

Найти интегралы, содержащие гиперболические функции:

$$2116. \int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x dx. \quad 2117. \int \operatorname{ch}^4 x dx.$$

$$2118. \int \operatorname{sh}^3 x dx. \quad 2119. \int \operatorname{sh} x \operatorname{sh} 2x \operatorname{sh} 3x dx.$$

$$2120. \int \operatorname{th} x dx. \quad 2121. \int \operatorname{cth}^2 x dx. \quad 2122. \int \sqrt{\operatorname{th} x} dx.$$

$$2123. \int \frac{dx}{\operatorname{sh} x + 2 \operatorname{ch} x}.$$

$$2123.1. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x - 4 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x + 9 \operatorname{ch}^2 x}.$$

$$2123.2. \int \frac{dx}{0,1 + \operatorname{ch} x}. \quad 2123.3. \int \frac{\operatorname{ch} x dx}{3 \operatorname{sh} x - 4 \operatorname{ch} x}.$$

$$2124. \int \operatorname{sh} ax \sin bx dx. \quad 2125. \int \operatorname{sh} ax \cos bx dx.$$

§ 6. Разные примеры на интегрирование функций

Найти интегралы:

$$2126. \int \frac{dx}{x^6 (1+x^2)}. \quad 2127. \int \frac{x^3 dx}{(1-x^2)^3}.$$

$$2128. \int \frac{dx}{1+x^4+x^8}. \quad 2129. \int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}.$$

$$2130. \int x^2 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx. \quad 2131. \int \frac{x+2}{x^2 \sqrt{1-x^4}} dx.$$

$$2132. \int \sqrt{\frac{x}{1-x \sqrt{x}}} dx.$$

$$2133. \int \frac{x^6 dx}{\sqrt{1+x^2}}. \quad 2134. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}.$$

$$2135. \int \frac{dx}{x \sqrt{1+x^3+x^4}}. \quad 2136. \int \frac{dx}{x \sqrt{x^4-2x^2-1}}.$$

$$2137. \int \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$2138. \int \frac{(1+x) dx}{1+\sqrt{x+x^3}}. \quad 2139. \int \frac{\ln(1+x+x^2)}{(1+x)^2} dx.$$

$$2140. \int (2x+3) \arccos(2x-3) dx.$$

$$2141. \int x \ln(4+x^4) dx.$$

$$2142. \int \frac{\arcsin x}{x^3} \cdot \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$2143. \int \frac{x \ln(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

$$2144. \int x \sqrt{x^2+1} \ln \sqrt{x^2-1} dx.$$

$$2145. \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx.$$

$$2146. \int \frac{dx}{(2+\sin x)^2}. \quad 2147. \int \frac{\sin 4x}{\sin^8 x + \cos^8 x} dx.$$

$$2148. \int \frac{dx}{\sin x \sqrt{1+\cos x}}.$$

$$2149. \int \frac{ax^2+b}{x^2+1} \operatorname{arctg} x dx.$$

$$2150. \int \frac{ax^2+b}{x^2-1} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| dx.$$

$$2151. \int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx.$$

$$2152. \int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx. \quad 2153. \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}} dx.$$

$$2154. \int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$2155. \int \frac{x^4 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx. \quad 2156. \int \frac{x \operatorname{arcctg} x}{(1+x^2)^2} dx.$$

$$2157. \int \frac{x \ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2} dx.$$

$$2158. \int \sqrt{1-x^2} \arcsin x dx.$$

$$2159. \int x(1+x^2) \operatorname{arcctg} x dx. \quad 2160. \int x^x (1+\ln x) dx.$$

$$2161. \int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx. \quad 2162. \int \frac{\operatorname{arctg} e^{x/2}}{e^{x/2}(1+e^x)} dx.$$

$$2163. \int \frac{dx}{(e^{x+1}+1)^2 - (e^{x-1}+1)^2}.$$

$$2164. \int \sqrt{\operatorname{th}^2 x + 1} dx. \quad 2165. \int \frac{1+\sin x}{1+\cos x} \cdot e^x dx.$$

$$2166. \int |x| dx. \quad 2167. \int x|x| dx. \quad 2168. \int (x+|x|)^2 dx.$$

$$2169. \int \{|1+x|-|1-x|\} dx.$$

$$2170. \int e^{-|x|} dx. \quad 2171. \int \max(1, x^2) dx.$$

2172. $\int \varphi(x) dx$, где $\varphi(x)$ — расстояние числа x до ближайшего целого числа.

2173. $\int [x] |\sin \pi x| dx$ ($x \geq 0$).

2174. $\int f(x) dx$, где $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{при } |x| \leq 1; \\ 1-|x| & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$

2175. $\int f(x) dx$, где $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } -\infty < x < 0; \\ x+1, & \text{если } 0 \leq x \leq 1; \\ 2x, & \text{если } 1 < x < +\infty. \end{cases}$

2176. Найти $\int xf''(x) dx$.

2177. Найти $\int f'(2x) dx$.

2178. Найти $f(x)$, если $f'(x^2) = \frac{1}{x}$ ($x > 0$).

2179. Найти $f(x)$, если $f'(\sin^2 x) = \cos^2 x$.

2180. Найти $f(x)$, если

$$f'(\ln x) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < x \leq 1; \\ x & \text{при } 1 < x < +\infty \end{cases}$$

и $f(0) = 0$.

2180. 1. Пусть $f(x)$ — монотонная непрерывная функция и $f^{-1}(x)$ — ее обратная функция.

Доказать, что если

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

то

$$\int f^{-1}(x) dx = xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x)) + C.$$

Рассмотреть примеры: а) $f(x) = x^n$ ($n > 0$);
б) $f(x) = e^x$; в) $f(x) = \arcsin x$; г) $f(x) = \operatorname{Arth} x$.

О Т Д Е Л IV
ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Определенный интеграл как предел суммы

1°. Интеграл в смысле Римана. Если функция $f(x)$ определена на $[a, b]$ и $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, то интегралом функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ называется число

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max|\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i, \quad (1)$$

где $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$ и $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

Для существования предела (1) необходимо и достаточно, чтобы *нижняя интегральная сумма*

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i$$

и *верхняя интегральная сумма*

$$\bar{S} = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i,$$

где

$$m_i = \inf_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} f(x) \text{ и } M_i = \sup_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} f(x),$$

имели общий предел при $\max|\Delta x_i| \rightarrow 0$.

Функции $f(x)$, для которых предел в правой части равенства (1) существует, называются *интегрируемыми* (собственно) на соответствующем промежутке. В частности, а) непрерывная функция; б) ограниченная функция, имеющая конечное число точек разрыва; в) ограниченная монотонная функция,— интегрируемы на любом конечном сегменте. Если функция $f(x)$ не ограничена на сегменте $[a, b]$, то она собственно неинтегрируема на $[a, b]$.

2°. Условие интегрируемости. Необходимым и достаточным условием интегрируемости на данном сегменте $[a, b]$ функции $f(x)$ является выполнение равенства

$$\lim_{\max|\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0,$$

где $\omega_i = M_i - m_i$ — колебание функции $f(x)$ на сегменте $[x_i, x_{i+1}]$.

2181. Найти интегральную сумму S_n для функции

$$f(x) = 1 + x$$

на сегменте $[-1, 4]$, разбивая его на n равных промежутков и выбирая значения аргумента ξ_i ($i = 0, 1, \dots, n-1$) в серединах этих промежутков.

2182. Для данных функций $f(x)$ найти нижнюю S_n и верхнюю \bar{S}_n интегральные суммы на соответствующих сегментах, деля их на n равных частей, если

а) $f(x) = x^3$ $[-2 \leq x \leq 3];$

б) $f(x) = \sqrt{x}$ $[0 \leq x \leq 1];$

в) $f(x) = 2^x$ $[0 \leq x \leq 10].$

2183. Найти нижнюю интегральную сумму для функции $f(x) = x^4$ на сегменте $[1, 2]$, разбивая этот сегмент на n частей, длины которых образуют геометрическую прогрессию. Чему равен предел этой суммы при $n \rightarrow \infty$?

2184. Исходя из определения интеграла, найти

$$\int_0^T (v_0 + gt) dt,$$

где v_0 и g — постоянны.

Вычислить определенные интегралы, рассматривая их как пределы соответствующих интегральных сумм и производя разбиение промежутка интегрирования надлежащим образом:

2185. $\int_{-1}^2 x^3 dx.$ 2186. $\int_0^1 a^x dx$ ($a > 0$). 2187. $\int_0^{\pi/2} \sin x dx.$

2188. $\int_0^z \cos t dt.$ 2189. $\int_a^b \frac{dx}{x^2}$ ($0 < a < b$).

Указание. Положить $\xi_i = \sqrt{x_i x_{i+1}}$ ($i = 0, 1, \dots, n$).

2190. $\int_a^b x^m dx$ ($0 < a < b$; $m \neq -1$).

Указание. Выбрать точки деления так, чтобы их абсциссы x_i образовывали геометрическую прогрессию.

2191. $\int_a^b \frac{dx}{x} \quad (0 < a < b).$

2192. Вычислить интеграл Пуассона

$$\int_0^{\pi} \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx$$

при: а) $|\alpha| < 1$; б) $|\alpha| > 1$.

Указание. Воспользоваться разложением многочлена $\alpha^{2n}-1$ на квадратичные множители.

2193. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на $[a, b]$. Доказать, что

$$\lim_{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \varphi(\theta_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) \varphi(x) dx,$$

где $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$, $x_i \leq \theta_i \leq x_{i+1}$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) и $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ ($x_0 = a$, $x_n = b$).

2193.1. Пусть $f(x)$ ограничена и монотонна на $[0, 1]$. Доказать, что

$$\int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

2193.2. Пусть функция $f(x)$ ограничена и выпукла сверху (см. 1312) на сегменте $[a, b]$.

Доказать, что

$$(b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2} \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

2193.3. Пусть $f(x) \in C^{(1)}[1, +\infty)$ и $f(x) \geq 0$, $f'(x) > 0$, $f''(x) \leq 0$ при $x \in [1, +\infty)$.

Доказать, что

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \frac{1}{2} f(n) + \int_1^n f(x) dx + O(1)$$

при $n \rightarrow \infty$.

2193.4. Пусть $f(x) \in C^{(1)}[a, b]$ и

$$\Delta_n = \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$$

Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} n\Delta_n$.

2194. Показать, что разрывная функция

$$f(x) = \operatorname{sgn}\left(\sin \frac{\pi}{x}\right)$$

интегрируема на промежутке $[0, 1]$.

2195. Показать, что функция Римана

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ иррационально;} \\ 1/n, & \text{если } x = m/n, \end{cases}$$

где m и n ($n \geq 1$) — взаимно простые целые числа, интегрируема на любом конечном промежутке.

2196. Показать, что функция

$$f(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right], \quad \text{если } x \neq 0$$

и $f(0) = 0$, интегрируема на сегменте $[0, 1]$.

2197. Доказать, что функция Дирихле

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ иррационально;} \\ 1, & \text{если } x \text{ рационально,} \end{cases}$$

не интегрируема на любом промежутке.

2198. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$

$$f_n(x) = \sup f(x) \text{ при } x_i \leq x < x_{i+1},$$

где

$$x_i = a + \frac{i}{n}(b-a) \quad (i = 0, 1, \dots, n; \quad n = 1, 2, \dots).$$

Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$.

2199. Доказать, что если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то существует последовательность непрерывных функций $\varphi_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) такая, что

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx \text{ при } a \leq c \leq b.$$

2200. Доказать, что если ограниченная функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, то абсолютная величина ее $|f(x)|$ также интегрируема на $[a, b]$, причем

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

2201. Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на сегменте $[a, b]$, т. е. интеграл $\int_a^b |f(x)| dx$ существует. Является ли эта функция интегрируемой на $[a, b]$? Рассмотреть пример:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально;} \\ -1, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

2202. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и $A \leq f(x) \leq B$ при $a \leq x \leq b$, а функция $\varphi(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[A, B]$. Доказать, что функция $\varphi(f(x))$ интегрируема на $[a, b]$.

2203. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы, то обязательно ли функция $f(\varphi(x))$ также интегрируема?

Рассмотреть пример:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x=0; \\ 1, & \text{если } x \neq 0, \end{cases}$$

и $\varphi(x)$ — функция Римана (см. задачу 2195).

2204. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[A, B]$. Доказать, что $f(x)$ обладает свойством *интегральной непрерывности*, т. е. $\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b |f(x+h) - f(x)| dx = 0$, где $[a, b] \subset [A, B]$.

2205. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$. Доказать, что равенство $\int_a^b f^2(x) dx = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $f(x) = 0$ во всех точках непрерывности функции $f(x)$, принадлежащих сегменту $[a, b]$.

§ 2. Вычисление определенных интегралов с помощью неопределенных

1°. Ф о р м у л а Н ъ ю т о н а — Л е й б н и ц а . Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[a, b]$ и $F(x)$ — ее первообразная, т. е. $F'(x) = f(x)$, то

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b.$$

Определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ при $f(x) \geq 0$ геометрически представляет собой площадь S криволинейной трапе-

ции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и двумя перпендикулярами к оси Ox : $x = a$ и $x = b$ (рис. 9).

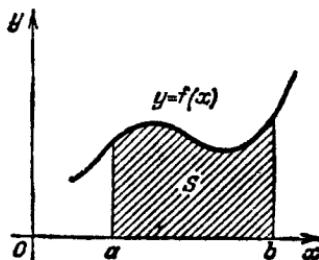


Рис. 9

2°. Ф о р м у л а и н т е г р и р о в а н и я по ч а с т я м.
Если $f(x), g(x) \in C^{(1)} [a, b]$, то

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x) f'(x) dx.$$

3°. З а м е н а п е р е м ен н о й. Если: 1) функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$; 2) функция $\varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на сегменте $[\alpha, \beta]$, где $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$; 3) сложная функция $f(\varphi(t))$ определена и непрерывна на $[\alpha, \beta]$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Применяя формулу Ньютона—Лейбница, найти следующие определенные интегралы и нарисовать соответствующие криволинейные площади:

2206. $\int_{-1}^8 \sqrt[3]{x} dx.$

2207. $\int_0^{\pi} \sin x dx.$

2208. $\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}.$

2209. $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

2210. $\int_{\operatorname{sh} 1}^{\operatorname{sh} 2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$

2211. $\int_0^2 |1-x| dx.$

2212. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1} \quad (0 < \alpha < \pi).$

2213. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+e \cos x} \quad (0 \leq e < 1).$

2214. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2)}} \quad (|a|<1, |b|<1, ab>0).$

2215. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} \quad (ab \neq 0).$

2216. Объяснить, почему формальное применение формулы Ньютона—Лейбница приводит к неверным результатам, если:

а) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}; \quad$ б) $\int_0^{2\pi} \frac{\sec^2 x \, dx}{2 + \operatorname{tg}^2 x}; \quad$ в) $\int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x} \right) dx.$

2217. Найти $\int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1+2^{1/x}} \right) dx.$

2218. Найти $\int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x} \, dx.$

С помощью определенных интегралов найти пределы следующих сумм:

2219. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right).$

2220. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right).$

2221. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right).$

2222. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right).$

2223. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} \quad (p > 0).$

2224. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}} + \dots + \sqrt{1+\frac{n}{n}} \right),$

Найти

$$2225. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}. \quad 2226. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right].$$

Отбрасывая равномерно бесконечно малые высших порядков, найти пределы следующих сумм:

$$2227. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sin \frac{\pi}{n^2} + \left(1 + \frac{2}{n}\right) \sin \frac{2\pi}{n^2} + \dots + \left(1 + \frac{n-1}{n}\right) \sin \frac{(n-1)\pi}{n^2} \right].$$

$$2228. \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 + \cos \frac{k\pi}{n}}.$$

$$2229. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}}{n^2} \quad (x>0).$$

$$2230. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^{1/n}}{n+1} + \frac{2^{2/n}}{n+\frac{1}{2}} + \dots + \frac{2^{n/n}}{n+\frac{1}{n}} \right).$$

2231. Найти:

$$\frac{d}{dx} \int_a^b \sin x^2 dx, \quad \frac{d}{da} \int_a^b \sin x^2 dx, \quad \frac{d}{db} \int_a^b \sin x^2 dx.$$

2232. Найти:

$$a) \frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt; \quad b) \frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}};$$

$$b) \frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt.$$

2233. Найти:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos x^2 dx}{x}; \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctg x)^2 dx}{\sqrt{x^2+1}};$$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{x^2} dx \right)^2}{\int_x^{\infty} e^{2x^2} dx}.$$

2233.1. Пусть $f(x) \in C[0, +\infty]$ и $f(x) \rightarrow A$ при $x \rightarrow +\infty$. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n f(nx) dx$.

2234. Доказать, что $\int_0^x e^{x^2} dx \sim \frac{1}{2x} e^{x^2}$ при $x \rightarrow \infty$.

$$\text{2235. Найти } \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\lg x} dx}{\int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin x} dx}.$$

2236. Пусть $f(x)$ — непрерывная положительная функция. Доказать, что функция $\phi(x) = \frac{\int_0^x t f(t) dt}{\int_0^x f(t) dt}$ возрастает при $x > 0$.

2237. Найти:

$$\text{а)} \int_0^2 f(x) dx, \text{ если } f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x & \text{при } 1 < x \leq 2; \end{cases}$$

$$\text{б)} \int_0^1 f(x) dx, \text{ если } f(x) = \begin{cases} x & \text{при } 0 \leq x \leq t, \\ t \cdot \frac{1-x}{1-t} & \text{при } t \leq x \leq 1. \end{cases}$$

2238. Вычислить и построить графики интегралов $I = I(\alpha)$, рассматривая их как функции параметра α , если:

$$\text{а)} I = \int_0^1 x |x - \alpha| dx;$$

$$\text{б)} I = \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{1 + 2\alpha \cos x + \alpha^2} dx;$$

$$\text{в)} \quad I = \int_0^{\pi} \frac{\sin x \, dx}{\sqrt{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2}}.$$

Применяя формулу интегрирования по частям, найти следующие определенные интегралы:

$$2239. \int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx. \quad 2240. \int_0^{\pi} x \sin x dx.$$

$$2241. \int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx. \quad 2242. \int_{1/e}^e |\ln x| dx.$$

$$2243. \int_0^1 \arccos x dx. \quad 2244. \int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x dx.$$

Применяя подходящую замену переменной, найти следующие определенные интегралы:

$$2245. \int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5 - 4x}}. \quad 2246. \int_0^a x^3 \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

$$2247. \int_0^{0.75} \frac{dx}{(x+1) \sqrt{x^2+1}}. \quad 2248. \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx.$$

$$2249. \int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx.$$

$$2250. \text{ Вычислить интеграл } \int_{-1}^1 \frac{1+x^2}{1+x^4} dx, \text{ полагая}$$

$$x - \frac{1}{x} = t.$$

2251. Объяснить, почему формальная замена $x = \varphi(t)$ приводит к неверным результатам, если:

$$\text{а)} \quad \int_{-1}^1 dx, \text{ где } t = x^{2/3}; \quad \text{б)} \quad \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}, \text{ где } x = \frac{1}{t};$$

$$\text{в)} \quad \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x}, \text{ где } \operatorname{tg} x = t.$$

2252. Можно ли в интеграле $\int_0^3 x \sqrt[3]{1-x^3} dx$ положить $x = \sin t$?

2253. Можно ли в интеграле $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ при замене переменной $x = \sin t$ в качестве новых пределов взять числа π и $\frac{\pi}{2}$?

2254. Доказать, что если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \int_0^1 f(a + (b-a)x) dx.$$

2255. Доказать равенство

$$\int_0^a x^3 f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} xf(x) dx \quad (a > 0).$$

2256. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на сегменте $[A, B] \supset [a, b]$. Найти $\frac{d}{dx} \int_a^b f(x+y) dy$ при $[a-x, b-x] \subset [A, B]$.

2257. Доказать, что если $f(x)$ непрерывна на $[0, 1]$, то

a) $\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx;$

б) $\int_0^{\pi} xf(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx.$

2258. Доказать, что для непрерывной на $[-l, l]$ функции $f(x)$ имеем: 1) $\int_{-l}^l f(x) dx = 2 \int_0^l f(x) dx$, если функция $f(x)$ четная, и 2) $\int_{-l}^l f(x) dx = 0$, если функция $f(x)$ нечетная. Дать геометрическую интерпретацию этих фактов.

2259. Доказать, что одна из первообразных четной функции есть функция нечетная, а всякая первообразная нечетной функции есть функция четная.

2260. Вычислить интеграл

$$\int_{1/2}^2 \left(1+x-\frac{1}{x}\right) e^{x+(1/x)} dx,$$

введя новую переменную

$$t = x + \frac{1}{x}.$$

2261. В интеграле $\int_0^{2\pi} f(x) \cos x dx$ выполнить замену переменного $\sin x = t$.

2262. Вычислить интеграл

$$\int_{-2\pi n}^1 \left| \left[\cos \left(\ln \frac{1}{x} \right) \right] \right| dx,$$

где n — натуральное число.

2263. Найти $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$.

2264. Найти интеграл $\int_{-1}^3 \frac{f'(x)}{1 + f^2(x)} dx$, если

$$f(x) = \frac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}.$$

2265. Доказать, что если $f(x)$ — непрерывная периодическая функция, определенная при $-\infty < x < +\infty$ и имеющая период T , то

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx,$$

где a — любое число.

2266. Доказать, что при n нечетном функции

$$F(x) = \int_0^x \sin^n x dx \quad \text{и} \quad G(x) = \int_0^x \cos^n x dx$$

периодические с периодом 2π ; а при n четном каждая из этих функций есть сумма линейной функции и периодической функции.

2267. Доказать, что функция $F(x) = \int_{x_0}^x f(x) dx$, где $f(x)$ — непрерывная периодическая функция с периодом T , в общем случае, есть сумма линейной функции и периодической функции периода T .

Вычислить интегралы:

2268. $\int_0^1 x(2-x^2)^{12} dx.$

2269. $\int_{-1}^1 \frac{x dx}{x^2+x+1}.$

2270. $\int_1^e (x \ln x)^3 dx.$ 2271. $\int_0^9 x^3 \sqrt[3]{1-x} dx.$

2272. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}}.$ 2273. $\int_1^4 x^{15} \sqrt{1+3x^8} dx.$

2274. $\int_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx.$

2275. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}.$

2276. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}.$

2277. $\int_0^{\pi/2} \sin x \sin 2x \sin 3x dx.$ 2278. $\int_0^{\pi} (x \sin x)^3 dx.$

2279. $\int_0^{\pi} e^x \cos^2 x dx.$ 2280. $\int_0^{\ln 2} \operatorname{sh}^4 x dx.$

С помощью формул понижения вычислить интегралы, зависящие от параметра n , принимающего целые положительные значения:

2281. $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx.$ 2282. $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$

2283. $I_n = \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^{2n} x dx.$ 2284. $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx.$

2285. $I_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}.$ 2286. $I_n = \int_0^1 x^m (\ln x)^n dx.$

$$2287. I_n = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} \right)^{2n+1} dx.$$

Если $f(x) = f_1(x) + i f_2(x)$ есть комплексная функция от действительной переменной x , где $f_1(x) = \operatorname{Re} f(x)$, $f_2(x) = \operatorname{Im} f(x)$ и $i^2 = -1$, то по определению полагают:

$$\int f(x) dx = \int f_1(x) dx + i \int f_2(x) dx.$$

Очевидно, что

$$\operatorname{Re} \int f(x) dx = \int \operatorname{Re} f(x) dx$$

и

$$\operatorname{Im} \int f(x) dx = \int \operatorname{Im} f(x) dx.$$

2288. Пользуясь формулой Эйлера

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

показать, что

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ 2\pi, & \text{если } m = n \end{cases}$$

(n и m — целые).

2289. Показать, что

$$\int_a^b e^{(\alpha+i\beta)x} dx = \frac{e^{b(\alpha+i\beta)} - e^{a(\alpha+i\beta)}}{\alpha + i\beta}$$

(α и β — постоянные).

Пользуясь формулами Эйлера:

$$\cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}), \quad \sin x = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}),$$

вычислить интегралы (m и n — целые положительные числа):

$$2290. \int_0^{\pi/2} \sin^{2m} x \cos^{2n} x dx.$$

$$2291. \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} dx. \quad 2292. \int_0^{\pi} \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x} dx.$$

$$2293. \int_0^{\pi} \cos^n x \cos nx dx. \quad 2294. \int_0^{\pi} \sin^n x \sin nx dx.$$

Найти интегралы (n —натуральное число):

$$2295. \int_0^{\pi} \sin^{n-1} x \cos(n+1)x dx.$$

$$2296. \int_0^{\pi} \cos^{n-1} x \sin(n+1)x dx.$$

$$2297. \int_0^{2\pi} e^{-ax} \cos^{2n} x dx.$$

$$2298. \int_0^{\pi/2} \ln \cos x \cdot \cos 2nx dx.$$

2299. Применяя многократное интегрирование по частям, вычислить интеграл Эйлера: $B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$, где m и n —целые положительные числа.

2300. Многочлен Лежандра $P_n(x)$ определяется формулой: $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] (n = 0, 1, 2, \dots)$.

Доказать, что

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ \frac{2}{2n+1}, & \text{если } m = n, \end{cases}$$

2301. Пусть функция $f(x)$ собственно интегрируема на $[a, b]$ и $F(x)$ —функция такая, что $F'(x) = f(x)$ всюду в $[a, b]$, за исключением, быть может, конечного числа внутренних точек c_i ($i = 1, \dots, p$) и точек a и b , где функция $F(x)$ терпит разрыв 1-го рода («обобщенная первообразная»). Доказать, что

$$\int_a^b f(x) dx = F(b-0) - F(a+0) - \sum_{i=1}^p [F(c_i+0) - F(c_i-0)].$$

2302. Пусть функция $f(x)$ собственно интегрируема на сегменте $[a, b]$ и

$$F(x) = C + \int_a^x f(\xi) d\xi$$

—ее неопределенный интеграл.

Доказать, что функция $F(x)$ непрерывна и во всех точках непрерывности функции $f(x)$ имеет место

равенство

$$F'(x) = f(x).$$

Что можно сказать о производной функции $F(x)$ в точках разрыва функции $f(x)$?

Рассмотреть примеры:

- a) $f\left(\frac{1}{n}\right) = 1$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) и $f(x) = 0$ при $x \neq \frac{1}{n}$;
- б) $f(x) = \operatorname{sgn} x$.

Найти неопределенные интегралы от ограниченных разрывных функций:

$$2303. \int \operatorname{sgn} x dx. \quad 2304. \int \operatorname{sgn}(\sin x) dx.$$

$$2305. \int [x] dx \quad (x \geq 0). \quad 2306. \int x [x] dx \quad (x \geq 0).$$

$$2307. \int (-1)^{[x]} dx.$$

$$2308. \int_0^x f(x) dx, \text{ где } f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| < l, \\ 0, & \text{если } |x| > l. \end{cases}$$

Вычислить определенные интегралы от ограниченных разрывных функций:

$$2309. \int_0^3 \operatorname{sgn}(x - x^3) dx. \quad 2310. \int_0^2 [e^x] dx.$$

$$2311. \int_0^6 [x] \sin \pi x / 6 dx. \quad 2312. \int_0^\pi x \operatorname{sgn}(\cos x) dx.$$

$$2313. \int_1^{a+1} \ln [x] dx, \text{ где } a — \text{натуральное число.}$$

$$2314. \int_0^1 \operatorname{sgn} [\sin(\ln x)] dx.$$

$$2315. \text{Найти } \int_E |\cos x| \sqrt{\sin x} dx, \text{ где } E — \text{множество}$$

тех значений сегмента $[0, 4\pi]$, для которых подынтегральное выражение имеет смысл.

§ 3. Теоремы о среднем

1°. Среднее значение функции. Число

$$M[f] = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

называется *средним значением* функции $f(x)$ на промежутке $[a, b]$.

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то найдется точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$M[f] = f(c).$$

2°. Первая теорема о среднем. Если: 1) функции $f(x)$ и $\Phi(x)$ ограничены и соответственно интегрируемы на сегменте $[a, b]$; 2) функция $\Phi(x)$ не меняет знака при $a < x < b$, то

$$\int_a^b f(x) \Phi(x) dx = \mu \int_a^b \Phi(x) dx,$$

где $m \leq \mu \leq M$ и $m = \inf_{a < x < b} f(x)$, $M = \sup_{a < x < b} f(x)$; 3) если, сверх того, функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то $\mu = f(c)$, где $a \leq c \leq b$.

3°. Вторая теорема о среднем. Если: 1) функции $f(x)$ и $\Phi(x)$ ограничены и собственно интегрируемы на сегменте $[a, b]$; 2) функция $\Phi(x)$ монотонна при $a < x < b$, то

$$\int_a^b f(x) \Phi(x) dx = \Phi(a+0) \int_a^\xi f(x) dx + \Phi(b-0) \int_\xi^b f(x) dx,$$

где $a \leq \xi \leq b$; 3) если, сверх того, функция $\Phi(x)$ монотонно убывающая (в широком смысле!) и неотрицательная, то

$$\int_a^b f(x) \Phi(x) dx = \Phi(a+0) \int_a^\xi f(x) dx \quad (a \leq \xi \leq b);$$

3') если же функция $\Phi(x)$ монотонно возрастающая (в широком смысле) и неотрицательная, то

$$\int_a^b f(x) \Phi(x) dx = \Phi(b-0) \int_\xi^b f(x) dx \quad (a \leq \xi \leq b).$$

2316. Определить знаки следующих определенных интегралов:

a) $\int_0^{2\pi} x \sin x dx$; б) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx$,

в) $\int_{-2}^2 x^3 2^x dx$; г) $\int_{1/2}^1 x^3 \ln x dx$.

2317. Какой интеграл больше:

а) $\int_0^{\pi/2} \sin^{10} x dx$ или $\int_0^{\pi/2} \sin^8 x dx$?

б) $\int_0^1 e^{-x} dx$ или $\int_0^1 e^{-x^2} dx$?

$$\text{в)} \int_0^{\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx \text{ или } \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx?$$

2318. Определить средние значения данных функций в указанных промежутках:

- а) $f(x) = x^2$ на $[0, 1]$;
 б) $f(x) = \sqrt{x}$ на $[0, 100]$;
 в) $f(x) = 10 + 2 \sin x + 3 \cos x$ на $[0, 2\pi]$;
 г) $f(x) = \sin x \sin(x + \varphi)$ на $[0, 2\pi]$.

2319. Найти среднее значение длины фокального радиуса-вектора эллипса

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \varphi} \quad (0 < e < 1).$$

2320. Найти среднее значение скорости свободно падающего тела, начальная скорость которого равна v_0 .

2321. Сила переменного тока меняется по закону

$$i = i_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right),$$

где i_0 — амплитуда, t — время, T — период и φ — начальная фаза. Найти среднее значение квадрата силы тока.

2321.1. Пусть $f(x) \in C[0, +\infty)$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$.

Найти

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(x) dx.$$

Рассмотреть пример $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

2322. Пусть

$$\int_0^x f(t) dt = xf(\theta x).$$

Найти θ , если:

а) $f(t) = t^n$ ($n > -1$); б) $f(t) = \ln t$; в) $f(t) = e^t$.

Чему равны $\lim_{x \rightarrow +0} \theta$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} \theta$?

Пользуясь первой теоремой о среднем, оценить интегралы:

$$2323. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + 0,5 \cos x}.$$

$$2324. \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} dx.$$

2325. $\int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100} dx.$

2326. Доказать равенства:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0;$ б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = 0.$

2326.1. Найти:

а) $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{dx}{\epsilon x^2 + 1};$ б) $\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{a\epsilon}^b f(x) \frac{dx}{x},$

где $a > 0, b > 0$ и $f(x) \in C [0, 1].$

2327. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $\varphi(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b) , причем

$$\varphi'(x) > 0 \text{ при } a < x < b.$$

Доказать вторую теорему о среднем, применяя интегрирование по частям и используя первую теорему о среднем.

Пользуясь второй теоремой о среднем, оценить интегралы:

2328. $\int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$

2329. $\int_a^b \frac{e^{-ax}}{x} \sin x dx \quad (\alpha > 0; 0 < a < b).$

2330. $\int_a^b \sin x^3 dx \quad (0 < a < b).$

2331. Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ интегрируемы на промежутке $[a, b]$ вместе со своими квадратами. Доказать неравенство Коши—Буняковского

$$\left| \int_a^b \varphi(x) \psi(x) dx \right|^2 \leq \int_a^b \varphi^2(x) dx \int_a^b \psi^2(x) dx.$$

2332. Пусть функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на сегменте $[a, b]$ и $f(a) = 0.$

Доказать неравенство $M^2 \leq (b-a) \int_a^b |f(x)|^2 dx$, где $M = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$.

2333. Доказать равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx = 0 \quad (p > 0).$$

§ 4. Несобственные интегралы

1°. Несобственная интегрируемость функций. Если функция $f(x)$ собственно интегрируема на каждом конечном сегменте $[a, b]$, то, по определению, полагают:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (1)$$

Если функция $f(x)$ не ограничена в окрестности точки b и собственно интегрируема на каждом сегменте $[a, b-\varepsilon]$ ($\varepsilon > 0$), то принимают:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx. \quad (2)$$

Если пределы (1) или (2) существуют, то соответствующий интеграл называется *сходящимся*, в противном случае — *расходящимся* (в элементарном смысле!).

2°. Критерий Коши. Для сходимости интеграла (1) необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало число $b = b(\varepsilon)$ такое, что при любых $b' > b$ и $b'' > b$ было бы выполнено неравенство

$$\left| \int_{b'}^{b''} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Аналогично формулируется критерий Коши для интеграла типа (2).

3°. Признаки абсолютной сходимости. Если $|f(x)|$ несобственно интегрируема, то соответствующий элементарный интеграл (1) или (2) от функции $f(x)$ называется *абсолютно сходящимся* и является интегралом заведомо сходящимся.

Признак сравнения I. Пусть $|f(x)| \leq F(x)$ при $x \geq a$.

Если $\int_a^{+\infty} F(x) dx$ сходится, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится абсолютно.

Признак сравнения II. Если $\psi(x) > 0$ и $\Phi(x) = O^*(\psi(x))$ при $x \rightarrow +\infty$, то интегралы $\int_a^{+\infty} \Phi(x) dx$ и $\int_a^{+\infty} \psi(x) dx$ сходятся

или расходятся одновременно. В частности, это имеет место, если $\varphi(x) \sim \psi(x)$ при $x \rightarrow +\infty$.

Признак сравнения III. а) Пусть

$$f(x) = O^*(\frac{1}{x^\rho}) \text{ при } x \rightarrow +\infty.$$

В таком случае интеграл (1) сходится, если $\rho > 1$, и расходится, если $\rho \leq 1$.

б) Пусть

$$f(x) = O^*(\frac{1}{(b-x)^\rho}) \text{ при } x \rightarrow b - 0.$$

В таком случае интеграл (2) сходится, если $\rho < 1$ и расходится, если $\rho \geq 1$.

4°. Специальный признак сходимости. Если: 1) функция $\varphi(x)$ монотонно стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$ и 2) функция $f(x)$ имеет ограниченную первообразную

$$F(x) = \int_a^x f(\xi) d\xi,$$

то интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx$$

сходится, вообще говоря, не абсолютно.

В частности, интегралы

$$\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\rho} dx \text{ и } \int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\rho} dx \quad (\rho > 0)$$

сходятся, если $\rho > 0$.

5°. Главное значение в смысле Коши, Если функция $f(x)$ такова, что при любом $\epsilon > 0$ существуют собственные интегралы

$$\int_a^{c-\epsilon} f(x) dx \text{ и } \int_{c+\epsilon}^b f(x) dx \quad (a < c < b),$$

то под главным значением в смысле Коши (v. p.) понимается число

$$v. p. \int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left[\int_a^{c-\epsilon} f(x) dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x) dx \right].$$

Аналогично

$$v. p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_a^a f(x) dx.$$

Вычислить интегралы:

$$2334. \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^a} \quad (a > 0). \quad 2335. \int_0^1 \ln x dx.$$

$$2336. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}. \quad 2337. \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$2338. \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}. \quad 2339. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}.$$

$$2340. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}. \quad 2341. \int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx.$$

$$2342. \int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}.$$

$$2343. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}.$$

$$2344. \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx. \quad 2345. \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^{3/2}} dx.$$

$$2346. \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx dx \quad (a>0).$$

$$2347. \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx dx \quad (a>0).$$

С помощью формул понижения вычислить следующие несобственные интегралы (n — натуральное число):

$$2348. I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx.$$

$$2349. I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^n} \quad (ac-b^2>0).$$

$$2350. I_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1) \dots (x+n)}.$$

$$2351. I_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}.$$

2352. $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch}^{n+1} x}.$

2353. а) $\int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx;$ б) $\int_0^{\pi/2} \ln \cos x dx.$

2354. Найти $\int_B e^{-x/2} \frac{|\sin x - \cos x|}{\sqrt{\sin x}} dx,$ где E — множество тех значений x интервала $(0, +\infty)$, для которых подынтегральное выражение имеет смысл.

2355. Доказать равенство

$$\int_0^{+\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{x^2 + 4ab}) dx,$$

где $a > 0$ и $b > 0$, предполагая, что интеграл в левой части равенства имеет смысл.

2356. Средним значением функции $f(x)$ на интервале $(0, +\infty)$ называется число $M[f] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(\xi) d\xi.$

Найти средние значения следующих функций:

а) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2(x\sqrt{2});$

б) $f(x) = \operatorname{arctg} x;$ в) $f(x) = \sqrt{x} \sin x.$

2357. Найти:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} x \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt;$ б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x \sqrt{1+t^4} dt}{x^3};$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{+\infty} t^{-1} e^{-t} dt}{\ln \frac{1}{x}};$ г) $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \int_x^1 \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}} dt,$

где $\alpha > 0$ и $f(t)$ — непрерывная функция на сегменте $[0, 1].$

Исследовать сходимость интегралов

2358. $\int_0^{+\infty} \frac{x^3 dx}{x^4 - x^2 + 1}.$ 2359. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3 \sqrt[3]{x^2 + 1}}.$
2360. $\int_0^2 \frac{dx}{\ln x}.$ 2361. $\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx.$
2362. $\int_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x} dx.$ 2363. $\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} dx \quad (n \geq 0).$
2364. $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x^n} dx \quad (a \neq 0).$ 2365. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx.$
2366. $\int_0^{+\infty} \frac{x^m \operatorname{arctg} x}{2+x^n} dx \quad (n \geq 0).$
2367. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^n} dx \quad (n \geq 0).$
2368. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx.$ 2369. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}.$
2370. $\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^4}}.$ 2370.1. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}.$
2371. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}.$ 2372. $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx.$
2373. $\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} dx.$ 2374. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}.$
2375. $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^p (\ln x)^q (\ln \ln x)^r}.$
2376. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{|x-a_1|^{p_1} |x-a_2|^{p_2} \dots |x-a_n|^{p_n}}$

$(a_1 < a_2 < \dots < a_n).$

2376.1. $\int_0^{+\infty} x^\alpha |x-1|^\beta dx.$

2377. $\int_0^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} dx,$ где $P_m(x)$ и $P_n(x)$ — взаимно простые многочлены соответственно степеней m и $n.$

Исследовать на абсолютную и условную сходимость следующие интегралы:

2378. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$

Указание. $|\sin x| \geq \sin^2 x.$

2379. $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos x}{x+100} dx.$ 2380. $\int_0^{+\infty} x^p \sin(x^q) dx$ ($q \neq 0$).

2380.1. $\int_0^{\pi/2} \sin(\sec x) dx.$ 2380.2. $\int_0^{+\infty} x^2 \cos(e^x) dx.$

2381. $\int_0^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$ ($q \geq 0$).

2382. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^n} dx.$ 2383. $\int_a^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \sin x dx,$

где $P_m(x)$ и $P_n(x)$ — целые многочлены и $P_n(x) > 0,$ если $x \geq a \geq 0.$

2384. Если $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится, то обязательно ли $f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty?$

Рассмотреть примеры:

a) $\int_0^{+\infty} \sin(x^3) dx;$ б) $\int_0^{+\infty} (-1)^{\lfloor x^2 \rfloor} dx.$

2384.1. Пусть $f(x) \in C^{(1)}[x_0, +\infty),$ $|f'(x)| < C$ при $x_0 \leq x < +\infty$ и $\int_{x_0}^{+\infty} |f(x)| dx$ сходится. Доказать, что $f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty.$

Указание. Рассмотреть интеграл

$$\int_{x_0}^{+\infty} f(x) f'(x) dx.$$

2385. Можно ли сходящийся несобственный интеграл

$$\int_a^b f(x) dx$$

от неограниченной функции $f(x)$, определенной на $[a, b]$, рассматривать как предел соответствующей интегральной суммы $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$, где $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$ и $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$?

2386. Пусть

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad (1)$$

сходится и функция $\phi(x)$ ограничена.

Обязательно ли сходится интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x) \phi(x) dx? \quad (2)$$

Привести соответствующий пример.

Что можно сказать о сходимости интеграла (2), если интеграл (1) сходится абсолютно?

2387. Доказать, что если $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится и $f(x)$ — монотонная функция, то $f(x) = O\left(\frac{1}{x}\right)$.

2388. Пусть функция $f(x)$ монотонна в промежутке $0 < x \leq 1$ и не ограничена в окрестности точки $x = 0$.

Доказать, что если существует $\int_0^1 f(x) dx$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx.$$

2389. Доказать, что если функция $f(x)$ монотонна и ограничена в интервале $0 < x < a$ и существует несобственный интеграл $\int_0^a x^p f(x) dx$, то

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^{p+1} f(x) = 0.$$

2390. Показать, что:

а) в. р. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = 0$; б) в. р. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1-x^2} = 0$;

в) в. р. $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx = 0$.

2391. Доказать, что при $x \geq 0$ существует

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = \text{в. р. } \int_0^x \frac{d\xi}{\ln \xi}.$$

Найти следующие интегралы:

2392. в. р. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$. 2393. в. р. $\int_{1/2}^2 \frac{dx}{x \ln x}$.

2394. в. р. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx$. 2395. в. р. $\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} x dx$.

§ 5. Вычисление площадей

1°. Площадь в прямоугольных координатах. Площадь S плоской фигуры $A_1A_2B_2B_1$ (рис. 10),

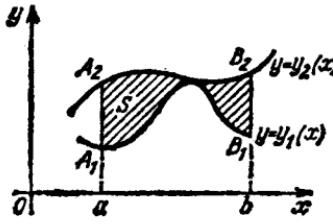


Рис. 10

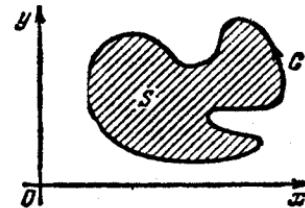


Рис. 11

ограниченной двумя непрерывными кривыми $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ ($y_2(x) \geq y_1(x)$) и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ ($a < b$), равна

$$S = \int_a^b [y_2(x) - y_1(x)] dx.$$

2°. Площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной в параметрическом виде.

Если $x = x(t)$, $y = y(t)$ $[0 \leq t \leq T]$ — параметрические уравнения кусочно гладкой простой замкнутой кривой C , пробегаемой против хода часовой стрелки и ограничивающей слева от себя фигуру с площадью S (рис. 11), то

$$S = - \int_0^T y(t) x'(t) dt = \int_0^T x(t) y'(t) dt,$$

или

$$S = \frac{1}{2} \int_0^T [x(t) y'(t) - x'(t) y(t)] dt.$$

3°. Площадь в полярных координатах.

Площадь S сектора OAB (рис. 12), ограниченного непрерывной

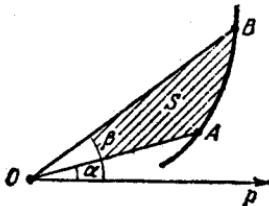


Рис. 12

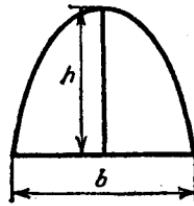


Рис. 13

кривой $r = r(\phi)$ и двумя полупрямыми $\phi = \alpha$ и $\phi = \beta$ ($\alpha < \beta$), равна

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\phi) d\phi.$$

2396. Доказать, что площадь прямого параболического сегмента равна

$$S = \frac{2}{3} bh,$$

где b — основание и h — высота сегмента (рис. 13).

Найти площади фигур, ограниченных кривыми, заданными в прямоугольных координатах *):

2397. $ax = y^2$, $ay = x^2$.

2398. $y = x^2$, $x + y = 2$.

2399. $y = 2x - x^2$, $x + y = 0$.

2400. $y = |\lg x|$, $y = 0$, $x = 0,1$, $x = 10$.

2400.1. $y = 2^x$, $y = 2$, $x = 0$.

2400.2. $y = (x + 1)^2$, $x = \sin \pi y$, $y = 0$ ($0 \leq y \leq 1$).

*) Все параметры в этом и следующих параграфах отдела IV считаются положительными.

2401. $y = x; y = x + \sin^2 x$ ($0 \leq x \leq \pi$).

2402. $y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}, \quad y = 0.$

2403. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

2404. $y^2 = x^2 (a^2 - x^2).$

2405. $y^2 = 2px, \quad 27 py^2 = 8(x-p)^3.$

2406. $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$ ($A > 1, AC - B^2 > 0$).

2407. $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ (циксоида), $x = 2a.$

2408. $x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}, \quad y = 0$ (трактиса).

2409. $y^2 = \frac{x^n}{(1+x^{n+2})^2} \quad (x > 0; \quad n > -2).$

2410. $y = e^{-x} |\sin x|, \quad y = 0 \quad (x \geq 0).$

2411. В каком отношении парабола $y^2 = 2x$ делит площадь круга $x^2 + y^2 = 8$?

2412 (н). Выразить координаты точки $M(x, y)$ гиперболы $x^2 - y^2 = 1$ как функции площади гиперболического сектора $S = OM'M$, ограниченного дугой гиперболы $M'M$ и двумя лучами OM и OM' , где $M'(x, -y)$ — точка, симметричная M относительно оси Ox .

Найти площади фигур, ограниченных кривыми, заданными параметрически:

2413. $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$ (циклоида) и $y = 0$.

2414. $x = 2t - t^2, \quad y = 2t^2 - t^3.$

2415. $x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$ (развертка круга) и $x = a, \quad y \leq 0$.

2416. $x = a(2 \cos t - \cos 2t), \quad y = a(2 \sin t - \sin 2t).$

2417. $x = \frac{c^2}{a} \cos^3 t, \quad y = \frac{c^2}{b} \sin^3 t \quad (c^2 = a^2 - b^2)$ (эволюта эллипса).

2417.1. $x = a \cos t, \quad y = \frac{a \sin^2 t}{2 + \sin^2 t}.$

Найти площади фигур, ограниченных кривыми, заданными в полярных координатах:

2418. $r^2 = a^2 \cos 2\phi$ (лемниската).

2419. $r = a(1 + \cos \varphi)$ (кардиоида).

2420. $r = a \sin 3\varphi$ (трилистник).

2421. $r = \frac{p}{1 - \cos \varphi}$ (парабола), $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

2422. $r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$ ($0 < \varepsilon < 1$) (эллипс).

2422.1. $r = 3 + 2 \cos \varphi$.

2422.2. $r = \frac{1}{\varphi}$, $r = \frac{1}{\sin \varphi}$ ($0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$).

2423. $r = a \cos \varphi$, $r = a(\cos \varphi + \sin \varphi)$ ($M\left(\frac{a}{2}, 0\right) \in S$).

2424. Найти площадь сектора, ограниченного кривой

$$\varphi = r \operatorname{arctg} r$$

и двумя лучами $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

2424.1. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $r^2 + \varphi^2 = 1$.

2424.2. Найти площадь фигуры, ограниченной лепестком кривой

$$\varphi = \sin(\pi r) \quad (0 \leq r \leq 1).$$

2424.3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\varphi = 4r - r^3, \varphi = 0.$$

2424.4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\varphi = r - \sin r, \varphi = \pi.$$

2425. Найти площадь фигуры, ограниченной замкнутой кривой

$$r = \frac{2at}{1+t^2}, \quad \varphi = \frac{\pi t}{1+t}.$$

Перейдя к полярным координатам, найти площади фигур, ограниченных кривыми:

2426. $x^3 + y^3 = 3axy$ (лист Декарта).

2427. $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$.

2428. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$ (лемниската).

Приведя уравнения к параметрическому виду, найти площади фигур, ограниченных кривыми:

2429. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (астроида).

2430. $x^4 + y^4 = ax^2y$.

Указание. Положить $y = tx$.

§ 6. Вычисление длин дуг

1°. Длина дуги в прямоугольных координатах. Длина дуги отрезка гладкой (непрерывно дифференцируемой) кривой

$$y = y(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

равна

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)} dx.$$

2°. Длина дуги кривой, заданной параметрически. Если кривая C задана уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (t_0 \leq t \leq T),$$

где $x(t), y(t) \in C^{(1)} [t_0, T]$, то длина дуги кривой C равна

$$s = \int_{t_0}^T \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

3°. Длина дуги в полярных координатах. Если

$$r = r(\varphi) \quad (\alpha \leq \varphi \leq \beta),$$

где $r(\varphi) \in C^{(1)} [\alpha, \beta]$, то длина дуги соответствующего отрезка кривой равна

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)} d\varphi.$$

Длины дуг пространственных кривых см. в отд. VIII.

Найти длины дуг следующих кривых:

2431. $y = x^{3/2}$ ($0 \leq x \leq 4$).

2432. $y^2 = 2px$ ($0 \leq x \leq x_0$).

2433. $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ от точки $A (0, a)$ до точки $B (b, h)$.

2434. $y = e^x$ ($0 \leq x \leq x_0$).

2435. $x = \frac{1}{4} y^2 - \frac{1}{2} \ln y$ ($1 \leq y \leq e$).

2436. $y = a \ln \frac{a^2}{a^2 - x^2}$ ($0 \leq x \leq b < a$).

2437. $y = \ln \cos x$ ($0 \leq x \leq a < \frac{\pi}{2}$).

2438. $x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$ ($0 < b \leq y \leq a$).

2439. $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ ($0 \leq x \leq \frac{5}{3}a$).

2440. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (астроида).

2441. $x = \frac{c^2}{a} \cos^3 t$, $y = \frac{c^2}{b} \sin^3 t$, $c^2 = a^2 - b^2$ (эволюция эллипса).

2442. $x = \cos^4 t$, $y = \sin^4 t$.

2443. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

2444. $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$ при $0 \leq t \leq 2\pi$ (развертка окружности).

2445. $x = a(\operatorname{sh} t - t)$, $y = a(\operatorname{ch} t - 1)$ ($0 \leq t \leq T$).

2445.1. $x = \operatorname{ch}^3 t$, $y = \operatorname{sh}^3 t$ ($0 \leq t \leq T$).

2446. $r = a\varphi$ (спираль Архимеда) при $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

2447. $r = ae^{m\varphi}$ ($m > 0$) при $0 < r < a$.

2448. $r = a(1 + \cos \varphi)$.

2449. $r = \frac{\rho}{1 + \cos \varphi}$ ($|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$).

2450. $r = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$.

2451. $r = a \operatorname{th} \frac{\varphi}{2}$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$).

2452. $\varphi = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right)$ ($1 \leq r \leq 3$).

2452.1. $\varphi = \sqrt{r}$ ($0 \leq r \leq 5$).

2452.2. $\varphi = \int_0^r \frac{\operatorname{sh} \rho}{\rho} d\rho$ ($0 \leq r \leq R$).

2452.3. $r = 1 + \cos t$, $\varphi = t - \operatorname{tg} \frac{t}{2}$ ($0 \leq t \leq T < \pi$).

2453. Доказать, что длина дуги эллипса

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t$$

равна длине одной волны синусоиды $y = c \sin \frac{x}{b}$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

2454. Парабола $4ay = x^2$ катится по оси Ox . Доказать, что фокус параболы описывает цепную линию.

2455. Найти отношение площади, ограниченной петлей кривой

$$y = \pm \left(\frac{1}{3} - x \right) \sqrt{x},$$

к площади круга, длина окружности которого равна длине контура этой кривой.

§ 7. Вычисление объемов

1°. Объем тела по известным поперечным сечениям. Если объем V тела существует и $S = S(x)$ ($a \leq x \leq b$) есть площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси Ox в точке x , то

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

2°. Объем тела вращения. Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции

$$a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq y(x),$$

где $y(x)$ — непрерывная однозначная функция, равен

$$V_x = \pi \int_a^b y^2(x) dx.$$

В более общем случае, объем кольца, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры $a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$, где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — непрерывные неотрицательные функции, равен

$$V = \pi \int_a^b [y_2^2(x) - y_1^2(x)] dx.$$

2456. Найти объем чердака, основание которого есть прямоугольник со сторонами a и b , верхнее ребро равно c , а высота равна h .

2457. Найти объемobel иска, параллельные основания которого суть прямоугольники со сторонами A , B и a , b , а высота равна h .

2458. Найти объем усеченного конуса, основания которого суть эллипсы с полуосями A , B и a , b , а высота равна h .

2459. Найти объем параболоида вращения, основание которого S , а высота равна H .

2460. Пусть для кубируемого тела площадь $S = S(x)$ его поперечного сечения, перпендикулярного к оси Ox , изменяется по квадратичному закону:

$$S(x) = Ax^2 + Bx + C \quad [a \leq x \leq b],$$

где A , B и C — постоянные.

Доказать, что объем этого тела равен

$$V = \frac{H}{6} \left[S(a) + 4S\left(\frac{a+b}{2}\right) + S(b)\right],$$

где $H = b - a$ (формула Симпсона).

2461. Тело представляет собой множество точек $M(x, y, z)$, где $0 \leq z \leq 1$, причем $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, если z рационально, и $-1 \leq x \leq 0$, $-1 \leq y \leq 0$, если z иррационально. Доказать, что объем этого тела не существует, хотя соответствующий интеграл

$$\int_0^1 S(z) dz = 1.$$

Найти объемы тел, ограниченных следующими поверхностями:

$$2462. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = \frac{c}{a}x, \quad z = 0.$$

$$2463. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (\text{эллипсоид}).$$

$$2464. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad z = \pm c.$$

$$2465. x^2 + z^2 = a^2, \quad y^2 + z^2 = a^2.$$

$$2466. x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 = ax.$$

$$2467. z^2 = b(a-x), \quad x^2 + y^2 = ax.$$

$$2468. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{z^2} = 1 \quad (0 < z < a).$$

$$2469. x + y + z^2 = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

$$2470. x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = a^2.$$

2471. Доказать, что объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy плоской фигуры

$$a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq y(x),$$

где $y(x)$ — однозначная непрерывная функция, равен

$$V_y = 2\pi \int_a^b xy(x) dx.$$

Найти объемы тел, ограниченных поверхностями, полученными при вращении отрезков следующих линий:

$$2472. y = b \left(\frac{x}{a} \right)^{2/3} \quad (0 \leq x \leq a) \quad \text{вокруг оси } Ox \quad (\text{нейлонид}).$$

$$2473. y = 2x - x^2, \quad y = 0: \quad \text{а) вокруг оси } Ox; \quad \text{б) вокруг оси } Oy.$$

2474. $y = \sin x$, $y = 0$ ($0 \leq x \leq \pi$): а) вокруг оси Ox ;
б) вокруг оси Oy .

2475. $y = b \left(\frac{x}{a} \right)^2$, $y = b \left| \frac{x}{a} \right|$: а) вокруг оси Ox ;
б) вокруг оси Oy .

2476. $y = e^{-x}$, $y = 0$ ($0 \leq x < +\infty$): а) вокруг оси Ox ;
б) вокруг оси Oy .

2477. $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ ($0 < a \leq b$) вокруг оси Ox .

2478. $x^2 - xy + y^2 = a^2$ вокруг оси Ox .

2479. $y = e^{-x} \sqrt{\sin x}$ ($0 \leq x < +\infty$) вокруг оси Ox .

2480. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$),
 $y = 0$: а) вокруг оси Ox ; б) вокруг оси Oy ; в) вокруг прямой $y = 2a$.

2481. $x = a \sin^3 t$, $y = b \cos^3 t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$): а) вокруг оси Ox ; б) вокруг оси Oy .

2481.1. Найти объем тела, образованного вращением площади петли кривой $x = 2t - t^3$, $y = 4t - t^3$ вокруг:
а) оси Ox ; б) оси Oy .

2482. Доказать, что объем тела, образованного вращением вокруг полярной оси плоской фигуры

$$0 \leq \alpha \leq \varphi \leq \beta \leq \pi, 0 \leq r \leq r(\varphi)$$

(φ и r — полярные координаты), равен

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_a^\beta r^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi.$$

Найти объемы тел, образованных вращением плоских фигур, заданных в полярных координатах:

2483. $r = a(1 + \cos \varphi)$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$): а) вокруг полярной оси; б) вокруг прямой $r \cos \varphi = -\frac{a}{4}$.

2484. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$: а) вокруг оси Ox ;
б) вокруг оси Oy ; в) вокруг прямой $y = x$.

Указание. Перейти к полярным координатам.

2484.1. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной полувитком спирали Архимеда

$$r = a\varphi \quad (a > 0; 0 \leq \varphi \leq \pi),$$

вокруг полярной оси.

2484.2. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями: $\varphi = \pi r^3$, $\varphi = \pi$, вокруг полярной оси,

2485. Найти объем тела, образованного вращением фигуры $a \leq r \leq a\sqrt{2 \sin 2\varphi}$ вокруг полярной оси.

§ 8. Вычисление площадей поверхностей вращения

Площадь поверхности, образованной вращением гладкой кривой AB вокруг оси Ox , равна

$$P = 2\pi \int_A^B |y| ds,$$

где ds — дифференциал дуги.

Найти площади поверхностей, образованных вращением следующих кривых:

2486. $y = x \sqrt{\frac{x}{a}}$ ($0 \leq x \leq a$) вокруг оси Ox .

2487. $y = a \cos \frac{\pi x}{2b}$ ($|x| \leq b$) вокруг оси Ox .

2488. $y = \operatorname{tg} x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$) вокруг оси Ox .

2489. $y^2 = 2px$ ($0 \leq x \leq x_0$): а) вокруг оси Ox
б) вокруг оси Oy .

2490. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($0 < b \leq a$): а) вокруг оси Ox

б) вокруг оси Oy .

2491. $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ ($b > a$) вокруг оси Ox .

2492. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ вокруг оси Ox .

2493. $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ ($|x| \leq b$): а) вокруг оси Ox ; б) вокруг оси Oy .

2494. $\pm x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$ вокруг оси Ox .

2495. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$):
а) вокруг оси Ox ; б) вокруг оси Oy ; в) вокруг прямой $y = 2a$.

2496. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ вокруг прямой $y = x$.

2497. $r = a(1 + \cos \varphi)$ вокруг полярной оси.

2498. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$: а) вокруг полярной оси; б) вокруг оси $\varphi = \frac{\pi}{2}$; в) вокруг оси $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

2499. Тело образовано вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболой $ay = a^2 - x^2$ и осью Ox .

Найти отношение поверхности тела вращения к поверхности равновеликого шара.

2500. Фигура, ограниченная параболой $y^2 = 2px$ и прямой $x = p/2$, вращается вокруг прямой $y = p$. Найти объем и поверхность тела вращения.

§ 9. Вычисление моментов. Координаты центра тяжести

1°. Моменты. Если на плоскости Oxy масса M плотности $\rho = \rho(y)$ заполняет некоторый ограниченный континуум Ω (линию, плоскую область) и $\omega = \omega(y)$ — соответствующая мера (длина дуги, площадь) той части континуума Ω , ординаты которой не превышают y , то k -м моментом массы M относительно оси Ox называется число

$$M_k = \lim_{\max \Delta y_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(y_i) y_i^k \Delta \omega(y_i) = \int_{\Omega} \rho y^k d\omega(y) \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

где $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ и $\Delta \omega(y_i) = \omega(y_i) - \omega(y_{i-1})$.

Как частные случаи, получаем при $k = 0$ массу M , при $k = 1$ — статический момент, при $k = 2$ — момент инерции.

Аналогично определяются моменты массы относительно координатных плоскостей.

Если $\rho = 1$, то соответствующий момент называется геометрическим (момент линии, плоской фигуры, тела и т. д.).

2°. Центр тяжести. Координаты центра тяжести (x_0, y_0) однородной плоской фигуры площади S определяются по формулам

$$x_0 = \frac{M_1^{(y)}}{S}, \quad y_0 = \frac{M_1^{(x)}}{S},$$

где $M_1^{(y)}$, $M_1^{(x)}$ — геометрические статические моменты фигуры относительно осей Oy и Ox .

2501. Найти статический момент и момент инерции дуги полуокружности радиуса a относительно диаметра, проходящего через концы этой дуги.

2501.1. Найти статический момент дуги параболы

$$y^2 = 2px \quad (0 \leq x \leq p/2)$$

относительно прямой $x = p/2$.

2502. Найти статический момент и момент инерции однородной треугольной пластинки с основанием b и высотой h относительно основания ($\rho = 1$).

2502.1. Найти моменты инерции $I_x = M_2^{(x)}$ и $I_y = M_2^{(y)}$ относительно осей Ox и Oy параболического сегмента,

ограниченного кривыми

$$ay = 2ax - x^2 \quad (a > 0) \text{ и } y = 0.$$

Чему равны радиусы инерции r_x и r_y , т. е. величины, определяемые соотношениями

$$I_x = Sr_x^2, \quad I_y = Sr_y^2,$$

где S — площадь сегмента?

2503. Найти моменты инерции однородной эллиптической пластинки с полуосами a и b относительно ее главных осей ($\rho = 1$).

2504. Найти статический момент и момент инерции однородного кругового конуса с радиусом основания r и высотой h относительно плоскости основания этого конуса ($\rho = 1$).

2504.1. Найти момент инерции однородного шара радиуса R и массы M относительно его диаметра.

2505. Доказать первую теорему Гульдена: площадь поверхности, образованной вращением плоской дуги C вокруг не пересекающей ее оси, лежащей в плоскости дуги, равна длине этой дуги, умноженной на длину окружности, описываемой центром тяжести дуги C .

2506. Доказать вторую теорему Гульдена: объем тела, образованного вращением плоской фигуры S вокруг не пересекающей ее оси, расположенной в плоскости фигуры, равен произведению площади S на длину окружности, описываемой центром тяжести этой фигуры.

2507. Определить координаты центра тяжести круговой дуги: $x = a \cos \varphi$, $y = a \sin \varphi$ ($|\varphi| \leq \alpha \leq \pi$).

2508. Определить координаты центра тяжести области, ограниченной параболами $ax = y^2$, $ay = x^2$ ($a > 0$).

2509. Определить координаты центра тяжести области $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$).

2510. Определить центр тяжести однородного полушара радиуса a .

2511. Определить координаты центра тяжести $C(\varphi_0, r_0)$ дуги OP логарифмической спирали $r = ae^{m\varphi}$ ($m > 0$) от точки $O(-\infty, 0)$ до точки $P(\varphi, r)$. Какую кривую описывает точка C при движении точки P ?

2512. Определить координаты центра тяжести области, ограниченной кривой $r = a(1 + \cos \varphi)$.

2513. Определить координаты центра тяжести области, ограниченной первой аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) и осью Ox .

2514. Определить координаты центра тяжести тела, образованного вращением площади $0 \leq x \leq a$; $y^2 \leq 2px$ вокруг оси Ox .

2515. Определить координаты центра тяжести полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($z \geq 0$).

§ 10. Задачи из механики и физики

Составляя соответствующие интегральные суммы и на-
ходя их пределы, решить следующие задачи:

2516. Определить массу стержня длины $l = 10$ м, если линейная плотность стержня меняется по закону $\delta = 6 + 0,3x$ кг/м, где x — расстояние от одного из концов стержня.

2517. Какую работу надо затратить, чтобы тело массы m поднять с поверхности Земли, радиус которой R , на высоту h ? Чему равна эта работа, если тело удаляется в бесконечность?

2518. Какую работу надо затратить, чтобы растянуть упругую пружину на 10 см, если сила в 1 кгс растягивает эту пружину на 1 см?

Указание. Использовать закон Гука.

2519. Цилиндр диаметра 20 см и длины 80 см заполнен паром под давлением 10 кгс/см². Какую работу надо затратить, чтобы уменьшить объем пара в два раза, счи-
тая, что температура пара остается постоянной?

2520. Определить силу давления воды на вертикальную стенку, имеющую форму полукруга радиуса a , диаметр которого находится на поверхности воды.

2521. Определить силу давления воды на вертикальную стенку, имеющую форму трапеции, нижнее основание которой $a = 10$ м, верхнее $b = 6$ м и высота $h = 5$ м, если уровень погружения нижнего основания $c = 20$ м.

Составляя дифференциальные уравнения, решить сле-
дующие задачи:

2522. Скорость точки меняется по закону:
 $v = v_0 + at$.

Какой путь пройдет эта точка за промежуток времени $[0, T]$?

2523. Однородный шар радиуса R и плотности δ вращается вокруг своего диаметра с угловой скоростью ω . Определить кинетическую энергию шара.

2524. С какой силой притягивает материальная бесконечная прямая с постоянной линейной плотностью μ_0 материальную точку массы m , находящуюся на расстоянии a от этой прямой?

2525. Определить, с какой силой притягивает круглая пластинка радиуса a и постоянной поверхностной плотности δ_0 материальную точку P массы m , находящуюся на перпендикуляре к плоскости пластинки, проходящем через центр ее Q , на кратчайшем расстоянии PQ , равном b .

2526. Согласно закону Торичелли скорость истечения жидкости из сосуда равна $v = c \sqrt{2gh}$, где g — ускорение силы тяжести, h — высота уровня жидкости над отверстием и $c = 0,6$ — опытный коэффициент.

В какое время опорожнится наполненная доверху вертикальная цилиндрическая бочка диаметра $D = 1$ м и высотой $H = 2$ м через круглое отверстие в дне диаметра $d = 1$ см?

2527. Какую форму должен иметь сосуд, представляющий собой тело вращения, чтобы понижение уровня жидкости при истечении было равномерным?

2528. Скорость распада радия в каждый момент времени пропорциональна его наличному количеству. Найти закон распада радия, если в начальный момент $t = 0$ имелось Q_0 граммов радия, а через время $T = 1600$ лет его количество уменьшилось в два раза.

2529. Для случая процесса второго порядка скорость химической реакции, переводящей вещество A в вещество B , пропорциональна произведению концентрации этих веществ. Какой процент вещества B будет содержаться в сосуде через $t = 1$ ч., если при $t = 0$ мин. имелось 20 % вещества B , а при $t = 15$ мин. его стало 80 %?

2530. Согласно закону Гука относительное удлинение ε стержня пропорционально напряжению силы σ в соответствующем поперечном сечении, т. е. $\varepsilon = \sigma/E$, где E — модуль Юнга.

Определить удлинение тяжелого стержня конической

формы, укрепленного основанием и обращенного вершиной вниз, если радиус основания равен R , высота конуса H и удельный вес γ .

§ 11. Приближенное вычисление определенных интегралов

1°. Ф о р м у л а п р я м о у г о л ь н и к о в . Если функция $y = y(x)$ непрерывна и дифференцируема достаточное число раз на конечном сегменте $[a, b]$ и $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$ ($i=0, 1, \dots, n$), $y_i = y(x_i)$, то

$$\int_a^b y(x) dx = h(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}) + R_n,$$

где

$$R_n = \frac{(b-a)h}{2} y'(\xi) \quad (a \leq \xi \leq b).$$

2°. Ф о р м у л а т р а п е ц и я . При тех же обозначениях имеем:

$$\int_a^b y(x) dx = h \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right) + R_n$$

где

$$R_n = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi') \quad (a \leq \xi' \leq b).$$

3°. П а р а б о л и ч е с к а я ф о р м у л а (ф о р м у л а С и м п с о н а). Полагая $n = 2k$, получим:

$$\int_a^b y(x) dx = \frac{h}{3} [(y_0 + y_{2k}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2k-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2k-2})] + R_n,$$

где

$$R_n = -\frac{(b-a)h^4}{180} f'''(\xi') \quad (a \leq \xi' \leq b).$$

2531. Применяя формулу прямоугольников ($n = 12$), приближенно вычислить

$$\int_0^{2\pi} x \sin x dx$$

и результат сравнить с точным ответом.

С помощью формулы трапеций вычислить интегралы и оценить их погрешности, если:

$$2532. \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \quad (n=8). \quad 2533. \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \quad (n=12).$$

2534. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{1}{4} \sin^2 x} dx \quad (n = 6).$

С помощью формулы Симпсона вычислить интегралы:

2535. $\int_1^9 \sqrt{x} dx \quad (n = 4).$

2536. $\int_0^{\pi} \sqrt{3 + \cos x} dx \quad (n = 6).$

2537. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx \quad (n = 10).$

2538. $\int_0^1 \frac{x dx}{\ln(1+x)} \quad (n = 6).$

2539. Принимая $n = 10$, вычислить константу Каталана

$$G = \int_0^1 \frac{\arctg x}{x} dx.$$

2540. Пользуясь формулой $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, вычислить число π с точностью до 10^{-5} .

2541. Вычислить $\int_0^1 e^{x^2} dx$ с точностью до 0,001.

2542. Вычислить $\int_0^1 (e^x - 1) \ln \frac{1}{x} dx$ с точностью до 10^{-4} .

2543. Вычислить с точностью до 0,001 интеграл вероятностей $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

2544. Приближенно найти длину эллипса, полуси которого $a = 10$ и $b = 6$.

2545. Построить по точкам график функции

$$y = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \quad (0 \leq x \leq 2\pi),$$

приняв $\Delta x = \pi/3$.

О Т Д Е Л V

РЯДЫ

§ 1. Числовые ряды. Признаки сходимости знакопостоянных рядов

1°. Общие понятия. Числовой ряд

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1)$$

называется *сходящимся*, если существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \quad (\text{сумма ряда}),$$

где $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. В противном случае ряд (1) называется *расходящимся*.

2°. Критерий Коши. Для сходимости ряда (1) необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало число $N = N(\varepsilon)$ такое, что при $n > N$ и $p > 0$ (n и p — натуральные числа) было выполнено неравенство

$$|S_{n+p} - S_n| = \left| \sum_{l=n+1}^{n+p} a_l \right| < \varepsilon.$$

В частности, если ряд сходится, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

3°. Признак сравнения 1. Пусть, кроме ряда (1), имеем ряд

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots \quad (2)$$

Если при $n \geq n_0$ выполнено неравенство

$$0 \leq a_n \leq b_n,$$

то 1) из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1); 2) из расходности ряда (1) следует расходность ряда (2).

В частности, если $a_n \sim b_n$ при $n \rightarrow \infty$, то ряды с знакоположительными членами (1) и (2) сходятся или расходятся одновременно.

4°. П р и з н а к с р а в н е н и я II. Если

$$a_n = O^* \left(\frac{1}{n^p} \right)^*,$$

то а) при $p > 1$ ряд (1) сходится и б) при $p \leq 1$ расходится.

5°. П р и з н а к Д а л а м б е р а. Если $a_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$) и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

то а) при $q < 1$ ряд (1) сходится и б) при $q > 1$ расходится.

6°. П р и з н а к Коши. Если $a_n \geq 0$ ($n = 1, 2, \dots$) и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q,$$

то а) при $q < 1$ ряд (1) сходится и б) при $q > 1$ расходится.

7°. П р и з н а к Раабе. Если $a_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$) и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = p,$$

то а) при $p > 1$ ряд (1) сходится и б) при $p \leq 1$ расходится.

8°. П р и з н а к Гаусса. Если $a_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$) и

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\epsilon}},$$

где $|\theta_n| < C$ и $\epsilon > 0$, то а) при $\lambda > 1$ ряд (1) сходится и б) при $\lambda < 1$ расходится; в) при $\lambda = 1$ ряд (1) сходится, если $\mu > 1$, и расходится, если $\mu \leq 1$.

9°. И н т е г р а л ы й п р и з н а к Коши. Если $f(x)$ ($x \geq 1$) — неотрицательная невозрастающая непрерывная функция, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

сходится или расходится одновременно с интегралом

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx.$$

Доказать непосредственно сходимость следующих рядов и найти их суммы:

$$2546. 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} + \dots$$

$$2547. \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right) + \dots$$

) Значение символа O^ см. отдел I, § 6, 1°.

2548. $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} + \dots$

2549. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$

2550. $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \dots$

2551. а) $q \sin \alpha + q^2 \sin 2\alpha + \dots + q^n \sin n\alpha + \dots$;
б) $q \cos \alpha + q^2 \cos 2\alpha + \dots + q^n \cos n\alpha + \dots$

($|q| < 1$).

2552. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$.

2553. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$.

Указание. Показать, что при $x \neq k\pi$ (k — целое) невозможно, чтобы $\sin nx \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

2554. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n, \text{ где } A_n = \sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i \quad (p_1 = 1, \quad p_1 < p_2 < \dots),$$

полученный в результате группировки членов данного ряда без нарушения порядка следования их, также сходится и имеет ту же сумму. Обратное неверно; привести пример.

2555. Доказать, что если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ положительны и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$, полученный в результате группировки членов этого ряда, сходится, то данный ряд также сходится.

Исследовать сходимость рядов:

2556. $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

2557. $0,001 + \sqrt[3]{0,001} + \sqrt[3]{0,001} + \dots$

2558. $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$

2559. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \dots$

2560. $\frac{1}{1001} + \frac{1}{2001} + \frac{1}{3001} + \dots + \frac{1}{1000n+1} + \dots$

2561. $1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \dots + \frac{n}{2n-1} + \dots$

2562. $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \dots$

2563. $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{4}} + \dots$

$$\dots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}} + \dots$$

2564. $\frac{1}{\sqrt{1 \cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 5}} + \dots$

$$\dots + \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} + \dots$$

2565. Доказать, что ряд чисел, обратных членам арифметической прогрессии, расходится.

2566. Доказать, что если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (A)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n (B)$ сходятся и $a_n \leq c_n \leq b_n$ ($n = 1, 2, \dots$), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (C)$ также сходится. Что можно сказать о сходимости ряда (C), если ряды (A) и (B) расходятся?

2567. Пусть даны два расходящихся ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ с неотрицательными членами.

Что можно сказать о сходимости рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n)$ и б) $\sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)?$

2568. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n \geq 0$) сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2$ также сходится. Обратное утверждение неверно; привести примеры.

2569. Доказать, что если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ сходятся, то сходятся также ряды $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$.

2570. Доказать, что если $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = a \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

2571. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными и монотонно убывающими членами сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$.

2572. Является ли сходящимся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}) = 0$$

при $p = 1, 2, 3, \dots$?

Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость следующих рядов:

$$2573. a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots \quad (|a_n| < 10).$$

$$2574. \frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \dots + \frac{\sin nx}{2^n} + \dots$$

$$2575. \frac{\cos x - \cos 2x}{1} + \frac{\cos 2x - \cos 3x}{2} + \dots \\ \dots + \frac{\cos nx - \cos (n+1)x}{n} + \dots$$

$$2575.1. \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos x^2}{2^2} + \dots + \frac{\cos x^n}{n^2} + \dots$$

Указание. Использовать неравенство

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Пользуясь критерием Коши, доказать расходимость следующих рядов:

$$2576. 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

$$2577. 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

$$2577.1. \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \dots$$