стремится к нулю. Пользуясь полученным результатом, вывести приближенную формулу для площади сегмента:

$$S \approx \frac{2}{3} bh.$$

§ 10. Формула Тейлора

1°. Локальная формула Тейлора. Если 1) функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности $|x-x_0| < \varepsilon$ точки x_0; 2) $f(x)$ имеет в этой окрестности производные $f'(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)$ до $(n-1)$-го порядка включительно; 3) в точке x_0 существует производная n-го порядка $f^{(n)}(x_0)$, то

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + o(x-x_0)^n, \tag{1}$$

где

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

В частности, при $x_0 = 0$ имеем:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n). \tag{2}$$

При указанных условиях представление (1) единственно.

Если в точке x_0 существует производная $f^{(n+1)}(x_0)$, то остаточный член в формуле (1) может быть взят в виде $O^*((x-x_0)^{n+1})$.

Из локальной формулы Тейлора (2) получаем следующие пять важных разложений:

I. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$

II. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}).$

III. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$

IV. $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \ldots$

$$\ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n + o(x^n).$$

V. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n).$

2°. Формула Тейлора. Если 1) функция $f(x)$ определена на сегменте $[a, b]$; 2) $f(x)$ имеет на этом сегменте

непрерывные производные $f'(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)$; 3) при $a < x < b$ существует конечная производная $f^{(n)}(x)$, то

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b),$$

где

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n \quad (0<\theta<1)$$

(*остаточный член в форме Лагранжа*), или

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(a+\theta_1(x-a))}{(n-1)!}(1-\theta_1)^{n-1}(x-a)^n \quad (0<\theta_1<1)$$

(*остаточный член в форме Коши*).

1376. Многочлен

$$P(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3$$

расположить по целым неотрицательным степеням двучлена $x + 1$.

Написать разложения по целым неотрицательным степеням переменной x до членов указанного порядка включительно следующих функций:

1377. $f(x) = \dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ до члена с x^4. Чему равно $f^{(4)}(0)$?

1378. $\dfrac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}$ до члена с x^2.

1379. $\sqrt[m]{a^m+x}$ $(a>0)$ до члена с x^2.

1380. $\sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x}$ до члена с x^3.

1381. e^{2x-x^2} до члена с x^5.

1382. $\dfrac{x}{e^x-1}$ до члена с x^4.

1383. $\sqrt[3]{\sin x^3}$ до члена с x^{13}.

1384. $\ln\cos x$ до члена с x^6

1385. $\sin(\sin x)$ до члена с x^3

1386. $\operatorname{tg} x$ до члена с x^5.

1387. $\ln\dfrac{\sin x}{x}$ до члена с x^6.

1388. Найти три члена разложения функции $f(x) = \sqrt{x}$ по целым неотрицательным степеням разности $x-1$.

1389. Функцию $f(x) = x^x - 1$ разложить по целым неотрицательным степеням бинома $x-1$ до члена с $(x-1)^3$.

1390. Функцию $y = a \operatorname{ch}\frac{x}{a}$ $(a > 0)$ в окрестности точки $x = 0$ приближенно заменить параболой 2-го порядка.

1391. Функцию $f(x) = \sqrt{1+x^2} - x$ $(x > 0)$ разложить по целым неотрицательным степеням дроби $\frac{1}{x}$ до члена с $\frac{1}{x^3}$.

1392. Найти разложение функции $f(h) = \ln(x+h)$ $(x > 0)$ по целым неотрицательным степеням приращения h до члена с h^n (n — натуральное число).

1393. Пусть

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x+\theta h)$$

$(0 < \theta < 1)$, причем $f^{(n+1)}(x) \neq 0$.

Доказать, что $\lim\limits_{n\to 0} \theta = \frac{1}{n+1}$.

1393.1. Пусть при $x \to 0$ имеем

$$f(x) = 1 + kx + o(x).$$

Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0} [f(x)]^{1/x} = e^k$.

1393.2. Пусть $f(x) \in C^{(2)}[0, 1]$ и $f(0) = f(1) = 0$, причем $|f''(x)| \leqslant A$ при $x \in (0, 1)$. Доказать, что $|f'(x)| \leqslant \frac{A}{2}$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$.

1393.3. Пусть $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ — дважды дифференцируемая функция и

$$M_k = \sup_{-\infty<x<+\infty} |f^{(k)}(x)| < +\infty \qquad (k = 0, 1, 2).$$

Доказать неравенство $M_1^2 \leqslant 2M_0M_2$.

1394. Оценить абсолютную погрешность приближенных формул:

а) $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$;

б) $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ при $|x| \leqslant \frac{1}{2}$;

в) $\operatorname{tg} x \approx x + \frac{x^3}{3}$ при $|x| \leqslant 0{,}1$;

г) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$.

1395. Для каких x справедлива с точностью до 0,0001 приближенная формула: $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$?

1395.1. Доказать формулу

$$\sqrt[n]{a^n + x} = a + \frac{x}{na^{n-1}} - r$$

$$(n > 2,\ a > 0,\ x > 0),\quad 0 < r < \frac{n-1}{2n^2} \cdot \frac{x^2}{a^{n-1}}.$$

1396. С помощью формулы Тейлора приближенно вычислить:

а) $\sqrt[3]{30}$; б) $\sqrt[5]{250}$; в) $\sqrt[12]{4000}$;

г) $\sqrt{e}$; д) $\sin 18°$; е) $\ln 1{,}2$;

ж) $\operatorname{arctg} 0{,}8$; з) $\arcsin 0{,}45$; и) $(1{,}1)^{1{,}2}$

и оценить погрешность.

1397. Вычислить:

а) e с точностью до 10^{-3};

б) $\sin 1°$ » » » 10^{-6};

в) $\cos 9°$ » » » 10^{-5};

г) $\sqrt{5}$ » » » 10^{-4};

д) $\lg 11$ » » » 10^{-5}.

Используя разложения I—V, найти следующие пределы:

1398. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$. **1399.** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$.

1400. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}\right)$.

1401. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5}\right)$.

1402. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{1/x}-\sqrt{x^6+1}\right]$.

1403. $\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}$ $(a>0)$.

1404. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$.

1405. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$. 1406. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\operatorname{ctg}x\right)$.

1406.1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$.

1406.2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$. 1406.3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{sh}(\operatorname{tg}x)-x}{x^3}$.

Для бесконечно малой при $x\to0$ величины y определить главный член вида Cx^n (C — постоянная), если

1407. $y=\operatorname{tg}(\sin x)-\sin(\operatorname{tg}x)$.

1408. $y=(1+x)^x-1$. 1409. $y=1-\frac{(1+x)^{1/x}}{e}$.

1410. При каком подборе коэффициентов a и b величина

$$x-(a+b\cos x)\sin x$$

будет бесконечно малой 5-го порядка относительно x?

1410.1. Подобрать коэффициенты A и B так, чтобы при $x\to0$ имело место асимптотическое равенство

$$\operatorname{ctg}x=\frac{1+Ax^2}{x+Bx^3}+O(x^5).$$

1410.2. При каких коэффициентах A, B, C и D справедлива при $x\to0$ асимптотическая формула

$$e^x=\frac{1+Ax+Bx^2}{1+Cx+Dx^2}+O(x^5).$$

1411. Считая $|x|$ малой величиной, вывести простые приближенные формулы для следующих выражений:

а) $\frac{1}{R^2}-\frac{1}{(R+x)^2}$ $(R>0)$;

б) $\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}-\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$;

в) $\frac{A}{x}\left[1-\left(1+\frac{x}{100}\right)^{-n}\right]$; г) $\frac{\ln 2}{\ln\left(1+\frac{x}{101}\right)}$.

1412. Считая x малым по абсолютной величине, вывести приближенную формулу вида $x = \alpha \sin x + \beta \operatorname{tg} x$ с точностью до члена с x^5.

Применить эту формулу для приближенного спрямления дуг малой угловой величины.

1413. Оценить относительную погрешность следующего *правила Чебышева*: круговая дуга приближенно равна сумме боковых сторон равнобедренного треугольника, построенного на хорде этой дуги и имеющего высотой $\sqrt{4/3}$ ее стрелки.

§ 11. Экстремум функции. Наибольшее и наименьшее значения функции

1°. Необходимое условие экстремума. Говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум (*максимум* или *минимум*), если функция определена в двухсторонней окрестности точки x_0 и для всех точек x некоторой области: $0 < |x-x_0| < \delta$, выполнено соответственно неравенство

$$f(x) < f(x_0) \text{ или } f(x) > f(x_0).$$

В точке экстремума производная $f'(x_0) = 0$, если она существует.

2°. Достаточные условия экстремума. *Первое правило.* Если 1) функция $f(x)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности $|x-x_0| < \delta$ точки x_0 такой, что $f'(x_0) = 0$ или не существует (*критическая точка*); 2) $f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ в области $0 < |x-x_0| < \delta$; 3) производная $f'(x)$ сохраняет определенный знак слева от x_0 и справа от x_0, то поведение функции $f(x)$ характеризуется следующей таблицей:

	Знак производной		Вывод
	$x < x_0$	$x > x_0$	
I	+	+	Экстремума нет
II	+	—	Максимум
III	—	+	Минимум
IV	—	—	Экстремума нет

Второе правило. Если функция $f(x)$ имеет вторую производную $f''(x)$ и в некоторой точке x_0 выполнены условия

$$f'(x_0) = 0 \text{ и } f''(x_0) \neq 0,$$

то в этой точке функция $f(x)$ имеет экстремум, а именно: максимум, когда $f''(x_0) < 0$, и минимум, когда $f''(x_0) > 0$.

Третье правило. Пусть функция $f(x)$ имеет в некотором интервале $|x-x_0| < \delta$ производные $f'(x), \ldots, f^{n-1}(x)$ и в точке x_0 производную $f^{(n)}(x_0)$, причем

$$f^{(k)}(x_0) = 0 \quad (k = 1, \ldots, n-1), \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

В таком случае: 1) если n — число четное, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет экстремум, а именно: максимум при $f^{(n)}(x_0) < 0$ и минимум при $f^{(n)}(x_0) > 0$; 2) если n — число нечетное, то в точке x_0 функция $f(x)$ экстремума не имеет.

3°. Абсолютный экстремум. Наибольшее (наименьшее) значение на сегменте $[a, b]$ непрерывной функции $f(x)$ достигается или в критической точке этой функции (т. е. там, где производная $f'(x)$ или равна нулю, или не существует), или в граничных точках a и b данного сегмента.

Исследовать на экстремум следующие функции:

1414. $y = 2 + x - x^2$. **1415.** $y = (x-1)^3$.

1416. $y = (x-1)^4$.

1417. $y = x^m (1-x)^n$ (m и n — целые положительные числа).

1418. $y = \cos x + \operatorname{ch} x$. **1419.** $y = (x+1)^{10} e^{-x}$.

1420. $y = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right) e^{-x}$ (n — натуральное число).

1421. $y = |x|$. **1422.** $y = x^{1/3}(1-x)^{2/3}$.

1423. Исследовать на экстремум в точке $x = x_0$ функцию

$$f(x) = (x-x_0)^n \varphi(x)$$

(n — натуральное число), где функция $\varphi(x)$ непрерывна при $x = x_0$ и $\varphi(x_0) \neq 0$.

1424. Пусть $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, $f'(x) = \frac{P_1(x)}{Q^2(x)}$ и x_0—стационарная точка функции $f(x)$, т. е. $P_1(x_0) = 0$, $Q(x_0) \neq 0$.

Доказать, что $\operatorname{sgn} f''(x_0) = \operatorname{sgn} P_1'(x_0)$.

1425. Можно ли утверждать, что если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет максимум, то в некоторой достаточно малой окрестности этой точки слева от точки x_0 функция $f(x)$ возрастает, а справа от нее убывает?

Рассмотреть пример:

$$f(x)=2-x^2\left(2+\sin\frac{1}{x}\right),\ \text{если } x\neq 0 \text{ и } f(0)=2.$$

1426 (н). Доказать, что функция

$$f(x)=e^{-1/x^2},\ \text{если } x\neq 0,\ \text{и } f(0)=0,$$

имеет в точке $x=0$ минимум, а функция

$$g(x)=xe^{-1/x^2},\ \text{если } x\neq 0,\ \text{и } g(0)=0$$

не имеет в точке $x=0$ экстремума, хотя

$$f^{(n)}(0)=0,\quad g^{(n)}(0)=0\qquad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Построить графики этих функций.

1427. Исследовать на экстремум функции:

а) $f(x)=e^{-1/|x|}\left(\sqrt{2}+\sin\frac{1}{x}\right)$ при $x\neq 0$ и $f(0)=0$;

б) $f(x)=e^{-1/|x|}\left(\sqrt{2}+\cos\frac{1}{x}\right)$ при $x\neq 0$ и $f(0)=0$.

Построить графики этих функций.

1428. Исследовать на экстремум в точке $x=0$ функцию

$$f(x)=|x|\left(2+\cos\frac{1}{x}\right),\ \text{если } x\neq 0 \text{ и } f(0)=0.$$

Построить график этой функции.

Найти экстремумы следующих функций:

1429. $y=x^3-6x^2+9x-4$. **1430.** $y=2x^2-x^4$.

1431. $y=x(x-1)^2(x-2)^3$. **1432.** $y=x+\frac{1}{x}$.

1433. $y=\frac{2x}{1+x^2}$. **1434.** $y=\frac{x^2-3x+2}{x^2+2x+1}$.

1435. $y=\sqrt{2x-x^2}$ **1436.** $y=x\sqrt[3]{x-1}$.

1437. $y=xe^{-x}$. **1438.** $y=\sqrt{x}\ln x$.

1439. $y=\frac{\ln^2 x}{x}$. 1440. $y=\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x$.

1441. $y=\frac{10}{1+\sin^2 x}$. 1442. $y=\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

1443. $y=e^x\sin x$. 1444. $y=|x|\,e^{-|x-1|}$.

Найти наименьшие и наибольшие значения следующих функций:

1445. $f(x)=2^x$ на сегменте $[-1;\ 5]$.
1446. $f(x)=x^2-4x+6$ на сегменте $[-3;\ 10]$.
1447. $f(x)=|x^2-3x+2|$ на сегменте $[-10;\ 10]$.
1448. $f(x)=x+\frac{1}{x}$ на сегменте $[0{,}01;\ 100]$.
1449. $f(x)=\sqrt{5-4x}$ на сегменте $[-1;\ 1]$.

Найти нижнюю грань (inf) и верхнюю грань (sup) следующих функций:

1450. $f(x)=xe^{-0{,}01x}$ на интервале $(0,\ +\infty)$.

1451. $f(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$ на интервале $(0,\ +\infty)$.

1452. $f(x)=\frac{1+x^2}{1+x^4}$ на интервале $(0,\ +\infty)$.

1453. $f(x)=e^{-x^2}\cos x^2$ на интервале $(-\infty,\ +\infty)$.

1454. Определить нижнюю и верхнюю грани функции $f(\xi)=\frac{1+\xi}{3+\xi^2}$ на интервале $x<\xi<+\infty$.

Построить графики функций

$$M(x)=\sup_{x<\xi<+\infty} f(\xi) \quad \text{и} \quad m(x)=\inf_{x<\xi<+\infty} f(\xi).$$

1454.1. Пусть

$$M_k=\sup_x \|f^{(k)}(x)\|, \quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Найти M_0, M_1 и M_2, если $f(x)=e^{-x^2}$.

1455. Определить наибольший член последовательности:

а) $\frac{n^{10}}{2^n}$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$; б) $\frac{\sqrt{n}}{n+10000}$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$;

в) $\sqrt[n]{n}$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$.

1456. Доказать неравенства:

а) $|3x-x^3| \leqslant 2$ при $|x| \leqslant 2$;

б) $\frac{1}{2^{p-1}} \leqslant x^p + (1-x)^p \leqslant 1$, если $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $p > 1$;

в) $x^m (a-x)^n \leqslant \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} a^{m+n}$ при $m > 0$, $n > 0$ и $0 \leqslant x \leqslant a$;

г) $\frac{x+a}{2^{(n-1)/n}} \leqslant \sqrt[n]{x^n + a^n} \leqslant x + a$ $(x > 0,\ a > 0,\ n > 1)$;

д) $|a \sin x + b \cos x| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}$.

1456.1. Доказать неравенство

$$\frac{2}{3} \leqslant \frac{x^2+1}{x^2+x+1} \leqslant 2$$

при $-\infty < x < +\infty$.

1457. Определить «отклонение от нуля» многочлена

$$P(x) = x(x-1)^2(x+2)$$

на сегменте $[-2, 1]$, т. е. найти

$$E_P = \sup_{-2 \leqslant x \leqslant 1} |P(x)|.$$

1458. При каком выборе коэффициента q многочлен

$$P(x) = x^2 + q$$

наименее отклоняется от нуля на сегменте $[-1, 1]$, т. е.

$$E_P = \sup_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |P(x)| = \min.$$

1459. *Абсолютным отклонением* двух функций $f(x)$ и $g(x)$ на сегменте $[a, b]$ называется число

$$\Delta = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - g(x)|.$$

Определить абсолютное отклонение функций

$$f(x) = x^2 \text{ и } g(x) = x^3$$

на сегменте $[0, 1]$.

1460. Функцию $f(x) = x^2$ на сегменте $[x_1, x_2]$ приближенно заменить линейной функцией

$$g(x) = (x_1 + x_2)x + b$$

так, чтобы абсолютное отклонение функций $f(x)$ и $g(x)$

(см. предыдущую задачу) было наименьшим, и определить это наименьшее абсолютное отклонение.

1461. Определить минимум функции

$$f(x) = \max\{2|x|, |1+x|\}.$$

Определить число вещественных корней уравнения и отделить эти корни, если:

1462. $x^3-6x^2+9x-10=0$.

1463. $x^3-3x^2-9x+h=0$.

1464. $3x^4-4x^3-6x^2+12x-20=0$.

1465. $x^5-5x=a$.

1466. $\ln x = kx$. **1467.** $e = ax^2$.

1468. $\sin^3 x\cdot\cos x = a$ при $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

1469. $\operatorname{ch} x = kx$.

1470. При каком условии уравнение $x^3+px+q=0$ имеет: а) один вещественный корень; б) три вещественных корня. Изобразить соответствующие области на плоскости (p, q).

§ 12. Построение графиков функций по характерным точкам

Для построения графика функции $y=f(x)$ нужно: 1) определить область существования этой функции и исследовать поведение функции в граничных точках последней; 2) выяснить симметрию графика и периодичность; 3) найти точки разрыва функции и промежутки непрерывности; 4) определить нули функции и области постоянства знака; 5) найти точки экстремума и выяснить промежутки возрастания и убывания функции; 6) определить точки перегиба и установить промежутки вогнутости определенного знака графика функции; 7) найти асимптоты в случае существования их; 8) указать те или иные особенности графика. В частных случаях общая схема упрощается.

В задачах, отмеченных звездочкой, точки перегиба определяются приближенно.

Построить графики следующих функций:

1471. $y=3x-x^3$. **1472.** $y=1+x^2-\dfrac{x^4}{2}$.

1473. $y=(x+1)(x-2)^2$. **1474*.** $y=\dfrac{2-x^3}{1+x^4}$.

1475*. $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-5x+6}$. **1476*.** $y=\dfrac{x}{(1+x)(1-x)^2}$

1477. $y=\dfrac{x^4}{(1+x)^3}$. **1478.** $y=\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^4$.

1479. $y = \frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$. 1480. $y = \frac{x}{(1-x^2)^2}$.

1481. $y = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}$. 1482*. $y = \frac{x^4+8}{x^3+1}$.

1483. $y = \frac{1}{1+x} - \frac{10}{3x^2} + \frac{1}{1-x}$. 1484. $y = (x-3)\sqrt{x}$.

1485. $y = \pm\sqrt{8x^2 - x^4}$. 1485.1. $y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$.

1486. $y = \pm\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

1487*. $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$.

1488. $y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2+1}$.

1489. $y = (x+2)^{2/3} - (x-2)^{2/3}$.

1490. $y = (x+1)^{2/3} + (x-1)^{2/3}$. 1491. $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.

1492. $y = \frac{x^2\sqrt{x^2-1}}{2x^2-1}$. 1493. $y = \frac{|1+x|^{3/2}}{\sqrt{x}}$.

1494. $y = 1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{3+x}}$. 1495. $y = \sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}}$.

1496*. $y = \sqrt{\frac{x^4+3}{x^2+1}}$. 1497. $y = \sin x + \cos^2 x$.

1498. $y = (7 + 2\cos x)\sin x$. 1499. $y = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$.

1500. $y = \cos x - \frac{1}{2}\cos 2x$. 1501. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

1502. $y = \sin x \cdot \sin 3x$. 1503. $y = \frac{\sin x}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$.

1504. $y = \frac{\cos x}{\cos 2x}$. 1504.1. $y = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$.

1505. $y = 2x - \operatorname{tg} x$. 1506. $y = e^{2x - x^2}$.

1507. $y = (1 + x^2)e^{-x^2}$. 1508. $y = x + e^{-x}$.

1509. $y = x^{2/3}e^{-x}$. 1509.1. $y = e^{-2x}\sin^2 x$.

1510. $y=\frac{e^x}{1+x}$. 1511. $y=\sqrt{1-e^{-x^2}}$.

1512. $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$. 1513. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

1514. $y=\sqrt{x^2+1}\cdot\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

1515. $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. 1516. $y=x+\operatorname{arctg} x$.

1517. $y=\frac{x}{2}+\operatorname{arcctg} x$. 1518. $y=x\operatorname{arctg} x$.

1519. $y=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$. 1520. $y=\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

1521. $y=(x+2)e^{1/x}$. 1522. $y=2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$.

1523*. $y=\ln\frac{x^2-3x+2}{x^2+1}$.

1524. $y=a\arcsin\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}$ $(a>0)$.

1525. $y=\arccos\frac{1-x}{1-2x}$. 1526. $y=x^x$.

1527*. $y=x^{1/x}$. 1528. $y=(1+x)^{1/x}$.

1529*. $y=x\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ $(x>0)$.

1530*. $y=\frac{e^{1/1-x^2}}{1+x^2}$ (без исследования вогнутости).

Построить кривые, заданные в параметрической форме:

1531. $x=\frac{(t+1)^2}{4}$, $y=\frac{(t-1)^2}{4}$.

1532. $x=2t-t^2$, $y=3t-t^3$.

1533*. $x=\frac{t^2}{t-1}$, $y=\frac{t}{t^2-1}$.

1534. $x=\frac{t^2}{1-t^2}$, $y=\frac{1}{1+t^2}$.

1535. $x=t+e^{-t}$, $y=2t+e^{-2t}$.

1536. $x=a\cos 2t$, $y=a\cos 3t$ $(a>0)$.

1537. $x = \cos^4 t$, $y = \sin^4 t$.

1538. $x = t \ln t$, $y = \frac{\ln t}{t}$.

1539. $x = \frac{a}{\cos^3 t}$, $y = a \operatorname{tg}^3 t$ $(a > 0.)$

1540. $x = a(\operatorname{sh} t - t)$, $y = a(\operatorname{ch} t - 1)$ $(a > 0)$.

Представив уравнения кривых в параметрической форме, построить эти кривые, если

1541. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ $(a > 0)$.

Указание. Положить $y = tx$.

1542. $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$.

1543. $x^2y^2 = x^3 - y^3$.

1544. $x^y = y^x$ $(x > 0,\ y > 0)$.

1545. Построить график кривой: $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{ch}^2 y = 1$.

Построить графики функций, заданных в полярной системе координат (φ, r) $(r \geqslant 0)$:

1546. $r = a + b \cos \varphi$ $(0 < a \leqslant b)$.

1547. $r = a \sin 3\varphi$ $(a > 0)$. 1548. $r = \frac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}}$ $(a > 0)$.

1549*. $r = a \frac{\operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1}$, где $\varphi > 1$ $(a > 0)$.

1550*. $\varphi = \arccos \frac{r - 1}{r^2}$.

Построить графики семейств кривых (a — переменный параметр):

1551. $y = x^2 - 2x + a$. 1552. $y = x + \frac{a^2}{x}$.

1553. $y = x \pm \sqrt{a(1 - x^2)}$.

1554. $y = \frac{x}{2} + e^{-ax}$. 1555. $y = xe^{-x/a}$.

§ 13. Задачи на максимум и минимум функций

1556. Доказать, что если функция $f(x)$ неотрицательна, то функция $F(x) = Cf^2(x)$ $(C > 0)$ имеет в точности те же точки экстремума, что и функция $f(x)$.

1557. Доказать, что если функция $\varphi(x)$ — монотонно возрастающая в строгом смысле при $-\infty < x < +\infty$,

то функции $f(x)$ и $\varphi(f(x))$ имеют одни и те же точки экстремума.

1558. Определить наибольшее значение произведения m-й и n-й степеней ($m > 0$, $n > 0$) двух положительных чисел, сумма которых постоянна и равна a.

1559. Найти наименьшее значение суммы m-й и n-й степеней ($m > 0$, $n > 0$) двух положительных чисел, произведение которых постоянно и равно a.

1560. В каких системах логарифмов существуют числа, равные своему логарифму?

1561. Из всех прямоугольников данной площади S определить тот, периметр которого наименьший.

1562. Найти прямоугольный треугольник наибольшей площади, если сумма катета и гипотенузы его постоянна.

1563. При каких линейных размерах закрытая цилиндрическая банка данной вместимости V будет иметь наименьшую полную поверхность?

1564. В данный круговой сегмент, не превышающий полукруга, вписать прямоугольник с наибольшей площадью.

1565. В эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вписать прямоугольник со сторонами, параллельными осям эллипса, площадь которого наибольшая.

1566. В треугольник с основанием b и высотой h вписать прямоугольник с наибольшим периметром.

Исследовать возможность решения этой задачи.

1567. Из круглого бревна диаметра d вытесывается балка с прямоугольным поперечным сечением, основание которого равно b и высота h. При каких размерах балка будет иметь наибольшую прочность, если прочность ее пропорциональна bh^2?

1568. В полушар радиуса R вписать прямоугольный параллелепипед с квадратным основанием наибольшего объема.

1569. В шар радиуса R вписать цилиндр наибольшего объема.

1570. В шар радиуса R вписать цилиндр с наибольшей полной поверхностью.

1571. Около данного шара описать конус наименьшего объема.

1572. Найти наибольший объем конуса с данной образующей l.

1573. В прямой круговой конус с углом 2α в осевом сечении и радиусом основания R вписать цилиндр с наибольшей полной поверхностью.

1574. Найти кратчайшее расстояние точки $M(p, p)$ от параболы $y^2 = 2px$.

1575. Найти кратчайшее и наибольшее расстояния точки $A(2,0)$ от окружности $x^2 + y^2 = 1$.

1576. Найти наибольшую хорду эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(0 < b < a)$, проходящую через вершину $B(0, -b)$.

1577. Через точку $M(x, y)$ эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ провести касательную, образующую с осями координат треугольник, площадь которого наименьшая.

1578. Тело представляет собой прямой круговой цилиндр, завершенный сверху полушаром. При каких линейных размерах это тело будет иметь наименьшую полную поверхность, если объем его равен V.

1579. Поперечное сечение открытого канала имеет форму равнобедренной трапеции. При каком наклоне φ боков «мокрый периметр» сечения будет наименьшим, если площадь «живого сечения» воды в канале равна S, а уровень воды равен h?

1580. «*Извилистостью*» замкнутого контура, ограничивающего площадь S, называется отношение периметра этого контура к длине окружности, ограничивающей круг той же площади S.

Какова форма равнобедренной трапеции $ABCD$ $(AD \parallel BC)$, обладающей наименьшей извилистостью, если основание $AD = 2a$ и острый угол $BAD = \alpha$?

1581. Какой сектор следует вырезать из круга радиуса R, чтобы из оставшейся части можно было свернуть воронку наибольшей вместимости.

1582. Завод A отстоит от железной дороги, идущей с юга на север и проходящей через город B, считая по кратчайшему расстоянию, на a км. Под каким углом φ к железной дороге следует построить подъездной путь от завода, чтобы транспортировка грузов из A в B была наиболее экономичной, если стоимость провоза тонны груза на расстоянии 1 км составляет по подъездному пути p р., по железной дороге q р. $(p > q)$ и город B расположен на b км севернее завода A?

1583. Два корабля плывут с постоянными скоростями u и v по прямым линиям, составляющим угол θ

между собой. Определить наименьшее расстояние между кораблями, если в некоторый момент расстояния их от точки пересечения путей были соответственно равны a и b.

1584. В точках A и B находятся источники света соответственно силой S_1 и S_2 свечей. На отрезке $AB = a$ найти наименее освещенную точку M.

1585. Светящаяся точка находится на линии центров двух непересекающихся шаров радиусов R и r $(R > r)$ и расположена вне этих шаров. При каком положении точки сумма освещенных частей поверхностей шаров будет наибольшая?

1586. На какой высоте над центром круглого стола радиуса a следует поместить электрическую лампочку, чтобы освещенность края стола была наибольшей?

Указание. Яркость освещения выражается формулой

$$I = k\frac{\sin\varphi}{r^2},$$

где φ — угол наклона лучей, r — расстояние источника света от освещаемой площадки, k — сила источника света.

1587. К реке шириной a м построен под прямым углом канал шириной b м. Какой максимальной длины суда могут входить в этот канал?

1588. Суточные расходы при плавании судна состоят из двух частей: постоянной, равной a р, и переменной, возрастающей пропорционально кубу скорости. При какой скорости v плавание судна будет наиболее экономичным?

1589. Груз весом P, лежащий на горизонтальной шероховатой плоскости, требуется сдвинуть с места приложенной силой. При каком наклоне этой силы к горизонту величина ее будет наименьшей, если коэффициент трения груза равен k?

1590. В чашку, имеющую форму полушара радиуса a, опущен стержень длины $l > 2a$. Найти положение равновесия стержня.

§ 14. Касание кривых. Круг кривизны. Эволюта

1°. Касание n-го порядка. Говорят, что кривые

$$y = \varphi(x) \quad \text{и} \quad \tilde{y} = \psi(x)$$

имеют в точке x_0 *касание n-го порядка* (в строгом смысле!), если $\varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ и $\varphi^{(n+1)}(x_0) \neq \psi^{(n+1)}(x_0)$.

В этом случае при $x \to x_0$ имеем:

$$\varphi(x) - \psi(x) = O^*[x - x_0]^{n+1}.$$

2°. Круг кривизны. Окружность

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = R^2,$$

имеющая с данной кривой $y = f(x)$ касание не ниже 2-го порядка, называется *кругом кривизны* в соответствующей точке. Радиус этого круга

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|}$$

называется *радиусом кривизны*, а величина $k = \frac{1}{R}$ — *кривизной*.

3°. Эволюта. Геометрическое место центров (ξ, η) кругов кривизны (*центры кривизны*)

$$\xi = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''}, \qquad \eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}$$

называется *эволютой* данной кривой $y = f(x)$.

1591. Подобрать параметры k и b прямой $y = kx + b$ так, чтобы она имела с кривой $y = x^3 - 3x^2 + 2$ касание порядка выше первого.

1592. При каком выборе коэффициентов a, b и c парабола

$$y = ax^2 + bx + c$$

имеет в точке $x = x_0$ касание 2-го порядка с кривой $y = e^x$?

1593. Какой порядок касания с осью Ox имеют в точке $x = 0$ кривые:

а) $y = 1 - \cos x$; б) $y = \operatorname{tg} x - \sin x$;

в) $y = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)$.

1594. Доказать, что кривая $y = e^{-1/x^2}$ при $x \neq 0$ и $y = 0$ при $x = 0$ имеет в точке $x = 0$ с осью Ox касание бесконечно большого порядка.

1595. Найти радиус и центр кривизны гиперболы $xy = 1$ в точках: а) M (1, 1); б) N (100; 0,01).

Определить радиусы кривизны следующих кривых:

1596. Параболы $y^2 = 2px$.

1597. Эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a \geqslant b > 0)$.

1598. Гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

1599. Астроиды $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

1600. Эллипса $x=a\cos t$, $y=b\sin t$.

1601. Циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

1602. Эвольвенты круга $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$.

1603. Доказать, что радиус кривизны линии 2-го порядка $y^2=2px-qx^2$ пропорционален кубу отрезка нормали.

1604. Написать формулу радиуса кривизны линии, заданной в полярных координатах.

Определить радиусы кривизны кривых, заданных в полярных координатах (параметры положительны):

1605. Спирали Архимеда $r=a\varphi$.

1606. Логарифмической спирали $r=ae^{m\varphi}$.

1607. Кардиоиды $r=a(1+\cos\varphi)$.

1608. Лемнискаты $r^2=a^2\cos 2\varphi$.

1609. На кривой $y=\ln x$ найти точку, кривизна в которой наибольшая.

1610. Максимальная кривизна кубической параболы $y=\frac{kx^3}{6}$ $(0\leqslant x<+\infty,\ k>0)$ равна $\frac{1}{1000}$. Найти точку x, в которой достигается эта максимальная кривизна.

Составить уравнения:

1611. Эволюты параболы $y^2=2px$.

1612. Эволюты эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

1613. Эволюты астроиды $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

1614. Эволюты трактрисы

$$x=a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}.$$

1615. Эволюты логарифмической спирали $r=ae^{m\varphi}$.

1616. Доказать, что эволюта циклоиды

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)$$

есть также циклоида, отличающаяся от данной только положением.

§ 15. Приближенное решение уравнений

1°. Правило пропорциональных частей (метод хорд). Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и

$$f(a)\,f(b) < 0,$$

причем $f'(x) \neq 0$ при $a < x < b$, то уравнение

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

имеет один и только один действительный корень ξ в промежутке (a, b). За первое приближение этого корня можно принять значение

$$x_1 = a + \delta_1,$$

где

$$\delta_1 = -\frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a).$$

Применяя далее этот способ к тому из промежутков (a, x_1) или (x_1, b), на концах которого функция $f(x)$ равнозначна, получим второе приближение x_2 корня ξ и т. д. Для оценки n-го приближения x_n справедлива формула

$$|x_n - \xi| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m}, \tag{2}$$

где $m = \inf\limits_{a<x<b} |f'(x)|$, причем

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi.$$

2°. Правило Ньютона (метод касательных). Если $f''(x) \neq 0$ на сегменте $[a, b]$ и $f(a)\,f''(a) > 0$, то за первое приближение ξ_1 корня ξ уравнения (1) можно принять значение

$$\xi_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Повторяя этот прием, получаем быстро сходящиеся к корню ξ последовательные приближения ξ_n ($n = 1, 2, \ldots$), точность которых оценивается, например, по формуле (2).

Для грубой ориентировки полезно нарисовать набросок графика функции $y = f(x)$.

Пользуясь методом пропорциональных частей, определить с точностью до 0,001 корни следующих уравнений:

1617. $x^3 - 6x + 2 = 0$. **1618.** $x^4 - x - 1 = 0$.

1619. $x - 0{,}1 \sin x = 2$. **1620.** $\cos x = x^2$.

Пользуясь методом Ньютона, определить с указанной точностью корни следующих уравнений:

1621. $x^2 + \frac{1}{x^2} = 10x$ (с точностью до 10^{-3}).

1622. $x \lg x = 1$ (с точностью до 10^{-4}).

1623. $\cos x \cdot \operatorname{ch} x = 1$ (с точностью до 10^{-3}) (для положительного корня).

1624. $x + e^x = 0$ (с точностью до 10^{-5}).

1625. $x \operatorname{th} x = 1$ (с точностью до 10^{-6}).

1626. С точностью до 0,001 найти три первых положительных корня уравнения $\operatorname{tg} x = x$.

1627. С точностью до 10^{-3} найти два положительных корня уравнения $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{2}$.

ОТДЕЛ III

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Простейшие неопределенные интегралы

1°. Понятие неопределенного интеграла. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке (a, b) и $F(x)$ — ее первообразная, т. е. $F'(x) = f(x)$ при $a < x < b$, то

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \quad a < x < b,$$

где C — произвольная постоянная.

2°. Основные свойства неопределенного интеграла:

а) $d\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x)\,dx$; б) $\int d\Phi(x) = \Phi(x) + C$;

в) $\int Af(x)\,dx = A\int f(x)\,dx$ ($A = \text{const}$; $A \neq 0$);

г) $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$.

3°. Таблица простейших интегралов:

I. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$.

II. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0)$.

III. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arcctg} x + C. \end{cases}$

IV. $\int \dfrac{dx}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| + C$.

V. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C. \end{cases}$

VI. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C$.

VII. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1)$; $\int e^x dx = e^x + C$.

VIII. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$. IX. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$.

X. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

XI. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

XII. $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C.$ XIII. $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C.$

XIV. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

XV. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

4°. Основные методы интегрирования.

а) *Метод введения нового аргумента.* Если

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C,$$

то

$$\int f(u)\, du = F(u) + C,$$

где $u = \varphi(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция.

б) *Метод разложения.* Если

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

то

$$\int f(x)\, dx = \int f_1(x)\, dx + \int f_2(x)\, dx.$$

а) *Метод подстановки.* Если $f(x)$ — непрерывна, то, полагая

$$x = \varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$, получим

$$\int f(x)\, dx = \int f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt.$$

г) *Метод интегрирования по частям.* Если u и v — некоторые дифференцируемые функции от x, то

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du.$$

Применяя таблицу простейших интегралов, найти следующие интегралы:

1628. $\int (3 - x^2)^3\, dx.$ **1629.** $\int x^2 (5 - x)^4\, dx.$

1630. $\int (1 - x)(1 - 2x)(1 - 3x)\, dx.$

1631. $\int \left(\frac{1 - x}{x}\right)^2 dx.$

1632. $\int \left(\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3}\right) dx.$ **1633.** $\int \frac{x + 1}{\sqrt{x}}\, dx.$

1634. $\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}\,dx.$

1635. $\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}\,dx.$

1636. $\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx.$

1637. $\int \frac{\left(\sqrt{2x}-\sqrt[3]{3x}\right)^2}{x}\,dx.$

1638. $\int \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}\,dx.$ **1639.** $\int \frac{x^2dx}{1+x^2}.$

1640. $\int \frac{x^2dx}{1-x^2}.$ **1641.** $\int \frac{x^2+3}{x^2-1}\,dx.$

1642. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx.$

1643. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}\,dx.$

1644. $\int (2^x+3^x)^2\,dx.$

1645. $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}\,dx.$ **1646.** $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}\,dx.$

1647. $\int (1+\sin x+\cos x)\,dx.$

1648. $\int \sqrt{1-\sin 2x}\,dx \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi).$

1649. $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx.$ **1650.** $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx.$

1651. $\int (a \operatorname{sh} x+b \operatorname{ch} x)\,dx.$ **1652.** $\int \operatorname{th}^2 x\,dx.$

1653. $\int \operatorname{cth}^2 x\,dx.$

1654. Доказать, что если $\int f(x)\,dx = F(x)+C$, то

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C \qquad (a\neq 0).$$

Найти интегралы:

1655. $\int \frac{dx}{x+a}.$ **1656.** $\int (2x-3)^{10}\,dx.$

1657. $\int \sqrt[3]{1-3x}\,dx.$

1658. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$.

1659. $\int \frac{dx}{(5x-2)^{5/2}}$.

1660. $\int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x}\,dx$.

1661. $\int \frac{dx}{2+3x^2}$. 1662. $\int \frac{dx}{2-3x^2}$.

1663. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$.

1664. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}$.

1665. $\int (e^{-x}+e^{-2x})\,dx$. 1666. $\int (\sin 5x - \sin 5\alpha)\,dx$.

1667. $\int \frac{dx}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}$.

1668. $\int \frac{dx}{1+\cos x}$. 1669. $\int \frac{dx}{1-\cos x}$.

1670. $\int \frac{dx}{1+\sin x}$.

1671. $\int [\operatorname{sh}(2x+1)+\operatorname{ch}(2x-1)]\,dx$.

1672. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}}$. 1673. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}}$.

Путем надлежащего преобразования подынтегрального выражения найти следующие интегралы:

1674. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

1675. $\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,dx$.

1676. $\int \frac{x\,dx}{3-2x^2}$. 1677. $\int \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}$.

1678. $\int \frac{x\,dx}{4+x^4}$. 1679. $\int \frac{x^3\,dx}{x^8-2}$.

1680. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$.

Указание. $\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d(\sqrt{x})$.

1681. $\int \sin\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2}$

1682. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^3+1}}$.

1683. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. 1684. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}}$.

1685. $\int \frac{x\,dx}{(x^2-1)^{3/2}}$. 1686. $\int \frac{x^2\,dx}{(8x^3+27)^{2/3}}$.

1687. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$. 1688. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

1689. $\int xe^{-x^2}dx$. 1690. $\int \frac{e^x dx}{2+e^x}$.

1691. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.

1692. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

1693. $\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$. 1694. $\int \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}$.

1695. $\int \sin^5 x\cos x\,dx$.

1696. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}\,dx$.

1697. $\int \operatorname{tg} x\,dx$. 1698. $\int \operatorname{ctg} x\,dx$.

1699. $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}\,dx$.

1700. $\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}\,dx$.

1700.1. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}\,dx$. 1700.2. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}\,dx$.

1700.3. $\int \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{ch} 2x}}\,dx$.

1701. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt[4]{\operatorname{ctg} x}}$.

1702. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$. 1703. $\int \frac{dx}{\sin x}$.

1704. $\int \frac{dx}{\cos x}$. 1705. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}$. 1706. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}$.

1707. $\int \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{sh}^4 x + \operatorname{ch}^4 x}}\, dx$. 1708. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x \sqrt[3]{\operatorname{th}^2 x}}$.

1709. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\, dx$.

1710. $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}}$.

1711. $\int \sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}}\, dx$.

1712. $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\, dx$.

Указание. $\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx = d\left(x-\frac{1}{x}\right)$.

1713. $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}\, dx$. 1714. $\int \frac{x^4\, dx}{(x^5+1)^4}$.

1715. $\int \frac{x^{n/2}\, dx}{\sqrt{1+x^{n+2}}}$.

1716. $\int \frac{1}{1-x^2} \ln \frac{1+x}{1-x}\, dx$.

1717. $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{2+\cos 2x}}$.

1718. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\, dx$. 1719. $\int \frac{2^x : 3^x}{9^x - 4^x}\, dx$.

1720. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}$.

Применяя метод разложения, вычислить интегралы:

1721. $\int x^2 (2-3x^2)^2\, dx$. 1721.1. $\int x(1-x)^{10}\, dx$.

1722. $\int \frac{1+x}{1-x}\, dx$. 1723. $\int \frac{x^2}{1+x}\, dx$.

1724. $\int \frac{x^3}{3+x}\,dx.$ 1725. $\int \frac{(1+x)^2}{1+x^2}\,dx.$

1726. $\int \frac{(2-x)^2}{2-x^2}\,dx.$ 1727. $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}\,dx.$

1728. $\int \frac{x^5}{x+1}\,dx.$

1729. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}.$

1730. $\int x\sqrt{2-5x}\,dx.$

Указание. $x = -\frac{1}{5}(2-5x)+\frac{2}{5}.$

1731. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1-3x}}.$

1732. $\int x^3\sqrt[3]{1+x^2}\,dx.$

1733. $\int \frac{dx}{(x-1)(x+3)}.$

Указание $1 = \frac{1}{4}[(x+3)-(x-1)].$

1734. $\int \frac{dx}{x^2+x-2}.$ 1735. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)}.$

1736. $\int \frac{dx}{(x^2-2)(x^2+3)}.$

1737. $\int \frac{x\,dx}{(x+2)(x+3)}.$ 1738. $\int \frac{x\,dx}{x^4+3x^2+2}.$

1739. $\int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2}$ $(a \neq b).$

1740. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ $(a^2 \neq b^2).$

1741. $\int \sin^2 x\,dx.$

1742. $\int \cos^2 x\,dx.$ 1743. $\int \sin x \sin(x+\alpha)\,dx.$

1744. $\int \sin 3x \cdot \sin 5x\,dx.$

1745. $\int \cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{3}\,dx.$

1746. $\int \sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)dx.$

1747. $\int \sin^3 x\,dx$. 1748. $\int \cos^3 x\,dx$.

1749. $\int \sin^4 x\,dx$. 1750. $\int \cos^4 x\,dx$.

1751. $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx$. 1752. $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$.

1753. $\int \sin^2 3x \sin^3 2x\,dx$. 1754. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

Указание. $1 \equiv \sin^2 x + \cos^2 x$.

1755. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos x}$. 1756. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}$.

1757. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x}\,dx$. 1758. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$.

1759. $\int \frac{dx}{1+e^x}$. 1760. $\int \frac{(1+e^x)^2}{1+e^{2x}}\,dx$.

1761. $\int \operatorname{sh}^2 x\,dx$.

1762. $\int \operatorname{ch}^2 x\,dx$. 1763. $\int \operatorname{sh} x \operatorname{sh} 2x\,dx$.

1764. $\int \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} 3x\,dx$. 1765. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x}$.

Применяя подходящие подстановки, найти следующие интегралы:

1766. $\int x^2 \sqrt[3]{1-x}\,dx$.

1767. $\int x^3 (1-5x^2)^{10}\,dx$.

1768. $\int \frac{x^3}{\sqrt{2-x}}\,dx$. 1769. $\int \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

1770. $\int x^5 (2-5x^3)^{2/3}\,dx$. 1771. $\int \cos^5 x \cdot \sqrt{\sin x}\,dx$.

1772. $\int \frac{\sin x \cos^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx$. 1773. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\,dx$.

1774. $\int \frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

1775. $\int \frac{dx}{e^{x/2}+e^x}$.

1776. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

1777. $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{1+x}$.

Применяя тригонометрические подстановки $x = a \sin t$, $x = a \operatorname{tg} t$, $x = a \sin^2 t$ и т. п., найти следующие интегралы (параметры положительны):

1778. $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$. 1779. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-2}}$.

1780. $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$.

1781. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}$.

1782. $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\, dx$. 1783. $\int x \sqrt{\frac{x}{2a-a}}\, dx$.

1784. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$.

Указание. Применить подстановку $x-a=(b-a)\sin^2 t$.

1785. $\int \sqrt{(x-a)(b-x)}\, dx$.

Применяя гиперболические подстановки $x = a \operatorname{sh} t$, $x = a \operatorname{ch} t$ и т. п., найти следующие интегралы (параметры положительны):

1786. $\int \sqrt{a^2+x^2}\, dx$.

1787. $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\, dx$.

1788. $\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\, dx$.

1789. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$.

1790. $\int \sqrt{(x+a)(x+b)}\, dx$.

Указание. Положить $x+a=(b-a)\operatorname{sh}^2 t$.

Применяя метод интегрирования по частям, найти следующие интегралы:

1791. $\int \ln x\, dx$. 1792. $\int x^n \ln x\, dx$ $(n \neq -1)$.

1793. $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$. 1794. $\int \sqrt{x} \ln^2 x\, dx$.

1795. $\int x e^{-x} dx$. 1796. $\int x^2 e^{-2x} dx$.

1797. $\int x^3 e^{-x^2} dx$. 1798. $\int x \cos x\, dx$.

1799. $\int x^2 \sin 2x\,dx$. 1800. $\int x \operatorname{sh} x\,dx$.

1801. $\int x^3 \operatorname{ch} 3x\,dx$. 1802. $\int \operatorname{arctg} x\,dx$.

1803. $\int \arcsin x\,dx$. 1804. $\int x \operatorname{arctg} x\,dx$.

1805. $\int x^2 \arccos x\,dx$. 1806. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx$.

1807. $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$.

1808. $\int x \ln \frac{1+x}{1-x}\,dx$.

1809. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x}\,dx$. 1810. $\int \sin x \cdot \ln(\operatorname{tg} x)\,dx$.

Найти интегралы:

1811. $\int x^5 e^{x^2}\,dx$. 1812. $\int (\arcsin x)^2\,dx$.

1813. $\int x(\operatorname{arctg} x)^2\,dx$.

1814. $\int x^2 \ln \frac{1-x}{1+x}\,dx$.

1815. $\int \frac{x \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

1816. $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$. 1817. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}$.

1818. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$. 1819. $\int \sqrt{x^2+a}\,dx$.

1820. $\int x^2 \sqrt{a^2+x^2}\,dx$. 1821. $\int x \sin^2 x\,dx$.

1822. $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$. 1823. $\int x \sin \sqrt{x}\,dx$.

1824. $\int \frac{x e^{\operatorname{ar}\cdot\operatorname{tg} x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx$.

1825. $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx$. 1826. $\int \sin(\ln x)\,dx$.

1827. $\int \cos(\ln x)\,dx$. 1828. $\int e^{ax} \cos bx\,dx$.

1829. $\int e^{ax} \sin bx\,dx$. 1830. $\int e^{2x} \sin^2 x\,dx$.

1831. $\int (e^x - \cos x)^2\,dx$.

1832. $\int \frac{\operatorname{arcctg} e^x}{e^x}\,dx$. 1833. $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}\,dx$.

1834. $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$. 1835. $\int \frac{x e^x}{(x+1)^2}\,dx$.

Нахождение следующих интегралов основано на приведении квадратного трехчлена к каноническому виду и примене-

нии формул:

I. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0).$

II. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C \quad (a \neq 0).$

III. $\int \frac{x\,dx}{a^2 \pm x^2} = \pm \frac{1}{2} \ln |a^2 \pm x^2| + C.$

IV. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0).$

V. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \quad (a > 0).$

VI. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm \sqrt{a^2 \pm x^2} + C \quad (a > 0).$

VII. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0).$

VIII. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \quad (a > 0).$

Найти интегралы:

1836. $\int \frac{dx}{a+bx^2} \quad (ab \neq 0).$ **1837.** $\int \frac{dx}{x^2-x+2}.$

1838. $\int \frac{dx}{3x^2-2x-1}.$ **1839.** $\int \frac{x\,dx}{x^4-2x^2-1}.$

1840. $\int \frac{(x+1)}{x^2+x+1}\,dx.$ **1841.** $\int \frac{x\,dx}{x^2-2x\cos\alpha+1}.$

1842. $\int \frac{x^3dx}{x^4-x^2+2}.$ **1843.** $\int \frac{x^5\,dx}{x^6-x^3-2}.$

1844. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x - 8\sin x\cos x + 5\cos^2 x}.$

1845. $\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x + 3}.$

1846. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} \quad (b \neq 0).$

1847. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$. 1848. $\int \frac{ax}{\sqrt{x+x^2}}$.

1849. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+2}}$.

1850. Доказать, что если

$$y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0),$$

то

$$\int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{y'}{2} + \sqrt{ay} \right| + C \text{ при } a>0$$

и

$$\int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{-y'}{\sqrt{b^2-4ac}} + C \text{ при } a<0.$$

1851. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5+x-x^2}}$. 1852. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$.

1853. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-3x^2-2x^4}}$.

1853.1. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\sin x+\cos^2 x}}$.

1854. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^4-2x^2-1}}$.

1855. $\int \frac{x+x^3}{\sqrt{1+x^2-x^4}}\,dx$.

1856. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$.

1857. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+x-1}}$.

1858. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$.

1859. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$.

1860. $\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+2x-5}}$.

1861. $\int \sqrt{2+x-x^2}\,dx$. 1862. $\int \sqrt{2+x+x^2}\,dx$.

1863. $\int \sqrt{x^4+2x^2-1}\, x\, dx.$

1864. $\int \frac{1-x+x^2}{x\sqrt{1+x-x^2}}\, dx.$ 1865. $\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}\, dx.$

§ 2. Интегрирование рациональных функций

Применяя метод неопределенных коэффициентов, найти следующие интегралы:

1866. $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\, dx.$

1867. $\int \frac{x\, dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$

1868. $\int \frac{x^{10} dx}{x^2+x-2}.$ 1869. $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\, dx.$

1870. $\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\, dx.$ 1871. $\int \frac{x\, dx}{x^2-3x+2}.$

1872. $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\, dx.$

1873. $\int \left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2 dx.$

1874. $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}.$

1875. $\int \frac{dx}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1}.$

1876. $\int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}\, dx.$ 1877. $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}.$

1878. $\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}.$

1879. $\int \frac{x\, dx}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}.$

1880. $\int \frac{dx}{x(1+x)(1+x+x^2)}.$

1881. $\int \frac{dx}{x^3+1}.$ 1882. $\int \frac{x\, dx}{x^3-1}.$

1883. $\int \frac{dx}{x^4-1}.$ 1884. $\int \frac{dx}{x^4+1}.$

1885. $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}.$ 1886. $\frac{dx}{x^6+1}.$

1887. $\int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)}.$

1888. $\int \frac{dx}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1}$.

1889. $\int \frac{x^2 dx}{x^4 + 3x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 3x + 1}$.

1890. При каком условии интеграл

$$\int \frac{ax^2 + bx + c}{x^3 (x-1)^2} dx$$

представляет собой рациональную функцию?

Применяя метод Остроградского, найти интегралы

1891. $\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2 (x+1)^3}$. 1892. $\int \frac{dx}{(x^3+1)^2}$.

1893. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$. 1894. $\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+2x+2)^2}$.

1895. $\int \frac{dx}{(x^4+1)^2}$.

1896. $\int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2} dx$.

1897. $\int \frac{dx}{(x^4-1)^3}$.

Выделить алгебраическую часть следующих интегралов:

1898. $\int \frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2} dx$. 1899. $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^3}$.

1900. $\int \frac{4x^5-1}{(x^5+x+1)^2} dx$.

1901. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1}.$$

1902. При каком условии интеграл

$$\int \frac{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}{(ax^2 + 2bx + c)^2} dx$$

представляет собой рациональную функцию?

Применяя различные приемы, найти следующие интегралы:

1903. $\int \frac{x^2}{(x-1)^{100}}\,dx.$ 1904. $\int \frac{x\,dx}{x^6-1}.$

1905. $\int \frac{x^3\,dx}{x^6+3}.$ 1906. $\int \frac{x^2+x}{x^6+1}\,dx.$

1907. $\int \frac{x^4-3}{x(x^6+3x^4+2)}\,dx.$ 1908. $\int \frac{x^4\,dx}{(x^{10}-10)^2}.$

1909. $\int \frac{x^{11}\,dx}{x^6+3x^4+2}.$ 1910. $\int \frac{x^9\,dx}{(x^{10}+2x^5+2)^2}.$

1911. $\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}\,dx.$ 1912. $\int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}\,dx.$

1913. $\int \frac{dx}{x(x^{10}+2)}.$ 1914. $\int \frac{dx}{x(x^{10}+1)^2}.$

1915. $\int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)}\,dx.$

1916. $\int \frac{x^4-1}{x(x^4-5)(x^5-5x+1)}\,dx.$

1917. $\int \frac{x^2+1}{x^4+x^3+1}\,dx.$

1918. $\int \frac{x^2-1}{x^4+x^3+x^2+x+1}\,dx.$

1919. $\int \frac{x^5-x}{x^6+1}\,dx.$ 1920. $\int \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx.$

1921. Вывести рекуррентную формулу для вычисления интеграла

$$I_n=\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}\quad (a\neq 0).$$

Пользуясь этой формулой, вычислить

$$I_3=\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^3}.$$

Указание. Использовать тождество

$$4a(ax^2+bx+c)=(2ax+b)^2+(4ac-b^2).$$

1922. Применить подстановку $t=\frac{x+a}{x+b}$ для вычисления интеграла

$$I=\int \frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n}$$

(m и n — натуральные числа).

Пользуясь этой подстановкой, найти

$$\int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^3}.$$

1923. Вычислить

$$\int \frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}}\,dx,$$

если $P_n(x)$ есть многочлен степени n относительно x.

Указание. Применить формулу Тейлора.

1924. Пусть $R(x) = R^*(x^2)$, где R^* — рациональная функция. Какими особенностями обладает разложение функции $R(x)$ на рациональные дроби?

1925. Вычислить

$$\int \frac{dx}{1+x^{2n}},$$

где n — целое положительное число.

§ 3. Интегрирование некоторых иррациональных функций

С помощью приведения подынтегральных функций к рациональным функциям найти следующие интегралы:

1926. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$

1927. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\left(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}.$

1928. $\displaystyle\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}\,dx.$

1929. $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx.$

1930. $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^3\sqrt{x}}.$

1931. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx.$

1932. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}.$

1933. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}$ $(a>0)$.

1934. $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}}$ (n—натуральное число).

1935. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$.

Указание. Положить $x=\left(\frac{u^2-1}{2u}\right)^2$.

1936. Доказать, что интеграл

$$\int R\left[x,\ (x-a)^{p/n}(x-b)^{q/n}\right]dx,$$

где R — рациональная функция и p, q, n — целые числа, является элементарной функцией, если

$$p+q=kn,$$

где k — целое число.

Найти интегралы от простейших квадратичных иррациональностей:

1937. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}dx$.

1938. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

1939. $\int \frac{dx}{(1-x)^2\sqrt{1-x^2}}$.

1940. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}dx$.

1941. $\int \frac{x\,dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}$.

1942. $\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}dx$.

Применяя формулу

$$\int \frac{P_n(x)}{y}dx=Q_{n-1}(x)\,y+\lambda\int\frac{dx}{y},$$

где $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$, $P_n(x)$ — многочлен степени n,

$Q_{n-1}(x)$ — многочлен степени $n-1$ и λ — число, найти следующие интегралы:

1943. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx.$ 1944. $\int \frac{x^{10}dx}{\sqrt{1+x^2}}.$

1945. $\int x^4\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$

1946. $\int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}\,dx.$

1947. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}.$ 1948. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}.$

1949. $\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2+3x+1}}.$

1950. $\int \frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}.$

1951. При каком условии интеграл

$$\int \frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

представляет собой алгебраическую функцию?

Найти $\int \frac{P(x)}{Q(x)\,y}\,dx$, где $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$, разлагая рациональную функцию $\frac{P(x)}{Q(x)}$ на простейшие дроби.

1952. $\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}.$

1953. $\int \frac{x\,dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-x-1}}.$

1954. $\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2}\,dx.$

1955. $\int \frac{x^3}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx.$

1956. $\int \frac{x\,dx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}}.$

1957. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}.$

1958. $\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}$.

1959. $\int \frac{dx}{(1-x^4)\sqrt{1+x^2}}$.

1960. $\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}\,dx$.

Приводя квадратные трехчлены к каноническому виду, вычислить следующие интегралы:

1961. $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}$.

1962. $\int \frac{x^2\,dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}$.

1963. $\int \frac{(x+1)\,dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

1964. С помощью дробно-линейной подстановки $x = \frac{\alpha+\beta t}{1+t}$ вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

1965. Найти

$$\int \frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}}.$$

Применяя подстановки Эйлера

1) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{ax}+z$, если $a>0$;

2) $\sqrt{ax^2+bx+c} = xz \pm \sqrt{c}$, если $c>0$;

3) $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = z(x-x_1)$,

найти следующие интегралы:

1966. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

1967. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

1968. $\int x\sqrt{x^2-2x+2}\,dx$.

1969. $\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx.$

1970. $\int \frac{dx}{\left[1+\sqrt{x(1+x)}\right]^2}.$

Применяя различные методы, найти следующие интегралы:

1971. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}.$

1972. $\int \frac{x\,dx}{(1-x^3)\sqrt{1-x^2}}.$

1973. $\int \frac{dx}{\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}.$

1974. $\int \frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}\,dx.$

1975. $\int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\,dx.$

1976. $\int \frac{(x^2-1)\,dx}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}.$

1977. $\int \frac{(x^2+1)\,dx}{(x^2-1)\sqrt{x^4+1}}.$

1978. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4+2x^2-1}}.$

1979. $\int \frac{(x^2+1)\,dx}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}.$

1980. Доказать, что нахождение интеграла

$$\int R\left(x,\ \sqrt{ax+b},\ \sqrt{cx+d}\right)dx,$$

где R — рациональная функция, сводится к интегрированию рациональной функции.

Интеграл от дифференциального бинома

$$\int x^m (a+bx^n)^p\,dx,$$

где m, n и p — рациональные числа, может быть приведен к интегрированию рациональных функций лишь в следующих трех случаях (*теорема Чебышева*):

Случай 1. Пусть p — целое. Полагаем $x=z^N$, где N — общий знаменатель дробей m и n.

Случай 2. Пусть $\frac{m+1}{n}$ — целое. Полагаем $a+bx^n = z^N$, где N — знаменатель дроби p.

Случай 3. Пусть $\frac{m+1}{n}+p$ — целое. Применяем подстановку $ax^{-n}+b=z^N$, где N — знаменатель дроби p.

Если $n=1$, то эти случаи эквивалентны следующим: 1) p — целое; 2) m — целое; 3) $m+p$ — целое.

Найти следующие интегралы:

1981. $\int \sqrt{x^3+x^4}\,dx$.

1982. $\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\,dx$.

1983. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$.

1984. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

1985. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

1986. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

1987. $\int \frac{dx}{x\sqrt[6]{1+x^6}}$.

1988. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}$.

1989. $\int \sqrt[3]{3x-x^3}\,dx$.

1990. В каких случаях интеграл

$$\int \sqrt{1+x^m}\,dx,$$

где m — рациональное число, представляет собой элементарную функцию?

§ 4. Интегрирование тригонометрических функций

Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$, где m и n — целые числа, вычисляются с помощью искусственных преобразований или применением формул понижения.

Найти интегралы:

1991. $\int \cos^5 x\,dx$. 1992. $\int \sin^6 x\,dx$.

1993. $\int \cos^6 x\,dx$. 1994. $\int \sin^2 x \cos^4 x\,dx$.

1995. $\int \sin^4 x \cos^5 x\,dx$. 1996. $\int \sin^5 x \cos^5 x\,dx$.

1997. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx$. 1998. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}\,dx$.

1999. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$. 2000. $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$.

2001. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}$. 2002. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}$.

2003. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^4 x}$.

2004. $\int \operatorname{tg}^5 x\,dx$. 2005. $\int \operatorname{ctg}^6 x\,dx$.

2006. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}\,dx$.

2007. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}}$.

2008. $\int \frac{dx}{\cos x \sqrt[3]{\sin^2 x}}$. 2009. $\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$.

2010. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}$.

2011. Вывести формулы понижения для интегралов:

$$\text{а) } I_n = \int \sin^n x\,dx; \quad \text{б) } K_n = \int \cos^n x\,dx \quad (n > 2)$$

и с помощью их вычислить

$$\int \sin^6 x\,dx \quad \text{и} \quad \int \cos^8 x\,dx.$$

2012. Вывести формулы понижения для интегралов:

$$\text{а) } I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}; \quad \text{б) } K_n = \int \frac{dx}{\cos^n x} \quad (n > 2)$$

и с помощью их вычислить

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x} \quad \text{и} \quad \int \frac{dx}{\cos^7 x}.$$

Следующие интегралы вычисляются с помощью применения формул:

$$\text{I. } \sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)].$$

$$\text{II. } \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)].$$

$$\text{III. } \sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)].$$

Найти интегралы:

2013. $\int \sin 5x \cos x\,dx$. **2014.** $\int \cos x \cos 2x \cos 3x\,dx$.

2015. $\int \sin x \sin\frac{x}{2} \sin\frac{x}{3}\,dx$.

2016. $\int \sin x \sin(x+a)\sin(x+b)\,dx$.

2017. $\int \cos^2 ax \cos^2 bx\,dx$. **2018.** $\int \sin^3 2x \cdot \cos^2 3x\,dx$.

Следующие интегралы вычисляются путем применения тождеств:

$$\sin(\alpha-\beta) \equiv \sin[(x+\alpha)-(x+\beta)]$$

и

$$\cos(\alpha-\beta) \equiv \cos[(x+\alpha)-(x+\beta)].$$

Найти интегралы:

2019. $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$.

2020. $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}$.

2021. $\int \frac{dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)}$.

2022. $\int \frac{dx}{\sin x - \sin\alpha}$. **2023.** $\int \frac{dx}{\cos x + \cos a}$.

2024. $\int \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x+a)\,dx$.

Интегралы вида

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx,$$

где R — рациональная функция, в общем случае приводятся к интегрированию рациональных функций с помощью подстановки $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$.

а) Если выполнено равенство

$$R(-\sin x, \cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x)$$

или

$$R(\sin x, -\cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x),$$

то выгодно применять подстановку $\cos x = t$ или соответственно $\sin x = t$.

б) Если выполнено равенство

$$R(-\sin x, -\cos x) \equiv R(\sin x, \cos x),$$

то полезно применять подстановку $\operatorname{tg} x = t$.

Найти интегралы:

2025. $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$.

2026. $\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$.

2027. $\int \frac{\sin^2 x}{\sin x + 2\cos x}dx$. 2028. $\int \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$;

а) $0<\varepsilon<1$; б) $\varepsilon>1$.

2029. $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}dx$. 2030. $\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$.

2031. $\int \frac{\cos^2 x\,dx}{(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)^2}$.

2032. $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x + \cos x}dx$.

2033. $\int \frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^2}$.

2034. $\int \frac{\sin x\,dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}$.

2035. $\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

2036. $\int \frac{\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^6 x + \cos^6 x}dx$.

2037. $\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}dx$. 2038. $\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}dx$.

2039. $\int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}$. 2040. $\int \frac{dx}{(\sin^2 x + 2\cos^2 x)^2}$.

2041. Найти интеграл $\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x}$, приведя знаменатель к логарифмическому виду.

2042. Доказать, что

$$\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{a\sin x + b\cos x}dx = Ax + B\ln|a\sin x + b\cos x| + C,$$

где A, B, C — постоянные.

Указание. Положить

$$a_1\sin x + b_1\cos x = A(a\sin x + b\cos x) + B(a\cos x - b\sin x),$$

где A и B — постоянные.

Найти интегралы:

2043. $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x}dx$. 2043.1. $\int \frac{\sin x}{\sin x - 3\cos x}dx$.

2044. $\int \frac{dx}{3+5\operatorname{tg} x}$. 2045. $\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{(a_1 \sin x + b \cos x)^2} dx$.

2046. Доказать, что

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a \sin x + b \cos x + c} dx = Ax + B \ln |a \sin x + b \cos x + c| + C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c},$$

где A, B, C — некоторые постоянные коэффициенты.

Найти интегралы:

2047. $\int \frac{\sin x + 2\cos x - 3}{\sin x - 2\cos x + 3} dx$.

2048. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2} + \sin x + \cos x} dx$.

2049. $\int \frac{2\sin x + \cos x}{3\sin x + 4\cos x - 2} dx$.

2050. Доказать, что

$$\int \frac{a_1 \sin^2 x + 2b_1 \sin x \cos x + c_1 \cos^2 x}{a \sin x + b \cos x} dx = A \sin x + B \cos x + C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x},$$

где A, B, C — постоянные коэффициенты.

Найти интегралы:

2051. $\int \frac{\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 3\cos^2 x}{\sin x + \cos x} dx$.

2052. $\int \frac{\sin^2 x - \sin x \cos x + 2\cos^2 x}{\sin x + 2\cos x} dx$.

2053. Доказать, что если $(a-c)^2 + b^2 \neq 0$, то

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin^2 x + 2b \sin x \cos x + c \cos^2 x} dx = A \int \frac{du_1}{k_1 u_1^2 + \lambda_1} + B \int \frac{du_2}{k_2 u_2^2 + \lambda_2},$$

где A, B — неопределенные коэффициенты, λ_1, λ_2 — корни уравнения

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2),$$

$$u_i = (a-\lambda_i) \sin x + b \cos x \text{ и } k_i = \frac{1}{a-\lambda_i} \quad (i = 1, 2).$$

Найти интегралы:

2054. $\int \frac{2\sin x - \cos x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x}\,dx.$

2055. $\int \frac{(\sin x + \cos x)\,dx}{2\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x}.$

2056. $\int \frac{\sin x - 2\cos x}{1 + 4\sin x\cos x}\,dx$

2057. Доказать, что

$$\int \frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^n} = \frac{A\sin x + B\cos x}{(a\sin x + b\cos x)^{n-1}} + C\int \frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^{n-2}},$$

где A, B, C — неопределенные коэффициенты.

2058. Найти $\int \frac{dx}{(\sin x + 2\cos x)^3}.$

2059. Доказать, что

$$\int \frac{dx}{(a + b\cos x)^n} = \frac{A\sin x}{(a + b\cos x)^{n-1}} + B\int \frac{dx}{(a + b\cos x)^{n-1}} + C\int \frac{dx}{(a + b\cos x)^{n-2}} \quad (|a| \neq |b|),$$

и определить коэффициенты A, B и C, если n — натуральное число, большее единицы.

Найти интегралы:

2060. $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos x\sqrt{1 + \sin^2 x}}.$

2061. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg} x}}\,dx.$

2062. $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{2 + \sin 2x}}.$

2063. $\int \frac{dx}{(1 + \varepsilon\cos x)^2} \quad (0 < \varepsilon < 1).$

2064. $\int \frac{\cos^{n-1}\frac{x+a}{2}}{\sin^{n+1}\frac{x-a}{2}}\,dx.$

Указание. Положить $t = \dfrac{\cos\dfrac{x+a}{2}}{\sin\dfrac{x-a}{2}}$.

2065. Вывести формулу понижения для интеграла

$$I_n = \int \left(\frac{\sin\dfrac{x-a}{2}}{\sin\dfrac{x+a}{2}} \right)^n dx$$

(n — натуральное число).

§ 5. Интегрирование различных трансцендентных функций

2066. Доказать, что если $P(x)$ — многочлен степени n, то

$$\int P(x)\, e^{ax} dx =$$

$$= e^{ax}\left[\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2} + \cdots + (-1)^n \frac{P^n(x)}{a^{n+1}}\right] + C.$$

2067. Доказать, что если $P(x)$ — многочлен степени n, то

$$\int P(x) \cos ax\, dx =$$

$$= \frac{\sin ax}{a}\left[P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{IV}(x)}{a^4} - \cdots\right] +$$

$$+ \frac{\cos ax}{a^2}\left[P'(x) - \frac{P'''(x)}{a^2} + \frac{P^{V}(x)}{a^4} - \cdots\right] + C$$

и

$$\int P(x) \sin ax\, dx =$$

$$= -\frac{\cos ax}{a}\left[P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{IV}(x)}{a^4} - \cdots\right] +$$

$$+ \frac{\sin ax}{a^2}\left[P'(x) - \frac{P'''(x)}{a^2} + \frac{P^{V}(x)}{a^4} - \cdots\right] + C.$$

Найти интегралы:

2068. $\int x^3 e^{3x} dx$. **2069.** $\int (x^2 - 2x + 2)\, e^{-x} dx$.

2070. $\int x^5 \sin 5x\, dx$. **2071.** $\int (1 + x^2)^2 \cos x\, dx$.

2072. $\int x^7 e^{-x^2}\,dx$.

2073. $\int x^2 e^{\sqrt{x}}\,dx$.

2074. $\int e^{ax}\cos^2 bx\,dx$. 2075. $\int e^{ax}\sin^3 bx\,dx$.

2076. $\int xe^x \sin x\,dx$. 2077. $\int x^2 e^x \cos x\,dx$.

2078. $\int xe^x \sin^2 x\,dx$. 2079. $\int (x-\sin x)^3\,dx$.

2080. $\int \cos^2\sqrt{x}\,dx$.

2081. Доказать, что если R — рациональная функция и числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ соизмеримы, то интеграл

$$\int R\left(e^{a_1x}, e^{a_2x}, \ldots, e^{a_nx}\right)dx$$

есть элементарная функция.

Найти следующие интегралы:

2082. $\int \frac{dx}{(1+e^x)^2}$. 2083. $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$.

2084. $\int \frac{dx}{e^{2x}+e^x-2}$.

2085. $\int \frac{dx}{1+e^{x/2}+e^{x/3}+e^{x/6}}$.

2086. $\int \frac{1+e^{x/2}}{(1+e^{x/4})^2}\,dx$. 2087. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$.

2088. $\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}\,dx$.

2089. $\int \sqrt{e^{2x}+4e^x-1}\,dx$.

2090. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}$.

2091. Доказать, что интеграл

$$\int R(x)\,e^{ax}\,dx,$$

где R — рациональная функция, знаменатель которой имеет лишь действительные корни, выражается через элементарные функции и трансцендентную функцию

$$\int \frac{e^{ax}}{x}\,dx = \operatorname{li}(e^{ax}) + C,$$

где

$$\operatorname{li} x = \int \frac{dx}{\ln x}.$$

2092. В каком случае интеграл

$$\int P\left(\frac{1}{x}\right) e^x\,dx,$$

где $P\left(\frac{1}{x}\right) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}$ и $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — постоянны, представляет собой элементарную функцию?

Найти интегралы:

2093. $\int \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 e^x\,dx.$ **2094.** $\int \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{-x}\,dx.$

2095. $\int \frac{e^{2x}}{x^2 - 3x + 2}\,dx.$ **2096.** $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx.$

2097. $\int \frac{x^4 e^{2x}}{(x-2)^2}\,dx.$

Найти интегралы, содержащие функции $\ln f(x)$, $\operatorname{arctg} f(x)$, $\arcsin f(x)$, $\arccos f(x)$, где $f(x)$ — алгебраическая функция:

2098. $\int \ln^n x\,dx$ (n — натуральное число).

2099. $\int x^3 \ln^3 x\,dx.$ **2100.** $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^3 dx.$

2101. $\int \ln\left[(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}\right] \cdot \frac{dx}{(x+a)(x+b)}.$

2102. $\int \ln^2\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) dx.$

2103. $\int \ln\left(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}\right) dx.$

2104. $\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx.$ **2105.** $\int x \operatorname{arctg}(x+1)\,dx.$

2106. $\int \sqrt{x} \operatorname{arctg} \sqrt{x}\,dx.$ **2107.** $\int x \arcsin(1-x)\,dx.$

2108. $\int \arcsin \sqrt{x}\,dx.$ **2109.** $\int x \arccos \frac{1}{x}\,dx.$

2110. $\int \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x}\,dx.$

2111. $\int \frac{\arccos x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx.$ **2112.** $\int \frac{x \arccos x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx.$

2113. $\int x \operatorname{arctg} x \ln(1+x^2)\,dx.$

2114. $\int x \ln \frac{1+x}{1-x}\,dx.$ **2115.** $\int \frac{\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) dx}{(1+x^2)^{3/2}}.$