$. Как следует подобрать коэффициенты $a$, $b$ и $c$, чтобы функция

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \leqslant x_0; \\ a(x-x_0)^2 + b(x-x_0) + c, & \text{если } x > x_0 \end{cases}$$

была дважды дифференцируема.

**1152.** Точка движется прямолинейно по закону

$$s = 10 + 20t - 5t^2.$$

Найти скорость и ускорение движения. Чему равны скорость и ускорение в момент времени $t = 2$?

**1153.** Точка $M(x, y)$ равномерно движется по окружности $x^2 + y^2 = a^2$, делая один оборот за $T$ с. Найти скорость $v$ и ускорение $j$ проекции точки $M$ на ось $Ox$, если при $t = 0$ точка занимала положение $M_0(a, 0)$.

**1154.** Тяжелая материальная точка $M(x, y)$ брошена в вертикальной плоскости $Oxy$ под углом $\alpha$ к плоскости горизонта с начальной скоростью $v_0$. Составить (пренебрегая сопротивлением воздуха) уравнения движения и определить величину скорости $v$ и ускорения $j$, а также траекторию движения. Чему равны наибольшая высота поднятия точки и дальность полета?

**1155.** Уравнения движения точки

$$x = 4\sin\omega t - 3\cos\omega t,\quad y = 3\sin\omega t + 4\cos\omega t$$

($\omega$ — постоянно).

Определить траекторию движения и величину скорости и ускорения.

Найти производные указанного порядка.

**1156.** $y = x(2x-1)^2(x+3)^3$; найти $y^{(6)}$ и $y^{(7)}$.

**1157.** $y = \dfrac{a}{x^m}$; найти $y'''$.

**1158.** $y = \sqrt{x}$; найти $y^{(10)}$.

**1159.** $y = \dfrac{x^2}{1-x}$; найти $y^{(8)}$.

**1160.** $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$; найти $y^{(100)}$.

**1161.** $y = x^2e^{2x}$; найти $y^{(20)}$.

**1162.** $y = \dfrac{e^x}{x}$, найти $y^{(10)}$.

**1163.** $y = x\ln x$; найти $y^{(5)}$.

**1164.** $y = \dfrac{\ln x}{x}$; найти $y^{(5)}$.

**1165.** $y = x^2\sin 2x$; найти $y^{(50)}$.

**1166.** $y = \dfrac{\cos 3x}{\sqrt[3]{1-3x}}$; найти $y'''$.

1167. $y = \sin x \sin 2x \sin 3x$; найти $y^{(10)}$.

1168. $y = x \operatorname{sh} x$; найти $y^{(100)}$

1169. $y = e^x \cos x$; найти $y^{IV}$.

1170. $y = \sin^2 x \ln x$; найти $y^{(6)}$.

В следующих примерах, считая $x$ независимой переменной, найти дифференциалы указанного порядка:

1171. $y = x^5$; найти $d^5y$.

1172. $y = 1/\sqrt{x}$; найти $d^3y$.

1173. $y = x \cos 2x$; найти $d^{10}y$.

1174. $y = e^x \ln x$; найти $d^4y$.

1175. $y = \cos x \cdot \operatorname{ch} x$; найти $d^6y$.

В следующих примерах найти дифференциалы указанного порядка, если $u$ — функция от $x$, дифференцируемая достаточное число раз:

1176. $y = u^2$; найти $d^{10}y$.

1177. $y = e^u$; найти $d^4y$.

1178. $y = \ln u$; найти $d^3y$.

1179. Найти $d^2y$, $d^3y$ и $d^4y$ от функции $y = f(x)$, считая $x$ функцией от некоторой независимой переменной.

1180. Выразить производные $y''$ и $y'''$ от функции $y = f(x)$ через последовательные дифференциалы переменных $x$ и $y$, не предполагая $x$ независимой переменной.

1181. Показать, что функция $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, где $C_1$ и $C_2$ — произвольные постоянные, удовлетворяет уравнению

$$y'' + y = 0.$$

1182. Показать, что функция $y = C_1 \operatorname{ch} x + C_2 \operatorname{sh} x$, где $C_1$ и $C_2$ — произвольные постоянные, удовлетворяет уравнению

$$y'' - y = 0.$$

1183. Показать, что функция $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$, где $C_1$ и $C_2$ — произвольные постоянные и $\lambda_1$, $\lambda_2$ — постоянные, удовлетворяет уравнению

$$y'' - (\lambda_1 + \lambda_2) y' + \lambda_1 \lambda_2 y = 0.$$

**1184.** Показать, что функция

$$y = x^n\,[C_1\cos(\ln x) + C_2\sin(\ln x)],$$

где $C_1$ и $C_2$ — произвольные постоянные и $n$ — постоянная, удовлетворяет уравнению

$$x^2y'' + (1-2n)\,xy' + (1+n^2)\,y = 0.$$

**1185.** Показать, что функция

$$y = e^{x/\sqrt{2}}\left(C_1\cos\frac{x}{\sqrt{2}} + C_2\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \\ + e^{-x/\sqrt{2}}\left(C_3\cos\frac{x}{\sqrt{2}} + C_4\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right),$$

где $C_1$, $C_2$, $C_3$ и $C_4$ — произвольные постоянные, удовлетворяет уравнению

$$y^{\mathrm{IV}} + y = 0.$$

**1186.** Доказать, что если функция $f(x)$ имеет производную $n$-го порядка, то

$$[f(ax+b)]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b).$$

**1187.** Найти $P^{(n)}(x)$, если

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Найти $y^{(n)}$, если:

**1188.** $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. **1189.** $y = \dfrac{1}{x(1-x)}$.

**1190.** $y = \dfrac{1}{x^2-3x+2}$.

Указание. Разложить функцию на простейшие дроби.

**1191.** $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$. **1192.** $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$.

**1193.** $y = \sin^2 x$. **1194.** $y = \cos^2 x$. **1195.** $y = \sin^3 x$.

**1196.** $y = \cos^3 x$. **1197.** $y = \sin ax \sin bx$.

**1198.** $y = \cos ax \cos bx$. **1199.** $y = \sin ax \cos bx$.

**1200.** $y = \sin^2 ax \cos bx$. **1201.** $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

**1202.** $y = x\cos ax$. **1203.** $y = x^2 \sin ax$.

**1204.** $y = (x^2+2x+2)\,e^{-x}$. **1205.** $y = e^x/x$.

**1206.** $y = e^x \cos x$. **1207.** $y = e^x \sin x$.

**1208.** $y = \ln \frac{a+bx}{a-bx}$.

**1209.** $y = e^{ax}P(x)$, где $P(x)$ — многочлен.

**1210.** $y = x \operatorname{sh} x$.

Найти $d^n y$, если:

**1211.** $y = x^n e^x$. **1212.** $y = \frac{\ln x}{x}$.

**1213.** Доказать равенства:

1) $[e^{ax}\sin(bx+c)]^{(n)} = e^{ax}(a^2+b^2)^{n/2}\sin(bx+c+n\varphi)$

и

2) $[e^{ax}\cos(bx+c)]^{(n)} = e^{ax}(a^2+b^2)^{n/2}\cos(bx+c+n\varphi)$,

где

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{и} \quad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

**1214.** Найти $y^{(n)}$, если:

а) $y = \operatorname{ch} ax \cos bx$; б) $y = \operatorname{ch} ax \sin bx$.

**1215.** Преобразовав функцию $f(x) = \sin^{2p}x$, где $p$ — натуральное число, в тригонометрический многочлен $f(x) = \sum_{k=0}^{p} A_k \cos 2kx$, найти $f^{(n)}(x)$.

Указание. Положить $\sin x = \frac{1}{2i}(t - \bar{t})$, где $t = \cos x + i \sin x$ и $\bar{t} = \cos x - i \sin x$, и воспользоваться формулой Муавра.

**1216.** Найти $f^{(n)}(x)$, если:

а) $f(x) = \sin^{2p+1}x$; б) $f(x) = \cos^{2p}x$;

в) $f(x) = \cos^{2p+1}x$,

где $p$ — целое положительное число (см. предыдущую задачу).

Если

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x),$$

где $i$ — мнимая единица и $f_1(x), f_2(x)$ — действительные функции от действительной переменной $x$, то по определению принимаем:

$$f'(x) = f_1'(x) + if_2'(x).$$

**1217.** Используя тождество

$$\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i}-\frac{1}{x+i}\right),$$

доказать, что

$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(1+x^2)^{(n+1)/2}}\sin[(n+1)\operatorname{arcctg}x].$$

Указание. Применить формулу Муавра.

**1218.** Найти $n$-ю производную от функции

$$f(x)=\operatorname{arctg}x.$$

Найти $f^{(n)}(0)$, если:

**1219.** а) $f(x)=\dfrac{1}{(1-2x)(1+x)}$; б) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$.

**1220.** а) $f(x)=x^2e^{ax}$; б) $f(x)=\operatorname{arctg}x$;

в) $f(x)=\arcsin x$.

**1221.** а) $f(x)=\cos(m\arcsin x)$; б) $f(x)=\sin(m\arcsin x)$.

**1222.** а) $f(x)=(\operatorname{arctg}x)^2$; б) $f(x)=(\arcsin x)^2$.

**1223.** Найти $f^{(n)}(a)$, если

$$f(x)=(x-a)^n\varphi(x),$$

где функция $\varphi(x)$ имеет непрерывную производную $(n-1)$-го порядка в окрестности точки $a$.

**1224.** Доказать, что функция

$$f(x)=\begin{cases} x^{2n}\sin\dfrac{1}{x}, & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0\end{cases}$$

($n$ — натуральное число) в точке $x=0$ имеет производные до $n$-го порядка включительно и не имеет производной $(n+1)$-го порядка.

**1225.** Доказать, что функция

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0\end{cases}$$

бесконечно дифференцируема при $x=0$.

Построить график этой функции.

**1226.** Доказать, что *многочлены Чебышева*

$$T_m(x) = \frac{1}{2^{m-1}} \cos(m \arccos x) \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

удовлетворяют уравнению

$$(1-x^2)\, T''_m(x) - xT'_m(x) + m^2 T_m(x) = 0.$$

**1227.** Доказать, что *многочлены Лежандра*

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m m!} [(x^2-1)^m]^{(m)} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

удовлетворяют уравнению

$$(1-x^2)\, P''_m(x) - 2xP'_m(x) + m(m+1)\, P_m(x) = 0.$$

Указание. Продифференцировать $m+1$ раз равенство $(x^2-1)\, u' = 2mxu$, где $u = (x^2-1)^m$.

**1228.** *Многочлены Чебышева — Лагерра* определяются формулой

$$L_m(x) = e^x (x^m e^{-x})^{(m)} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Найти явное выражение для многочлена $L_m(x)$.

Доказать, что $L_m(x)$ удовлетворяет уравнению

$$xL''_m(x) + (1-x)\, L'_m(x) + mL(x) = 0.$$

Указание. Использовать равенство $xu' + (x-m)\, u = 0$, где $u = x^m e^{-x}$.

**1229.** Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, где $f(u)$ и $\varphi(x)$ — $n$-кратно дифференцируемые функции.

Доказать, что

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{k=1}^{n} A_k(x)\, f^{(k)}(u),$$

где коэффициенты $A_k(x)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ не зависят от функции $f(u)$.

**1230.** Доказать, что для $n$-й производной сложной функции $y = f(x^2)$ справедлива формула

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (2x)^n f^{(n)}(x^2) + \frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2} f^{(n-1)}(x^2) +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4} f^{(n-2)}(x^2) + \ldots$$

1231. *Многочлены Чебышева—Эрмита* определяются формулой

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2} \left(e^{-x^2}\right)^{(m)} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Найти явное выражение многочленов $H_m(x)$.

Доказать, что $H_m(x)$ удовлетворяет уравнению

$$H''_m(x) - 2xH'_m(x) + 2mH_m(x) = 0.$$

Указание. Использовать равенство $u' + 2xu = 0$, где $u = e^{-x^2}$.

1232. Доказать равенство

$$\left(x^{n-1} e^{1/x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} e^{1/x}.$$

Указание. Применить метод математической индукции.

1232.1. Доказать формулу

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^n \ln x) = n!\left(\ln x + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) \quad (x > 0).$$

1232.2. Доказать формулу

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{(2n)!}{x^{2n+1}}[C_n(x)\sin x - S_n(x)\cos x],$$

где

$$C_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

и

$$S_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

1233. Пусть $\frac{d}{dx} = D$ обозначает операцию дифференцирования и

$$f(D) = \sum_{k=0}^{n} p_k(x) D^k$$

—символический дифференциальный многочлен, где $p_k(x)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ — некоторые непрерывные функции от $x$.

Доказать, что

$$f(D)\{e^{\lambda x}u(x)\} = e^{\lambda x}f(D+\lambda)u(x),$$

где $\lambda$ — постоянно.

**1234.** Доказать, что если в уравнении

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k y_x^{(k)} = 0$$

положить $x = e^t$, где $t$ — независимая переменная, то это уравнение примет вид:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k D(D-1)\ldots(D-k+1)y = 0,$$

где $D = \frac{d}{dt}$.

## § 6. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши

1°. Теорема Ролля. Если: 1) функция $f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[a, b]$; 2) $f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ внутри этого сегмента; 3) $f(a) = f(b)$, то существует по меньшей мере одно число $c$ из интервала $(a, b)$ такое, что

$$f'(c) = 0.$$

2°. Теорема Лагранжа. Если: 1) функция $f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[a, b]$; 2) $f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ на интервале $(a, b)$, то

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c), \text{ где } a < c < b$$

(*формула конечных приращений*).

3°. Теорема Коши. Если: 1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны на сегменте $[a, b]$; 2) $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$ на интервале $(a, b)$; 3) $f'^2(x) + g'^2(x) \neq 0$ при $a < x < b$; 4) $g(a) \neq g(b)$, то

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad \text{где } a < c < b.$$

**1235.** Проверить справедливость теоремы Ролля для функции

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3).$$

**1236.** Функция $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ обращается в нуль при $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$, но тем не менее $f'(x) \neq 0$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Объяснить кажущееся противоречие с теоремой Ролля.

1237. Пусть функция $f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ в каждой точке конечного или бесконечного интервала $(a, b)$ и

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to b-0} f(x).$$

Доказать, что $f'(c) = 0$, где $c$ — некоторая точка интервала $(a, b)$.

1238. Пусть: 1) функция $f(x)$ определена и имеет непрерывную производную $(n-1)$-го порядка $f^{(n-1)}(x)$ на сегменте $[x_0, x_n]$; 2) $f(x)$ имеет производную $n$-го порядка $f^{(n)}(x)$ в интервале $(x_0, x_n)$ и 3) выполнены равенства

$$f(x_0) = f(x_1) = \ldots = f(x_n) \quad (x_0 < x_1 < \ldots < x_n).$$

Доказать, что в интервале $(x_0, x_n)$ существует по меньшей мере одна точка $\xi$ такая, что $f^{(n)}(\xi) = 0$.

1239. Пусть: 1) функция $f(x)$ определена и имеет непрерывную производную $(p+q)$-го порядка $f^{(p+q)}(x)$ на сегменте $[a, b]$; 2) $f(x)$, имеет производную $(p+q+1)$-го порядка $f^{(p+q+1)}(x)$ в интервале $(a, b)$; 3) выполнены равенства

$$f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(p)}(a) = 0$$

и

$$f(b) = f'(b) = \ldots = f^{(q)}(b) = 0.$$

Доказать, что в таком случае $f^{(p+q+1)}(c) = 0$, где $c$ — некоторая точка интервала $(a, b)$.

1240. Доказать, что если все корни многочлена

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \qquad (a_0 \neq 0)$$

с действительными коэффициентами $a_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ вещественны, то его последовательные производные $P_n'(x), P_n''(x), \ldots, P_n^{(n-1)}(x)$ также имеют лишь вещественные корни.

1241. Доказать, что у многочлена Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \{(x^2-1)^n\}$$

все корни вещественные и заключены в интервале $(-1, 1)$.

**1242.** Доказать, что у многочлена Чебышева—Лагерра

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

все корни положительные.

**1243.** Доказать, что у многочлена Чебышева—Эрмита

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$$

все корни вещественные.

**1244.** Найти на кривой $y = x^3$ точку, касательная в которой параллельна хорде, соединяющей точки $A(-1, -1)$ и $B(2, 8)$.

**1245.** Верна ли формула конечных приращений для функции $f(x) = 1/x$ на сегменте $[a, b]$, если $ab < 0$?

**1246.** Найти функцию $\theta = \theta(x, \Delta x)$ такую, что

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x f'(x + \theta \Delta x) \quad (0 < \theta < 1),$$

если:

а) $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$; б) $f(x) = x^3$;

в) $f(x) = 1/x$; г) $f(x) = e^x$.

**1246.1.** Пусть $f(x) \in C^{(1)}(-\infty, +\infty)$ и для любых $x$ и $h$ справедливо тождество:

$$f(x + h) - f(x) \equiv hf'(x).$$

Доказать, что $f(x) = ax + b$, где $a$ и $b$ — постоянные.

**1246.2.** Пусть $f(x) \in C^{(2)}(-\infty, +\infty)$ и для любых $x$ и $h$ справедливо тождество

$$f(x+h) - f(x) \equiv hf'\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

Доказать, что $f(x) = ax^2 + bx + c$, где $a$, $b$ и $c$ — постоянные.

**1247.** Доказать, что если $x \geqslant 0$, то

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x + \theta(x)}},$$

где

$$\frac{1}{4} \leqslant \theta(x) \leqslant \frac{1}{2},$$

причем $\lim\limits_{x \to +0} \theta(x) = 1/4$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \theta(x) = 1/2$.

1248. Пусть

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x^2}{2} & \text{при } 0\leqslant x\leqslant 1,\\[2mm] \dfrac{1}{x} & \text{при } 1<x<+\infty.\end{cases}$$

Определить промежуточное значение $c$ формулы конечных приращений для функции $f(x)$ на сегменте $[0, 2]$.

1249. Пусть $f(x)-f(0)=xf'(\xi(x))$, где $0<\xi(x)<x$. Доказать, что если

$$f(x)=x\sin(\ln x) \text{ при } x>0 \text{ и } f(0)=0,$$

то функция $\xi=\xi(x)$ разрывна в любом сколь угодно малом интервале $(0, \xi)$, где $\varepsilon>0$.

1250. Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f'(x)$ в интервале $(a, b)$. Можно ли для всякой точки $\xi$ из $(a, b)$ указать две другие точки $x_1$ и $x_2$ из этого интервала такие, что

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi) \quad (x_1<\xi<x_2)?$$

Рассмотреть пример: $f(x)=x^3$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$, где $\xi=0$.

1251. Доказать неравенства:

а) $|\sin x-\sin y|\leqslant|x-y|$;

б) $py^{p-1}(x-y)\leqslant x^p-y^p\leqslant px^{p-1}(x-y)$,

если $0<y<x$ и $p>1$;

в) $|\operatorname{arctg} a-\operatorname{arctg} b|\leqslant|a-b|$;

г) $\dfrac{a-b}{a}<\ln\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-b}{b}$, если $0<b<a$.

1252. Объяснить, почему не верна формула Коши для функций

$$f(x)=x^2 \text{ и } g(x)=x^3$$

на сегменте $[-1, 1]$.

1253. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на сегменте $[x_1, x_2]$, причем $x_1x_2>0$. Доказать, что

$$\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2\\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi),$$

где $x_1<\xi<x_2$.

1254. Доказать, что если функция $f(x)$ дифференцируема, но не ограничена на конечном интервале

$(a, b)$, то ее производная $f'(x)$ также не ограничена на интервале $(a, b)$. Обратная теорема не верна (построить пример).

**1255.** Доказать, что если функция $f(x)$ имеет в конечном или бесконечном интервале $(a, b)$ ограниченную производную $f'(x)$, то $f(x)$ равномерно непрерывна на $(a, b)$.

**1256.** Доказать, что если функция $f(x)$ дифференцируема в бесконечном интервале $(x_0, +\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, т. е. $f(x) = o(x)$ при $x \to +\infty$.

**1257.** Доказать, что если функция $f(x)$ дифференцируема в бесконечном интервале $(x_0, +\infty)$ и

$$f(x) = o(x) \text{ при } x \to +\infty,$$

то

$$\varliminf_{x\to+\infty} |f'(x)| = 0.$$

В частности, если существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = k$, то $k = 0$.

**1258.** а) Доказать, что если: 1) функция $f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[x_0, X]$; 2) $f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ в интервале $(x_0, X)$; 3) существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{x\to x_0+0} f'(x) = f'(x_0+0)$, то существует соответственно конечная или бесконечная односторонняя производная $f'_+(x_0)$ и $f'_+(x_0) = f'(x_0+0)$.

б) Показать, что для функции

$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x} \quad (x \neq 1) \quad \text{и} \quad f(1) = 0$$

существует конечный предел $\lim\limits_{x\to1} f'(x)$, однако функция $f(x)$ не имеет односторонних производных $f'_-(1)$ и $f'_+(1)$. Дать геометрическую иллюстрацию этого факта.

Однако в этой точке существуют обобщенные односторонние производные (см. **1009.1**).

**1259.** Доказать, что если $f'(x) = 0$ при $a < x < b$, то

$$f(x) = \text{const при } a < x < b.$$

**1260.** Доказать, что единственная функция $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, имеющая постоянную произ-

водную

$$f'(x) = k,$$

есть линейная:

$$f(x) = kx + b.$$

**1261.** Что можно сказать о функции $f(x)$, если $f^{(n)}(x) = 0$?

**1261.1.** Пусть $f(x) \in C^{(\infty)}(-\infty, +\infty)$ и для каждого $x$ существует натуральное число $n_x$ ($n_x \leqslant n$) такое, что

$$f^{(n_x)}(x) = 0.$$

Доказать, что функция $f(x)$ есть полином.

**1262.** Доказать, что единственная функция $y = y(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, удовлетворяющая уравнению

$$y' = \lambda y \quad (\lambda = \text{const}),$$

есть показательная;

$$y = Ce^{\lambda x},$$

где $C$ — произвольная постоянная.

Указание. Рассмотреть $(ye^{-\lambda x})'$.

**1263.** Проверить, что функции

$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x} \quad \text{и} \quad g(x) = \operatorname{arctg} x$$

имеют одинаковые производные в областях:

1) $x < 1$ и 2) $x > 1$.

Вывести зависимость между этими функциями.

**1264.** Доказать тождества:

а) $2\operatorname{arctg} x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2} = \pi \operatorname{sgn} x$ при $|x| \geqslant 1$;

б) $3\arccos x - \arccos(3x - 4x^3) = \pi$ при $|x| \leqslant \frac{1}{2}$.

**1265.** Доказать, что если: 1) функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$; 2) имеет конечную производную $f'(x)$ внутри него; 3) не является линейной, то

в интервале $(a, b)$ найдется по меньшей мере одна точка $c$ такая, что

$$|f'(c)| > \left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|.$$

Дать геометрическую иллюстрацию этого факта.

**1266.** Длказать, что если: 1) функция $f(x)$ имеет вторую производную $f''(x)$ на сегменте $[a, b]$ и 2) $f'(a) = f'(b) = 0$, то в интервале $(a, b)$ существует по меньшей мере одна точка $c$ такая, что

$$|f''(c)| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

**1267.** Автомобиль, начав двигаться из некоторого начального пункта, закончил свой путь в $t$ с, пройдя при этом расстояние $s$ м. Доказать, что в некоторый момент времени абсолютная величина ускорения движения автомобиля была не меньше

$$\frac{4s}{t^2}\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

## § 7. Возрастание и убывание функции. Неравенства

1°. Возрастание и убывание функции. Функция $f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на сегменте $[a, b]$, если

$$f(x_2) > f(x_1) \text{ при } a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$$

(или соответственно $f(x_2) < f(x_1)$ при $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$).

Если дифференцируемая функция $f(x)$ возрастает (убывает) на сегменте $[a, b]$, то

$$f'(x) \geqslant 0 \text{ при } a \leqslant x \leqslant b \text{ (или } f'(x) \leqslant 0 \text{ при } a \leqslant x \leqslant b).$$

2°. Достаточный признак возрастания (убывания функции). Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и внутри него имеет положительную (отрицательную) производную $f'(x)$, то функция $f(x)$ возрастает (убывает) на $[a, b]$.

Определить промежутки монотонности в строгом смысле (возрастания или убывания) следующих функций:

**1268.** $y = 2 + x - x^2$. **1269.** $y = 3x - x^3$.

**1270.** $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$. **1271.** $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x+100}$ $(x \geqslant 0)$.

**1272.** $y = x + \sin x$. **1273.** $y = x + |\sin 2x|$.

**1274.** $y = \cos \frac{\pi}{x}$. **1275.** $y = \frac{x^2}{2^x}$.

**1276.** $y = x^n e^{-x}$ $(n > 0,\ x \geqslant 0)$. **1277.** $y = x^2 - \ln x^2$.

**1278.** $f(x) = x\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sin \ln x\right)$, если $x > 0$ и $f(0) = 0$.

**1279.** Доказать, что при увеличении числа сторон $n$ периметр $p_n$ правильного $n$-угольника, вписанного в окружность, возрастает, а периметр $P_n$ правильного $n$-угольника, описанного около этой окружности, убывает. Пользуясь этим, доказать, что $p_n$ и $P_n$ имеют общий предел при $n \to \infty$.

**1280.** Доказать, что функция $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ возрастает на интервалах $(-\infty, -1)$ и $(0, +\infty)$.

**1281.** Доказать, что целая рациональная функция $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ $(n \geqslant 1,\ a_n \neq 0)$ является монотонной (в строгом смысле!) в интервалах $(-\infty, -x_0)$ и $(x_0, +\infty)$, где $x_0$ — достаточно большое положительное число.

**1282.** Доказать, что рациональная функция

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m} \qquad (a_n b_m \neq 0),$$

отличная от тождественной постоянной, монотонна (в строгом смысле!) в интервалах $(-\infty, -x_0)$ и $(x_0, +\infty)$, где $x_0$ — достаточно большое положительное число.

**1283.** Производная монотонной функции обязательно ли является монотонной? Рассмотреть пример: $f(x) = x + \sin x$.

**1284.** Доказать, что если $\varphi(x)$ — монотонно возрастающая дифференцируемая функция и

$$|f'(x)| \leqslant \varphi'(x) \text{ при } x \geqslant x_0,$$

то

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varphi(x) - \varphi(x_0) \text{ при } x \geqslant x_0.$$

Дать геометрическую интерпретацию этого факта.

**1285.** Пусть функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $a \leqslant x < +\infty$ и сверх того $f'(x) > k > 0$ при $x > a$, где $k$ — постоянная.

Доказать, что если $f(a) < 0$, то уравнение $f(x) = 0$ имеет один и только один действительный корень в интервале $\left(a,\ a - \frac{f(a)}{k}\right)$.

**1286.** Функция $f(x)$ называется *возрастающей в точке* $x_0$, если в некоторой окрестности $|x - x_0| < \delta$ знак приращения функции $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ совпадает со знаком приращения аргумента $\Delta x_0 = x - x_0$.

Доказать, что если функция $f(x)$ $(a < x < b)$ возрастает в каждой точке некоторого конечного или бесконечного интервала $(a, b)$, то она является возрастающей на этом интервале.

**1287.** Показать, что функция

$$f(x) = x + x^2 \sin\frac{2}{x}, \text{ если } x \neq 0 \text{ и } f(0) = 0,$$

возрастает в точке $x = 0$, но не является возрастающей ни в каком интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$, окружающем эту точку, где $\varepsilon > 0$ произвольно мало.

Построить эскиз графика функции.

**1288.** Доказать теорему: если 1) функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ $n$-кратно дифференцируемы; 2) $\varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0)$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$; 3) $\varphi^{(n)}(x) > \psi^{(n)}(x)$ при $x > x_0$, то имеет место неравенство

$$\varphi(x) > \psi(x) \text{ при } x > x_0.$$

**1289.** Доказать следующие неравенства:

а) $e^x > 1 + x$ при $x \neq 0$;

б) $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x$ при $x > 0$;

в) $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$ при $x > 0$;

г) $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$;

д) $(x^\alpha + y^\alpha)^{1/\alpha} > (x^\beta + y^\beta)^{1/\beta}$ при $x > 0$, $y > 0$ и $0 < \alpha < \beta$.

Дать геометрическую иллюстрацию неравенств а) — г).

**1290.** Доказать неравенство

$$\frac{2}{\pi} x < \sin x < x \quad \text{при } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

**1291.** Доказать, что при $x > 0$ имеет место неравенство

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$

**1292.** У арифметической и геометрической прогрессий число членов и крайние члены соответственно одинаковы и все члены прогрессий положительны. Доказать, что у арифметической прогрессии сумма членов больше, чем у геометрической.

**1293.** Исходя из неравенства

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k x + b_k)^2 \geqslant 0,$$

где $x$, $a_k$, $b_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ вещественны, доказать *неравенство Коши*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

**1294.** Доказать, что среднее арифметическое положительных чисел не больше среднего квадратичного этих же чисел, т. е.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \leqslant \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2}.$$

**1295.** Доказать, что среднее геометрическое положительных чисел не больше среднего арифметического этих же чисел, т. е.

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leqslant \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n).$$

Указание. Применить метод математической индукции.

**1296.** *Средней порядка* $s$ для двух положительных чисел $a$ и $b$ называется функция, определяемая равенством

$$\Delta_s(a, b) = \left(\frac{a^s + b^s}{2}\right)^{1/s}, \quad \text{если } s \neq 0,$$

и

$$\Delta_0(a, b) = \lim_{s \to 0} \Delta_s(a, b).$$

В частности, получаем: при $s = -1$ *среднее гармоническое*; при $s = 0$ *среднее геометрическое* (доказать!);

при $s = 1$ *среднее арифметическое*; при $s = 2$ *среднее квадратичное*.

Доказать, что:

1) $\min(a, b) \leqslant \Delta_s(a, b) \leqslant \max(a, b)$;

2) функция $\Delta_s(a, b)$ при $a \neq b$ есть возрастающая функция переменной $s$;

3) $\lim\limits_{s \to -\infty} \Delta_s(a, b) = \min(a, b)$;

$\lim\limits_{s \to +\infty} \Delta_s(a, b) = \max(a, b)$.

Указание. Рассмотреть $\frac{d}{ds}[\ln \Delta_s(a, b)]$.

**1297(н).** Доказать неравенства:

а) $x^\alpha - 1 > \alpha(x-1)$ при $\alpha \geqslant 2$, $x > 1$;

б) $\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{x-a}$, если $n > 1$, $x > a > 0$;

в) $1 + 2\ln x \leqslant x^2$ при $x > 0$.

## § 8. Направление вогнутости. Точки перегиба

1°. Достаточные условия вогнутости. График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется *вогнутым вверх* или *выпуклым вниз* (*вогнутым вниз* или *выпуклым вверх*) на сегменте $[a, b]$, если отрезок кривой

$$y = f(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

расположен выше (соответственно ниже) касательной, проведенной в любой точке этого отрезка. Достаточным условием вогнутости графика вверх (вниз), в предположении существования второй производной $f''(x)$ при $a \leqslant x \leqslant b$, является выполнение неравенства

$$f''(x) > 0 \quad (f''(x) < 0) \text{ при } a < x < b.$$

2°. Достаточное условие точки перегиба. Точки, в которых меняется направление вогнутости графика функции, называются *точками перегиба*. Точка $x_0$, для которой либо $f''(x_0) = 0$, либо $f''(x_0)$ не существует, причем $f'(x_0)$ имеет смысл, есть точка перегиба, если $f''(x)$ меняет свой знак при переходе через значение $x_0$.

**1298.** Исследовать направление вогнутости кривой

$$y = 1 + \sqrt[3]{x}$$

в точках $A(-1, 0)$, $B(1, 2)$ и $C(0, 0)$.

Найти промежутки вогнутости определенного знака и точки перегиба графиков следующих функций:

1299. $y = 3x^2 - x^3$. 1300. $y = \frac{a^2}{a^2 + x^2}$ $(a > 0)$.

1301. $y = x + x^{5/3}$. 1302. $y = \sqrt{1 + x^2}$.

1303. $y = x + \sin x$. 1304. $y = e^{-x^2}$.

1305. $y = \ln(1 + x^2)$. 1306. $y = x \sin(\ln x)$ $(x > 0)$.

1307. $y = x^x$ $(x > 0)$.

1308. Показать, что кривая

$$y = \frac{x+1}{x^2+1}$$

имеет три точки перегиба, лежащие на одной прямой. Построить график этой функции.

1309. При каком выборе параметра $h$ «кривая вероятности»

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} \quad (h > 0)$$

имеет точки перегиба $x = \pm \sigma$?

1310. Исследовать направление вогнутости циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \; y = a(1 - \cos t) \; (a > 0).$$

1311. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в промежутке $a \leqslant x < +\infty$, причем: 1) $f(a) = A > 0$; 2) $f'(a) < 0$; 3) $f''(x) \leqslant 0$ при $x > a$.

Доказать, что уравнение $f(x) = 0$ имеет один и только один действительный корень в интервале $(a, +\infty)$.

1312. Функция $f(x)$ называется *выпуклой снизу* (*сверху*) на интервале $(a, b)$, если для любых точек $x_1$ и $x_2$ из этого интервала и произвольных чисел $\lambda_1$ и $\lambda_2$ $(\lambda_1 > 0, \; \lambda_2 > 0, \; \lambda_1 + \lambda_2 = 1)$ имеет место неравенство

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

(или соответственно противоположное неравенство

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) > \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)).$$

Доказать, что: 1) функция $f(x)$ выпукла снизу на $(a, b)$, если $f''(x) > 0$, при $a < x < b$; 2) $f(x)$ выпукла сверху на $(a, b)$, если, $f''(x) < 0$, при $a < x < b$.

**1313.** Показать, что функции

$$x^n \ (n > 1), \ e^x, \ x \ln x$$

выпуклы снизу на интервале $(0, +\infty)$, а функции

$$x^n \ (0 < n < 1), \ \ln x$$

выпуклы сверху на интервале $(0, +\infty)$.

**1314.** Доказать неравенства и выяснить их геометрический смысл:

а) $\frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n \quad (x>0, \ y>0, \ x \neq y, \ n>1)$;

б) $\frac{e^x + e^y}{2} > e^{x+y/2} \quad (x \neq y)$;

в) $x \ln x + y \ln y > (x+y) \ln \frac{x+y}{2}$, если $x>0$ и $y>0$.

**1314.1.** Пусть $f''(x) \geqslant 0$ при $a \leqslant x \leqslant b$.
Доказать, что

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$$

при любых $x_1, x_2 \in [a, b]$.

**1315.** Доказать, что ограниченная выпуклая функция всюду непрерывна и имеет односторонние левую и правую производные.

**1316.** Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в интервале $(a, b)$ и $f''(\xi) \neq 0$, где $a < \xi < b$.

Доказать, что в интервале $(a, b)$ можно найти два значения $x_1$ и $x_2$ такие, что

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi).$$

**1317.** Доказать, что если функция $f(x)$ дважды дифференцируема в бесконечном интервале $(x_0, +\infty)$ и

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0,$$

то в интервале $(x_0, +\infty)$ имеется по меньшей мере одна точка $\xi$ такая, что $f''(\xi) = 0$.

## § 9. Раскрытие неопределенностей

1-й случай правила Лопиталя (раскрытие неопределенности вида $\frac{0}{0}$). Если: 1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны в некоторой окрестности $U_\varepsilon$ *) точки $a$, где $a$ — число или символ $\infty$, и при $x \to a$ обе стремятся к нулю:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0;$$

2) производные $f'(x)$ и $g'(x)$ существуют в окрестности $U_\varepsilon$ точки $a$, за исключением, быть может, самой точки $a$, причем одновременно не обращаются в нуль при $x \neq a$; 3) существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

то имеем:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2-й случай правила Лопиталя (раскрытие неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$). Если: 1) функции $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to a$ обе стремятся к бесконечности:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty,$$

где $a$ — число или символ $\infty$;

2) производные $f'(x)$ и $g'(x)$ существуют для всех $x$, принадлежащих некоторой окрестности $U_\varepsilon$ точки $a$ и отличных от $a$, причем

$$f'^2(x) + g'^2(x) \neq 0 \text{ при } x \in U_\varepsilon \text{ и } x \neq a;$$

3) существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

то

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Аналогичные правила справедливы для односторонних пределов.

Раскрытие неопределенностей видов $0\cdot\infty$, $\infty - \infty$, $1^\infty$, $0^0$ и т. п. путем алгебраических преобразований и логарифмирова-

*) Под окрестностью $U_\varepsilon$ точки $a$ понимается совокупность чисел $x$, удовлетворяющих неравенству: 1) $0 < |x-a| < \varepsilon$, если $a$ — число, и 2) $|x| > 1/\varepsilon$, если $a$ — символ $\infty$.

ния приводится к раскрытию неопределенностей двух основных типов:

$$\frac{0}{0} \text{ и } \frac{\infty}{\infty}.$$

Определить значения следующих выражений:

1318. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$. 1319. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch} x-\cos x}{x^2}$.

1320. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-x}{x-\sin x}$. 1321. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\operatorname{tg} 4x-12\operatorname{tg} x}{3\sin 4x-12\sin x}$.

1322. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$. 1323. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\operatorname{ctg} x-1}{x^2}$.

1324. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}-1}{2\sin^2 x-1}$. 1325. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$.

1326. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$. 1327. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}$.

1328. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x\sqrt{x}}\left(\sqrt{a}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{a}}-\sqrt{b}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{b}}\right)$.

1329. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-a^{\sin x}}{x^3}$ $(a>0)$. 1330. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^x-x}{\ln x-x+1}\right)$.

1331. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$. 1332. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$.

1333. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$. 1334. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\operatorname{th} x}-\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$.

1335. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{Arsh}(\operatorname{sh} x)-\operatorname{Arsh}(\sin x)}{\operatorname{sh} x-\sin x}$, где $\operatorname{Arsh} x = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

1336. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\varepsilon}$ $(\varepsilon>0)$.

1337. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^{ax}}$ $(a>0,\ n>0)$. 1338. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-1/x^2}}{x^{100}}$.

1339. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-0{,}01x}$. 1340. $\lim\limits_{x\to 1-0}\ln x\cdot\ln(1-x)$.

1341. $\lim\limits_{x\to+0}x^\varepsilon\ln x$ $(\varepsilon>0)$. 1342. $\lim\limits_{x\to+0}x^x$.

1343. $\lim\limits_{x\to 0}x^{x^x-1}$. 1344. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^{x^x}-1\right)$.

1345. $\lim\limits_{x\to+0} x^{k/(1+\ln x)}$. 1346. $\lim\limits_{x\to1} x^{1/(1-x)}$.

1347. $\lim\limits_{x\to1} (2-x)^{\operatorname{tg}\pi x/2}$. 1348. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg}2x}$.

1349. $\lim\limits_{x\to0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$. 1350. $\lim\limits_{x\to+0}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{x}$.

1351. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{1/x}$. 1352. $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} a}\right)^{\operatorname{ctg}(x-a)}$.

1353. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{a^x-x\ln a}{b^x-x\ln b}\right)^{1/x^2}$. 1354. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.

1355. $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$. 1356. $\lim\limits_{x\to0}\left(\operatorname{ctg} x-\frac{1}{x}\right)$.

1357. $\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right]$.

1358. $\lim\limits_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}$ $(a>0)$. 1359. $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$.

1360. $\lim\limits_{x\to0}\frac{(a+x)^x-a^x}{x^2}$ $(a>0)$.

1361. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^{x}$. 1362. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\operatorname{th} x)^{x}$.

1363. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{1/x^2}$. 1363.1. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$.

1363.2. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{1/x^2}$ 1363.3. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{1/x^2}$.

1363.4. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\operatorname{Arsh} x}{x}\right)^{1/x^2}$, где $\operatorname{Arsh} x=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

1364. $\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{(1+x)^{1/x}}{e}\right]^{1/x}$. 1365. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{1/x}$.

1366. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch} x}\right)^{1/x^2}$. 1367. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\operatorname{ch} x}{\sqrt[m]{\operatorname{ch} x}-\sqrt[n]{\operatorname{ch} x}}$.

1368. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\operatorname{cth} x}$. 1368.1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$.

1369. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\cdot\frac{\ln(e^x+x)}{x}\right]$.

**1370.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+a)^{1+(1/x)}-x^{1+1/(x+a)}\right]$.

**1371.** Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{y}{x}$, если кривая $y=f(x)$ входит при $x\to 0$ в начале координат (0, 0) ($\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$) под углом $\alpha$.

**1372.** Доказать, что $\lim\limits_{x\to+0} x^{f(x)}=1$, если непрерывная кривая $y=f(x)$ входит при $x\to+0$ в начало координат ($\lim\limits_{x\to+0} f(x)=0$) и при $0<x<\varepsilon$ целиком остается внутри острого угла, образованного прямыми: $y=-kx$ и $y=kx$ ($k\neq\infty$).

**1373.** Доказать, что если для функции $f(x)$ существует вторая производная $f''(x)$, то

$$f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}.$$

**1373.1.** Исследовать на дифференцируемость в точке $x=0$ функцию:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}, & \text{если } x\neq 0;\\[2ex] \dfrac{1}{2}, & \text{если } x=0.\end{cases}$$

**1373.2.** Найти асимптоту кривой $y=\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}$ $(x>0)$.

**1374.** Исследовать возможность применения правила Лопиталя к следующим примерам:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-2x}(\cos x+2\sin x)+e^{-x^2}\sin^2 x}{e^{-x}(\cos x+\sin x)}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x+\sin x\cos x}{(x+\sin x\cos x)\,e^{\sin x}}$.

**1375.** Найти предел отношения площади кругового сегмента, имеющего хорду $b$ и стрелку $h$, к площади равнобедренного треугольника, вписанного в этот сегмент, если дуга сегмента при неизменном радиусе $R$