Пользуясь признаками сравнения, Даламбера или Коши, исследовать сходимость рядов:

2578. $\frac{1000}{1!}+\frac{1000^2}{2!}+\frac{1000^3}{3!}+\ldots+\frac{1000^n}{n!}+\ldots$

2579. $\frac{(1!)^2}{2!}+\frac{(2!)^2}{4!}+\ldots+\frac{(n!)^2}{(2n!)}+\ldots$

2580. $\frac{1!}{1}+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\ldots+\frac{n!}{n^n}+\ldots$

2581. а) $\frac{2\cdot 1!}{1}+\frac{2^2\cdot 2!}{2^2}+\frac{2^3\cdot 3!}{3^3}+\ldots$

$$\ldots+\frac{2^n n!}{n^n}+\ldots;$$

б) $\frac{3\cdot 1!}{1}+\frac{3^2\cdot 2!}{2^2}+\frac{3^3\cdot 3!}{3^3}+\ldots$

$$\ldots+\frac{3^n n!}{n^n}+\ldots$$

2582. $\frac{(1!)^2}{2}+\frac{(2!)^2}{2^4}+\frac{(3!)^2}{2^9}+\ldots+\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}+\ldots$

2583. $\frac{1000}{1}+\frac{1000\cdot 1001}{1\cdot 3}+\frac{1000\cdot 1001\cdot 1002}{1\cdot 3\cdot 5}+\ldots$

2584. $\frac{4}{2}+\frac{4\cdot 7}{2\cdot 6}+\frac{4\cdot 7\cdot 10}{2\cdot 6\cdot 10}+\ldots$

2585. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2}\right)\ldots$

$$\ldots\left(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2}\right).$$

2585.1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$

где

$$a_n=\begin{cases}1/n, & \text{если } n=m^2,\\ 1/n^2, & \text{если } n\neq m^2\end{cases}\quad (m \text{ — натуральное число}).$$

2585.2. $\sum_{n=1}^{\infty} nx\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin^2 k\alpha}{1+x^2+\cos^2 k\alpha}.$

2586. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}.$ 2587. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+1/n}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}.$

2588. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$. 2589. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{n+1/2}}$.

2589.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n+3^n}$. 2589.2. $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$.

2590. $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+$
$$+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}+\ldots$$

Указание. $\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{4}$.

2591. Доказать, что если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}=q \quad (a_n>0),$$

то $a_n = o(q_1^n)$, где $q_1 > q$.

2591.1. Пусть для членов знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n>0)$ выполнено неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \rho < 1 \text{ при } n \geqslant n_0.$$

Доказать, что для остатка ряда

$$R_n = a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots$$

имеет место оценка

$$R_n \leqslant a_{n_0} \frac{\rho^{n-n_0+1}}{1-\rho}, \quad \text{если } n \geqslant n_0.$$

2591.2. Сколько членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(2n)!!]^2}{(4)n)!!}$, где $[(2n)!!]^2 = 2\cdot 4\ldots 2n$, достаточно взять, чтобы соответствующая частная сумма S_n отличалась от суммы ряда S меньше, чем на $\varepsilon = 10^{-6}$?

2592. Доказать, что если $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$ $(a_n>0)$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Обратное утверждение неверно. Рассмотреть пример

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots$$

2593. Доказать, что если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\ (a_n>0)$ существует

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q, \qquad \text{(А)}$$

то существует также

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q. \qquad \text{(Б)}$$

Обратное утверждение неверно: если существует предел (Б), то предел (А) может и не существовать. Рассмотреть пример

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}.$$

2594. Доказать, что если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=q\ \ (a_n\geqslant 0)$, то а) при $q<1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится; б) при $q>1$ этот ряд расходится (*обобщенный признак Коши*).

Исследовать сходимость рядов:

2595. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$. **2596.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\cos^2 n\pi/3}{2^n}$.

2597. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3\left[\sqrt{2}+(-1)^n\right]^n}{3^n}$.

2597.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\ln n}$.

Пользуясь признаками Раабе и Гаусса, исследовать сходимость следующих рядов:

2598. $\left(\frac{1}{2}\right)^p+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^p+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^p+\ldots$

2599. $\frac{a}{b}+\frac{a(a+d)}{b(b+d)}+\frac{a(a+d)(b+2d)}{b(b+d)(b+2d)}+\ldots$
$(a>0,\ b>0,\ d>0)$.

2600. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+p}}$.

2601. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\ldots(2+\sqrt{n})}$.

2602. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!n^{-p}}{q(q+1)\ldots(q+n)}$ $(q>0)$.

2603. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^q}$.

2604. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots(2n)}\right]^p\cdot\frac{1}{n^q}$.

2605(н). $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{q(q+1)\ldots(q+n-1)}\right]^{\alpha}$ $(p>0,\ q>0)$.

2606 (н). Доказать, что если для знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ $(a_n>0)$ при $n\to\infty$ выполнено условие

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{p}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right),$$

то

$$a_n=o\left(\frac{1}{n^{p-\varepsilon}}\right),$$

где $\varepsilon>0$ произвольно мало; причем, если $p>0$, то $a_n\downarrow 0$ при $n\to\infty$, т. е. a_n при $n\geqslant n_0$, монотонно убывая, стремится к нулю, когда $n\to\infty$.

Определив порядок убывания общего члена a_n, исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, если

2607. $a_n = \frac{n^p + a_1 n^{p-1} + \ldots + a_p}{n^q + b_1 n^{q-1} + \ldots + b_q}$, где $n^q + b_1 n^{q-1} + \ldots + b_q > 0$.

2608. $a_n = \frac{1}{n^p} \sin \frac{\pi}{n}$.

2609. $a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^p \ln \frac{n-1}{n+1}$ $(n > 1)$.

2610. $a_n = \ln^p \left(\sec \frac{\pi}{n}\right)$.

2611. $a_n = \log_{b^n} \left(1 + \frac{\sqrt[n]{a}}{n}\right)$ $(a > 0,\ b > 0)$.

2612. $a_n = \left[e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^p$.

2613. $a_n = \frac{1}{n^{1+k/\ln n}}$. 2614. $a_n = \frac{1}{n^{1+1/n}}$.

2614.1. Доказать *признак Жамэ*: знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \, (a_n \geqslant 0)$ сходится, если

$$\left(1 - \sqrt[n]{a_n}\right) \frac{n}{\ln n} \geqslant p > 1 \text{ при } n > n_0,$$

и расходится, если

$$\left(1 - \sqrt[n]{a_n}\right) \frac{n}{\ln n} \leqslant 1 \text{ при } n > n_0.$$

2615. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \, (a_n > 0)$ сходится, если существует $\alpha > 0$ такое, что $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \geqslant 1 + \alpha$ при $n \geqslant n_0$, и расходится, если $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \leqslant 1$ при $n \geqslant n_0$ (*логарифмический признак*).

Исследовать сходимость рядов с общим членом:

2616. $a_n = n^{\ln x}$ $(x > 0)$.

2617. $a_n = \frac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}}$ $(n > 1)$.

2618. $a_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}$ $(n > 1)$.

Пользуясь интегральным признаком Коши, исследовать сходимость рядов с общим членом:

2619. $a_n = \dfrac{1}{n \ln^p n} \quad (n > 1)$.

2620. $a_n = \dfrac{1}{n (\ln n)^p (\ln \ln n)^q} \quad (n > 2)$.

2620.1. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 2 \cdot \ln 3 \ldots \ln (n+1)}{\ln (2+p) \cdot \ln (3+p) \ldots \ln (n+1+p)} \quad (p > 0).$$

2620.2. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\nu(n)}{n^2}$, где $\nu(n)$ — число цифр числа n.

2620.3. Пусть λ_n ($n = 1, 2, \ldots$) — последовательные положительные корни уравнения $\operatorname{tg} x = x$.

Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2}$.

2621. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\ln (n!)}$.

2622. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными монотонно убывающими членами сходится или расходится одновременно с рядом $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.

2623. Пусть $f(x)$ — положительная монотонно невозрастающая функция.

Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится, то для остатка его

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k)$$

справедлива оценка

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)\,dx < R_n < f(n+1) + \int_{n+1}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Пользуясь этим, найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ с точностью до 0,01.

2624. Доказать *признак Ермакова*: пусть $f(x)$ — положительная монотонно убывающая функция и

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x f(e^x)}{f(x)} = \lambda.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится, если $\lambda < 1$, и расходится, если $\lambda > 1$.

2625. Доказать *признак Лобачевского*: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными и монотонно стремящимися к нулю членами сходится или расходится одновременно с рядом $\sum_{m=0}^{\infty} p_m 2^{-m}$, где p_m — наибольший номер членов a_n, удовлетворяющих неравенству

$$a_n \geqslant 2^{-m} \quad (n = 1, 2, \ldots, p_m).$$

Исследовать сходимость следующих рядов:

2626. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^\alpha}$.

2627. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+a} - \sqrt[4]{n^2+n+b}\right)$.

2628. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{ctg} \frac{n\pi}{4n-2} - \sin \frac{n\pi}{2n+1}\right)$.

2629. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln \frac{n+1}{n}}\right)$.

2630. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^\alpha}$. **2631.** $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt[3]{n}}$.

2632. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}}$.

2633. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\frac{1}{n^2+1}}-1\right)$. **2634.** $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{a\ln n+b}{c\ln n+d}}$.

2635. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^2\left(\sin\frac{1}{n}\right)}$.

2636. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^3}$.

2637. $\sum_{n=3}^{\infty}\ln\left(\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)$.

2638. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}$. **2639.** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$.

2640. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a^{1/n}-\frac{b^{1/n}+c^{1/n}}{2}\right)$ $(a>0,\ b>0,\ c>0)$.

2641. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{n^{\alpha}}-1\right)$.

2642. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln\frac{1}{n^{\alpha}}-\ln\left(\sin\frac{1}{n^{\alpha}}\right)\right]$.

2643. $\sum_{n=1}^{\infty} a^{-(b\ln n+c\ln^2 n)}$ $(a>0)$.

2644. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}}$ $(a>0,\ b>0)$.

2645. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n+1)!]^n}{2!\cdot 4!\cdot\ldots\cdot(2n)!}$.

Исследовать сходимость рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ со следующими общими членами:

2646. $u_n = \int\limits_0^{1/n} \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x^2}$.

2647. $u_n = \frac{1}{\int\limits_0^n \sqrt[4]{1+x^4}\,dx}$.

2648. $u_n = \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$.

2649. $u_n = \int\limits_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}}\,dx$.

2650. $u_n = \int\limits_0^{\pi/n} \frac{\sin^3 x}{1+x}\,dx$.

2651. $u_n = \frac{1! + 2! + \ldots + n!}{(2n)!}$.

2652. $u_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln^2 k}{n^\alpha}$.

Заменив последовательности x_n ($n = 1, 2, \ldots$) соответствующими рядами, исследовать сходимость их, если:

2653. $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$.

2654. $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} - \frac{(\ln n)^2}{2}$.

2655. Сколько примерно надо взять членов ряда, чтобы найти его сумму с точностью до 10^{-5}, если

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!}$.

§ 2. Признаки сходимости знакопеременных рядов

1°. Абсолютная сходимость ряда. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \tag{2}$$

В этом случае ряд (1) также сходится. Сумма абсолютно сходящегося ряда не зависит от порядка слагаемых.

Для определения абсолютной сходимости ряда (1) достаточно применить к ряду (2) известные признаки сходимости для знакопостоянных рядов.

Если ряд (1) сходится, а ряд (2) расходится, то ряд (1) называется *условно* (*не абсолютно*) *сходящимся*. Сумму условно сходящегося ряда путем перестановки слагаемых можно сделать равной любому числу (*теорема Римана*).

2°. Признак Лейбница. Знакочередующийся ряд

$$b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \ldots + (-1)^{n-1} b_n + \ldots$$

($b_n \geqslant 0$) сходится (вообще говоря, не абсолютно), если а) $b_n \geqslant b_{n+1}$ ($n = 1, 2, \ldots$) и б) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. В этом случае для остатка ряда

$$R_n = (-1)^n b_{n+1} + (-1)^{n+1} b_{n+2} + \ldots$$

имеем оценку

$$R_n = (-1)^n \theta_n b_{n+1} \quad (0 \leqslant \theta_n \leqslant 1).$$

3°. Признак Абеля. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \tag{3}$$

сходится, если: 1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится; 2) числа b_n ($n = 1, 2, \ldots$) образуют монотонную и ограниченную последовательность.

4°. Признак Дирихле. Ряд (3) сходится, если: 1) частичные суммы $A_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ ограничены в совокупности; 2) b_n монотонно стремится к нулю при $n \to \infty$.

2656. Доказать, что члены не абсолютно сходящегося ряда можно без перестановки сгруппировать так, что полученный новый ряд будет абсолютно сходящимся.

2657. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ является сходящимся, если выполнены условия: а) общий член этого ряда a_n стремится к нулю при $n \to \infty$; б) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, полученный в результате группировки членов данного ряда без нарушения их порядка, сходится; в) число слагае-

мых a_l, входящих в член $A_n = \sum_{l=p_n}^{p_{n+1}-1} a_l$ $(1=p_1<p_2<\ldots)$, ограничено.

2658. Доказать, что сумма сходящегося ряда не изменится, если члены этого ряда переставить так, что ни один из них не удаляется от своего прежнего положения больше чем на m мест, где m — некоторое заранее заданное число.

Доказать сходимость следующих рядов и найти их суммы:

2659. $1-\frac{3}{2}+\frac{5}{4}-\frac{7}{8}+\ldots$

2660. $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\ldots$

2661. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots$

Указание. Применить формулу $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}=$ $=C+\ln n+\varepsilon_n$, где C — постоянная Эйлера и $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$.

2662. Зная, что $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2$, найти суммы рядов, полученных из данного в результате перестановки его членов:

а) $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots$

и

б) $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots$

2663. Члены сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ переставить так, чтобы он стал расходящимся.

Исследовать сходимость знакопеременных рядов:

2664. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{2^n}$.

2665. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n.$

2666. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+$
$+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\ldots$

2666.1. Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n, \qquad (1)$$

где $b_n > 0$ и $b_n \to 0$ при $n \to \infty$. Следует ли отсюда, что ряд (1) сходится? Рассмотреть пример

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2+(-1)^n}{n}.$$

2667. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^{100} n}{n}\sin\frac{n\pi}{4}.$ **2668.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}.$

2669. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+100}.$

2670. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}.$

2671. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+k^2}\right).$

2672. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}.$

2673. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}.$

2673.1. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}\cos\frac{\pi n^2}{n+1}.$

2674. Доказать, что знакочередующийся ряд
$b_1-b_2+b_3-b_4+\ldots+(-1)^{n-1}b_n+\ldots \quad (b_n>0)$
сходится, если

$$\frac{b_n}{b_{n+1}}=1+\frac{p}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right),$$

где $p>0$ (см. 2606 (н)).

Исследовать на абсолютную (кроме 2690) и условную сходимость следующие ряды:

2675. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$. **2676.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+1/n}}$.

2677. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right]$.

2678. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n\sin^{2n}x}{n}$.

2679. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$. **2680.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}$.

2681. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{[\sqrt{n}+(-1)^{n-1}]^p}$.

2682. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p+\sin\frac{n\pi}{4}}$.

2683. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n+1}\frac{1}{\sqrt[100]{n}}$.

2684. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n(n-1)/2}\frac{n^{100}}{2^n}$

2685. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n^2]{n}}$.

2686. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{12}}{\ln n}$. 2687. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}$.

2688. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$.

2689. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[\frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots (2n)}\right]^p$.

2690. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{n}$. 2691. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin n^2$.

Указание. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n^2 \neq 0$.

2692. Пусть

$$R(x) = \frac{a_0x^p + a_1x^{p-1} + \ldots + a_p}{b_0x^q + b_1x^{q-1} + \ldots + b_q}$$

— рациональная функция, где $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$ и $[b_0x^q + b_1x^{q-1} + \ldots + b_q] > 0$ при $x \geqslant n_0$.

Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n R(n).$$

Исследовать сходимость рядов:

2693. $\frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^q} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^q} + \frac{1}{5^p} - \frac{1}{6^q} + \ldots$

2694. $1 + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{1}{4^p} + \ldots$

2695. $1 + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{1^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{1}{3^p} + \frac{1}{9^p} + \frac{1}{11^p} - \frac{1}{5^p} + \ldots$

2696. $1 - \frac{2}{2^q} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} - \frac{2}{5^q} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{2}{8^q} + \frac{1}{9^p} + \ldots$

2697. Доказать, что ряды

а) $\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots;$

б) $\cos x + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + \ldots$

не абсолютно сходятся в интервале $(0, \pi)$.

2698. Для рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p} \quad (0<x<\pi)$$

определить для совокупности параметров (p, x): а) область абсолютной сходимости; б) область неабсолютной сходимости.

2698.1. Исследовать сходимость рядов:

а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[n]{n}}{\ln n};$

б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{n}\right)}{\ln(\ln n)};$ в) $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{\sin n}{n + 10 \sin n}.$

2699. Для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(1+p)(2+p)\ldots(n+p)}{n! n^q}$$

определить: а) область абсолютной сходимости; б) область условной сходимости.

2700. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{m}{n},$$

где $\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}.$

2701. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1,$$

то можно ли утверждать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ также сходится?

Рассмотреть примеры

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right].$$

2702. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — не абсолютно сходящийся ряд и

$$P_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{|a_i| + a_i}{2}, \quad N_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{|a_i| - a_i}{2}.$$

Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n}{P_n} = 1.$$

2703. Доказать, что сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$$

для каждого $p > 0$ лежит между $\frac{1}{2}$ и 1.

2703.1. Сколько членов ряда следует взять, чтобы получить его сумму с точностью до $\varepsilon = 10^{-6}$, если:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^0}{\sqrt{n}}$.

2704. Доказать, что если члены ряда

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$$

переставить так, чтобы группу p последовательных положительных членов сменяла группа q последовательных отрицательных членов, то сумма нового ряда будет

$$\ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}.$$

2705. Доказать, что гармонический ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

останется расходящимся, если, не переставляя его членов, изменить знаки их так, чтобы за p положительными членами следовало бы q отрицательных ($p \neq q$). Сходимость будет иметь место лишь при $p = q$.

§ 3. Действия над рядами

Сумма и произведение рядов. По определению полагают:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$,

где

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1.$$

Равенство а) имеет неформальный смысл, если оба ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, а равенство б) — если, сверх того, по меньшей мере один из этих рядов сходится абсолютно.

2706. Что можно сказать о сумме двух рядов, из которых а) один ряд сходится, а другой расходится; б) оба ряда расходятся?

2707. Найти сумму двух рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{3^n} + \frac{(-1)^n}{n^3}\right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\right].$$

Найти суммы следующих рядов:

2708. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{3^n}\right]$.

2709. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n}$.

2710. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{[n/2]} y^{[(n+1)/2]}$ $(|xy| < 1)$.

2711. Показать, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1$.

2712. Показать, что $\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n \quad (|q|<1)$.

2713. Показать, что квадрат сходящегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

есть ряд расходящийся.

2714. Доказать, что произведение двух сходящихся рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}} \ (\alpha>0) \ \text{и} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\beta}} \ (\beta>0)$$

есть ряд сходящийся, если $\alpha+\beta>1$, и расходящийся, если $\alpha+\beta<1$.

2715. Проверить, что произведение двух расходящихся рядов

$$1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n \ \text{и} \ 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

есть абсолютно сходящийся ряд.

§ 4. Функциональные ряды

1°. Область сходимости. Совокупность X_0 тех значений x, для которых сходится *функциональный ряд*

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots, \tag{1}$$

называется *областью сходимости* этого ряда, а функция

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} u_i(x) \quad (x\in X_0)$$

— его *суммой*.

2°. Равномерная сходимость. Последовательность функций

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots$$

называется *равномерно сходящейся* на множестве X, если:

1) существует предельная функция

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad (x\in X);$$

2) для любого числа $\varepsilon>0$ можно указать число $N=N(\varepsilon)$ такое, что

$$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

при $n>N$ и $x\in X$. В этом случае пишут: $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$.

Функциональный ряд (1) называется *равномерно сходящимся* на множестве X, если равномерно сходится на этом множестве последовательность его частичных сумм:

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

3°. Критерий Коши. Для равномерной сходимости ряда (1) на множестве X необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ существовало число $N = N(\varepsilon)$ такое, что при $n > N$ и $p > 0$ было выполнено неравенство

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} u_i(x) \right| < \varepsilon \quad \text{для всех } x \in X.$$

4°. Признак Вейерштрасса. Ряд (1) сходится абсолютно и равномерно на множестве X, если существует сходящийся числовой ряд

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots \tag{2}$$

такой, что

$$|u_n(x)| \leqslant c_n \text{ при } x \in X \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

5°. Признак Абеля. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\, b_n(x) \tag{3}$$

сходится равномерно на множестве X, если: 1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на множестве X; 2) функции $b_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ограничены в совокупности и при каждом x образуют монотонную последовательность.

6°. Признак Дирихле. Ряд (3) сходится равномерно на множестве X, если: 1) частичные суммы $\sum\limits_{n=1}^{N} a_n(x)$ в совокупности ограничены; 2) последовательность $b_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ монотонна для каждого x и равномерно на X стремится к нулю при $n \to \infty$.

7°. Свойства функциональных рядов. а) Сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций есть функция непрерывная.

б) Если функциональный ряд (1) сходится равномерно на каждом $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ и существуют конечные пределы

$$\lim_{x \to a} u_n(x) = A_n \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

то 1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ сходится и 2) имеет место равенство

$$\lim_{x \to a} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \lim_{x \to a} u_n(x) \right\}.$$

в) Если члены сходящегося ряда (1) непрерывно дифференцируемы при $a < x < b$ и ряд производных $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ сходится равномерно на интервале (a, b), то

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \text{ при } x \in (a, b).$$

г) Если члены ряда (1) непрерывны и этот ряд сходится равномерно на конечном сегменте $[a, b]$, то

$$\int_a^b \left\{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right\} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\, dx. \tag{4}$$

Вообще формула (4) верна, если $\int_a^b R_n(x)\, dx \to 0$ при $n \to \infty$, где $R_n(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} u_i(x)$. Это последнее условие годится также и для случая бесконечных пределов интеграции.

Определить области сходимости (абсолютной и условной) следующих функциональных рядов:

2716. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$. **2717.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$.

2718. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$.

2719. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4 \ldots (2n)}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^n$.

2720. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot 3^{2n}}{2n} x^n (1-x)^n$. **2721.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n^2}$.

2722. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^p}$.

2723. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p \sin nx}{1+n^q}$ $(q>0;\ 0<x<\pi)$.

2724. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$ (ряд Ламберта).

2725. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x(x+n)}{n}\right]^n$. 2726. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$.

2727. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^n)}$.

2728. $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$. 2729. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\cdot\frac{1}{1+a^{2n}x^2}$.

2730. $\sum_{n=1}^{\infty}(2-x)(2-x^{1/2})(2-x^{1/3})\ldots(2-x^{1/n})$ $(x>0)$.

2731. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$. 2732. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^ny^n}{x^n+y^n}$ $(x>0;\ y>0)$.

2733. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+y^n}$ $(y\geqslant 0)$. 2734. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{|x|^{n^2}+|y|^{n^2}}$.

2735. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+x^n)}{n^y}$ $(x\geqslant 0)$. 2736. $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}^n\left(x+\frac{y}{n}\right)$.

2737. Доказать, что если *ряд Лорана* $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_nx^n$ сходится при $x=x_1$ и при $x=x_2$ $(|x_1|<|x_2|)$, то этот ряд сходится также при $|x_1|<|x|<|x_2|$.

2738. Определить область сходимости ряда Лорана

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{n}{2^{|n|}}x^n$$

и найти его сумму.

2739. Определить области сходимости (абсолютной и условной) *рядов Ньютона*:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{[n]}}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\frac{x^{[n]}}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(ex)^n y^{[n]}}{n^n}$,

где $x^{[n]}=x(x-1)\ldots[x-(n-1)]$.

2740. Доказать, что если *ряд Дирихле* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ сходится при $x = x_0$, то этот ряд сходится также при $x > x_0$.

2741. Доказать, что для равномерной сходимости на множестве X последовательности $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ к предельной функции $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to x} \left\{\sup_{x\in X} r_n(x)\right\} = 0,$$

где $r_n(x) = |f(x) - f_n(x)|$.

2742. Что значит, что последовательность $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$: а) сходится на интервале $(x_0, +\infty)$; б) сходится равномерно на каждом конечном интервале $(a, b) \subset (x_0, +\infty)$; в) сходится равномерно на интервале $(x_0, +\infty)$?

2743. Для последовательности

$$f_n(x) = x^n \quad (n = 1, 2, \ldots) \quad (0 < x < 1)$$

определить наименьший номер члена $N = N(\varepsilon, x)$, начиная с которого отклонение членов последовательности в данной точке x от предельной функции не превышает 0,001, если $x = \frac{1}{10}, \frac{1}{\sqrt{10}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt[m]{10}}, \ldots$

Сходится ли эта последовательность равномерно на интервале (0, 1)?

2744. Сколько членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n+1)}$ следует взять, чтобы частная сумма $S_n(x)$ отличалась при $-\infty < x < +\infty$ от суммы ряда меньше чем на ε? Произвести численный расчет при: а) $\varepsilon = 0{,}1$; б) $\varepsilon = 0{,}01$; в) $\varepsilon = 0{,}001$.

2745. При каких n будет обеспечено выполнение неравенства

$$\left| e^x - \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \right| < 0{,}001 \quad (0 \leqslant x \leqslant 10)?$$

Исследовать последовательности на равномерную сходимость в указанных промежутках:

2746. $f_n(x)=x^n$; а) $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$; б) $0 \leqslant x \leqslant 1$.

2747. $f_n(x)=x^n-x^{n+1}$; $0 \leqslant x \leqslant 1$.

2748. $f_n(x)=x^n-x^{2n}$; $0 \leqslant x \leqslant 1$.

2749. $f_n(x)=\frac{1}{x+n}$; $0<x<+\infty$.

2750. $f_n(x)=\frac{nx}{1+n+x}$; $0 \leqslant x \leqslant 1$.

2751. $f_n(x)=\frac{x^n}{1+x^n}$; а) $0 \leqslant x \leqslant 1-\varepsilon$;

б) $1-\varepsilon \leqslant x \leqslant 1+\varepsilon$; в) $1+\varepsilon \leqslant x<+\infty$, где $\varepsilon>0$.

2752. $f_n(x)=\frac{2nx}{1+n^2x^2}$; а) $0 \leqslant x \leqslant 1$;

б) $1<x<+\infty$.

2753. $f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$; $-\infty<x<+\infty$.

2754. $f_n(x)=n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}-\sqrt{x}\right)$; $0<x<+\infty$.

2755. а) $f_n(x)=\frac{\sin nx}{n}$; $-\infty<x<+\infty$;

б) $f_n(x)=\sin\frac{x}{n}$; $-\infty<x<+\infty$.

2756. а) $f_n(x)=\operatorname{arctg} nx$; $0<x<+\infty$; б) $f_n(x)=$ $=x\operatorname{arctg} nx$; $0<x<+\infty$.

2757. $f_n(x)=e^{n(x-1)}$; $0<x<1$.

2758. $f_n(x)=e^{-(x-n)^2}$; а) $-l<x<l$, где l — любое положительное число; б) $-\infty<x<+\infty$.

2759. $f_n(x)=\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}$; $0<x<1$.

2760. $f_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$; а) на конечном интервале (a, b); б) на интервале $(-\infty, +\infty)$.

2761. $f_n(x)=n(x^{1/n}-1)$; $1 \leqslant x \leqslant a$.

2762. $f_n(x)=\sqrt[n]{1+x^n}$; $0 \leqslant x \leqslant 2$.

2763. $$f_n(x)=\begin{cases} n^2x, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{n};\\ n^2\left(\frac{2}{n}-x\right), & \text{если } \frac{1}{n}<x<\frac{2}{n};\\ 0, & \text{если } x\geqslant\frac{2}{n}\end{cases}$$

на сегменте $0\leqslant x\leqslant 1$.

2764. Пусть $f(x)$ — произвольная функция, определенная на сегменте $[a, b]$, и $f_n(x)=\frac{[nf(x)]}{n}$ $(n=1, 2, \ldots)$.

Доказать, что $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ при $n\to\infty$.

2765. Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f'(x)$ в интервале (a, b) и

$$f_n(x)=n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right].$$

Доказать, что $f_n(x)\rightrightarrows f'(x)$ на сегменте $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$, где $a<\alpha<\beta<b$.

2766. Пусть $f_n(x)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(x+\frac{i}{n}\right)$, где $f(x)$ — непрерывная на $(-\infty, +\infty)$ функция. Доказать, что последовательность $f_n(x)$ сходится равномерно на любом конечном сегменте $[a, b]$.

Исследовать характер сходимости следующих рядов:

2767. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ а) на интервале $|x|<q$, где $q<1$; б) на интервале $|x|<1$.

2768. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ на сегменте $-1\leqslant x\leqslant 1$.

2768.1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ на интервале $(0, +\infty)$.

2769. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$ на сегменте $0\leqslant x\leqslant 1$.

2770. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$; $-1\leqslant x\leqslant 1$.

2771. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)}$; $0<x<+\infty$.

2772. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$; $0<x<+\infty$.

2773. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{(1+x)(1+2x)\ldots(1+nx)}$;

а) $0\leqslant x\leqslant\varepsilon$, где $\varepsilon>0$; б) $\varepsilon\leqslant x<+\infty$.

2774. Пользуясь признаком Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость в указанных промежутках следующих функциональных рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2}$, $-\infty<x<+\infty$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+2^n}$, $-2<x<+\infty$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$, $0\leqslant x<+\infty$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2}$, $|x|<+\infty$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n})$, $\frac{1}{2}\leqslant|x|\leqslant 2$;

е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\left[\frac{n}{2}\right]!}$, $|x|<a$, где a — произвольное положительное число;

ж) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$, $|x|<+\infty$;

з) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$, $|x|<+\infty$;

и) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$, $|x|<+\infty$;

к) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right)$, $|x|<a$;

л) $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$, $0 \leqslant x<+\infty$;

м) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^3}$, $|x|<+\infty$.

Исследовать на равномерную сходимость в указанных промежутках следующие функциональные ряды:

2775. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ а) на сегменте $\varepsilon \leqslant x \leqslant 2\pi-\varepsilon$, где $\varepsilon>0$; б) на сегменте $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

2776. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n x}$; $0<x<+\infty$.

2777. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$; $0<x<+\infty$.

Указание. Оценить остаток ряда.

2778. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sin x}$; $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

2779. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt[3]{n^3+e^x}}$; $|x| \leqslant 10$.

2780. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2+x^2}}; \quad -\infty < x < +\infty.$

2781. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x}}; \quad 0 \leqslant x < +\infty.$

2782. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n(n+x)}}; \quad 0 \leqslant x < +\infty.$

2783. Может ли последовательность разрывных функций сходиться равномерно к непрерывной функции?

Рассмотреть пример

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \psi(x) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где $\psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ иррационально;} \\ 1, & \text{если } x \text{ рационально.} \end{cases}$

2784. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ сходится равномерно на $[a, b]$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ также сходится равномерно на $[a, b]$.

2785. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно на $[a, b]$, то обязательно ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ сходится равномерно на $[a, b]$?

Рассмотреть пример $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1-x) x^n$, где $0 \leqslant x \leqslant 1$.

2786. Доказать, что абсолютно и равномерно сходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

где $f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 2^{-(n+1)}; \\ \frac{1}{n} \sin^2(2^{n+1}\pi x), & \text{если } 2^{-(n+1)} < x < 2^{-n}; \\ 0, & \text{если } 2^{-n} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$

нельзя мажорировать сходящимся числовым рядом с неотрицательными членами.

2787. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$, члены которого суть монотонные функции на сегменте $[a, b]$, сходится абсолютно в концевых точках этого сегмента, то данный ряд сходится абсолютно и равномерно на сегменте $[a, b]$.

2788. Доказать, что степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится абсолютно и равномерно на любом сегменте, целиком лежащем внутри его интервала сходимости.

2789. Пусть $a_n \to \infty$ так, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_n} \right|$ сходится. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x - a_n}$ сходится абсолютно и равномерно на любом ограниченном замкнутом множестве, не содержащем точек a_n $(n = 1, 2, \ldots)$.

2790. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то *ряд Дирихле* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ сходится равномерно при $x \geqslant 0$.

2791. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$ сходится равномерно в области $x \geqslant 0$.

2792. Показать, что функция $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ непрерывна и имеет непрерывную производную в области $-\infty < x < +\infty$.

2793. Показать, что функция

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n - x)^2}$$

а) определена и непрерывна во всех точках, за исключе-

нием целочисленных: $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; б) периодическая с периодом, равным 1.

2794. Показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} [nxe^{-nx} - (n-1)\, xe^{-(n-1)x}]$ сходится неравномерно на сегменте $0 \leqslant x \leqslant 1$, однако его сумма есть функция, непрерывная на этом сегменте.

2795. Определить области существования функций $f(x)$ и исследовать их на непрерывность, если

а) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right)^n$; б) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x + n(-1)^n}{x^2 + n^2}$;

в) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1 + x^2)^n}$.

2796. Пусть r_k $(k = 1, 2, \ldots)$ — рациональные числа сегмента $[0, 1]$. Показать, что функция

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x - r_k|}{3^k} \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

обладает следующими свойствами: 1) непрерывна; 2) дифференцируема в иррациональных точках и недифференцируема в рациональных.

2797. Доказать, что *дзета-функция Римана*

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

непрерывна в области $x > 1$ и имеет в этой области непрерывные производные всех порядков.

2798. Доказать, что *тэта-функция*

$$\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}$$

определена и бесконечно дифференцируема при $x > 0$.

2799. Определить область существования функции $f(x)$ и исследовать ее на дифференцируемость, если:

а) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n + x}$; б) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2 + x^2}$.

2800. Показать, что последовательность

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{arctg} x^n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

сходится равномерно на интервале $(-\infty, +\infty)$, но

$$[\lim_{n\to\infty} f_n(x)]'_{x=1} \neq \lim_{n\to\infty} f'_n(1).$$

2801. Показать, что последовательность

$$f_n(x) = x^2 + \frac{1}{n} \sin n\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

сходится равномерно на интервале $(-\infty, +\infty)$, но

$$[\lim_{n\to\infty} f_n(x)]' \neq \lim_{n\to\infty} f'_n(x).$$

2802. При каких значениях параметра α: а) последовательность

$$f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx} \tag{1}$$

$(n = 1, 2, \ldots)$ сходится на сегменте $[0, 1]$; б) последовательность (1) сходится равномерно на $[0, 1]$; в) возможен предельный переход под знаком интеграла

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx?$$

2803. Показать, что последовательность

$$f_n(x) = nxe^{-nx^2} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

сходится на сегменте $[0, 1]$, но

$$\int_0^1 [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]\, dx \neq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x) dx.$$

2804. Показать, что последовательность

$$f_n(x) = nx(1-x)^n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

сходится неравномерно на сегменте $[0, 1]$, однако

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx.$$

2805. Законен ли переход к пределу под знаком интеграла в выражении

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{1 + n^2x^4}\, dx?$$

Найти:

2806. $\lim\limits_{x\to 1-0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{x^n}{x^n+1}$.

2807. $\lim\limits_{x\to 1-0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^n-x^{n+1})$.

2808. $\lim\limits_{x\to +0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^x}$. 2808.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{1+n^2x^2}$.

2809. Законно ли почленное дифференцирование ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}?$$

2810. Законно ли почленное интегрирование ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{\frac{1}{2n+1}}-x^{\frac{1}{2n-1}}\right)$$

на сегменте $[0, 1]$?

2811. Пусть $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ — бесконечно дифференцируемая функция и последовательность ее производных $f^{(n)}(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ сходится равномерно на каждом конечном интервале (a, b) к функции $\varphi(x)$. Доказать, что $\varphi(x)=Ce^x$, где C — постоянная величина. Рассмотреть пример $f_n(x)=e^{-(x-n)^2}$, $n=1, 2, \ldots$

2811.1. Пусть функции $f_n(x)$, $n=1, 2, \ldots$, — определены и ограничены на $(-\infty, +\infty)$ и $f_n(x)\rightrightarrows\varphi(x)$ на каждом сегменте $[a, b]$. Следует ли отсюда, что

$$\lim_{n\to\infty}\sup_x f(x)=\sup_x\varphi(x)?$$

§ 5. Степенные ряды

1°. Интервал сходимости. Для каждого степенного ряда

$$a_0+a_1(x-a)+\ldots+a_n(x-a)^n+\ldots$$

существует замкнутый *интервал сходимости*: $|x-a|\leqslant R$, внутри которого данный ряд сходится, а вне расходится. *Радиус*

сходимости R определяется по *формуле Коши — Адамара*

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Радиус сходимости R может быть вычислен также по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

если этот предел существует.

2°. Теорема Абеля. Если степенной ряд $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $(|x| < R)$ сходится в концевой точке $x = R$ интервала сходимости, то

$$S(R) = \lim_{x\to R-0} S(x).$$

3°. Ряд Тейлора. Аналитическая в точке a функция $f(x)$ в некоторой окрестности этой точки разлагается в степенной ряд

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

Остаточный член этого ряда

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

может быть представлен в виде

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

(*форма Лагранжа*), или в виде

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta_1(x-a))}{n!} (1-\theta_1)^n (x-a)^{n+1} \quad (0 \leqslant \theta_1 \leqslant 1)$$

(*форма Коши*).

Необходимо помнить следующие пять основных разложений:

I. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$

$(-\infty < x < +\infty)$.

II. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$

$(-\infty < x < +\infty)$.

III. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$

$(-\infty < x < +\infty)$.

IV. $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots$

$\ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots \quad (-1 < x < 1).$

V. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots$

$(-1 < x \leqslant 1).$

4°. Действия со степенными рядами. Внутри общего интервала сходимости $|x-a| < R$ имеем:

а) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)(x-a)^n;$

б) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n,$

где $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0;$

в) $\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1} (x-a)^n;$

г) $\int \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n\right] dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}.$

5°. Степенные ряды комплексной области. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

где

$$c_n = a_n + ib_n, \quad a = \alpha + i\beta, \quad z = x + iy, \quad i^2 = -1.$$

Для каждого такого ряда имеется замкнутый *круг сходимости* $|z-a| \leqslant R$, внутри которого данный ряд сходится (и притом абсолютно), а вне расходится. *Радиус сходимости* R равен радиусу сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n$$

в действительной области.

Определить радиус и интервал сходимости и исследовать поведение в граничных точках интервала сходимости следующих степенных рядов:

2812. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}.$ 2813. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n}(x+1)^n.$

2814. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n.$

2815. $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n^2} \cdot x^n \quad (0<\alpha<1).$

2816. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n.$

2817. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} x^n \quad (a>1).$

2818. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots (2n)}\right]^p \left(\frac{x-1}{2}\right)^n.$

2819. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}\right]^p x^n.$

2820. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n.$

2821. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right) x^n \qquad (a>0,\ b>0).$

2822. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n+b^n} \quad (a>0,\ b>0).$

2823. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}} \quad (a>0).$

2824. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}}\, x^n}{\sqrt{n^2+1}}.$

2825. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^n.$

2826. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n x^n.$

2827. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) x^n.$

2828. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3 + (-1)^n]^n}{n} x^n.$

2829. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(1 + 2\cos\frac{\pi n}{4}\right)^n}{\ln n} x^n.$ 2830. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}.$

2831. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} x^n$ (*ряд Принсгейма*).

2831.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^{\nu(n)}}{n} (1-x)^n,$ где $\nu(n)$ — число цифр числа n.

2831.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{\sin n}\right)^n.$

2832. Определить область сходимости *гипергеометрического ряда*

$$1 + \frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)} x^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1\cdot 2\ldots n\cdot\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} x^n + \ldots$$

Найти область сходимости обобщенных степенных рядов:

2833. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n.$ 2834. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} \sin\frac{\pi}{2^n}.$

2835. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n^2}}$. 2836. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2} e^{-nx}$.

2837. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!} \operatorname{tg}^n x$.

2838. Функцию

$$f(x) = x^3$$

разложить по целым неотрицательным степеням бинома $x+1$.

2839. Функцию

$$f(x) = \frac{1}{a-x} \quad (a \neq 0)$$

разложить в степенной ряд: а) по степеням x; б) по степеням бинома $x-b$, где $b \neq a$; в) по степеням $\frac{1}{x}$. Указать соответствующие области сходимости.

2840. Функцию $f(x) = \ln x$ разложить по целым неотрицательным степеням разности $x-1$ и выяснить интервал сходимости разложения.

Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Написать разложения следующих функций по целым неотрицательным степеням переменной x и найти соответствующие интервалы сходимости:

2841. $f(x) = \operatorname{sh} x$. 2842. $f(x) = \operatorname{ch} x$.

2843. $f(x) = \sin^2 x$. 2844. $f(x) = a^x$ $(a > 0)$.

2845. $f(x) = \sin(\mu \arcsin x)$.

2846. $f(x) = \cos(\mu \arcsin x)$.

2847. Написать три члена разложения функции $f(x) = x^x$ по целым неотрицательным степеням разности $x-1$.

2848. Написать три члена разложения функции $f(x) = (1+x)^{1/x}$ $(x \neq 0)$ и $f(0) = e$ по целым неотрицательным степеням переменной x.

2849. Функции $\sin(x+h)$ и $\cos(x+h)$ разложить по целым неотрицательным степеням переменной h.

2850. Определить интервал сходимости разложения в степенной ряд функции:

$$f(x)=\frac{x}{x^2-5x+6}$$

а) по степеням x; б) по степеням бинома $x-5$, не производя самого разложения.

2850.1. Можно ли утверждать, что

$$\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\rightrightarrows\sin x \text{ на } (-\infty,\ +\infty)$$

при $N\to\infty$?

Пользуясь основными разложениями I—V, написать разложения в степенной ряд относительно x следующих функций:

2851. e^{-x^2}. **2852.** $\cos^2 x$. **2853.** $\sin^3 x$.

2854. $\frac{x^{10}}{1-x}$. **2855.** $\frac{1}{(1-x)^2}$. **2856.** $\frac{x}{\sqrt{1-2x}}$.

2857. $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. **2858.** $\frac{x}{1+x-2x^2}$.

Указание. Разложить данную дробь на простейшие.

2859. $\frac{12-5x}{6-5x-x^2}$. **2860.** $\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$.

2861. $\frac{1}{1-x-x^2}$. **2862.** $\frac{1}{1+x+x^2}$.

2862.1. $f(x)=\frac{1}{1+x+x^2+x^3}$.

Чему равно $f^{(1000)}(0)$?

2863. $\frac{x\cos\alpha-x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2}$. **2864.** $\frac{x\sin a}{1-2x\cos a+x^2}$.

2865. $\frac{x\,\mathrm{sh}\,a}{1-2x\,\mathrm{ch}\,a+x^2}$. **2866.** $\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

2867. $\ln(1+x+x^2+x^3)$. **2868.** $e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)$.

Указание. Применить формулы Эйлера.

Разложив предварительно производные, путем почленного интегрирования получить разложения в степенной ряд следующих функций:

2869. $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$.

2870. $f(x) = \arcsin x$. **2871.** $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

2872. $f(x) = \ln(1 - 2x\cos\alpha + x^2)$.

2873. Применяя различные методы, найти разложения в степенной ряд следующих функций:

а) $f(x) = (1+x)\ln(1+x)$;

б) $f(x) = \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$;

в) $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{2-2x}{1+4x}$;

г) $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{2x}{2-x^2}$;

д) $f(x) = x\operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2}$;

е) $f(x) = \arccos(1-2x^2)$;

ж) $f(x) = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$;

з) $f(x) = x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2}$.

2874. Используя единственность разложения

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \ldots,$$

найти производные n-го порядка от следующих функций:

а) $f(x) = e^{x^2}$; б) $f(x) = e^{a/x}$; в) $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

2875. Функцию $f(x) = \ln\frac{1}{2+2x+x^2}$ разложить по целым положительным степеням бинома $x+1$.

2876. Функцию $f(x) = \frac{1}{1-x}$ разложить в степенной ряд по отрицательным степеням переменной x.

2877. Функцию $f(x) = \ln x$ разложить в степенной ряд по целым положительным степеням дроби $\frac{x-1}{x+1}$.

2878. Функцию $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$ разложить в сте-

пенной ряд по целым положительным степеням дроби $\frac{x}{1+x}$.

2879. Пусть $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. Доказать непосредственно, что

$$f(x)\,f(y)=f(x+y).$$

2880. Пусть по определению

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{и} \quad \cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Доказать, что

а) $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$; б) $\sin^2 x+\cos^2 x=1$.

2881. Написать несколько членов разложения в степенной ряд функции

$$f(x)=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n+1}\right)\right]^{-1}$$

Производя соответствующие действия со степенными рядами, получить разложения в степенные ряды следующих функций:

2882. $f(x)=(1+x)\,e^{-x}$. 2883. $f(x)=(1-x)^2\operatorname{ch}\sqrt{x}$.

2884. $f(x)=\ln^2(1-x)$. 2885. $f(x)=(1+x^2)\operatorname{arctg}x$.

2886. $f(x)=e^x\cos x$. 2887. $f(x)=e^x\sin x$.

2888. $f(x)=\frac{\ln(1+x)}{1+x}$. 2889. $f(x)=(\operatorname{arctg}x)^2$.

2890. $f(x)=\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^2$.

Написать три члена разложения (отличные от нуля) в степенной ряд по положительным степеням переменной x следующих функций:

2891. $f(x)=\operatorname{tg}x$. 2892. $f(x)=\operatorname{th}x$.

2893. $f(x)=\operatorname{ctg}x-\frac{1}{x}$.

2894. Пусть разложение $\sec x$ записано в виде

$$\sec x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{(2n)!} x^{2n}.$$

Вывести рекуррентное соотношение для коэффициентов E_n (*числа Эйлера*).

2895. Разложить в степенной ряд функцию

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+x^2}} \quad (|x|<1).$$

2896. Пусть $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^x$. Написать разложение функции $F(x) = \frac{f(x)}{1-x}$.

2897. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ имеет радиус сходимости R_1, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ — радиус сходимости R_2, то какой радиус сходимости R имеют ряды

а) $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n$?

2898. Пусть $l = \varliminf_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ и $L = \varlimsup_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$.

Доказать, что радиус сходимости R степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ удовлетворяет неравенству

$$l \leqslant R \leqslant L.$$

2899. Доказать, что если $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, причем

$$|n!\, a_n| < M \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где M — постоянная, то: 1) $f(x)$ бесконечно дифференцируема в любой точке a; 2) справедливо разложение

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \quad (|x| < +\infty).$$

2899.1. Пусть $f(x) \in C^{(\infty)}(a, b)$ и $|f^{(n)}(x)| \leqslant c^n$ ($n =$

$= 0, 1, 2, \ldots$) при $x \in (a, b)$. Доказать, что функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (x_0 \in (a, b)),$$

сходящийся в интервале (a, b).

2899.2. Пусть $f(x) \in C^{(\infty)}[-1, 1]$ и $f^{(n)}(x) \geqslant 0$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) при $x \in [-1, 1]$. Доказать, что в интервале $(-1, 1)$ функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Указание. Используя монотонность производных $f^{(n)}(x)$ для остаточного члена $R_n(x)$ ряда Тейлора функции $f(x)$, получить оценку

$$|R_n(x)| \leqslant |x|^{n+1} f(1).$$

2900. Доказать, что если 1) $a_n \geqslant 0$ и 2) существует

$$\lim_{x \to R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S, \text{ то } \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = S.$$

Разложить в степенной ряд функции:

2901. $\int_0^x e^{-t^2} dt.$ **2902.** $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - t^4}}.$

2903. $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$ **2904.** $\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx.$

2905. $\int_0^x \frac{t\,dt}{\ln(1 + t)}$ (написать четыре члена).

Применяя почленное дифференцирование, вычислить суммы следующих рядов:

2906. $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots$

2907. $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$

2908. $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$

2909. $\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^3}{3\cdot 4}+\ldots$

2910. $1+\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\ldots$

Указание. Производную ряда умножить на $1-x$.

Применяя почленное интегрирование, вычислить суммы рядов:

2911. $x+2x^2+3x^3+\ldots$

2912. $x-4x^2+9x^3-16x^4+\ldots$

2913. $1\cdot 2x+2\cdot 3x^2+3\cdot 4x^3+\ldots$

2914. Показать, что ряд $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$ удовлетворяет уравнению $y^{\mathrm{IV}}=y$.

2915. Показать, что ряд $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}$ удовлетворяет уравнению $xy''+y'-y=0$.

Определить радиус и круг сходимости степенных рядов в комплексной области ($z=x+iy$):

2916. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1-i)^n}{n\cdot 2^n}$.

2917. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n z^n}{(n+1)(n+2)}$.

2918. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\, z^n}{(1+i)(1+2i)\ldots(1+ni)}$.

2919. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^{\alpha+i\beta}}$.

2920. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-e^{i\alpha})^n}{n(1-e^{i\alpha})^n}$.

2921. Пользуясь формулой бинома Ньютона, при-

ближенно вычислить $\sqrt[3]{9}$ и оценить ошибку, которая получится, если взять три члена разложения.

2922. Приближенно вычислить:

а) $\operatorname{arctg} 1{,}2$; б) $\sqrt[10]{1000}$; в) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; г) $\ln 1{,}25$

и оценить соответствующие погрешности.

Пользуясь соответствующими разложениями, вычислить с указанной степенью точности следующие значения функций:

2923. $\sin 18^\circ$ с точностью до 10^{-5}.

2924. $\cos 1^\circ$ с точностью до 10^{-6}.

2925. $\operatorname{tg} 9^\circ$ с точностью до 10^{-3}.

2926. e с точностью до 10^{-6}.

2927. $\ln 1{,}2$ с точностью до 10^{-4}.

2928. Исходя из равенства

$$\frac{\pi}{6} = \arcsin \frac{1}{2},$$

найти число π с точностью до 10^{-4}.

2929. Пользуясь тождеством

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3},$$

вычислить число π с точностью до 0,001.

2930. Пользуясь тождеством

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239},$$

определить число π с точностью до 10^{-9}.

2931. Пользуясь формулой

$$\ln(n+1) = \ln n + 2\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \ldots\right],$$

найти $\ln 2$ и $\ln 3$ с точностью до 10^{-5}.

2932. С помощью разложений подынтегральных функций в ряды вычислить с точностью до 0,001 следующие интегралы:

а) $\int_0^1 e^{-x^2} dx$; б) $\int_2^4 e^{1/x} dx$; в) $\int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx$;

г) $\int_0^1 \cos x^2 dx$; д) $\int_0^1 \frac{\operatorname{sh} x}{x} dx$; е) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$;

ж) $\int_0^{1/3} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$; з) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$;

и) $\int_{10}^{100} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$;

к) $\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$; л) $\int_0^{1/2} \frac{\arcsin x}{x} dx$; м) $\int_0^1 x^x dx$.

2933. Найти с точностью до 0,01 длину дуги одной полуволны синусоиды

$$y = \sin x \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi).$$

2934. Найти с точностью до 0,01 длину дуги эллипса с полуосями $a = 1$ и $b = 1/2$.

2935. Провод, подвешенный на двух столбах, расстояние между которыми равно $2l = 20$ м, имеет форму параболы. Вычислить с точностью до 1 см длину провода, если стрелка прогиба $h = 40$ см.

§ 6. Ряды Фурье

1°. Теорема разложения. Если функция $f(x)$ кусочно-непрерывна и имеет кусочно-непрерывную производную $f'(x)$ в интервале $(-l, l)$, причем ее точки разрыва ξ регулярны (т. е. $f(\xi) = \frac{1}{2}[f(\xi-0) + f(\xi+0)]$), то функция $f(x)$ в этом интервале может быть представлена рядом Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right), \qquad (1)$$

где

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (2)$$

и

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \qquad (n = 1, 2, \ldots). \quad (2')$$

В частности:

а) если функция $f(x)$ четная, то имеем:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad (3)$$

где

$$a_n = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots);$$

б) если функция $f(x)$ нечетная, то получаем:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (4)$$

где

$$b_n = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Функцию $f(x)$, определенную в интервале $(0, l)$ и обладающую в нем приведенными выше свойствами непрерывности, можно в этом интервале представить как формулой (3), так и формулой (4).

2°. Условие полноты. Для всякой интегрируемой на отрезке $[-l, l]$ вместе со своим квадратом функции $f(x)$ формально построенный ряд (1) с коэффициентами (2), (2') удовлетворяет *равенству Ляпунова*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f^2(x)\, dx.$$

3°. Интегрирование рядов Фурье. Ряд Фурье (1), даже расходящийся, интегрируемой по Риману в интервале $(-l, l)$ функции $f(x)$ можно интегрировать почленно в этом интервале.

2936. Функцию

$$f(x) = \sin^4 x$$

разложить в ряд Фурье.

2937. Каков будет ряд Фурье для тригонометрического многочлена

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} (\alpha_i \cos ix + \beta_i \sin ix)?$$

2938. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \operatorname{sgn} x \quad (-\pi < x < \pi).$$

Нарисовать график функции и графики нескольких частных сумм ряда Фурье этой функции.

Пользуясь разложением, найти сумму *ряда Лейбница*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.$$

Разложить в ряд Фурье в указанных интервалах следующие функции:

2939. $f(x) = \begin{cases} A, & \text{если } 0 < x < l; \\ 0, & \text{если } l < x < 2l, \end{cases}$

где A — постоянная, в интервале $(0, 2l)$.

2940. $f(x) = x$ в интервале $(-\pi, \pi)$.

2941. $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ в интервале $(0, 2\pi)$.

2942. $f(x) = |x|$ в интервале $(-\pi, \pi)$.

2943. $f(x) = \begin{cases} ax, & \text{если } -\pi < x < 0; \\ bx, & \text{если } 0 < x < \pi, \end{cases}$

где a и b — постоянные, в интервале $(-\pi, \pi)$.

2944. $f(x) = \pi^2 - x^2$ в интервале $(-\pi, \pi)$.

2945. $f(x) = \cos ax$ в интервале $(-\pi, \pi)$ (a — не целое).

2946. $f(x) = \sin ax$ в интервале $(-\pi, \pi)$ (a — не целое).

2947. $f(x) = \operatorname{sh} ax$ в интервале $(-\pi, \pi)$.

2948. $f(x) = e^{ax}$ в интервале $(-h, h)$.

2949. $f(x) = x$ в интервале $(a, a + 2l)$.

2950. $f(x) = x \sin x$ в интервале $(-\pi, \pi)$.

2951. $f(x) = x \cos x$ в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Разложить в ряды Фурье следующие периодические функции:

2952. $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$.

2953. $f(x) = \arcsin(\sin x)$.

2954. $f(x) = \arcsin(\cos x)$. 2955. $f(x) = x - [x]$.

2956. $f(x) = (x)$ — расстояние x до ближайшего целого числа.

2957. $f(x) = |\sin x|$. 2958. $f(x) = |\cos x|$.

2959. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{\sin nx}{\sin x}$ $(|\alpha| < 1)$.

2960. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \sec x \qquad \left(-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}\right).$$

Указание. Вывести соотношение между коэффициентами a_n и a_{n-2}.

2961. Функцию $f(x) = x^2$ разложить в ряд Фурье: а) в интервале $(-\pi, \pi)$ по косинусам кратных дуг; б) в интервале $(0, \pi)$ по синусам кратных дуг; в) в интервале $(0, 2\pi)$.

Нарисовать график функций и графики сумм рядов Фурье для случаев а), б) и в).

Пользуясь этими разложениями, найти суммы рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

2962. Исходя из разложения

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} \qquad (-\pi < x < \pi),$$

почленным интегрированием получить разложения в ряд Фурье на интервале $(-\pi, \pi)$ функций x^2, x^3 и x^4.

2963. Написать равенство Ляпунова для функции

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| < \alpha; \\ 0 & \text{при } \alpha < |x| < \pi. \end{cases}$$

Исходя из равенства Ляпунова, найти суммы рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}.$$

2964. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases} x, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ 1, \text{ если } 1<x<2; \\ 3-x, \text{ если } 2 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$$

Пользуясь формулами

$$\cos x=\frac{1}{2}(t+\bar{t}), \qquad \sin x=\frac{1}{2i}(t-\bar{t}),$$

где $t=e^{ix}$ и $\bar{t}=e^{-ix}$, получить разложение в ряд Фурье следующих функций:

2965. $\cos^{2m} x$ (m — целое положительное число).

2966. $\dfrac{q \sin x}{1-2q\cos x+q^2}$ $(|q|<1)$.

2967. $\dfrac{1-q^2}{1-2q\cos x+q^2}$ $(|q|<1)$.

2968. $\dfrac{1-q\cos x}{1-2q\cos x+q^2}$ $(|q|<1)$.

2969. $\ln(1-2q\cos x+q^2)$ $(|q|<1)$.

Разложить в ряд Фурье неограниченные периодические функции:

2970. $f(x)=\ln\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|$.

2971. $f(x)=\ln\left|\cos\dfrac{x}{2}\right|$.

2972. $f(x)=\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|$.

2973. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\int_0^x \ln\sqrt{\left|\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right|}\,dt \quad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi).$$

2974. Разложить в ряд Фурье функции

$$x=x(s),\ y=y(s)\ (0 \leqslant s \leqslant 4a),$$

дающие параметрическое представление контура квадрата: $0<x<a$, $0<y<a$, где s — длина дуги, отсчитанная против хода часовой стрелки от точки O (0, 0).

2975. Как следует продолжить заданную в интервале $(0, \pi/2)$ интегрируемую функцию $f(x)$ в интервал $(-\pi, \pi)$, чтобы ее разложение в ряд Фурье имело вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n-1)x \qquad (-\pi < x < \pi)?$$

2976. Как следует продолжить заданную в интервале $(0, \pi/2)$ интегрируемую функцию $f(x)$ в интервал $(-\pi, \pi)$, чтобы ее разложение в ряд Фурье имело вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2n-1)x \qquad (-\pi < x < \pi)?$$

2977. Функцию

$$f(x) = x\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

разложить в интервале $(0, \pi/2)$:

а) по косинусам нечетных дуг; б) по синусам нечетных дуг.

Нарисовать графики суммы рядов Фурье для случаев а) и б).

2978. Функция $f(x)$ *антипериодична* с периодом π, т. е.

$$f(x+\pi) \equiv -f(x).$$

Какой особенностью обладает ряд Фурье этой функции в интервале $(-\pi, \pi)$?

2979. Какой особенностью обладает ряд Фурье функции $f(x)$ в интервале $(-\pi, \pi)$, если $f(x+\pi) \equiv f(x)$?

2980. Какими особенностями обладают коэффициенты Фурье a_n, b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ функции $y = f(x)$ периода 2π, если график функции: а) имеет центры симметрии в точках $(0, 0)$, $(\pm\pi/2, 0)$; б) имеет центр симметрии в начале координат и оси симметрии $x = \pm\pi/2$?

2981. Как связаны между собой коэффициенты Фурье a_n, b_n и α_n, β_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, если

$$\varphi(-x) \equiv \psi(x)?$$

2982. Как связаны между собой коэффициенты Фурье a_n, b_n и a_n, β_n $(a = 0, 1, 2, \ldots)$ функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, если

$$\varphi(-x) \equiv -\psi(x)?$$

2983. Зная коэффициенты Фурье a_n, b_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ интегрируемой функции $f(x)$, имеющей период 2π, вычислить коэффициенты Фурье $\bar{a}_n$, $\bar{b}_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ «смещенной» функции $f(x + h)$ $(h = \text{const})$.

2984. Зная коэффициенты Фурье a_n, b_n $(a = 0, 1, 2, \ldots)$ интегрируемой функции $f(x)$ периода 2π, вычислить коэффициенты Фурье A_n, B_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *функции Стеклова*

$$f_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(\xi)\, d\xi.$$

2985. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция с периодом 2π и a_n, b_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ — ее коэффициенты Фурье. Определить коэффициенты Фурье A_n, B_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *свернутой функции*

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x+t)\, dt.$$

Пользуясь полученным результатом, вывести равенство Ляпунова.

§ 7. Суммирование рядов

1°. Непосредственное суммирование. Если

$$u_n = v_{n+1} - v_n \qquad (n = 1, 2, \ldots) \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} v_n = v_\infty,$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = v_\infty - v_1.$$

В частности, если

$$u_n = \frac{1}{a_n a_{n+1} \cdots a_{n+m}},$$

где числа a_i $(i = 1, 2, \ldots)$ образуют арифметическую прогрессию со знаменателем d, то

$$v_n = -\frac{1}{md} \cdot \frac{1}{a_n a_{n+1} \cdots a_{n+m-1}}.$$

В некоторых случаях искомый ряд удается представить в виде линейной комбинации известных рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6};$$