ранг соответствующей матрицы T_α будет оставаться неизменным ($=\nu$); следовательно, будет оставаться неизменной и сигнатура формы $T_\alpha(x, x)$ (см. стр. 280). Поэтому $\sigma[T_\alpha(x, x)]$ не изменится, если мы в (59) и (60) положим: $A_1 = \ldots = A_{\nu-1} = 0$ и $\alpha = 0$, т. е. вместо T_α возьмем матрицу

$$\left[\frac{1}{(\nu-1)!}\frac{\partial^{\nu-1}S_\alpha}{\partial\alpha^{\nu-1}}\right]_{\alpha=0} = \left\|\begin{matrix} \overbrace{0 \quad 0 \ldots 0}^{\nu-1} & A_\nu & 0 & 0 \ldots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ A_\nu & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & & & \end{matrix}\right\|.$$

Соответствующая квадратичная форма равна

$$\begin{matrix} 2A_\nu(x_0x_{\nu-1} + x_1x_{\nu-2} + \ldots + x_{s-1}x_s) & \text{при} & \nu = 2s, \\ A_\nu[2(x_0x_{\nu-1} + \ldots + x_{s-2}x_s) + x_{s-1}^2] & \text{при} & \nu = 2s-1 \end{matrix} \qquad (s = 1, 2, 3, \ldots).$$

Но сигнатура верхней формы всегда равна нулю, а сигнатура нижней формы равна $\operatorname{sign} A_\nu$[1]). Таким образом, если α вещественно, то

$$\sigma[T_\alpha(x, x)] = \begin{cases} 0 & \text{при } \nu \text{ четном}, \\ \operatorname{sign} A_\nu & \text{при } \nu \text{ нечетном}. \end{cases} \tag{61}$$

2) α — комплексное число. Пусть

$$T_\alpha(x, x) = \sum_{k=1}^{\nu}(P_k + iQ_k)^2, \qquad T_{\bar\alpha}(x, x) = \sum_{k=1}^{\nu}(P_k - iQ_k)^2,$$

где P_k, Q_k ($k = 1, 2, \ldots, \nu$) — вещественные линейные формы переменных $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$. Тогда

$$T_\alpha(x, x) + T_{\bar\alpha}(x, x) = 2\sum_{k=1}^{\nu}P_k^2 - 2\sum_{k=1}^{\nu}Q_k^2. \tag{62}$$

Так как ранг этой квадратичной формы равен 2ν, то P_k, Q_k ($k = 1, 2, \ldots, \nu$) линейно независимы, и потому согласно (62) при невещественном α

$$\sigma[T_\alpha(x, x) + T_{\bar\alpha}(x, x)] = 0. \tag{63}$$

Из (59), (61) и (63) вытекает:

$$\sigma[S_n(x, x)] = \sum_{\left(\substack{\alpha_j \text{ вещ.} \\ \nu \text{ нечетно}}\right)} \operatorname{sign} A_\nu^{(j)}.$$

---

[1]) Каждое произведение $x_0x_{\nu-1}$, $x_1x_{\nu-2}$, ... можно заменить соответственно на разности квадратов $\left(\frac{x_0+x_{\nu-1}}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_0-x_{\nu-1}}{2}\right)^2$, $\left(\frac{x_1+x_{\nu-2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_1-x_{\nu-2}}{2}\right)^2$, ... Все получающиеся при этом квадраты независимы между собой.

Но на стр. 470 было выяснено, что сумма, стоящая в правой части этого равенства, равна $I_{-\infty}^{+\infty}R(z)$. Таким образом, теорема доказана.

Из доказанной теоремы вытекает:

Следствие 1. *Если* $R(z) \sim S = \| s_{i+k} \|_0^\infty$ *и* m — *ранг матрицы* S, *то все квадратичные формы* $S_n(x, x) = \sum_{i,k=0}^{n-1} s_{i+k}x_ix_k$ $(n = m, m+1, \ldots)$ *имеют одну и ту же сигнатуру.*

В главе X, § 10 (стр. 305, 306) было установлено правило вычисления сигнатуры ганкелевой квадратичной формы, причем исследования Фробениуса дали возможность сформулировать правило с охватом всех особых случаев. Согласно доказанной теореме этим правилом можно пользоваться для вычисления индекса Коши. Таким образом, получаем

Следствие 2. *Индекс произвольной рациональной функции* $R(z)$, *которой соответствует матрица* $S = \| s_{i+k} \|_0^\infty$ *ранга* m, *определяется по формуле*

$$I_{-\infty}^{+\infty}R(z) = m - 2V(1, D_1, D_2, \ldots, D_m), \tag{64}$$

где

$$D_f = | s_{i+k} |_0^{f-1} = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \ldots s_{f-1} \\ s_1 & s_2 \ldots s_f \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ s_{f-1} & s_f \ldots s_{2f-2} \end{vmatrix} \qquad (f = 1, 2, \ldots, m); \tag{65}$$

если среди определителей $D_1, D_2, \ldots, D_m$ *имеется группа подряд идущих определителей, равных нулю*[1])

$$(D_h \neq 0) \quad D_{h+1} = \ldots = D_{h+p} = 0 \quad (D_{h+p+1} \neq 0),$$

то при вычислении $V(D_h, D_{h+1}, \ldots, D_{h+p+1})$ *можно принять:*

$$\operatorname{sign} D_{h+j} = (-1)^{\frac{j(j-1)}{2}} \operatorname{sign} D_h \qquad (j = 1, 2, \ldots, p),$$

что дает:

$$V(D_h, D_{h+1}, \ldots, D_{h+p+1}) = \\ = \begin{cases} \dfrac{p+1}{2} \text{ при } p \text{ нечетном}, \\ \dfrac{p+1-\varepsilon}{2} \text{ при } p \text{ четном}, \ \varepsilon = (-1)^{\frac{p}{2}} \operatorname{sign} \dfrac{D_{h+p+1}}{D_h}. \end{cases} \tag{66}$$

Для того чтобы выразить индекс рациональной функции через коэффициенты числителя и знаменателя, нам понадобятся некоторые вспомогательные соотношения.

Прежде всего всегда можно представить $R(z)$ в виде[2])

$$R(z) = Q(z) + \frac{g(z)}{h(z)},$$

---

[1]) При этом всегда $D_m \neq 0$ (стр. 496) и при p нечетном $\operatorname{sign} \dfrac{D_{h+p+1}}{D_h} = (-1)^{\frac{p+1}{2}}$ (стр. 309).

[2]) У нас нет необходимости заменять $R(z)$ правильной рациональной дробью. Для дальнейшего достаточно, чтобы степень $g(z)$ не превосходила степени $h(z)$.

где $Q(z)$, $g(z)$, $h(z)$ — многочлены, причем

$$h(z)=a_0z^m+a_1z^{m-1}+\ldots+a_m\,(a_0\neq 0),\quad g(z)=b_0z^m+b_1z^{m-1}+\ldots+b_m.$$

Очевидно,

$$I_{-\infty}^{+\infty}R(z)=I_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(z)}{h(z)}.$$

Пусть

$$\frac{g(z)}{h(z)}=s_{-1}+\frac{s_0}{z}+\frac{s_1}{z^2}+\ldots$$

Тогда, освобождаясь здесь от знаменателя и после этого приравнивая друг другу коэффициенты при одинаковых степенях z в левой и правой частях равенства, получаем:

$$\begin{aligned}
&a_0s_{-1}=b_0,\\
&a_0s_0+a_1s_{-1}=b_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_0s_{m-1}+a_1s_{m-2}+\ldots+a_ms_{-1}=b_m,\\
&a_0s_t+a_1s_{t-1}+\ldots+a_ms_{t-m}=0\qquad(t=m,\ m+1,\ \ldots).
\end{aligned}\tag{67}$$

Пользуясь соотношениями (67), находим выражение для следующего определителя $2p$-го порядка, в котором кладем $a_j=0$, $b_j=0$ при $j>m$:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{2p-1}\\ b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_{2p-1}\\ 0 & a_0 & a_1 & \ldots & a_{2p-2}\\ 0 & b_0 & b_1 & \ldots & b_{2p-2}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ s_{-1} & s_0 & s_1 & \ldots & s_{2p-2}\\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & s_{-1} & s_0 & \ldots & s_{2p-3}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{2p-1}\\ 0 & a_0 & a_1 & \ldots & a_{2p-2}\\ 0 & 0 & a_0 & \ldots & a_{2p-3}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_0 \end{vmatrix}=$$

$$=(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}a_0^{2p}\begin{vmatrix} s_{p-1} & s_p & \ldots & s_{2p-2}\\ s_{p-2} & s_{p-1} & \ldots & s_{2p-3}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ s_0 & s_1 & \ldots & s_{p-1} \end{vmatrix}=a_0^{2p}\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{p-1}\\ s_1 & s_2 & \ldots & s_p\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ s_{p-1} & s_p & \ldots & s_{2p-2} \end{vmatrix}=a_0^{2p}D_p.\tag{68}$$

Введем сокращенное обозначение

$$\nabla_{2p}=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{2p-1}\\ b_0 & b_1 & \ldots & b_{2p-1}\\ 0 & a_0 & \ldots & a_{2p-2}\\ 0 & b_0 & \ldots & b_{2p-2}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}\qquad(p=1,\ 2,\ \ldots;\ a_j=b_j=0 \text{ при } j>m).\tag{69}$$

Тогда формула (68) запишется так:

$$\nabla_{2p}=a_0^{2p}D_p\qquad(p=1,\ 2,\ \ldots).\tag{68'}$$

В силу этой формулы следствие 2 на стр. 502 приводит нас к следующей теореме:

Теорема 10. *Если* $\nabla_{2m} \neq 0$[1]), *то*

$$I_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_m} = m - 2V(1, \nabla_2, \nabla_4, \ldots, \nabla_{2m}) \quad (a_0 \neq 0), \tag{70}$$

где ∇_{2p} $(p = 1, 2, \ldots, m)$ *определяется формулой* (69); *если при этом имеются подряд идущие нулевые определители*

$$(\nabla_{2h} \neq 0) \quad \nabla_{2h+2} = \ldots = \nabla_{2h+2p} = 0 \quad (\nabla_{2h+2p+2} \neq 0),$$

то в формуле (70) *при подсчете* $V(\nabla_{2h}, \nabla_{2h+2}, \ldots, \nabla_{2h+2p+2})$ *следует положить*:

$$\operatorname{sign} \nabla_{2h+2j} = (-1)^{\frac{j(j-1)}{2}} \operatorname{sign} \nabla_{2h} \qquad (j = 1, 2, \ldots, p),$$

или, что то же[2]),

$$V(\nabla_{2h}, \ldots, \nabla_{2h+2p+2}) = \begin{cases} \dfrac{p+1}{2} \text{ при } p \text{ нечетном}, \\[2ex] \dfrac{p+1-\varepsilon}{2} \text{ при } p \text{ четном}, \ \varepsilon = (-1)^{\frac{p}{2}} \operatorname{sign} \dfrac{\nabla_{2h+2p+2}}{\nabla_{2h}} \end{cases}$$

Замечание. *Если* $\nabla_{2m} = 0$, *т. е. дробь, стоящая под знаком индекса в формуле* (70), *сократима, то формулу* (70) *следует заменить формулой*

$$I_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_m} = r - 2V(1, \nabla_2, \nabla_4, \ldots, \nabla_{2r}), \tag{70'}$$

где r — *число полюсов (с учетом кратностей) рациональной дроби, стоящей под знаком индекса (т. е.* r — *степень знаменателя после сокращения дроби). Здесь* $\nabla_{2r} \neq 0$.

Действительно, если $\nabla_{2m} = 0$, то интересующий нас индекс равен

$$r - 2V(1, D_1, D_2, \ldots, D_r),$$

так как число r является рангом соответствующей матрицы $S = \| s_{i+k} \|_0^\infty$. Но равенство (68′) имеет формальный характер и оно справедливо и для сократимой дроби[3]). Поэтому

$$V(1, D_1, D_2, \ldots, D_r) = V(1, \nabla_2, \nabla_4, \ldots, \nabla_{2r}).$$

и мы приходим к формуле (70′).

Формула (70′) дает возможность выразить индекс любой рациональной дроби, у которой степень числителя не превышает степени знаменателя, через коэффициенты числителя и знаменателя.

§ 12. Второе доказательство теоремы Рауса—Гурвица

В § 6 мы доказали теорему Рауса—Гурвица, опираясь на теорему Штурма и алгоритм Рауса. В этом параграфе мы дадим доказательство теоремы Рауса—Гурвица, основанное на теореме 10 § 11 и на свойствах индексов Коши.

---

[1]) Условие $\nabla_{2m} \neq 0$ означает, что $D_m \neq 0$ и что, следовательно, дробь, стоящая в (70) под знаком индекса, несократима.

[2]) При p нечетном $\dfrac{\nabla_{2h+2p+2}}{\nabla_{2h}} = \operatorname{sign} \dfrac{D_{h+p+1}}{D_h} = (-1)^{\frac{p+1}{2}}$ (см. сноску [1]) на стр. 502.

[3]) Из равенства (68′) следует, что значения ∇_{2p} определяются рациональной дробью $R(z)$ (точнее, ее правильной частью), а не числителем и знаменателем в отдельности. Поэтому при сокращении дроби $g(z)/h(z)$ меняются элементы в каждом определителе ∇_{2p}, а величина его остается неизменной.

Отметим некоторые свойства индексов Коши, которые нам понадобятся в дальнейшем.

1° $I_a^b R(x) = -I_b^a R(x)$ [1]).

2° $I_a^b R_1(x) R(x) = \operatorname{sign} R_1(x) I_a^b R(x)$, *если* $R_1(x) \neq \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$ *внутри* (a, b).

3°. *Если* $a < c < b$, *то* $I_a^b R(x) = I_a^c R(x) + I_c^b R(x) + \eta_c$, *где* $\eta_c = 0$, *если* $R(c)$ — *конечная величина, и* $\eta_c = \pm 1$, *если в точке* c *функция* $R(x)$ *обращается в бесконечность; при этом* $\eta_c = +1$ *соответствует переходу в точке* c *от* $-\infty$ *к* $+\infty$ (*при возрастании* x), *а* $\eta_c = -1$ — *переходу от* $+\infty$ *к* $-\infty$.

4° *Если* $R(-x) = -R(x)$, *то* $I_{-a}^0 R(x) = I_0^a R(x)$. *Если* $R(-x) = R(x)$, *то* $I_{-a}^0 R(x) = -I_0^a R(x)$.

5° $I_a^b R(x) + I_a^b \frac{1}{R(x)} = \frac{\varepsilon_b - \varepsilon_a}{2}$, *где* ε_a — *знак* $R(x)$ *внутри* (a, b) *вблизи* a, ε_b — *знак* $R(x)$ *внутри* (a, b) *вблизи* b.

Первые четыре свойства непосредственно следуют из определения индекса Коши (см. § 2). Свойство 5° вытекает из того, что сумма индексов $I_a^b R(x) + I_a^b \frac{1}{R(x)}$ равна разности $n_1 - n_2$, где n_1 — число перемен знака $R(x)$ с переходом от отрицательных значений к положительным при изменении x от a до b, а n_2 — число перемен знака $R(x)$ с переходом от положительных к отрицательным значениям.

Рассмотрим вещественный многочлен [2])

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_{n-1} z + a_n \quad (a_0 > 0).$$

Мы его можем представить в виде

$$f(z) = h(z^2) + z g(z^2),$$

где

$$h(u) = a_n + a_{n-2} u + \ldots, \quad g(u) = a_{n-1} + a_{n-3} u + \ldots$$

Введем обозначение

$$\varrho = I_{-\infty}^{+\infty} \frac{a_1 z^{n-1} - a_3 z^{n-3} + \ldots}{a_0 z^n - a_2 z^{n-2} + \ldots}. \tag{71}$$

В § 3 мы показали [см. (20) на стр. 475], что

$$\varrho = n - 2k - s, \tag{72}$$

где k — число корней многочлена $f(z)$ с положительными вещественными частями, а s — число корней $f(z)$, расположенных на мнимой оси.

Преобразуем выражение (71) для ϱ.

Рассмотрим сначала случай четного n. Пусть $n = 2m$. Тогда

$$h(u) = a_0 u^m + a_2 u^{m-1} + \ldots + a_n, \quad g(u) = a_1 u^{m-1} + a_3 u^{m-2} + \ldots + a_{n-1}.$$

---

[1]) Здесь и далее нижний предел при индексе может равняться $-\infty$, а верхний предел $+\infty$.

[2]) Здесь мы, в отличие от § 3, возвращаемся к обычным обозначениям для коэффициентов многочлена.

Пользуясь свойствами 1°—4° и полагая $\eta = \pm 1$, если соответственно $\lim\limits_{u\to -0} \frac{g(u)}{h(u)} = \pm\infty$ и $\eta = 0$ в остальных случаях, будем иметь:

$$\varrho = -I_{-\infty}^{+\infty} \frac{zg(-z^2)}{h(-z^2)} = -(I_{-\infty}^{0} + I_{0}^{+\infty} + \eta) = -2I_{-\infty}^{0} \frac{zg(-z^2)}{h(-z^2)} - \eta =$$

$$= 2I_{-\infty}^{0} \frac{g(-z^2)}{h(-z^2)} - \eta = 2I_{-\infty}^{0} \frac{g(u)}{h(u)} - \eta = I_{-\infty}^{0} \frac{g(u)}{h(u)} - I_{-\infty}^{0} \frac{ug(u)}{h(u)} - \eta =$$

$$= I_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(u)}{h(u)} - I_{-\infty}^{+\infty} \frac{ug(u)}{h(u)}.$$

Точно так же при n нечетном, $n = 2m+1$, имеем:

$$h(u) = a_1 u^m + a_3 u^{m-1} + \ldots + a_n, \quad g(u) = a_0 u^m + a_2 u^{m-1} + \ldots + a_{n-1}.$$

Полагая $\zeta = \operatorname{sign}\left[\frac{g(u)}{h(u)}\right]_{u=-0}$ [1]), если $\lim\limits_{u\to 0} \frac{g(u)}{h(u)} = 0$ и $\zeta = 0$ в остальных случаях, найдем:

$$\varrho = I_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(-z^2)}{zg(-z^2)} = I_{-\infty}^{0} + I_{0}^{+\infty} + \zeta = 2I_{-\infty}^{0} \frac{h(-z^2)}{zg(-z^2)} + \zeta = 2I_{-\infty}^{0} \frac{h(u)}{ug(u)} + \zeta =$$

$$= I_{-\infty}^{0} \frac{h(u)}{ug(u)} - I_{-\infty}^{0} \frac{h(u)}{g(u)} + \zeta = I_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(u)}{ug(u)} - I_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(u)}{g(u)}.$$

Таким образом [2]),

$$\varrho = I_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(u)}{h(u)} - I_{-\infty}^{+\infty} \frac{ug(u)}{h(u)} \quad (n = 2m), \tag{73'}$$

$$\varrho = I_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(u)}{ug(u)} - I_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(u)}{g(u)} \quad (n = 2m+1). \tag{73''}$$

По-прежнему через $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ будем обозначать определители Гурвица для данного многочлена $f(z)$. Примем, что $\Delta_n \neq 0$ [3]).

1) $n = 2m$. По формуле (70) [4])

$$I_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(u)}{h(u)} = m - 2V(1, \Delta_1, \Delta_3, \ldots, \Delta_{n-1}), \tag{74}$$

$$I_{-\infty}^{+\infty} \frac{ug(u)}{h(u)} = m - 2V(1, -\Delta_2, +\Delta_4, -\Delta_6, \ldots) =$$

$$= -m + 2V(1, \Delta_2, \Delta_4, \ldots, \Delta_n). \tag{75}$$

---

[1]) Здесь под $\operatorname{sign}\left[\frac{g(u)}{h(u)}\right]_{u=-0}$ мы понимаем знак $\frac{g(u)}{h(u)}$ при очень малом по абсолютной величине отрицательном u.

[2]) Если $a_1 \neq 0$, то две формулы (73′) и (73″) можно объединить в одну формулу

$$\varrho = I_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(u)}{h(u)} + I_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(u)}{ug(u)}. \tag{73'''}$$

[3]) В этом случае $s = 0$ и, следовательно, $\varrho = n - 2k$. Кроме того, $\Delta_n \neq 0$ означает, что дроби, стоящие под знаком индексов, в формулах (73′), (73″) несократимы.

[4]) При вычислении $\nabla_2, \nabla_4, \ldots, \nabla_{2m}$ величины $a_0, a_1, \ldots, a_m$ и $b_0, b_1, \ldots, b_m$ следует соответственно заменить при вычислении первого индекса на $a_0, a_2, \ldots, a_{2m}$ и $0, a_1, a_3, \ldots, a_{2m-1}$, а при вычислении второго индекса—на $a_0, a_2, \ldots, a_{2m}$ и $a_1, a_3, \ldots, a_{2m-1}, 0$.

Но тогда согласно (73′)

$$\varrho = n - 2V(1, \Delta_1, \Delta_3, \ldots, \Delta_{n-1}) - 2V(1, \Delta_2, \Delta_4, \ldots, \Delta_n),$$

что в соединении с равенством $\varrho = n - 2k$ дает:

$$k = V(1, \Delta_1, \Delta_3, \ldots, \Delta_{n-1}) + V(1, \Delta_2, \Delta_4, \ldots, \Delta_n). \tag{76}$$

2) $n = 2m + 1$. По формуле (70)[1],

$$I_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(u)}{ug(u)} = m + 1 - 2V(1, \Delta_1, \Delta_3, \ldots, \Delta_n), \tag{77}$$

$$I_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(u)}{g(u)} = m - 2V(1, -\Delta_2, +\Delta_4, -\ldots) =$$
$$= -m + 2V(1, \Delta_2, \Delta_4, \ldots, \Delta_{n-1}). \tag{78}$$

Равенство $\varrho = 2m + 1 - 2k$ вместе с равенствами (73″), (77) и (78) дает нам снова формулу (76).

Теорема Рауса—Гурвица доказана (см. стр. 486).

Замечание 1. Если в формуле

$$k = V(1, \Delta_1, \Delta_3, \ldots) + V(1, \Delta_2, \Delta_4, \ldots)$$

некоторые промежуточные определители Гурвица равны нулю, то формула сохраняет силу и в этом случае, только в каждой группе подряд идущих нулевых определителей

$$(\Delta_l \neq 0)\ \Delta_{l+2} = \Delta_{l+4} = \ldots = \Delta_{l+2p} = 0\ (\Delta_{l+2p+2} \neq 0)$$

следует приписать этим определителям (в соответствии с теоремой 7) знаки

$$\operatorname{sign} \Delta_{l+2j} = (-1)^{\frac{j(j-1)}{2}} \operatorname{sign} \Delta_l\ (j = 1, 2, \ldots, p),$$

что дает:

$$V(\Delta_l, \Delta_{l+2}, \ldots, \Delta_{l+2p+2}) = \begin{cases} \dfrac{p+1}{2} \text{ при } p \text{ нечетном,} \\[2ex] \dfrac{p+1-\varepsilon}{2} \text{ при } p \text{ четном, } \varepsilon = (-1)^{\frac{p}{2}} \operatorname{sign} \dfrac{\Delta_{l+2p+2}}{\Delta_l}. \end{cases} \tag{79}$$

Внимательное сопоставление этого правила вычисления k при наличии нулевых определителей Гурвица с правилом, данным в теореме 5 (стр. 492), показывает, что оба правила совпадают[2].

Замечание 2. Если $\Delta_n = 0$, то многочлены $ug(u)$ и $h(u)$ не являются взаимно простыми. Обозначим через $d(u)$ наибольший общий делитель многочленов $g(u)$ и $h(u)$, а через $u^\gamma d(u)$ — наибольший общий делитель $ug(u)$ и $h(u)$ ($\gamma = 0$ или 1). Степень $d(u)$ обозначим через δ и положим $h(u) = d(u) h_1(u)$ и $g(u) = d(u) g_1(u)$.

Несократимой рациональной дроби $\frac{g_1(u)}{h_1(u)}$ всегда соответствует некоторая бесконечная ганкелева матрица $S = \| s_{i+k} \|_0^\infty$ ранга r, где r — степень

[1]) Здесь при вычислении первого индекса в формуле (70) вместо $a_0, a_1, \ldots, a_{m+1}$ и $b_0, b_1, \ldots, b_{m+1}$ берем соответственно $a_0, a_2, \ldots, a_{2m}$, 0 и 0, $a_1, a_3, \ldots, a_{2m+1}$, а при вычислении второго индекса вместо $a_0, a_1, \ldots, a_m$ и $b_0, b_1, \ldots, b_m$ ставим: $a_1, a_3, \ldots, a_{2m+1}$ и $a_0, a_2, \ldots, a_{2m}$.

[2]) При этом следует учесть замечания, сделанные в сносках [1]), [2]) на стр. 492.

$h_1(u)$. При этом соответствующий определитель $D_r \neq 0$, а $D_{r+1} = D_{r+2} = \ldots = 0$. В силу формулы (68′) $\nabla_{2r} \neq 0$, $\nabla_{2r+2} = \nabla_{2r+4} = \ldots = 0$. Кроме того,

$$I_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_1(u)}{h_1(u)} = r - 2V(1, \nabla_2, \ldots, \nabla_{2r}).$$

Применяя все это к дробям, стоящим под знаком индекса в (74), (75), (77) и (78), мы легко найдем, что при любом n (четном и нечетном) и $\varkappa = 2\delta + \gamma$

$$\Delta_{n-\varkappa-1} \neq 0, \quad \Delta_{n-\varkappa} \neq 0, \quad \overbrace{\Delta_{n-\varkappa+1} = \ldots = \Delta_n}^{\varkappa} = 0$$

и что все формулы (74), (75), (77) и (78) сохраняют свою силу и в рассматриваемом случае, если в правых частях этих формул опустить все Δ_i при $i > n - \varkappa$ и заменить число m [а в формуле (77) число $m+1$] на степень соответствующего знаменателя подиндексной дроби после ее сокращения. Тогда мы получим с учетом (73′) и (73″):

$$\varrho = n - \varkappa - 2V(1, \Delta_1, \Delta_3, \ldots) - 2V(1, \Delta_2, \Delta_4, \ldots).$$

Вместе с формулой $\varrho = n - 2k - s$ это дает:

$$k_1 = V(1, \Delta_1, \Delta_3, \ldots) + V(1, \Delta_2, \Delta_4, \ldots), \tag{80}$$

где $k_1 = k + \frac{s}{2} - \frac{\varkappa}{2}$ — число всех корней $f(z)$, лежащих в правой полуплоскости, за исключением тех, которые одновременно являются корнями и многочлена $f(-z)$ [1]).

§ 13. Некоторые дополнения к теореме Рауса—Гурвица. Критерий устойчивости Льенара и Шипара

Пусть дан многочлен с вещественными коэффициентами

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n \quad (a_0 > 0).$$

Тогда условия Рауса—Гурвица, необходимые и достаточные для того, чтобы все корни многочлена $f(z)$ имели отрицательные действительные части, записываются в виде неравенств

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \ \ldots, \ \Delta_n > 0, \tag{81}$$

где

$$\Delta_i = \begin{Vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & & \\ a_0 & a_2 & a_4 & \ldots & & \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots & & \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & \cdot \\ & & & & & \cdot \\ & & & & & a_i \end{Vmatrix} \quad (a_k = 0 \text{ при } k > n)$$

— определитель Гурвица i-го порядка ($i = 1, 2, \ldots, n$).

---

[1]) Это следует из того, что $\varkappa$ — степень наибольшего общего делителя многочленов $h(u)$ и $ug(u)$; $\varkappa$ — число «особых» корней многочлена $f(z)$, т. е. тех корней z^*, для которых $-z^*$ также является корнем $f(z)$. Число этих особых корней равно числу последних (включая Δ_n) подряд идущих нулевых определителей Гурвица

$$\Delta_{n-\varkappa+1} = \ldots = \Delta_n = 0.$$

Если условия (81) выполнены, то многочлен $f(z)$ представляется в виде произведения a_0 на множители вида $z+u$, z^2+vz+w ($u>0$, $v>0$, $w>0$), и потому все коэффициенты многочлена $f(z)$ положительны[1]):

$$a_1>0,\ a_2>0,\ \ldots,\ a_n>0. \tag{82}$$

В отличие от условий (81) условия (82) являются необходимыми, но отнюдь не достаточными для расположения всех корней $f(z)$ в левой полуплоскости $\operatorname{Re} z<0$.

Однако при выполнении условий (82) неравенства (81) уже не являются независимыми. Так, например, при $n=4$ условия Рауса — Гурвица приводятся к одному неравенству $\Delta_3>0$, при $n=5$ — к двум: $\Delta_2>0$, $\Delta_4>0$, при $n=6$ — к двум; $\Delta_3>0$, $\Delta_5>0$[2]).

Это обстоятельство было исследовано французскими математиками Льенаром и Шипаром и дало возможность им в 1914 г.[3]) установить критерий устойчивости, отличный от критерия Рауса — Гурвица.

Теорема 11 (Критерий Льенара и Шипара). *Необходимые и достаточные условия для того, чтобы вещественный многочлен* $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n\ (a_0>0)$ *имел все корни с отрицательными вещественными частями, могут быть записаны в любом из следующих четырех видов*[4]):

1) $a_n>0,\ a_{n-2}>0,\ \ldots;\ \Delta_1>0,\ \Delta_3>0,\ \ldots,$

2) $a_n>0,\ a_{n-2}>0,\ \ldots;\ \Delta_2>0,\ \Delta_4>0,\ \ldots,$

3) $a_n>0;\ a_{n-1}>0,\ a_{n-3}>0,\ \ldots;\ \Delta_1>0,\ \Delta_3>0,\ \ldots,$

4) $a_n>0;\ a_{n-1}>0,\ a_{n-3}>0,\ \ldots;\ \Delta_2>0,\ \Delta_4>0,\ \ldots.$

Из теоремы 11 вытекает, что для вещественного многочлена $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n\ (a_0>0)$, у которого все коэффициенты (или даже только часть a_n, a_{n-2}, ... или a_n, a_{n-1}, b_{n-3}, ...) положительны, детерминантные неравенства Гурвица (81) не являются независимыми, а именно: *из положительности определителей Гурвица нечетного порядка следует положительность определителей Гурвица четного порядка и наоборот.*

Условия 1) были получены Льенаром и Шипаром в работе [135] при помощи специальных квадратичных форм. Мы дадим более простой вывод условий 1) [а также условий 2), 3), 4)], опирающийся на теорему 10 § 11 и теорию индексов Коши, получив эти условия как частный случай значительно более общей теоремы, к изложению которой мы и переходим.

Введем снова в рассмотрение многочлены $h(u)$ и $g(u)$, связанные с $f(z)$ тождеством

$$f(z)=h(z^2)+zg(z^2).$$

---

1) $a_0>0$ по условию.

2) Это обстоятельство для первых значений n было установлено в ряде работ по теории регулирования независимо от общего критерия Льенара и Шипара, с которым авторы этих работ, очевидно, не были знакомы.

3) См. [208]. Изложение некоторых основных результатов Льенара и Шипара можно найти в фундаментальном обзоре М. Г. Крейна и М. А. Наймарка [16].

4) Условия 1), 2), 3), 4) имеют известное преимущество перед условиями Гурвица, поскольку они содержат примерно вдвое меньше детерминантных неравенств, нежели условия Гурвица. Из двух серий детерминантных неравенств $\Delta_1>0$, $\Delta_3>0$, ... и $\Delta_2>0$, $\Delta_3>0$, ... практически лучше та, которая представляется в виде $\Delta_{n-1}>0$, $\Delta_{n-3}>0$, ..., так как она содержит определители меньшего порядка.

Если n четно, $n=2m$, то

$$h(u)=a_0u^m+a_2u^{m-1}+\ldots+a_n,\quad g(u)=a_1u^{m-1}+a_3u^{m-2}+\ldots+a_{n-1});$$

если же n нечетно, $n=2m+1$, то

$$h(u)=a_1u^m+a_3u^{m-1}+\ldots+a_n,\quad g(u)=a_0u^m+a_2u^{m-1}+\ldots+a_{n-1}.$$

Тогда условия $a_n>0$, $a_{n-2}>0$, ... (соответственно $a_{n-1}>0$, $a_{n-2}>0$, ...) можно заменить более общими условиями: $h(u)$ [соответственно $g(u)$] не меняет знака при $u>0$[1]).

При этих условиях можно вывести формулы для числа корней многочлена $f(z)$ в правой полуплоскости, используя только определители Гурвица нечетного порядка или только определители четного порядка.

Теорема 12. *Если для вещественного многочлена*

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n=h(z^2)+zg(z^2)\quad (a_0>0)$$

выполняется условие: $h(u)$ [или $g(u)$] не меняет знака при $u>0$ и последний определитель Гурвица $\Delta_n\neq 0$, то число k корней многочлена $f(z)$, расположенных в правой полуплоскости, определяется по формулам

	$n=2m$	$n=2m+1$	
$h(u)$ *не меняет знака при* $u>0$	$k=2V(1,\Delta_1,\Delta_3,\ldots,\Delta_{n-1})=$ $=2V(1,\Delta_2,\Delta_4,\ldots,\Delta_n)$	$k=2V(1,\Delta_1,\Delta_3,\ldots,\Delta_n)-\frac{1-\varepsilon_\infty}{2}=$ $=2V(1,\Delta_2,\Delta_4,\ldots,\Delta_{n-1})+\frac{1-\varepsilon_\infty}{2}$	(83)
$g(u)$ *не меняет знака при* $u>0$	$k=2V(1,\Delta_1,\Delta_3,\ldots,\Delta_{n-1})+\frac{\varepsilon_\infty-\varepsilon_0}{2}=$ $=2V(1,\Delta_2,\Delta_4,\ldots,\Delta_n)-\frac{\varepsilon_\infty-\varepsilon_0}{2}$	$k=2V(1,\Delta_1,\Delta_3,\ldots,\Delta_n)-\frac{1-\varepsilon_0}{2}=$ $=2V(1,\Delta_2,\Delta_4,\ldots,\Delta_{n-1})+\frac{1-\varepsilon_0}{2}$	

где

$$\varepsilon_\infty=\operatorname{sign}\left[\frac{g(u)}{h(u)}\right]_{u=+\infty},\quad \varepsilon_0=\operatorname{sign}\left[\frac{g(u)}{h(u)}\right]_{u=+0}{}^{2)}. \tag{83'}$$

Доказательство. Снова введем обозначение[3])

$$\varrho=I_{-\infty}^{+\infty}\frac{a_1z^{n-1}-a_3z^{n-3}+\ldots}{a_0z^n-a_2z^{n-2}+\ldots}=n-2k. \tag{84}$$

---

[1]) То есть $h(u)\geqslant 0$ или $h(u)\leqslant 0$ при $u>0$ [соответственно $g(u)\geqslant 0$ или $g(u)\leqslant 0$ при $u>0$].

[2]) Если $a_1\neq 0$, то $\varepsilon_\infty=\operatorname{sign}a_1$, и вообще если $a_1=a_3=\ldots=a_{2\mu-1}=0$, $a_{2\mu+1}\neq 0$, то $\varepsilon_\infty=\operatorname{sign}a_{2\mu+1}$; если $a_{n-1}\neq 0$, то $\varepsilon_0=\operatorname{sign}\frac{a_{n-1}}{a_n}$, и вообще если $a_{n-1}=$ $=a_{n-3}=\ldots=a_{n-2\mu+1}=0$, $a_{n-2\mu-1}\neq 0$, то $\varepsilon_0=\operatorname{sign}\frac{a_{n-2\mu-1}}{a_n}$.

[3]) См. (71), (72); в нашем случае $s=0$.

Рассмотрим в соответствии с таблицей (83) четыре случая:

1) $n=2m$; $h(u)$ не меняет знака при $u>0$. Тогда[1])

$$I_0^{+\infty}\frac{g(u)}{h(u)}=I_0^{+\infty}\frac{ug(u)}{h(u)}=0,$$

и потому из очевидного равенства

$$I_{-\infty}^{0}\frac{g(u)}{h(u)}=-I_{-\infty}^{0}\frac{ug(u)}{h(u)}$$

следует[2]):

$$I_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(u)}{h(u)}=-I_{-\infty}^{+\infty}\frac{ug(u)}{h(u)}.$$

Но тогда из (73′), (74) и (84) находим:

$$k=2V(1,\ \Delta_1,\ \Delta_3,\ \ldots)$$

Аналогично из формул (73), (75) и (84) следует:

$$k=2V(1,\ \Delta_2,\ \Delta_4,\ \ldots,\ \Delta_n).$$

2) $n=2m$; $g(u)$ не меняет знака при $u>0$. В этом случае

$$I_0^{+\infty}\frac{h(u)}{g(u)}=I_0^{+\infty}\frac{h(u)}{ug(u)}=0,$$

$$I_{-\infty}^{0}\frac{h(u)}{g(u)}+I_{-\infty}^{0}\frac{h(u)}{ug(u)}=0$$

и, следовательно, пользуясь обозначениями (83′), найдем:

$$I_{-\infty}^{+\infty}\frac{h(u)}{g(u)}+I_{-\infty}^{+\infty}\frac{h(u)}{ug(u)}-\varepsilon_0=0. \tag{85}$$

Заменяя функции, стоящие под знаком индекса, их обратными величинами, мы в силу 5° (см. стр. 505) получим:

$$I_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(u)}{h(u)}+I_{-\infty}^{+\infty}\frac{ug(u)}{h(u)}=\varepsilon_\infty-\varepsilon_0.$$

Но это в силу (73′), (74) и (84) дает:

$$k=2V(1,\ \Delta_1,\ \Delta_3,\ \ldots)+\frac{\varepsilon_\infty-\varepsilon_0}{2}.$$

Аналогично из (73′), (75) и (84) находим:

$$k=2V(1,\ \Delta_2,\ \Delta_4,\ \ldots)-\frac{\varepsilon_\infty-\varepsilon_0}{2}.$$

3) $n=2m+1$, $g(u)$ не меняет знака при $u>0$.

В этом случае, как и в предыдущем, имеет место формула (85). Из равенств (73″), (74), (78), (84) и (85) легко получаем:

$$k=2V(1,\ \Delta_1,\ \Delta_3,\ \ldots)-\frac{1-\varepsilon_0}{2},\quad k=2V(1,\ \Delta_2,\ \Delta_4,\ \ldots)+\frac{1-\varepsilon_0}{2}.$$

4) $n=2m+1$, $h(u)$ не меняет знака при $u>0$.

---

[1]) Если $h(u_1)=0$ $(u_1>0)$, то $g(u_1)\neq 0$, поскольку $\Delta_n\neq 0$. Поэтому из $h(u)\geqslant 0$ $(u>0)$ следует, что $\frac{g(u)}{h(u)}$ не меняет знака при переходе через $u=u_1$.

[2]) Из $\Delta_n=a_n\Delta_{n-1}\neq 0$ вытекает, что $h(0)=a_n\neq 0$.

Из равенств $I_0^{+\infty}\frac{g(u)}{h(u)}=I_0^{\infty}\frac{ug(u)}{h(u)}=0$, $I_{-\infty}^{0}\frac{g(u)}{h(u)}+I_{-\infty}^{0}\frac{ug(u)}{h(u)}=0$ заключаем:

$$I_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(u)}{h(u)}+I_{-\infty}^{+\infty}\frac{ug(u)}{h(u)}=0.$$

Обращая функции, стоящие под знаком индекса, получаем:

$$I_{-\infty}^{+\infty}\frac{h(u)}{g(u)}+I_{-\infty}^{+\infty}\frac{h(u)}{ug(u)}=\varepsilon_\infty.$$

Но тогда формулы (73″), (77) и (84) дают:

$$k=2V(1,\ \Delta_1,\ \Delta_3,\ \ldots)-\frac{1-\varepsilon_\infty}{2},\quad k=2V(1,\ \Delta_2,\ \Delta_4,\ \ldots)+\frac{1-\varepsilon_\infty}{2}.$$

Теорема 12 доказана полностью.

Из этой теоремы как частный случай получается теорема 11.

Следствие из теоремы 12. *Если вещественный многочлен* $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n\ (a_0>0)$ *имеет положительные коэффициенты*

$$a_0>0,\ a_1>0,\ a_2>0,\ \ldots,a_n>0$$

и $\Delta_n\neq 0$, *то число* k *корней этого многочлена, расположенных в правой полуплоскости* $\operatorname{Re} z>0$, *определяется формулой*

$$k=2V(1,\ \Delta_1,\ \Delta_3,\ \ldots)=2V(1,\ \Delta_2,\ \Delta_4,\ \ldots).$$

Замечание. Если $\Delta_n\neq 0$, но в последней формуле или в формулах (83) некоторые из промежуточных определителей Гурвица равны нулю, то формулы остаются верными, но при вычислении величин $V(1,\ \Delta_1,\ \Delta_3,\ \ldots)$ и $V(1,\ \Delta_2,\ \Delta_4,\ \ldots)$ следует руководствоваться правилом, изложенным в замечании 1 на стр. 507.

Если же $\Delta_n=\Delta_{n-1}=\ldots=\Delta_{n-\varkappa+1}=0$, $\Delta_{n-\varkappa}\neq 0$, то, отбрасывая в формулах (83) определители $\Delta_{n-\varkappa+1},\ldots,\Delta_n$ [1]), мы определим по этим формулам число k_1 «неособых» корней $f(z)$, расположенных в правой полуплоскости $\operatorname{Re} z>0$, если соответствующий из многочленов $h_1(u)$ и $g_1(u)$, получающихся из $h(u)$ и $g(u)$ после деления на их наибольший общий делитель $d(u)$, удовлетворяет условиям теоремы 12 [2]).

§ 14. Некоторые свойства многочлена Гурвица. Теорема Стильтьеса. Представление многочленов Гурвица при помощи непрерывных дробей

1. Пусть дан вещественный многочлен

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n\qquad(a_0\neq 0).$$

Представим в виде

$$f(z)=h(z^2)+zg(z^2).$$

Выясним, какие условия должны быть наложены на многочлены $h(u)$ и $g(u)$ для того, чтобы многочлен $f(z)$ был многочленом Гурвица.

Полагая в формуле (20) (стр. 475) $k=s=0$, мы получим необходимое и достаточное условие для того, чтобы $f(z)$ был многочленом Гурвица в виде равенства

$$\varrho=n,$$

---

[1]) См. стр. 508.

[2]) Это условие выполняется, если $h(u)\neq 0$ при $u>0$ или $g(u)\neq 0$ при $u>0$.

где, как и в предыдущих параграфах,

$$\varrho = I_{-\infty}^{+\infty} \frac{a_1 z^{n-1} - a_3 z^{n-3} + \ldots}{a_0 z^n - a_2 z^{n-2} + \ldots}.$$

Пусть $n = 2m$. Согласно формуле (73′) (стр. 506) это условие может быть записано так:

$$n = 2m = I_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(u)}{h(u)} - I_{-\infty}^{+\infty} \frac{ug(u)}{h(u)}. \tag{86}$$

Так как абсолютная величина индекса рациональной дроби не может превосходить степени знаменателя (в данном случае m), то равенство (86) может иметь место тогда и только тогда, когда одновременно

$$I_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(u)}{h(u)} = m, \qquad I_{-\infty}^{+\infty} \frac{ug(u)}{h(u)} = -m. \tag{87}$$

При $n = 2m + 1$ равенство (73″) (поскольку $\varrho = n$) дает:

$$n = I_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(u)}{ug(u)} - I_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(u)}{g(u)}.$$

Заменяя здесь дроби, стоящие под знаком индекса, их обратными величинами (см. 5° на стр. 505) и замечая при этом, что $h(u)$ и $g(u)$ имеют одну и ту же m-ю степень, получаем[1]):

$$n = 2m + 1 = I_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(u)}{h(u)} - I_{-\infty}^{+\infty} \frac{ug(u)}{h(u)} + \varepsilon_\infty. \tag{88}$$

Исходя снова из того, что абсолютная величина индекса дроби не может превосходить степени знаменателя, заключаем, что равенство (88) имеет место тогда и только тогда, когда одновременно

$$I_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(u)}{h(u)} = m, \qquad I_{-\infty}^{+\infty} \frac{ug(u)}{h(u)} = -m, \qquad \varepsilon_\infty = 1. \tag{89}$$

Если $n = 2m$, то первое из равенств (87) означает, что многочлен $h(u)$ имеет m различных вещественных корней $u_1 < u_2 < \ldots < u_m$ и что правильная дробь $\frac{g(u)}{h(u)}$ представима в виде

$$\frac{g(u)}{h(u)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{R_i}{u - u_i}, \tag{90}$$

где

$$R_i = \frac{g(u_i)}{h'(u_i)} > 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{90′}$$

Из этого представления дроби $\frac{g(u)}{h(u)}$ следует, что между любыми двумя корнями u_i, u_{i+1} многочлена $h(u)$ лежит вещественный корень u_i' многочлена $g(u)$ $(i = 1, 2, \ldots, m-1)$ и что старшие коэффициенты многочленов $h(u)$ и $g(u)$ имеют одинаковые знаки, т. е.

$$h(u) = a_0(u - u_1)\ldots(u - u_m), \qquad g(u) = a_1(u - u_1')\ldots(u - u_{m-1}'),$$
$$u_1 < u_1' < u_2 < u_2' < \ldots < u_{m-1} < u_{m-1}' < u_m; \qquad a_0 a_1 > 0.$$

---

[1]) Как и в предыдущем параграфе, $\varepsilon_\infty = \operatorname{sign}\left[\frac{g(u)}{h(u)}\right]_{u=+\infty}$

Второе из равенств (87) вносит лишь одно дополнительное условие

$$u_m < 0.$$

Согласно этому условию все корни $h(u)$ и $g(u)$ должны быть отрицательными. Если $n = 2m+1$, то из первого равенства (89) следует, что $h(u)$ имеет m различных вещественных корней $u_1, u_2, \ldots, u_m$ и

$$\frac{g(u)}{h(u)} = s_{-1} + \sum_{i=1}^{m} \frac{R_i}{u-u_i} \qquad (s_{-1} \neq 0), \tag{91}$$

где

$$R_1 = \frac{g(u_i)}{h'(u_i)} > 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{91'}$$

Из третьего равенства (89) вытекает, что

$$s_{-1} > 0, \tag{92}$$

т. е. что старшие коэффициенты a_0 и a_1 имеют одинаковые знаки. Кроме того, из (91), (91′) и (92) следует, что $g(u)$ имеет m вещественных корней $u_1' < u_2' < \ldots < u_m'$, лежащих внутри интервалов $(-\infty, u_1)$, $(u_1, u_2), \ldots, (u_{m-1}, u_m)$. Другими словами,

$$h(u) = a_1(u-u_1)\ldots(u-u_m), \qquad g(u) = a_0(u-u_1')\ldots(u-u_m'),$$
$$u_1' < u_1 < u_2' < u_2 < \ldots < u_m' < u_m; \qquad a_0 a_1 > 0.$$

Второе из равенств (89), как и при $n = 2m$, вносит лишь одно дополнительное неравенство

$$u_m < 0.$$

Определение 3. Мы будем говорить, что два многочлена $h(u)$ и $g(u)$ m-й степени [или первый m-й, а второй — $(m-1)$-й степени] образуют *положительную пару*[1]), если корни этих многочленов $u_1, u_2, \ldots, u_m$ и $u_1', u_2', \ldots, u_m'$ (соответственно $u_1', u_2', \ldots, u_{m-1}'$) все различны, вещественны, отрицательны и перемежаются следующим образом:

$$u_1' < u_1 < u_2' < u_2 < \ldots < u_m' < u_m < 0$$
$$(\text{соответственно } u_1 < u_2' < u_2 < \ldots < u_{m-1}' < u_m < 0),$$

а старшие коэффициенты этих многочленов имеют одинаковые знаки[2]).

Вводя положительные числа $v_i = -u_i$, $v_i' = -u_i'$ и помножая оба многочлена $h(u)$ и $g(u)$, образующих положительную пару, на ± 1 так, чтобы старшие коэффициенты этих многочленов стали положительными, мы эти многочлены сможем представить в виде

$$h(u) = a_1 \prod_{i=1}^{m} (u+v_i), \qquad g(u) = a_0 \prod_{i=1}^{m} (u+v_1'), \tag{93}$$

где

$$a_1 > 0,\ a_0 > 0,\ 0 < v_m < v_m' < v_{m-1} < v_{m-1}' < \ldots < v_1 < v_1',$$

---

[1]) См. [7], стр. 333. Определение положительной пары многочленов, проведенное здесь, несколько отличается от определения, данного в книге [7].

[2]) Если мы отбросим требование об отрицательности корней, мы получим вещественную пару многочленов. Относительно использования этого понятия в задаче Рауса—Гурвица см. [23].

если оба многочлена $h(u)$ и $g(u)$ имеют степень m, и в виде

$$h(u)=a_0\prod_{i=1}^{m}(u+v_i),\qquad g(u)=a_1\prod_{i=1}^{m-1}(u+v_i'),\tag{93'}$$

где

$$a_0>0,\ a_1>0,\ 0<v_m<v_{m-1}'<v_{m-1}<\ldots<v_1'<v_1,$$

если $h(u)$ имеет степень m, а $g(u)$ — степень $m-1$.

Приведенные ранее рассуждения доказывают следующие две теоремы:

Теорема 13. *Для того чтобы многочлен $f(z)=h(z^2)+zg(z^2)$ был многочленом Гурвица, необходимо и достаточно, чтобы многочлены $h(u)$ и $g(u)$ составляли положительную пару*[1]).

Теорема 14. *Для того чтобы два многочлена $h(u)$ и $g(u)$, из которых первый имеет степень m, а второй имеет степень m или $m-1$, составляли положительную пару, необходимо и достаточно, чтобы имели место равенства*

$$I_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(u)}{h(u)}=m,\quad I_{+\infty}^{+\infty}\frac{ug(u)}{h(u)}=-m\tag{94}$$

и в случае, когда степени $h(u)$ и $g(u)$ одинаковы, дополнительное условие

$$\varepsilon_\infty=\operatorname{sign}\left[\frac{g(u)}{h(u)}\right]_{+\infty}=1.\tag{95}$$

2. Из последней теоремы, используя свойства индексов Коши, мы легко получим теорему Стильтьеса о представлении дроби $\frac{g(u)}{h(u)}$ в виде непрерывной дроби специального типа в случае, когда многочлены $h(u)$ и $g(u)$ образуют положительную пару многочленов.

Доказательство теоремы Стильтьеса опирается на следующую лемму:

Лемма. *Если многочлены $h(u)$, $g(u)$ [степень $h(u)$ равна m] составляют положительную пару и*

$$\frac{g(u)}{h(u)}=c+\cfrac{1}{du+\cfrac{h_1(u)}{g_1(u)}},\tag{96}$$

где c, d — постоянные, а $h_1(u)$, $g_1(u)$ — многочлены степени $\leqslant m-1$, то

1° $c\geqslant 0$, $d>0$,

2° *многочлены $h_1(u)$, $g_1(u)$ имеют степень $m-1$,*

3° *многочлены $h_1(u)$, $g_1(u)$ составляют положительную пару.*

Задание $h(u)$ и $g(u)$ однозначно определяет многочлены $h_1(u)$, $g_1(u)$ (с точностью до общего постоянного множителя) и постоянные c и d.

Обратно, из (96) и 1°, 2°, 3° следует, что многочлены $h(u)$ и $g(u)$ образуют положительную пару, причем $h(u)$ имеет степень m, а $g(u)$ — степень m или $m-1$ в зависимости от того, $c>0$ или $c=0$.

Доказательство. Пусть $h(u)$, $g(u)$ — положительная пара. Тогда из (94) и (96) следует:

$$m=I_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(u)}{h(u)}=I_{+\infty}^{+\infty}\cfrac{1}{du+\cfrac{h_1(u)}{g_1(u)}},\tag{97}$$

Из этого равенства следует, что степень $g_1(u)$ равна $m-1$ и что $d\neq 0$.

---

[1]) Эта теорема представляет собой частный случай так называемой теоремы Эрмита — Билера (см. [37], стр. 21).

Далее из (97) находим:

$$m = -I_{-\infty}^{+\infty}\left[du + \frac{h_1(u)}{g_1(u)}\right] + \operatorname{sign} d = -I_{-\infty}^{+\infty}\frac{h_1(u)}{g_1(u)} + \operatorname{sign} d.$$

Отсюда следует, что $d > 0$ и что

$$I_{-\infty}^{+\infty}\frac{h_1(u)}{g_1(u)} = -(m-1). \tag{98}$$

Теперь второе равенство (94) дает:

$$-m = I_{-\infty}^{+\infty}\frac{ug(u)}{h(u)} = I_{-\infty}^{+\infty}\left[cu + \frac{1}{d + \frac{h_1(u)}{ug_1(u)}}\right] =$$

$$= I_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{d + \frac{h_1(u)}{ug_1(u)}} = -I_{-\infty}^{+\infty}\left[d + \frac{h_1(h)}{ug_1(u)}\right] = -I_{-\infty}^{+\infty}\frac{h_1(u)}{ug_1(u)}. \tag{99}$$

Отсюда следует, что $h_1(u)$ имеет степень $m-1$ [1]).

Условие (95) в силу (96) дает: $c > 0$. Если же степень $g(u)$ меньше степени $h(u)$, то из (96) вытекает: $c = 0$.

Из (98) и (99) следует:

$$I_{-\infty}^{+\infty}\frac{g_1(u)}{h_1(u)} = m-1, \qquad I_{-\infty}^{+\infty}\frac{ug_1(u)}{h_1(u)} = -m + \varepsilon_{\infty}^{(1)}, \tag{100}$$

где

$$\varepsilon_{\infty}^{(1)} = \operatorname{sign}\left[\frac{g_1(u)}{h_1(u)}\right]_{u=+\infty}.$$

Так как второй из индексов (100) по абсолютной величине $\leqslant m-1$, то

$$\varepsilon_{\infty}^{(1)} = 1, \tag{101}$$

а тогда из (100) и (101) на основании теоремы 12 заключаем, что многочлены $h_1(u)$ и $g_1(u)$ образуют положительную пару.

Из (96) следует:

$$c = \lim_{u\to\infty}\frac{g(u)}{h(u)}, \qquad \lim_{u\to\infty}\left[\frac{g(u)}{h(u)} - c\right]u = \frac{1}{d}.$$

После того как c и d определены, из (96) определяется отношение $\frac{h_1(u)}{g_1(u)}$.

Соотношения (97), (98), (99), (100), (101), использованные в обратном порядке, устанавливают вторую часть леммы. Таким образом, лемма доказана полностью.

Пусть нам дана положительная пара многочленов $h(u)$, $g(u)$ и m есть степень многочлена $h(u)$. Тогда, разделив $g(u)$ на $h(u)$ и обозначив частное через c_0, а остаток через $g_1(u)$, получим:

$$\frac{g(u)}{h(u)} = c_0 + \frac{g_1(u)}{h(u)} = c_0 + \frac{1}{\frac{h(u)}{g_1(u)}}.$$

$\frac{h(u)}{g_1(u)}$ можно представить в виде $d_0u + \frac{h_1(u)}{g_1(u)}$, где степень $h_1(u)$, как и степень $g_1(u)$, меньше m. Отсюда

$$\frac{g(u)}{h(u)} = c_0 + \frac{1}{d_0u + \frac{h_1(u)}{g_1(u)}}. \tag{102}$$

---

[1]) Из равенства (99) следует, что знаменатель $ug_1(u)$ имеет степень m и что между любыми двумя корнями знаменателя $ug_1(u)$ содержится корень числителя $h_1(u)$.

Таким образом, для положительной пары $h(u)$ и $g(u)$ всегда имеет место представление (96). Согласно лемме

$$c_0 \geqslant 0, \qquad d_0 > 0,$$

а многочлены $h_1(u)$ и $g_1(u)$ имеют степень $m-1$ и образуют положительную пару.

Применяя эти же рассуждения к положительной паре $h_1(u)$, $g_1(u)$, получим равенство

$$\frac{g_1(u)}{h_1(u)} = c_1 + \cfrac{1}{d_1 u + \cfrac{h_2(u)}{g_2(u)}}, \tag{102'}$$

где

$$c_1 > 0, \ d_1 > 0,$$

а многочлены $h_2(u)$ и $g_2(u)$ имеют степень $m-2$ и образуют положительную пару. Продолжая этот процесс далее, мы в конце концов придем к положительной паре h_m и g_m, где h_m и g_m — постоянные одного знака. Мы положим:

$$\frac{g_m}{h_m} = c_m. \tag{102$^{(m)}$}$$

Тогда из (102), (102′), ..., (102$^{(m)}$) вытекает:

$$\frac{g(u)}{h(u)} = c_0 + \cfrac{1}{d_0 u + \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{d_1 u + \cfrac{1}{c_2 + \ddots + \cfrac{1}{d_{m-1} u + \cfrac{1}{c_m}}}}}}.$$

Пользуясь второй частью леммы, мы аналогично покажем, что при любых $c_0 \geqslant 0$, $c_1 > 0, \ldots, c_m > 0$, $d_0 > 0$, $d_1 > 0, \ldots, d_{m-1} > 0$ написанная непрерывная дробь однозначно (с точностью до общего постоянного множителя) всегда определяет положительную пару многочленов $h(u)$ и $g(u)$, причем $h(u)$ имеет степень m, а $g(u)$ имеет степень m при $c_0 > 0$ и степень $m-1$ при $c_0 = 0$.

Таким образом, нами доказана[1])

Теорема 15 (Стильтьеса). *Если $h(u)$, $g(u)$ — положительная пара многочленов и $h(u)$ имеет степень m, то*

$$\frac{g(u)}{h(u)} = c_0 + \cfrac{1}{d_0 u + \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{d_1 u + \cfrac{1}{c_2 + \ddots + \cfrac{1}{d_{m-1} u + \cfrac{1}{c_m}}}}}}, \tag{103}$$

[1]) Доказательство теоремы Стильтьеса, не опирающееся на теорию индексов Коши, можно найти в книге [7], стр. 333—337.

где

$$c_0 \geqslant 0,\ c_1 > 0, \ldots, c_m > 0,\ \ d_0 > 0, \ldots, d_{m-1} > 0.$$

При этом $c_0 = 0$, *если* $g(u)$ *имеет степень* $m-1$, *и* $c_0 > 0$, *если* $g(u)$ *имеет степень* m. *Постоянные* c_i, d_k *однозначно определяются заданием* $h(u)$, $g(u)$.

Обратно, при любом $c_0 \geqslant 0$ *и любых положительных* $c_1, \ldots, c_m$, $d_0, \ldots, d_{m-1}$ *непрерывная дробь* (103) *определяет положительную пару многочленов* $h(u)$, $g(u)$, *где* $h(u)$ *имеет степень* m.

Из теоремы 13 и теоремы Стильтьеса следует:

Теорема 16. *Вещественный многочлен* n-*й степени* $f(z) = h(z^2) + zg(z^2)$ *в том и только в том случае является многочленом Гурвица, если имеет место формула* (103) *при неотрицательном* c_0 *и положительных* $c_1, \ldots, c_m$, $d_0, \ldots, d_{m-1}$. *При этом* $c_0 > 0$, *когда* n *нечетно, и* $c = 0$, *когда* n *четно.*

§ 15. Область устойчивости. Параметры Маркова

Каждому вещественному многочлену n-й степени можно отнести точку n-мерного пространства, координаты которой равны частным от деления на старший коэффициент всех остальных коэффициентов. В таком «пространстве коэффициентов» все многочлены Гурвица образуют некоторую n-мерную область, которая определяется [1]) неравенствами Гурвица $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$ или, например, неравенствами Льенара — Шипара $a_n > 0$, $a_{n-2} > 0, \ldots, \Delta_1 > 0$, $\Delta_3 > 0, \ldots$ Эту область будем называть *областью устойчивости*. Если коэффициенты уравнения заданы как функции p параметров, то область устойчивости строится в пространстве этих параметров.

Исследование области устойчивости представляет большой практический интерес; так, например, такое исследование существенно при проектировании новых систем регулирования [2]).

В § 16 мы покажем, что две замечательные теоремы, установленные А. А. Марковым и П. Л. Чебышевым в связи с разложением непрерывных дробей в степенные ряды по отрицательным степеням аргумента, имеют тесное отношение к исследованию области устойчивости. При формулировке и доказательстве этих теорем нам удобно будет задавать многочлен не его коэффициентами, а специальными параметрами, которые мы назовем *параметрами Маркова*.

Пусть дан вещественный многочлен

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n \qquad (a_0 \neq 0).$$

Представим его в виде

$$f(z) = h(z^2) + zg(z^2).$$

Примем, что многочлены $h(u)$ и $ug(u)$ взаимно просты ($\Delta_n \neq 0$). Несократимую рациональную дробь $\frac{g(u)}{h(u)}$ разложим в ряд по убывающим

---

[1]) При $a_0 = 1$.

[2]) Исследованию области устойчивости, а также областей, соответствующих различным значениям k (k — число корней в правой полуплоскости), посвящен ряд работ Ю. И. Наймарка (см. монографию [27]).

степеням u [1]):

$$\frac{g(u)}{h(u)} = s_{-1} + \frac{s_0}{u} - \frac{s_1}{u^2} + \frac{s_2}{u^3} - \frac{s_3}{u^4} + \ldots \tag{104}$$

Если n нечетно, то для получения этой формулы необходимо добавочно предположить, что $a_1 \neq 0$ (в противном случае $s_{-1} = \infty$).

Последовательность чисел $s_0, s_1, s_2, \ldots$ определяет бесконечную ганкелеву матрицу $S = \| s_{i+k} \|_0^\infty$. Определим рациональную функцию $R(v)$ равенством

$$R(v) = -\frac{g(-v)}{h(-v)}. \tag{105}$$

Тогда

$$R(v) = -s_{-1} + \frac{s_0}{v} + \frac{s_1}{v^2} + \frac{s_2}{v^3} + \ldots, \tag{106}$$

и потому имеет место соответствие (см. стр. 498)

$$R(v) \sim S. \tag{107}$$

Отсюда следует [2]), что матрица S имеет ранг $m = \left[\frac{n}{2}\right]$, поскольку m — степень многочлена $h(u)$ и, следовательно, число полюсов функции $R(v)$.

При $n = 2m$ (в этом случае $s_{-1} = 0$) задание матрицы S однозначно определяет несократимую дробь $\frac{g(u)}{h(u)}$ и, следовательно, с точностью до постоянного множителя однозначно определяет $f(z)$. При $n = 2m + 1$ для задания $f(z)$, помимо матрицы S, необходимо еще знать коэффициент s_{-1}.

С другой стороны, для задания бесконечной ганкелевой матрицы m-го ранга S достаточно задать лишь первые $2m$ чисел $s_0, s_1, \ldots, s_{2m-1}$. Числа $s_0, s_1, \ldots, s_{2m-1}$ могут быть выбраны произвольно при одном лишь ограничении

$$D_m = | s_{i+k} |_0^m \neq 0; \tag{108}$$

все последующие коэффициенты разложения (104) $s_{2m}, s_{2m+1}, \ldots$ однозначно (и даже рационально) выражаются через первые $2m$: $s_0, s_1, \ldots, s_{2m-1}$. Действительно, у бесконечной ганкелевой матрицы m-го ранга S элементы связаны между собой рекуррентными соотношениями (см. теорему 7 на стр. 496)

$$s_q = \sum_{g=1}^{m} \alpha_g s_{q-g} \qquad (q = m, m+1, \ldots). \tag{109}$$

Если числа $s_0, s_1, \ldots, s_{2m-1}$ удовлетворяют неравенству (108), то после задания этих чисел из первых m соотношений (109) однозначно определяются коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$; тогда последующие соотношения (109) определяют $s_{2m}, s_{5m+1}, \ldots$

Таким образом, вещественный многочлен $f(z)$ степени $n = 2m$ при $\Delta_n \neq 0$ может быть однозначно [3]) задан при помощи $2m$ чисел $s_0, s_1, \ldots, s_{2m-1}$, удовлетворяющих неравенству (108). При $n = 2m + 1$ к этим числам следует прибавить еще s_{-1}.

---

[1]) Для дальнейшего нам удобно коэффициенты при четных отрицательных степенях u обозначать через $-s_1$, $-s_3$ и т. д.

[2]) См. теорему 8 (стр. 498).

[3]) С точностью до постоянного множителя.

n величин $s_0, s_1, \ldots, s_{2m-1}$ (при $n = 2m$) или $s_{-1}, s_0, \ldots, s_{2m-1}$ (при $n = 2m + 1$) мы будем называть *параметрами Маркова* для многочлена $f(z)$. В n-мерном пространстве эти параметры могут быть рассматриваемы как координаты точки, изображающей данный многочлен $f(z)$.

Выясним, какие условия должны быть наложены на параметры Маркова для того, чтобы соответствующий многочлен $f(z)$ был многочленом Гурвица. Этим самым мы определим область устойчивости в пространстве параметров Маркова.

Многочлен Гурвица характеризуется условиями (94) и дополнительным условием (95) при $n = 2m + 1$. Вводя функцию $R(v)$ [см. (105)], мы равенства (94) запишем так:

$$I_{-\infty}^{+\infty} R(v) = m, \qquad I_{-\infty}^{+\infty} vR(v) = m. \tag{110}$$

Дополнительное же условие (95) для $n = 2m + 1$ дает:

$$s_{-1} > 0.$$

Введем наряду с матрицей $S = \| s_{i+k} \|_0^\infty$ бесконечную ганкелеву матрицу $S^{(1)} = \| s_{i+k+1} \|_0^\infty$. Тогда поскольку из (106)

$$vR(v) = -s_{-1}v + s_0 + \frac{s_1}{v} + \frac{s_2}{v^2} + \ldots,$$

то имеет место соответствие

$$vR(v) \sim S^{(1)}. \tag{111}$$

Матрица $S^{(1)}$, как и матрица S, имеет конечный ранг m, так как функция $vR(v)$, как и $R(v)$, имеет m полюсов. Поэтому и формы

$$S_m(x, x) = \sum_{i,\, k=0}^{m-1} s_{i+k} x_i x_k, \qquad S_m^{(1)}(x, x) = \sum_{i,\, k=0}^{m-1} s_{i+k+1} x_i x_k$$

имеют ранг m. Но согласно теореме 9 (стр. 500) сигнатуры этих форм в силу соответствий (107), (111) равны индексам (110) и, следовательно, также равны m. Таким образом, условия (110) означают положительную определенность квадратичных форм $S_m(x, x)$ и $S_m^{(1)}(x, x)$. Нами установлена

Теорема 17. *Для того чтобы вещественный многочлен* $f(z) = h(z^2) + zg(z^2)$ *степени* $n = 2m$ или $n = 2m + 1$ *был многочленом Гурвица, необходимо и достаточно*[1]), *чтобы*

---

[1]) Мы не оговариваем специально неравенства $\Delta_n \neq 0$, поскольку это неравенство автоматически следует из условий теоремы. В самом деле, если $f(z)$ — многочлен Гурвица, то, как известно, $\Delta_n \neq 0$. Если же даны условия 1°, 2°, то из положительной определенности формы $S_m^{(1)}(x, x)$ вытекает равенство

$$-I_{-\infty}^{+\infty} \frac{ug(u)}{h(u)} = I_{-\infty}^{+\infty} vR(v) = m,$$

из которого следует несократимость дроби $\frac{ug(u)}{h(u)}$, что выражается неравенством $\Delta_n \neq 0$.

Точно так же из условий теоремы автоматически следует, что $D_m = | s_{i+k} |_0^{m-1} \neq 0$, т. е. что числа $s_0, s_1, \ldots, s_{2m-1}$ и (при $n = 2m + 1$) число s_{-1} являются параметрами Маркова для многочлена $f(z)$.

1° *квадратичные формы*

$$S_m(x, x) = \sum_{i,\, k=0}^{m-1} s_{i+k} x_i x_k, \qquad S_m^{(1)}(x, x) = \sum_{i,\, k=0}^{m-1} s_{i+k+1} x_i x_k \tag{112}$$

были положительно определенными и

2° (*при* $n = 2m+1$)

$$s_{-1} > 0. \tag{113}$$

Здесь $s_{-1}, s_0, s_1, \ldots, s_{2m-1}$ — *коэффициенты в разложении*

$$\frac{g(u)}{h(u)} = s_{-1} + \frac{s_0}{u} - \frac{s_1}{u^2} + \frac{s_2}{u^3} - \frac{s_3}{u^4} + \ldots$$

Введем обозначения для определителей:

$$D_p = |s_{i+k}|_0^{p-1}, \qquad D_p^{(1)} = |s_{i+k+1}|_0^{p-1} \qquad (p = 1, 2, \ldots, m). \tag{114}$$

Тогда условие 1° эквивалентно системе детерминантных неравенств

$$\left.\begin{aligned} &D_1 = s_0 > 0,\ D_2 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} > 0, \ldots, D_m = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \ldots s_{m-1} \\ s_1 & s_2 \ldots s_m \\ \cdots & \cdots \\ s_{m-1} & s_m \ldots s_{2m-2} \end{vmatrix} > 0, \\ &D_1^{(1)} = s_1 > 0,\ D_2^{(1)} = \begin{vmatrix} s_1 & s_2 \\ s_2 & s_3 \end{vmatrix} > 0, \ldots, D_m^{(1)} = \begin{vmatrix} s_1 & s_2 \ldots s_m \\ s_2 & s_3 \ldots s_{m+1} \\ \cdots & \cdots \\ s_m & s_{m+1} \quad s_{2m-1} \end{vmatrix} > 0. \end{aligned}\right\} \tag{115}$$

В случае $n = 2m$ неравенства (115) определяют область устойчивости в пространстве параметров Маркова. При $n = 2m+1$ к этим неравенствам следует прибавить еще одно:

$$s_{-1} > 0. \tag{116}$$

В следующем параграфе мы выясним, какие свойства матрицы S вытекают из неравенств (115) и тем самым выделим специальный класс бесконечных ганкелевых матриц S, которые соответствуют многочленам Гурвица.

§ 16. Связь с проблемой моментов

1. Сформулируем следующую проблему моментов из положительной полуоси[1]) $0 < v < \infty$:

Дана последовательность вещественных чисел $s_0, s_1, \ldots$ *Требуется определить положительные числа*

$$\mu_1 > 0, \quad \mu_2 > 0, \ldots, \mu_m > 0; \quad 0 < v_1 < v_2 < \ldots < v_m \tag{117}$$

так, чтобы имели место равенства

$$s_p = \sum_{j=1}^{m} \mu_j v_j^p \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots) \tag{118}$$

---

[1]) Эту проблему моментов следовало бы называть дискретной в отличие от общей степенной проблемы моментов, в которой суммы $\sum_{j=1}^{m} \mu_j v_j^p$ заменены интегралами Стильтьеса $\int_0^\infty v^p\, d\mu(v)$ (см. [3]).

Нетрудно усмотреть, что система равенств (118) равносильна следующему разложению в ряд по отрицательным степеням u:

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\mu_j}{u+v_j} = \frac{s_0}{u} - \frac{s_1}{u^2} + \frac{s_2}{u^3} - \ldots \tag{119}$$

В этом случае бесконечная ганкелева матрица $S = \| s_{i+k} \|_0^\infty$ имеет конечный ранг m, и в силу неравенств (117) в несократимой правильной рациональной дроби

$$\frac{g(u)}{h(u)} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\mu_j}{u+v_j} \tag{120}$$

[старшие коэффициенты в $h(u)$ и $g(u)$ выбираем положительными] многочлены $h(u)$ и $g(u)$ образуют положительную пару [см. (91) и (91')].

Поэтому (см. теорему 14) сформулированная нами проблема моментов имеет решение в том и только в том случае, когда последовательность чисел $s_0, s_1, s_2, \ldots$ при помощи равенств (119) и (120) определяет многочлен Гурвица $f(z) = h(z^2) + zg(z^2)$ степени $2m$.

Решение проблемы моментов единственно, поскольку из разложения (119) однозначно определяются положительные числа v_j и μ_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$.

Наряду с «бесконечной» проблемой моментов (118) рассмотрим и «конечную» проблему моментов, задаваемую первыми $2m$ из уравнений (118):

$$s_p = \sum_{j=1}^{m} \mu_j v_j^p \qquad (p = 0, 1, \ldots, 2m-1). \tag{121}$$

Из этих соотношений уже вытекают следующие выражения для ганкелевых квадратичных форм:

$$\begin{aligned} \sum_{i,\,k=0}^{m-1} s_{i+k} x_i x_k &= \sum_{j=1}^{m} \mu_j (x_0 + x_1 v_j + \ldots + x_{m-1} v_j^{m-1})^2, \\ \sum_{i,\,k=0}^{m-1} s_{i+k+1} x_i x_k &= \sum_{j=1}^{m} \mu_j v_j (x_0 + x_1 v_j + \ldots + x_{m-1} v^{m-1})^2. \end{aligned} \tag{122}$$

Поскольку линейные формы относительно переменных $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$

$$x_0 + x_1 v_j + \ldots + x_{m-1} v_j^{m-1} \qquad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

независимы (коэффициенты этих форм образуют отличный от нуля определитель Вандермонда!) и $v_j > 0$, $\mu_j > 0$ $(j = 1, 2 \ldots, m)$, то квадратичные формы (122) являются положительно определенными. Тогда согласно теореме 17 числа $s_0, s_1, \ldots, s_{2m-1}$ являются параметрами Маркова некоторого многочлена Гурвица $f(z)$. Эти числа являются первыми $2m$ коэффициентами разложения (119). Вместе с остальными коэффициентами $s_{2m}, s_{2m+1}, \ldots$ они определяют бесконечную разрешимую проблему моментов (118), которая имеет то же решение, что и конечная проблема (121).

Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 18. 1. *Для того чтобы конечная проблема моментов*

$$s_p = \sum_{j=1}^{m} \mu_j v_j^p \tag{123}$$

($p=0, 1, \ldots, 2m-1$; $\mu_1>0, \ldots, \mu_m>0$, $0<v_1<v_2<\ldots<v_m$), *где* s_p — *заданные, а* v_j *и* μ_j — *искомые вещественные числа* ($p=0, 1, \ldots, 2m-1$; $j=1, 2, \ldots, m$), *имела решение, необходимо и достаточно, чтобы квадратичные формы*

$$\sum_{i,\,k=0}^{m-1} s_{i+k}x_ix_k, \qquad \sum_{i,\,k=0}^{m-1} s_{i+k+1}x_ix_k \tag{124}$$

были положительно определенными, т. е. чтобы числа $s_0, s_1 \ldots, s_{2m-1}$ *были параметрами Маркова некоторого многочлена Гурвица степени* $2m$.

2. *Для того чтобы бесконечная проблема моментов*

$$s_p=\sum_{j=1}^{m} \mu_j v_j^p \tag{125}$$

($p=0, 1, 2, \ldots$; $\mu_1>0, \ldots, \mu_m>0$; $0<v_1<v_2<\ldots<v_m$), *где* s_p — *заданные, а* v_j *и* μ_j — *искомые вещественные числа* ($p=0, 1, 2, \ldots$; $j=1, 2, \ldots, m$), *имела решение, необходимо и достаточно, чтобы* 1° *квадратичные формы* (124) *были положительно определенными и* 2° *бесконечная ганкелева матрица* $S=\|s_{i+k}\|_0^\infty$ *имела ранг* m, *т. е. чтобы ряд*

$$\frac{s_0}{u}-\frac{s_1}{u^2}+\frac{s_2}{u^3}-\ldots=\frac{g(u)}{h(u)} \tag{126}$$

определял многочлен Гурвица $f(z)=h(z^2)+zg(z^2)$ *степени* $2m$.

3. *Решение проблемы моментов, как конечной* (123), *так и бесконечной* (124), *всегда единственно.*

2. Доказанную теорему мы используем для исследования миноров бесконечной ганкелевой матрицы $S=\|s_{i+k}\|_0^\infty$ ранга m, соответствующей некоторому многочлену Гурвица, т. е. матрицы $S=\|s_{i+k}\|_0^\infty$, для которой квадратичные формы (124) являются положительно определенными. В этом случае порождающие матрицу S числа $s_0, s_1\ s_2, \ldots$ могут быть представлены в виде (123), и потому для произвольного минора матрицы S порядка $h\leqslant m$ имеем:

$$\left\|\begin{matrix} s_{i_1+k_1}\ldots s_{i_1+k_h} \\ \cdots\cdots\cdots \\ s_{i_h+k_1}\ldots s_{i_h+k_h}\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix} \mu_1v_1^{i_1}\mu_2v_2^{i_1}\ldots\mu_mv_m^{i_1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \mu_1v_1^{i_h}\mu_2v_2^{i_h}\ldots\mu_mv_m^{i_h}\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix} v_1^{k_1}\ldots v_1^{k_h} \\ v_2^{k_1}\ldots v_2^{k_h} \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ v_m^{k_1}\ldots v_m^{k_h}\end{matrix}\right\|,$$

и, следовательно,

$$S\begin{pmatrix} i_1\ i_2\ldots i_h \\ k_1\ k_2\ldots k_h\end{pmatrix}=\sum_{1\leqslant\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_h\leqslant m}\mu_{\alpha_1}\mu_{\alpha_2}\ldots\mu_{\alpha_h}\left|\begin{matrix} v_{\alpha_1}^{i_1} & v_{\alpha_2}^{i_1}\ldots v_{\alpha_h}^{i_1} \\ v_{\alpha_1}^{i_2} & v_{\alpha_2}^{i_2}\ldots v_{\alpha_h}^{i_2} \\ \cdots & \cdots\cdots \\ v_{\alpha_1}^{i_h} & v_{\alpha_2}^{i_h}\ldots v_{\alpha_h}^{i_h}\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix} v_{\alpha_1}^{k_1} & v_{\alpha_1}^{k_2}\ldots v_{\alpha_1}^{k_h} \\ v_{\alpha_2}^{k_1} & v_{\alpha_2}^{k_2}\ldots v_{\alpha_2}^{k_h} \\ \cdots & \cdots\cdots \\ v_{\alpha_h}^{k_1} & v_{\alpha_h}^{k_2}\ldots v_{\alpha_h}^{k_h}\end{matrix}\right|. \tag{127}$$

Но из неравенств

$$0<v_1<v_2<\ldots<v_m, \quad i_1<i_2<\ldots<i_h, \quad k_1<k_2<\ldots<k_h$$

следует положительность обобщенных определителей Вандермонда[1])

$$\begin{vmatrix} v_{\alpha_1}^{i_1} & v_{\alpha_2}^{i_1}\ldots v_{\alpha_h}^{i_1} \\ v_{\alpha_1}^{i_2} & v_{\alpha_2}^{i_2}\ldots v_{\alpha_h}^{i_2} \\ \cdots & \cdots\cdots \\ v_{\alpha_1}^{i_h} & v_{\alpha_2}^{i_h}\ldots v_{\alpha_h}^{i_h} \end{vmatrix}>0, \quad \begin{vmatrix} v_{\alpha_1}^{k_1} & v_{\alpha_1}^{k_2}\ldots v_{\alpha_1}^{k_h} \\ v_{\alpha_2}^{k_1} & v_{\alpha_2}^{k_2}\ldots v_{\alpha_2}^{k} \\ \cdots & \cdots\cdots \\ v_{\alpha_h}^{k_1} & v_{\alpha_h}^{k_2}\ldots v_{\alpha_h}^{k_h} \end{vmatrix}>0.$$

Поэтому, поскольку и числа $\mu_j>0$ $(j=1, 2, \ldots, m)$, то из (127) вытекает

$$S\begin{pmatrix} i_1 & i_2\ldots i_h \\ k_1 & k_2\ldots k_h \end{pmatrix}>0 \quad \left(0\leqslant \begin{matrix} i_1<i_2<\ldots<i_h \\ k_1<k_2<\ldots<k_h, \end{matrix} \quad h=1, 2, \ldots, m\right). \tag{128}$$

Обратно, если в бесконечной ганкелевой матрице $S=\|s_{i+k}\|_0^\infty$ ранга m все миноры любого порядка $h\leqslant m$ положительны, то квадратичные формы (127) являются положительно определенными.

Введем

Определение 4. Бесконечную матрицу $A=\|a_{ik}\|_0^\infty$ будем называть *вполне положительной ранга* m в том и только в том случае, когда все миноры матрицы A порядка $h\leqslant m$ положительны, а все миноры порядка $h>m$ равны нулю.

Теперь сформулируем установленные свойства матрицы S[2]).

Теорема 19. *Для того чтобы бесконечная ганкелева матрица* $S=\|s_{i+k}\|_0^\infty$ *была вполне положительной ранга* m, *необходимо и достаточно, чтобы* 1) *матрица* S *имела ранг* m *и* 2) *квадратичные формы*

$$\sum_{i,\,k=0}^{m-1} s_{i+k}x_ix_k, \qquad \sum_{i,\,k=0}^{m-1} s_{i+k+1}x_ix_k$$

были положительно определенными.

Из этой теоремы и теоремы 17 следует

Теорема 20. *Вещественный многочлен* $f(z)$ *степени* n *является многочленом Гурвица в том и только в том случае, когда соответствующая этому многочлену бесконечная ганкелева матрица* $S=\|s_{i+k}\|_0^\infty$ *является вполне положительной ранга* $m=\left[\frac{n}{2}\right]$ *и в случае* n *нечетного дополнительно* $s_{-1}>0$.

При этом элементы $s_0, s_1, s_2, \ldots$ *матрицы* S *и число* s_{-1} *определяются из разложения*

$$\frac{g(u)}{h(u)}=s_{-1}+\frac{s_0}{u}-\frac{s_1}{u^2}+\frac{s_2}{u^3}-\ldots, \tag{129}$$

где

$$f(z)=h(z^2)+zg(z^2).$$

---

[1]) См. стр. 395, пример 1.

[2]) См. [82д].

§ 17. Связь между определителями Гурвица и определителями Маркова[1])

Рассмотрим сначала случай четного $n=2m$. Тогда

$$\frac{g(u)}{h(u)}=\frac{a_1u^{m-1}+a_3u^{m-2}+\ldots}{a_0u^m+a_2u^{m-1}+\ldots}=\frac{s_0}{u}-\frac{s_1}{u^2}+\frac{s_2}{u^3}-\ldots \tag{130}$$

Согласно формуле (68′) на стр. 503 имеем:

$$\nabla_{2p}=\begin{vmatrix} a_0 & a_2 & a_4 & a_6\ldots \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5\ldots \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4\ldots \\ 0 & 0 & a_1 & a_3\ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \end{vmatrix}=a_0^{2p}D_p \qquad (p=1,\ldots,m).$$

С другой стороны, $\nabla_{2p}=a_0\Delta_{2p-1}$, где Δ_{2p-1} — определитель Гурвица порядка $2p-1$. Поэтому

$$\Delta_{2p-1}=a_0^{2p-1}D_p \qquad (p=1,\ldots,m). \tag{131}$$

Помножим обе части равенства (130) на u и снова применим формулу (68′) со стр. 503. Получим:

$$(-1)^p\Delta_{2p}=\nabla^1_{2p}=\begin{vmatrix} a_0 & a_2 & a_4\ldots \\ a_1 & a_3 & a_5\ldots \\ 0 & a_0 & a_2\ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \end{vmatrix}=a_0^{2p}\begin{vmatrix} -s_1 & s_2 & -s_3\ldots(-1)^p s_p \\ s_2 & -s_3 & s_4\ldots \end{vmatrix}=$$

$$=(-1)^p a_0^{2p}D_p^{(1)},$$

откуда

$$\Delta_{2p}=a_0^{2p}D_p \qquad (p=1,\ 2,\ldots,m). \tag{131′}$$

При нечетном $n=2m+1$ имеем:

$$\frac{g(u)}{h(u)}=\frac{a_0u^m+a_2u^{m-1}+\ldots}{a_1u^m+a_3u^{m-1}+\ldots}=s_{-1}+\frac{s_0}{u}-\frac{s_2}{u^2}+\ldots, \tag{132}$$

откуда снова по формуле (68′) стр. 503 имеем:

$$\Delta_{2p}=\begin{vmatrix} a_1 & a_3\ldots \\ a_0 & a_2\ldots \\ 0 & a_1\ldots \\ 0 & a_0\ldots \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \end{vmatrix}=a_1^{2p}D_p \qquad (p=1,\ldots,m).$$

С другой стороны, из (132) находим:

$$\left(\frac{g(u)}{h(u)}-s_{-1}\right)u=\frac{a_2'u^m+a_4'u^{m-1}+\ldots}{a_1u^m+a_3u^{m-1}+\ldots}=s_0-\frac{s_1}{u}+\frac{s_2}{u^2}-\ldots, \tag{132′}$$

где

$$a_{2p}'=a_{2p}-s_{-1}-a_{2p+1} \quad (p=1,\ldots,m); \quad a_0'=0.$$

Но тогда для $p=1,\ldots,m$

$$\nabla_{2p}'=\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5\ldots \\ a_2' & a_4' & a_6'\ldots \\ 0 & a_1 & a_3\ldots \\ 0 & a_2' & a_4'\ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \end{vmatrix}=a_1^{2p}\begin{vmatrix} -s_1+s_2+\ldots(-1)^p s_p \\ s_2-s_3\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{vmatrix}=(-1)^p a_1^{2p}D_p^{(1)}. \tag{133}$$

---

[1]) Определители Гурвица Δ_k введены на стр. 485; определители Маркова задаются формулами (114). — *Прим. ред.*

С другой же стороны,

$$\nabla'_{2p}=(-1)^p\begin{vmatrix} a'_2 & a'_4 & \dots \\ a_1 & a_3 & \dots \\ 0 & a'_2 & \dots \\ 0 & a_1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}=\frac{(-1)^p}{a_1}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ a'_0 & a'_2 & a'_4 & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots \\ 0 & a'_0 & a'_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}. \tag{133'}$$

В полученном определителе $(2p+1)$-го порядка к каждой строке с четным номером прибавим предыдущую строку, помноженную предварительно на s_{-1}. Тогда этот определитель перейдет в Δ_{2p+1}. Поэтому из (133) и (133') получаем:

$$\Delta_{2p+1}=a_1^{2p+1}D_p^{(1)}.$$

Таким образом имеет место следующая связь между определителями Гурвица и Маркова:

а) при $n=2m$:

$$\begin{aligned}\Delta_{2p-1}&=a_0^{2p-1}D_p\\ \Delta_{2p}&=a_0^{2p}D_p^{(1)}\end{aligned}\qquad (p=1,\ \dots,\ m);$$

б) при $n=2m+1$ (заменяя a_1 на a_0s_{-1}):

$$\Delta_{2p}=(a_0s_{-1})^{2p}D_p \qquad (p=1,\ \dots,\ m),$$
$$\Delta_{2p+1}=(a_0s_{-1})^{2p+1}D_p^{(1)} \qquad (p=0,\ 1,\ \dots,\ m).$$

Эти формулы показывают, как неравенства Маркова (115) переходят в неравенства Гурвица и наоборот. Кроме того, эти неравенства в соединении с критерием Льенара—Шипара дают нам следующую теорему:

Для того чтобы вещественный многочлен $f(z)=h(z^2)+zg(z^2)$ со старшим коэффициентом $a_0>0$ был гурвицевым, необходимо и достаточно, чтобы:

1) *все коэффициенты этого многочлена были положительны и*

2) *одна из квадратичных форм* (112) была положительно определенной.

§ 18. Теоремы Маркова и Чебышева

В своем известном мемуаре «О функциях, получаемых при обращении рядов в непрерывные дроби», напечатанном в Записках Петербургской Академии наук за 1894 г.[1]), покойный акад. А. А. Марков доказал две теоремы, из которых вторая иными методами и в не столь общей формулировке была в 1892 г. установлена П. Л. Чебышевым[2]).

В этом параграфе мы покажем, что эти теоремы имеют непосредственное отношение к исследованию области устойчивости в параметрах Маркова, и дадим сравнительно простое доказательство (не связанное с непрерывными дробями) этих теорем, опирающееся на теорему 19 предыдущего параграфа.

Переходя к формулировке первой теоремы, процитируем соответствующее место упомянутого выше мемуара А. А. Маркова[3]):

«Основываясь на предыдущем, нетрудно уже доказать две замечательные теоремы, которыми мы закончим нашу статью.

Одна касается определителей[4])

$$\Delta_1,\ \Delta_2,\ \dots,\ \Delta_m,\ \Delta^{(1)},\ \Delta^{(2)},\ \dots,\ \Delta^{(m)},$$

---

[1]) См. также [22], стр. 78—105.

[2]) Эта теорема была опубликована в работе П. Л. Чебышева «О разложении в непрерывную дробь рядов, расположенных по нисходящим степеням переменной». См. [31], стр. 307—362.

[3]) [25], стр, 95, третья строка снизу и далее.

[4]) В наших обозначениях $D_1,\ D_2,\ \dots,\ D_m,\ D_1^{(1)},\ D_2^{(1)},\ \dots,\ D_m^{(1)}$ (см. стр. 521).

а другая — корней уравнения[1])

$$\psi_m(x)=0.$$

Теорема об определителях. *Если для чисел*

$$s_0,\ s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_{2m-2},\ s_{2m-1}$$

мы имеем две системы значений

$$1)\ s_0=a_0,\ s_1=a_1,\ s_2=a_2,\ \ldots,\ s_{2m-2}=a_{2m-2},\ s_{2m-1}=a_{2m-1},$$

$$2)\ s_0=b_0,\ s_1=b_1,\ s_2=b_2,\ \ldots,\ s_{2m-2}=b_{2m-2},\ s_{2m-1}=b_{2m-1},$$

при которых все определители

$$\Delta_1=s_0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} s_0 & s_1\\ s_1 & s_2\end{vmatrix},\ \ldots,\ \Delta_m=\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{m-1}\\ s_1 & s_2 & \ldots & s_m\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ s_{m-1} & s_m & & s_{2m-2}\end{vmatrix},$$

$$\Delta^{(1)}=s_1,\ \Delta^{(2)}=\begin{vmatrix} s_1 & s_2\\ s_2 & s_3\end{vmatrix},\ \ldots\ \Delta^{(m)}=\begin{vmatrix} s_1 & s_2 & \ldots & s_m\\ s_2 & s_3 & \ldots & s_{m+1}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ s_m & s_{m+1} & & s_{2m-1}\end{vmatrix}$$

оказываются числами положительными и удовлетворены неравенства

$$a_0\geqslant b_0,\ b_1\geqslant a_1,\ a_2\geqslant b_2,\ b_3\geqslant a_3,\ \ldots,\ a_{2m-2}\geqslant b_{2m-2},\ b_{2m-1}\geqslant a_{2m-1},$$

то наши определители

$$\Delta_1,\ \Delta_2,\ \ldots,\ \Delta_m;\quad \Delta^{(1)},\ \Delta^{(2)},\ \ldots\ \Delta^{(m)}$$

должны оставаться числами положительными при всех значениях

$$s_0,\ s_1,\ s_2\ \ldots,\ s_{2m-1},$$

удовлетворяющих неравенствам

$$a_0\geqslant s_0\geqslant b_0,\ b_1\geqslant s_1\geqslant a_1,\ a_2\geqslant s_2\geqslant b_2,\ \ldots,$$
$$a_{2m-2}\geqslant s_{2m-2}\geqslant b_{2m-2},\ b_{2m-1}\geqslant s_{2m-1}\geqslant a_{2m-1}.$$

При тех же условиях должно быть

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{k-1}\\ a_1 & a_2 & \ldots & a_k\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{k-1} & a_k & \ldots & a_{2k-2}\end{vmatrix}\geqslant\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{k-1}\\ s_1 & s_2 & \ldots & s_k\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ s_{k-1} & s_k & \ldots & s_{2k-2}\end{vmatrix}\geqslant\begin{vmatrix} b_0 & b_1 & \ldots & b_{k-1}\\ b_1 & b_1 & \ldots & b_k\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ b_{k-1} & b_k & \ldots & b_{2k-2}\end{vmatrix}$$

и

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_k\\ b_2 & b_3 & \ldots & b_{k+1}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ b_k & b_{k+1} & \ldots & b_{2k-1}\end{vmatrix}\geqslant\begin{vmatrix} s_1 & s_2 & \ldots & s_k\\ s_2 & s_3 & \ldots & s_{k+1}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ s_k & s_{k+1} & \ldots & s_{2k-1}\end{vmatrix}\geqslant\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_k\\ a_2 & a_3 & \ldots & a_{k+1}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_k & a_{k+1} & \ldots & a_{2k-1}\end{vmatrix}$$

при $k=1,\ 2,\ \ldots,\ m$».

Для того чтобы дать иную формулировку этой теоремы, связанную с задачей устойчивости, введем некоторые понятия и обозначения.

---

[1]) В наших обозначениях $h(-x)=0$.

Параметры Маркова $s_0, s_1, \ldots, s_{2m-1}$ (при $n=2m$) или $s_{-1}, s_0, s_1, \ldots$ $\ldots, s_{2m-1}$ (при $n=2m+1$) будем рассматривать как координаты некоторой точки $\boldsymbol{P}$ n-мерного пространства. Область устойчивости в этом пространстве будем обозначать через $\boldsymbol{G}$. Область $\boldsymbol{G}$ характеризуется неравенствами (115), (116) (стр. 521).

Мы будем говорить, что точка $\boldsymbol{P}=\{s_i\}$ «предшествует» точке $\boldsymbol{P}^*=\{s_i^*\}$, и писать $\boldsymbol{P}\prec\boldsymbol{P}^*$, если

$$\left.\begin{array}{l} s_0\leqslant s_0^*,\ s_1^*\leqslant s_1,\ s_2\leqslant s_2^*,\ s_3^*\leqslant s_3,\ \ldots,\ s_{2m-1}^*\leqslant s_{2m-1} \\ \text{и (при } n=2m+1) \\ \qquad\qquad s_{-1}\leqslant s_{-1}^* \end{array}\right\} \tag{134}$$

и хотя бы в одном из этих соотношений имеет место знак $<$.

Если имеют место только соотношения (134) без последней оговорки, то мы будем писать:

$$\boldsymbol{P}\preceq\boldsymbol{P}^*.$$

Мы будем говорить, что *точка* $\boldsymbol{Q}$ *лежит «между» точками* $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{R}$, если $\boldsymbol{R}\prec\boldsymbol{Q}\prec\boldsymbol{R}$.

Каждой точке $\boldsymbol{P}$ соответствует бесконечная ганкелева матрица ранга m: $S=\|s_{i+k}\|_0^\infty$. Эту матрицу будем обозначать еще так: S_P.

Теперь мы дадим теореме Маркова следующую формулировку:

Теорема 21 (Маркова). *Если две точки* $\boldsymbol{P}$ *и* $\boldsymbol{R}$ *принадлежат области устойчивости* $\boldsymbol{G}$, *то и любая точка* $\boldsymbol{Q}$, *расположенная между точками* $\boldsymbol{P}$ *и* $\boldsymbol{R}$, *также принадлежит области* $\boldsymbol{G}$, *т. е.*

$$\textit{из } \boldsymbol{P},\ \boldsymbol{R}\in\boldsymbol{G},\ \boldsymbol{P}\preceq\boldsymbol{Q}\preceq\boldsymbol{R} \textit{ следует: } \boldsymbol{Q}\in\boldsymbol{G}.$$

Доказательство. Из $\boldsymbol{P}\preceq\boldsymbol{Q}\preceq\boldsymbol{R}$ следует, что две точки $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{R}$ можно соединить отрезком кривой

$$s_i=(-1)_i\,\varphi_i(t)\ [\alpha\leqslant t\leqslant\gamma;\ i=0,1,\ldots,2m-1 \text{ и (при } n=2m+1)\ i=-1], \tag{135}$$

содержащим точку $\boldsymbol{Q}$ так, чтобы 1) функции $\varphi_i(t)$ были непрерывными, монотонно возрастающими и дифференцируемыми при изменении t от $t=\alpha$ до $t=\gamma$ и 2) чтобы значениям α, β, γ $(\alpha<\beta<\gamma)$ аргумента t соответствовали точки $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$ на кривой.

При помощи величин (135) составим бесконечную ганкелеву матрицу $S=S(t)=\|s_{i+k}\|_0^\infty$ ранга m. Рассмотрим часть этой матрицы, а именно прямоугольную матрицу

$$\left\|\begin{array}{ccccc} s_0 & s_1 & \ldots & s_{m-1} & s_m \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_m & s_{m+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{m-1} & s_m & \ldots & s_{2m-2} & s_{2m-2} \end{array}\right\|. \tag{136}$$

Согласно условию теоремы при $t=\alpha$ и при $t=\gamma$ матрица $S(t)$ вполне положительна ранга m, и потому все миноры матрицы (136) порядка $p=1, 2, \ldots, m$ положительны.

Мы докажем, что это свойство сохраняется при любом промежуточном значении t $(\alpha<t<\gamma)$.

Для $p=1$ это очевидно. Докажем это утверждение для миноров p-го порядка в предположении, что оно верно для миноров $(p-1)$-го порядка. Рассмотрим произвольный минор p-го порядка, образованный

подряд идущими строками и столбцами матрицы (132):

$$D_p^{(q)} = \begin{vmatrix} s_q & s_{q+1} & \dots & s_{q+p-1} \\ s_{q+1} & s_{q+2} & \dots & s_{q+p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{q+p-1} & s_{q+p} & \dots & s_{q+2p-2} \end{vmatrix} \qquad [q=0,\ 1,\ \dots,\ 2(m-p)+1].$$

Вычислим производную от этого минора

$$\frac{d}{dt} D_p^{(q)} = \sum_{i,\,k=0}^{p-1} \frac{\partial D_p^{(q)}}{\partial s_{q+i+k}} \frac{ds_{q+i+k}}{dt}.$$

$\frac{\partial D_p^{(q)}}{\partial s_{q+i+k}}$ $(i,\ k=0,\ 1,\ \dots,\ p-1)$ — алгебраические дополнения (адъюнкты) элементов определителя $D_p^{(q)}$. Поскольку согласно допущению все миноры этого определителя положительны, то

$$(-1)^{i+k} \frac{\partial D_p^{(q)}}{\partial s_{q+i+k}} > 0 \quad (i,\ k=0,\ 1,\ \dots,\ p-1). \tag{137}$$

С другой стороны, из (131) находим:

$$(-1)^{q+i+k} \frac{ds_{q+i+k}}{dt} = \frac{d\varphi_{q+i+k}}{dt} \geqslant 0 \qquad (i,\ k=0,\ 1,\ \dots,\ p-1). \tag{137'}$$

Из (134), (135) и (136) следует:

$$(-1)^q \frac{d}{dt} D_p^{(q)} \geqslant 0 \quad \begin{pmatrix} q=0,\ 1,\ \dots,\ 2(m-p)+1, \\ p=1,\ 2,\ \dots,\ m, \\ \alpha \leqslant t \leqslant \gamma \end{pmatrix}. \tag{137''}$$

Таким образом, каждый минор $D_p^{(q)}$ при q четном монотонно возрастает (точнее, не убывает), а при q нечетном — монотонно убывает (точнее, не возрастает) при возрастании аргумента t от значения $t=\alpha$ до значения $t=\gamma$, и поскольку при $t=\alpha$ и $t=\gamma$ этот минор положителен, то он будет положительным при любом промежуточном значении t $(\alpha < t < \gamma)$.

Из того, что положительны миноры матрицы (136) порядка $p-1$ и миноры p-го порядка, образованные подряд идущими строками и столбцами, уже следует, что все миноры p-го порядка матрицы (136) положительны[1]).

Из доказанного следует, что при любом t $(\alpha \leqslant t \leqslant \gamma)$ величины $s_0,\ s_1,\ \dots,\ s_{2m-1}$ и (при $n=2m+1$) s_{-1} удовлетворяют неравенствам (115) и (116), т. е. при любом t эти величины являются параметрами Маркова для некоторого многочлена Гурвица. Другими словами, вся кривая (135), а значит, и точка Q лежат в области устойчивости G.

Теорема Маркова доказана.

Примечание. Поскольку доказано, что каждая точка кривой (135) принадлежит области G, то при любом t $(\alpha \leqslant t \leqslant \gamma)$ величины (135) определяют вполне положительную ранга m матрицу $S(t) = \| s_{i+k}(t) \|_0^\infty$. Поэтому неравенства (137), а следовательно, и (137″) имеют место при любом t $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$, т. е. с возрастанием t любое $D_p^{(q)}$ возрастает, если q — четное число, и убывает, если q нечетно $[q=0, 1, \dots, 2(m-p)+1;\ p=1, \dots, m]$.

---

[1]) Это следует из детерминантного тождества Фекете (см. [7], стр. 306—307).

Другими словами, из $\boldsymbol{P} \preceq \boldsymbol{Q} \preceq \boldsymbol{R}$ следует:

$$(-1)^q D_p^{(q)}(\boldsymbol{P}) \leqslant (-1)^q D_p^{(q)}(\boldsymbol{Q}) \leqslant (-1)^q D_p^{(q)}(\boldsymbol{R})$$
$$[q=0,\ 1,\ \ldots,\ 2(m-p)+1;\ p=1,\ \ldots,\ m].$$

Эти неравенства при $q=0$, 1 дают неравенства Маркова (стр. 527).

Рассмотрим теперь упомянутую в начале этого параграфа теорему Чебышева — Маркова. Снова приведем цитату из мемуара А. А. Маркова[1]):

«Теорема о корнях. *Если числа*

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{2m-2},\ a_{2m-1},$$
$$s_0,\ s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_{2m-2},\ s_{2m-1},$$
$$b_0,\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_{2m-2},\ b_{2m-1}$$

удовлетворяют всем условиям предыдущей теоремы[2]), *то уравнения*

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{m-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_m & x \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_{m+1} & x^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_m & a_{m+1} & \ldots & a_{2m-1} & x^m \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{m-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_m & x \\ s_2 & s_3 & \ldots & s_{m+1} & x^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_m & s_{m+1} & \ldots & s_{2m-1} & x^m \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} b_0 & b_1 & \ldots & b_{m-1} & 1 \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_m & x \\ b_2 & b_3 & \ldots & b_{m+1} & x^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_m & b_{m+1} & \ldots & b_{2m-1} & x^m \end{vmatrix} = 0$$

степени m относительно неизвестной x не имеют ни кратных, ни мнимых, ни отрицательных корней.

И корни второго уравнения больше соответственных корней первого и меньше соответственных корней последнего уравнения».

Выясним, в какой связи эта теорема находится с областью устойчивости в пространстве параметров Маркова. Полагая $f(z)=h(z^2)+zg(z^2)$ и

$$h(-v)=c_0v^m+c_1v^{m-1}+\ldots+c_m \qquad (c_0 \neq 0),$$

мы из разложения (105)

$$R(v)=-\frac{g(-v)}{h(-v)}=-s_{-1}+\frac{s_0}{v}+\frac{s_1}{v^2}+\ldots$$

получим тождество

$$-g(-v)=\left(-s_{-1}+\frac{s_0}{v}+\frac{s_1}{v^2}+\ldots\right)(c_0v^m+c_1v^{m-1}+\ldots+c_m).$$

---

[1]) См. [25], стр. 103, 5-я строка сверху и далее.

[2]) Имеется в виду предыдущая теорема Маркова — теорема об определителях (стр. 527).

Приравнивая нулю коэффициенты при степенях $v^{-1}, v^{-2}, \ldots, v^{-m}$, найдем:

$$\left.\begin{array}{l} s_0c_m + s_1c_{m-1} + \ldots + s_mc_0 = 0, \\ s_1c_m + s_2c_{m-1} + \ldots + s_{m+1}c_0 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_{m-1}c_m + s_mc_{m-1} + \ldots + s_{2m-1}c_0 = 0; \end{array}\right\} \tag{138}$$

к этим соотношениям добавим уравнение

$$h(-v) = 0, \tag{139}$$

записанное так:

$$c_m + vc_{m-1} + \ldots + v^m c_0 = 0. \tag{139'}$$

Исключая из (138) и (139′) коэффициенты $c_0, c_1, \ldots, c_m$, мы представим уравнение (139) в виде

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{m-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_m & v \\ s_2 & s_3 & \ldots & s_{m+1} & v^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_m & s_{m+1} & \ldots & s_{2m-1} & v^m \end{vmatrix} = 0. \tag{139''}$$

Таким образом, алгебраическое уравнение в теореме Чебышева—Маркова совпадает с уравнением (139), а неравенства, налагаемые на величины $s_0, s_1, \ldots, s_{2m-1}$, совпадают с неравенствами (115), определяющими область устойчивости в пространстве параметров Маркова.

Теорема Чебышева—Маркова выясняет, как меняются корни $u_1 = -v_1$, $u_2 = -v_2, \ldots, u_m = -v_m$ многочлена $h(u)$, когда соответствующие параметры Маркова $s_0, s_1, \ldots, s_{2m-1}$ изменяются в области устойчивости.

Первая часть теоремы утверждает известные нам факты: при выполнении неравенств (115) все корни $u_1, u_2, \ldots, u_m$ многочлена $h(u)$ простые, вещественные и отрицательные[1]). Мы эти корни будем обозначать так:

$$u_1(P),\ u_2(P), \ldots, u_m(P),$$

где P — соответствующая точка области G.

Тогда вторая (основная) часть теоремы Чебышева—Маркова может быть сформулирована так:

Теорема 22 (Чебышева—Маркова). *Если P и Q — две точки области G и точка P «предшествует» точке Q,*

$$P \prec Q, \tag{140}$$

то

$$u_1(P) < u_1(Q),\ u_2(P) < u_2(Q), \ldots, u_m(P) < u_m(Q)^{2)}. \tag{141}$$

Доказательство. Коэффициенты многочлена $h(u)$ можно выразить рационально через параметры $s_0, s_1, \ldots, s_{2m-1}$[3]). Тогда из

$$h(u_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

---

[1]) См. теорему 13 на стр. 515.

[2]) Другими словами, корни $u_1, u_2, \ldots, u_m$ возрастают при возрастании $s_0, s_2, \ldots, s_{2m-2}$ и убывании $s_1, s_3, \ldots, s_{2m-1}$.

[3]) Хотя бы из уравнений (138), положив в них для конкретности $c_0 = 1$.

следует[1]):

$$\frac{\partial h(u_i)}{\partial s_l}+h'(u_i)\frac{du_i}{ds_l}=0 \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ l=0,\ 1,\ \ldots,\ 2m-1). \tag{142}$$

С другой стороны, дифференцируя почленно разложение

$$\frac{g(u)}{h(u)}=s_{-1}+\frac{s_0}{u}-\frac{s_1}{u}+\frac{s_2}{u^3}-\ldots$$

по параметру s_l, найдем:

$$\frac{h(u)\dfrac{\partial g(u)}{\partial s_l}-g(u)\dfrac{\partial h(u)}{\partial s_l}}{h^2(u)}=\frac{(-1)^l}{u^{l+1}}+\frac{1}{u^{2m+1}}(*). \tag{143}$$

Помножая обе части этого равенства на многочлен $\frac{h^2(u)}{u-u_i}$ и обозначая через C_{il} коэффициент этого многочлена при степени u^l, получим:

$$\frac{h(u)}{u-u_i}\frac{\partial g(u)}{\partial s_l}-\frac{g(u)\dfrac{\partial h(u)}{\partial s_l}}{u-u_i}=\frac{(-1)^l C_{il}}{u}+\ldots \tag{144}$$

Приравнивая коэффициенты при $\frac{1}{u}$ (вычеты) в левой и правой частях равенства (144), найдем:

$$(-1)^{l-1}g(u_i)\frac{\partial h(u_i)}{\partial s_l}=C_{il}, \tag{145}$$

что в сочетании с (142) дает:

$$\frac{du_i}{ds_l}=\frac{(-1)^l C_{il}}{g(u_i)\,h'(u_i)}.$$

Вводя величины

$$R_i=\frac{g(u_i)}{h'(u_i)} \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m), \tag{146}$$

мы получим формулу Чебышева—Маркова

$$\frac{du_i}{ds_l}=\frac{(-1)^l C_{il}}{R_i\,[h'(u_i)]^2} \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ l=0,\ 1,\ \ldots,\ 2m-1). \tag{147}$$

Но в области устойчивости величины R_i $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$ положительны [см. (90′) на стр. 513]. То же можно сказать и о коэффициентах C_{il}. Действительно,

$$\frac{h^2(u)}{u-u_i}=c_0^2(u+v_1)^2\ldots(u+v_{i-1})^2(u+v_i)(u+v_{i+1})^2\ldots(u+v_m)^2, \tag{148}$$

где

$$v_i=-u_i>0 \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Из (148) видно, что все коэффициенты C_{il} в разложении $\frac{h^2(u)}{u-u_i}$ по степени u положительны. Таким образом, из формулы Чебышева—Маркова получаем:

$$(-1)^l\frac{du_i}{ds_l}>0. \tag{149}$$

---

[1]) Здесь $\dfrac{\partial h(u_i)}{\partial s_l}=\left[\dfrac{\partial h(u)}{\partial s_l}\right]_{u=u_i}$.

При доказательстве теоремы Маркова мы показали, что любые две точки $P \prec Q$ области G можно соединить дугой кривой $s_l = (-1)^l \varphi_l(t)$ $(l = 0, 1, \ldots, 2m-1)$, где $\varphi_l(t)$ — монотонно возрастающие дифференцируемые функции от t [t изменяется в пределах от α до β $(\alpha < \beta)$, причем $t = \alpha$ соответствует точка P, а $t = \beta$ — точка Q]. Тогда вдоль этой кривой в силу (149) [1])

$$\frac{du_i}{dt} = \sum_{l=0}^{2m-1} \frac{\partial u_i}{\partial s_l} \frac{ds_l}{dt} \geqslant 0, \qquad \frac{du_i}{dt} \not\equiv 0 \ (\alpha \leqslant t \leqslant \beta). \tag{150}$$

Отсюда, интегрируя, получаем:

$$u_{i(t=\alpha)} = u_i(P) < u_{i(t=\beta)} = u_i(Q) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Теорема Чебышева — Маркова доказана.

§ 19. Обобщенная задача Рауса—Гурвица

В этом параграфе мы дадим правило определения числа корней в правой полуплоскости для многочлена $f(z)$ с комплексными коэффициентами. Пусть

$$f(iz) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_n + i(a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n), \tag{151}$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_n$ — вещественные числа. Если n есть степень многочлена $f(z)$, то $b_0 + ia_0 \neq 0$. Не нарушая общности, можем считать, что $a_0 \neq 0$ [в противном случае мы бы заменили многочлен $f(z)$ на $if(z)$].

Мы будем предполагать, что вещественные многочлены

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n \text{ и } b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_n \tag{152}$$

взаимно просты, т. е. что результант этих многочленов отличен от нуля [2]):

$$\nabla_{2n} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_n & 0 & \ldots & 0 \\ b_0 & b_1 & \ldots & b_n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_0 & \ldots & a_{n-1} & a_n & \ldots & 0 \\ 0 & b_0 & \ldots & b_{n-1} & b_n & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \neq 0. \tag{153}$$

Отсюда следует, в частности, что многочлены (152) не имеют общих вещественных корней и что, следовательно, многочлен $f(z)$ не имеет корней на мнимой оси.

Обозначим через k число корней $f(z)$, имеющих положительные вещественные части. Рассматривая область в правой полуплоскости, ограниченную мнимой осью и полуокружностью радиуса R $(R \to \infty)$, и повторяя дословно рассуждения, приведенные на стр. 472 для вещественного многочлена $f(z)$, получим формулу для приращения $\arg f(z)$ вдоль мнимой оси

$$\Delta_{-\infty}^{+\infty} \arg f(z) = (n - 2k)\pi. \tag{154}$$

---

[1]) Поскольку $(-1)^l \frac{ds_l}{dt} = \frac{d\varphi_l}{dt} \geqslant 0$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$, причем хотя бы для одного l существуют такие значения t, при которых $(-1)^l \frac{ds_l}{dt} > 0$.

[2]) ∇_{2n} — определитель порядка $2n$.

Отсюда в силу (151) и условия $a_0 \neq 0$ получаем:

$$I_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_n}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + z^n} = n - 2k. \tag{155}$$

Пользуясь теоремой 10 § 11 (стр. 504), отсюда получаем:

$$k = V(1, \nabla_2, \nabla_4, \ldots, \nabla_{2n}), \tag{156}$$

где

$$\nabla_{2p} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{2p-1} \\ b_0 & b_1 & \ldots & b_{2p-1} \\ 0 & a_0 & \ldots & a_{2p-2} \\ 0 & b_0 & \ldots & b_{2p-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \quad (p = 1, 2, \ldots, n;\ a_k = b_k = 0 \text{ при } k > n). \tag{157}$$

Мы пришли к теореме:

Теорема 23. *Если дан комплексный многочлен $f(z)$, для которого $f(iz) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_n + i(a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n)$ $(a_0 \neq 0)$, причем многочлены $a_0 z^n + \ldots + a_n$ и $b_0 z^n + \ldots + b_n$ взаимно просты $(\nabla_{2n} \neq 0)$, то число корней многочлена $f(z)$, расположенных в правой полуплоскости, определяется формулами* (156), (157).

При этом [1]), если среди определителей (157) имеются равные нулю, то для каждой группы подряд идущих нулей

$$(\nabla_{2h} \neq 0)\ \nabla_{2h+2} = \ldots = \nabla_{2h+2p} = 0\ (\nabla_{2h+2p+2} \neq 0) \tag{158}$$

при подсчете $V(1, \nabla_2, \nabla_4, \ldots, \nabla_{2n})$ следует положить:

$$\operatorname{sign} \nabla_{2h+2j} = (-1)^{\frac{j(j-1)}{2}} \operatorname{sign} \nabla_{2h} \qquad (j = 1, 2, \ldots, p), \tag{159}$$

или, что то же,

$$V(\nabla_{2h}, \nabla_{2h+2}, \ldots, \nabla_{2h+2p}, \nabla_{2h+2p+2}) = \\ = \begin{cases} \dfrac{p+1}{2} \text{ при } p \text{ нечетном}, \\[2ex] \dfrac{p+1-\varepsilon}{2} \text{ при } p \text{ четном}, \ \varepsilon = (-1)^{\frac{p}{2}} \operatorname{sign} \dfrac{\nabla_{2h+1p+2}}{\nabla_{2h}}. \end{cases} \tag{160}$$

Предоставляем самому читателю проверить, что в частном случае, когда $f(z)$ — вещественный многочлен из теоремы 23, можно получить теорему Рауса — Гурвица (см. § 6) [2]).

В заключение отметим, что в этой главе были рассмотрены приложения квадратичных форм (в частности, ганкелевых форм) к одной задаче распределения корней многочлена в комплексной плоскости, к задаче Рауса — Гурвица. Между тем квадратичные и эрмитовы формы имеют интересные приложения и к другим задачам распределения корней. Читателя, интересующегося этими вопросами, мы отошлем к цитированному нами уже обзору М. Г. Крейна и М. А. Наймарка «Метод симметрических и эрмитовых форм в теории отделения корней алгебраических уравнений», Харьков, 1936.

---

[1]) См. стр. 503.

[2]) Удобные алгоритмы для решения обобщенной задачи Рауса—Гурвица можно найти в монографии [27] и статье [26]. См. также [37].

ДОБАВЛЕНИЕ

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ И СИНГУЛЯРНЫХ ЧИСЕЛ

В. Б. Лидский

Ниже рассматриваются неравенства, которым удовлетворяют собственные и сингулярные числа линейных операторов в n-мерном унитарном пространстве.

Основное внимание уделяется неравенствам Неймана — Хорна и Вейля (§§ 2 и 3), которые позволяют оценивать собственные числа оператора посредством его сингулярных чисел.

В § 4 устанавливается максимально-минимальное свойство сумм и произведений собственных чисел эрмитовых операторов, обнаруженное Виландтом и Амир-Моэзом.

Результаты § 4 используются далее в § 5 для доказательства неравенств, содержащих оценку собственных и сингулярных чисел операторов $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{AB}$.

В § 6 рассматривается задача о собственных числах суммы и произведения эрмитовых операторов в постановке И. М. Гельфанда *).

§ 1. Мажорирующие последовательности

В этом параграфе мы остановимся на ряде вспомогательных вопросов, связанных с конечными числовыми последовательностями. Рассмотрим две убывающие последовательности чисел, по n элементов в каждой:

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n, \tag{1}$$

$$\alpha_1' \geqslant \alpha_2' \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n'. \tag{2}$$

Принято говорить, что последовательность (2) мажорируется последовательностью (1), если

$$\alpha_1' + \alpha_2' + \ldots + \alpha_m' \leqslant \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m \quad (1 \leqslant m \leqslant n-1) \tag{3}$$

и

$$\alpha_1' + \alpha_2' + \ldots + \alpha_n' = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n. \tag{3'}$$

При выполнении условий (3) и (3′) пишут

$$\alpha' < \alpha. \tag{4}$$

---

*) Автор приносит благодарность А. С. Маркусу, прочитавшему рукопись настоящей статьи и сделавшему ряд полезных замечаний.

Квадратную матрицу $T=\|t_{ij}\|_1^n$ мы будем в дальнейшем называть двояко стохастической, если матрицы T и T' являются стохастическими, другими словами, если $t_{ij}\geqslant 0$,

$$\sum_{j=1}^{n} t_{ij}=1, \qquad 1\leqslant i\leqslant n, \tag{5}$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} t_{ij}=1, \qquad 1\leqslant j\leqslant n. \tag{5'}$$

Справедливо следующее утверждение (см. [35], стр. 63).

Лемма 1. *Последовательность α' мажорируется последовательностью α тогда и только тогда, когда существует двояко стохастическая матрица T такая, что*

$$\alpha'=T\alpha. \tag{6}$$

Достаточность условия (6) доказывается легко*). В самом деле,

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha'_k=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} t_{kj}\alpha_j'=\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{m} t_{kj}\Big)\alpha_j=\sum_{j=1}^{n}\omega_j\alpha_j. \tag{7}$$

Мы положили

$$\omega_j=\sum_{k=1}^{m} t_{kj} \qquad (1\leqslant j\leqslant n). \tag{8}$$

Легко видеть, что $0\leqslant\omega_j\leqslant 1$ и

$$\sum_{j=1}^{n}\omega_j=\sum_{k=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n} t_{kj}\Big)=m. \tag{9}$$

Имеем на основании равенства (7)

$$\sum_{j=1}^{m}\alpha_j-\sum_{k=1}^{m}\alpha'_k=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j-\sum_{j=1}^{n}\omega_j\alpha_j=$$
$$=\alpha_1(1-\omega_1)+\ldots+\alpha_m(1-\omega_m)-\omega_{m+1}\alpha_{m+1}-\ldots-\omega_n\alpha_n. \tag{10}$$

Уменьшая слагаемые в правой части, получаем

$$\sum_{j=1}^{m}\alpha_j-\sum_{j=1}^{m}\alpha'_j\geqslant\alpha_m(1-\omega_1)+\ldots+\alpha_m(1-\omega_m)-\omega_{m+1}\alpha_m-\ldots$$
$$\ldots-\omega_n\alpha_m=\alpha_m(m-m)=0. \tag{10'}$$

Следовательно, неравенства (3) имеют место. Так как, далее, при $m=n$ согласно (8) $\omega_j=1$ $(j=1, 2, \ldots, n)$, то в силу (7) справедливо и равенство (3').

Таким образом, достаточность условия (6) установлена. Доказательство необходимости этого условия требует известных усилий. Мы проведем его по индукции**). В случае $n=1$ последовательности содержат по

*) В формуле (6) под α и α' следует понимать столбцевые матрицы с элементами (1) и (2).

**) В книге Харди, Литтлвуда и Пойа «Неравенства» приводится доказательство, основанное на другой идее. Настоящее, более короткое, доказательство принадлежит А. С. Маркусу (см. [113]).

одному элементу, $\alpha_1' = \alpha_1$, и матрица T, очевидно, существует. Предположим, что утверждение справедливо для случая последовательностей из $n-1$ элементов и рассмотрим две последовательности α' и α, которые связаны соотношением $\alpha' < \alpha$ и состоят из n элементов.

Из условия $\alpha_1' \leqslant \alpha_1$ и равенства (3') следует, что $\alpha_n \leqslant \alpha_1' \leqslant \alpha_1$. Поэтому найдется такое k $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$, при котором

$$\alpha_{k+1} \leqslant \alpha_1' \leqslant \alpha_k. \tag{11}$$

Следовательно, при некотором τ, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, мы имеем

$$\alpha_1' = \tau\alpha_k + (1-\tau)\,\alpha_{k+1}. \tag{12}$$

Наряду с α' и α рассмотрим две последовательности по $n-1$ элементов в каждой:

$$\alpha_2',\ \alpha_3',\ \ldots,\ \alpha_k',\ \alpha_{k+1}',\ \alpha_{k+2}',\ \ldots,\ \alpha_n' \tag{13}$$

и

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{k-1},\ \alpha_k + \alpha_{k+1} - \alpha_1',\ \alpha_{k+2},\ \ldots,\ \alpha_n. \tag{13'}$$

Обозначим эти последовательности через $\tilde{\alpha}'$ и $\tilde{\alpha}$ соответственно.

Учитывая (11), легко заключить, что элементы последовательности $\tilde{\alpha}$ расположены в порядке убывания. Без труда проверяется также соотношение $\tilde{\alpha}' < \tilde{\alpha}$. Поэтому в силу индуктивного предположения существует такая двояко стохастическая матрица $\tilde{T} = \| t_{ij} \|_1^{n-1}$, что $\tilde{\alpha}' = \tilde{T}\tilde{\alpha}$, или в развернутой записи:

$$\alpha_{s+1}' = t_{s1}\alpha_1 + \ldots + t_{s,\,k-1}\alpha_{k-1} + t_{sk}(\alpha_k + \alpha_{k+1} - \alpha_1') + \\ + t_{s,\,k+1}\alpha_{k+2} + \ldots + t_{s,\,n-1}\alpha_n \qquad (1 \leqslant s \leqslant n-1).$$

Подставив сюда α_1' из равенства (12), получим при $1 \leqslant s \leqslant n-1$:

$$\alpha_{s+1}' = t_{s1}\alpha_1 + \ldots + t_{sk}(1-\tau)\,\alpha_k + t_{sk}\tau\alpha_{k+1} + t_{s,\,k+1}\alpha_{k+2} + \ldots + t_{s,\,n-1}\alpha_n.$$

Добавляя сюда равенство $\alpha_1' = \tau\alpha_k + (1-\tau)\,\alpha_{k+1}$, легко убеждаемся в том, что последовательности α' и α связаны двояко стохастической матрицей

$$T = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & \tau & 1-\tau & \ldots & 0 \\ t_{11} & t_{12} & t_{13} & \ldots & t_{1k}(1-\tau) & t_{1k}\tau & \ldots & t_{1,\,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{n-1,\,1} & t_{n-1,\,2} & t_{n-1,\,3} & \ldots & t_{n-1,\,k}(1-\tau) & t_{n-1,\,k}\tau & \ldots & t_{n-1,\,n-1} \end{Vmatrix}.$$

Лемма доказана полностью.

Нам понадобится ниже также следующее предложение (см. [233]):

Лемма 2. *Пусть $\varphi(t)$ — непрерывная выпуклая*) монотонно возрастающая функция. Пусть*

$$\alpha_1' \geqslant \alpha_2' \geqslant \ldots \geqslant \alpha_p', \tag{14}$$

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_p \tag{15}$$

и

$$\alpha_1' + \alpha_2' + \ldots + \alpha_m' \leqslant \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m \quad (1 \leqslant m \leqslant p). \tag{16}$$

*) Функция $\varphi(t)$ называется выпуклой на интервале, если для любых точек этого интервала $\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}[\varphi(x) + \varphi(y)]$.

Тогда

$$\varphi(\alpha_1')+\varphi(\alpha_2')+\ldots+\varphi(\alpha_p')\leqslant\varphi(\alpha_1)+\varphi(\alpha_2)+\ldots+\varphi(\alpha_p). \tag{17}$$

Доказательство. Предположим сначала, что при $m=p$ в соотношении (16) имеет место равенство. Тогда последовательность α' мажорируется последовательностью α и согласно лемме 1

$$\alpha_s'=\sum_{j=1}^{p} t_{sj}\alpha_j, \qquad 1\leqslant s\leqslant p, \tag{18}$$

где t_{sj} — элементы двояко стохастической матрицы. В силу выпуклости $\varphi(t)$ из равенства (18) следует*), что

$$\varphi(\alpha_s')\leqslant\sum_{j=1}^{p} t_{sj}\varphi(\alpha_j). \tag{19}$$

Суммируя неравенства (19), получаем

$$\sum_{s=1}^{p}\varphi(\alpha_s')\leqslant\sum_{j=1}^{p}\Big(\sum_{s=1}^{p} t_{sj}\Big)\varphi(\alpha_j)=\sum_{j=1}^{p}\varphi(\alpha_j). \tag{20}$$

Таким образом, в указанном случае неравенство (17) выполняется.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть в соотношении (16) при $m=p$ имеет место знак $<$. Положим

$$\sum_{j=1}^{p}\alpha_j-\sum_{j=1}^{p}\alpha_j'=c>0.$$

Наряду с последовательностями (14) и (15) рассмотрим две последовательности:

$$\alpha_1'\geqslant\alpha_2'\geqslant\ldots\geqslant\alpha_p'\geqslant\alpha_{p+1}' \tag{21}$$

и

$$\alpha_1\geqslant\alpha_2\geqslant\ldots\geqslant\alpha_p\geqslant\alpha_{p+1}, \tag{22}$$

где α_{p+1}' и α_{p+1} — произвольные два числа, удовлетворяющие неравенствам (21) и (22) и соотношению

$$\alpha_{p+1}=\alpha_{p+1}'-c. \tag{23}$$

Легко видеть, что при таком выборе α_{p+1}' и α_{p+1} последовательность (21) мажорируется последовательностью (22), и по доказанному имеем

$$\varphi(\alpha_1')+\varphi(\alpha_2')+\ldots+\varphi(\alpha_p')+\varphi(\alpha_{p+1}')\leqslant$$
$$\leqslant\varphi(\alpha_1)+\varphi(\alpha_2)+\ldots+\varphi(\alpha_p)+\varphi(\alpha_{p+1}). \tag{24}$$

Так как, далее, $\varphi(t)$ — монотонно возрастающая функция и $\alpha_{p+1}'>\alpha_{p+1}$, то $\varphi(\alpha_{p+1}')\geqslant\varphi(\alpha_{p+1})$ и из (24) снова следует неравенство (17).

Лемма доказана полностью.

Замечание. Из наших рассуждений следует, что в том случае, когда последовательность (14) мажорируется последовательностью (15) [т. е. при $m=p$ в (16) достигается равенство], то неравенство (17) справедливо для любой непрерывной выпуклой функции $\varphi(t)$ (возрастание является излишним требованием).

---

*) Доказательство неравенства (19) для непрерывных выпуклых функций проводится по индукции (см. [35], стр. 93).

§ 2. Неравенства Неймана — Хорна

Пусть A — линейный оператор, действующий в n-мерном унитарном пространстве R. Собственные числа неотрицательного эрмитова оператора *) $\sqrt{A^*A}$ (см. стр. 249) принято называть *сингулярными* числами оператора A.

В настоящем параграфе мы установим неравенства, связывающие сингулярные числа произведения двух операторов с сингулярными числами сомножителей.

Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_m$ и $z_1, z_2, \ldots, z_m$ — два набора векторов из R. Введем сокращенное обозначение для определителя порядка m, связанного с данными наборами:

$$[(y_i, z_j)] = \begin{vmatrix} (y_1, z_1) & (y_2, z_1) & \ldots & (y_m, z_1) \\ (y_1, z_2) & (y_2, z_2) & \ldots & (y_m, z_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (y_1, z_m) & (y_2, z_m) & \ldots & (y_m, z_m) \end{vmatrix}. \tag{25}$$

Рассмотрим далее неотрицательный эрмитов оператор H, действующий в R. Собственные значения оператора H занумеруем в убывающем порядке:

$$h_1 \geqslant h_2 \geqslant \ldots \geqslant h_n \geqslant 0. \tag{26}$$

Справедливо следующее предложение, принадлежащее А. Хорну ([191b]):

Лемма 3. *Пусть*

$$x_1, x_2, \ldots, x_m \qquad (m \leqslant n) \tag{27}$$

— произвольный набор векторов из R. Тогда **)

$$[(Hx_i, x_j)] \leqslant h_1 h_2 \ldots h_m [(x_i, x_j)]. \tag{28}$$

Для доказательства рассмотрим ортонормированный базис собственных векторов оператора H:

$$e_1, e_2, \ldots, e_n \tag{29}$$

и разложим каждый из векторов x_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ по базису (29). Вычисляя скалярное произведение, получаем:

$$(Hx_i, x_j) = \sum_{s=1}^{n} h_s (x_i, e_s) \overline{(x_j, e_s)} = \sum_{s=1}^{n} h_s (x_i, e_s)(e_s, x_j), \tag{30}$$
$$i, j = 1, 2, \ldots, m.$$

Равенство (30) позволяет рассматривать матрицу определителя $[(Hx_i, x_j)]$ как результат умножения двух прямоугольных матриц размеров $m \times n$ и $n \times m$.

Разлагая определитель по формуле Бине — Коши (см. стр. 20), получаем в принятых обозначениях для определителей:

$$[(Hx_i, x_j)] = \sum_{1 \leqslant s_1 < s_2 < \ldots < s_m \leqslant n} [(x_i, h_s e_s)] [(e_s, x_j)]. \tag{31}$$

---

*) Мы будем пользоваться также обозначением $(A^*A)^{1/2}$.

**) Определитель, стоящий в левой части (28), неотрицателен. Действительно, полагая $H^{1/2}x_i = y_i$, получаем

$$[(Hx_i, x_j)] = [(H^{1/2}x_i, H^{1/2}x_j)] = [(y_i, y_j)] \geqslant 0.$$

Здесь

$$[(x_i,\ h_s e_s)] = \begin{vmatrix} (x_1,\ h_{s_1}e_{s_1}) & \dots & (x_m,\ h_{s_1}e_{s_1}) \\ (x_1,\ h_{s_2}e_{s_2}) & \dots & (x_m,\ h_{s_2}e_{s_2}) \\ \dots & \dots & \dots \\ (x_1,\ h_{s_m}e_{s_m}) & \dots & (x_m,\ h_{s_m}e_{s_m}) \end{vmatrix}, \tag{31'}$$

а суммирование ведется по всевозможным наборам натуральных чисел $1 \leqslant s_1 < s_2 < \dots < s_m \leqslant n$.

Оценив правую часть (31) по неравенству Коши—Буняковского, получим:

$$[(Hx_i, x_j)]^2 \leqslant \Big(\sum_{1 \leqslant s_1 < \dots < s_m \leqslant n} |[(x_i, h_s e_s)]|^2\Big)\Big(\sum_{1 \leqslant s_1 < \dots < s_m \leqslant n} |[e_s,\ x_j]|^2\Big). \tag{32}$$

Вторая сумма в правой части неравенства (32) равна определителю Грама $[(x_i,\ x_j)]$. В этом легко убедиться, положив в формуле (31) $H = E$, где E — единичный оператор. Впрочем, соответствующее равенство отдельно доказано на стр. 230 (формула (26)).

В первой сумме правой части (32) вынесем из каждого определителя (31′) произведение $h_{s_1}h_{s_2} \dots h_{s_m}$ и заменим его бо́льшим $h_1 h_2 \dots h_m$. В результате получим:

$$[(Hx_i,\ x_j)]^2 \leqslant h_1^2 h_2^2 \dots h_m^2 [(x_i,\ x_j)]^2.$$

Извлекая из обеих частей этого неравенства квадратные корни, мы устанавливаем справедливость неравенства (28). Докажем далее следующий факт.

Лемма 4. *Пусть K — произвольный оператор в R и*

$$\varkappa_1 \geqslant \varkappa_2 \geqslant \dots \geqslant \varkappa_n \tag{33}$$

— его сингулярные числа. Тогда для произвольного набора векторов x_1, x_2, ..., x_m $(m \leqslant n)$ справедливо неравенство

$$[(Kx_i,\ Kx_j)] \leqslant \varkappa_1^2 \varkappa_2^2 \dots \varkappa_m^2 [(x_i,\ x_j)]. \tag{34}$$

Неравенство (34) немедленно следует из леммы 3 при $H = K^*K$.

Установим, наконец, еще одно вспомогательное предложение.

Лемма 5. *Пусть A и B — линейные операторы в R, $C = AB$, и пусть α_s, β_s и γ_s $(s = 1, 2, \dots, n)$ — сингулярные числа соответственно A, B и C, занумерованные в убывающем порядке. Тогда при любом $m \leqslant n$ справедливы неравенства*)*

$$\gamma_1\gamma_2 \dots \gamma_m \leqslant \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_m\beta_1\beta_2 \dots \beta_m. \tag{35}$$

Для доказательства рассмотрим ортонормированный базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ собственных векторов оператора C^*C. Последовательно применяя (34), получаем

$$[(Ce_i,\ Ce_j)] = [(ABe_i,\ ABe_j)] \leqslant \alpha_1^2\alpha_2^2 \dots \alpha_m^2 [(Be_i,\ Be_j)] \leqslant$$
$$\leqslant \alpha_1^2\alpha_2^2 \dots \alpha_m^2\beta_1^2\beta_2^2 \dots \beta_m^2 [(e_i,\ e_j)]. \tag{36}$$

---

*) При $m = n$ в формуле (35) достигается равенство. Действительно, имеем $C^*C = B^*A^*AB$, отсюда $|C^*C| = |A^*A|\,|B^*B|$.

Поскольку определитель матрицы оператора равен произведению его собственных чисел, то $\gamma_1^2\gamma_2^2 \dots \gamma_n^2 = \alpha_1^2\alpha_2^2 \dots \alpha_n^2\beta_1^2\beta_2^2 \dots \beta_n^2$.

С другой стороны, поскольку e_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ — собственные векторы C^*C, мы имеем:

$$[(Ce_i,\ Ce_j)] = [(C^*Ce_i,\ e_j)] = \gamma_1^2\gamma_2^2 \ldots \gamma_n^2 [(e_i,\ e_j)]. \tag{37}$$

Следовательно, (35) имеет место.

Мы в состоянии теперь доказать следующую теорему, которая является основной целью настоящего параграфа.

Теорема 1 (Нейман — Хорн [218b, 191b]). *Пусть A, B и C — линейные операторы в n-мерном унитарном пространстве R. Пусть $C = AB$ и пусть α_s, β_s и γ_s $(s = 1, 2, \ldots, n)$ — сингулярные числа операторов A, B и C, занумерованные в порядке убывания.*

Пусть $f(x)$ — непрерывная при $x \geqslant 0$ функция такая, что $\varphi(t) = f(e^t)$ — монотонно возрастающая выпуклая функция параметра t. Тогда при всех $m \leqslant n$ справедливы неравенства *)

$$\sum_{s=1}^{m} f(\gamma_s) \leqslant \sum_{s=1}^{m} f(\alpha_s\beta_s). \tag{38}$$

Доказательство. Пусть сначала операторы A и B невырождены, тогда все числа α_s, β_s и γ_s положительны. Логарифмируя неравенства (35), получаем

$$\sum_{s=1}^{m} \ln \gamma_s \leqslant \sum_{s=1}^{m} \ln(\alpha_s\beta_s), \qquad 1 \leqslant m \leqslant n. \tag{39}$$

На основании леммы 2 имеем

$$\sum_{s=1}^{m} \varphi(\ln \gamma_s) \leqslant \sum_{s=1}^{m} \varphi(\ln \alpha_s\beta_s), \qquad 1 \leqslant m \leqslant n. \tag{40}$$

Так как $\varphi(t) = f(e^t)$, то отсюда следует (38). В случае вырожденных операторов неравенства (38) устанавливаются по непрерывности.

Замечание 1°. В случае $f(x) = x^\sigma$ $(\sigma \geqslant 0)$ получаем

$$\sum_{s=1}^{m} \gamma_s^\sigma \leqslant \sum_{s=1}^{m} \alpha_s^\sigma\beta_s^\sigma \qquad (1 \leqslant m \leqslant n). \tag{41}$$

В таком виде неравенства (38) встречаются в приложениях чаще всего.

Замечание 2°. При $m = n$ неравенство (39) превращается в равенство (см. сноску на стр. 540). Поэтому при $m = n$ неравенство (40) справедливо для любой непрерывной выпуклой функции $\varphi(t)$ (см. замечание к лемме 2).

В частности, неравенство (41) при $m = n$ справедливо и для $\sigma < 0$.

Замечание 3°. Пусть

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n$$

— сингулярные числа оператора A и пусть

$$\alpha_{l,1} \geqslant \alpha_{l,2} \geqslant \ldots \geqslant \alpha_{l,n}$$

---

*) Неравенства (38) установлены А. Хорном в работе [191b]. В работе Дж. Неймана [218b] доказано лишь, что $\sum_{s=1}^{n} \gamma_s^2 \leqslant \sum_{s=1}^{n} \alpha_s^2\beta_s^2$, однако развитый там метод позволяет доказать неравенства (38) в общем виде.

— сингулярные числа оператора A^l (l — натуральное число). Тогда при любом $\sigma \geqslant 0$ и любом $1 \leqslant m \leqslant n$

$$\sum_{s=1}^{m} \alpha_{l,s}^{\sigma} \leqslant \sum_{s=1}^{m} \alpha_s^{\sigma l}. \tag{42}$$

Неравенства (42) докажем индукцией по l. При $l=1$ соотношение (42) очевидно; пусть оно выполняется для $l-1$. Так как $A^l = A^{l-1} \cdot A$, то согласно (41)

$$\sum_{s=1}^{m} \alpha_{l,s}^{\sigma} \leqslant \sum_{s=1}^{m} \alpha_{l-1,s}^{\sigma} \alpha_s^{\sigma}, \qquad 1 \leqslant m \leqslant n. \tag{43}$$

Применяя к правой части (43) неравенство Гёльдера*) с

$$p = \frac{l}{l-1} \text{ и } q = l \qquad (p^{-1} + q^{-1} = 1),$$

получаем

$$\sum_{s=1}^{m} \alpha_{l,s}^{\sigma} \leqslant \Big(\sum_{s=1}^{m} \alpha_{l-1,s}^{p\sigma}\Big)^{1/p} \Big(\sum_{s=1}^{m} \alpha_s^{q\sigma}\Big)^{1/q}. \tag{44}$$

По предположению индукции, имеем для первой суммы в правой части (44):

$$\Big(\sum_{s=1}^{m} \alpha_{l-1,s}^{p\sigma}\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\sum_{s=1}^{m} \alpha_s^{p\sigma(l-1)}\Big)^{1/p} = \Big(\sum_{s=1}^{m} \alpha_s^{l\sigma}\Big)^{1-\frac{1}{l}}.$$

Учитывая, что во второй сумме правой части (44) $q=l$, легко получаем из (44):

$$\sum_{s=1}^{m} \alpha_{l,s}^{\sigma} \leqslant \sum_{s=1}^{m} \alpha_s^{l\sigma},$$

что и требовалось доказать.

В частности, при $\sigma=2$ и $m=n$ из формулы (42) следует, что

$$\mathrm{Sp}\,(A^{*l} A^l) \leqslant \mathrm{Sp}\,(A^* A)^l. \tag{45}$$

§ 3. Неравенства Вейля

В настоящем параграфе мы выведем принадлежащие Г. Вейлю неравенства, которые позволяют оценивать собственные числа линейного оператора A посредством его сингулярных чисел**). Нам понадобится следующее важное предложение:

Лемма 6. *Пусть λ_s ($s=1, 2, \ldots, n$) — собственные числа линейного оператора A, занумерованные так, что*

$$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_n|, \tag{46}$$

и пусть

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n \tag{47}$$

— сингулярные числа этого оператора. Тогда при любом $m \leqslant n$ справедливы неравенства

$$|\lambda_1| |\lambda_2| \ldots |\lambda_m| \leqslant \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m. \tag{48}$$

*) См. [35], стр. 40.

**) Определение см. в § 2.

Для доказательства рассмотрим ортонормированный базис

$$e_1, e_2, \ldots, e_n, \tag{49}$$

в котором матрица оператора A имеет треугольный вид. Существование такого базиса устанавливается теоремой Шура (см. гл. IX, стр. 242).

Мы воспользуемся леммой 4 и двумя способами оценим определитель

$$[(Ae_k, Ae_l)]_1^m. \tag{50}$$

Пусть a_{ij} — элементы матрицы оператора A в базисе (49). Имеем $Ae_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i$. Поскольку $a_{ij}=0$ при $i>j$, то

$$Ae_j = \sum_{i=1}^{j} a_{ij}e_j \tag{51}$$

и

$$(Ae_k, Ae_l) = \Big(\sum_{i=1}^{k} a_{ik}e_i, \sum_{i=1}^{l} a_{il}\ e_i\Big) = \sum_{i=1}^{q} a_{ik}\overline{a}_{il} \qquad (q=\min(k, l)). \tag{52}$$

Формула (52) позволяет записать определитель (50) в виде следующего произведения двух определителей:

$$[(Ae_k, Ae_l)]_1^m = \begin{vmatrix} \overline{a}_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \overline{a}_{12} & \overline{a}_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ \overline{a}_{13} & \overline{a}_{23} & \overline{a}_{33} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \overline{a}_{1m} & \overline{a}_{2m} & \overline{a}_{3m} & \ldots & \overline{a}_{mm} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2m} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix}. \tag{53}$$

Поскольку $a_{ii}=\lambda_i$ и оба определителя в правой части (53) равны произведению диагональных элементов, то

$$[(Ae_k, Ae_l)]_1^m = |\lambda_1|^2 |\lambda_2|^2 \ldots |\lambda_m|^2. \tag{54}$$

С другой стороны, в силу леммы 4

$$[(Ae_k, Ae_l)]_1^m \leqslant \alpha_1^2\alpha_2^2 \ldots \alpha_m^2, \tag{55}$$

так как $[(e_k, e_l)]_1^m = 1$.

Неравенства (48) следуют теперь из соотношений (54) и (55). Лемма 6 доказана *).

---

*) Эту лемму можно доказать иначе, если воспользоваться теоремой 4 гл. III, согласно которой произведение $\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_m$ является собственным числом ассоциированной матрицы $\mathfrak{A}_m$ для матрицы A. Пусть x — соответствующий собственный вектор $\mathfrak{A}_m$; умножая равенство $\mathfrak{A}_m x = \lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_m x$ на сопряженное, получаем

$$|\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_m|^2 = \frac{x^*\mathfrak{A}_m^*\mathfrak{A}_m x}{x^*x}.$$

Матрица $\mathfrak{A}_m^*\mathfrak{A}_m$ является ассоциированной для A^*A и, следовательно, наибольшее собственное число $\mathfrak{A}_m^*\mathfrak{A}_m$ равно $\alpha_1^2\alpha_2^2 \ldots \alpha_m^2$. Поскольку дробь в правой части последнего равенства не превосходит $\alpha_1^2\alpha_2^2 \ldots \alpha_m^2$, то мы приходим к неравенствам (48).

Используя неравенства (48), мы сейчас докажем следующую теорему:

Теорема 2 (см. [257]). *Пусть A — линейный оператор и пусть λ_s и α_s $(s=1, 2, \ldots, n)$ — его собственные и сингулярные числа, занумерованные так же, как и в лемме 6. Пусть $f(x)$ — непрерывная при $x \geqslant 0$ функция такая, что $\varphi(t)=f(e^t)$ — монотонно возрастающая выпуклая функция параметра t. Тогда при любом $m \leqslant n$ справедливы неравенства*

$$\sum_{s=1}^{m} f(|\lambda_s|) \leqslant \sum_{s=1}^{m} f(\alpha_s). \tag{56}$$

Доказательство. Если оператор A невырожден, то согласно (48) получаем:

$$\sum_{s=1}^{m} \ln|\lambda_s| \leqslant \sum_{s=1}^{m} \ln \alpha_s \tag{57}$$

при всех $m \leqslant n$. Отсюда на основании леммы 2 уже следуют неравенства (56). Если оператор A вырожден, то неравенства (56) могут быть получены по непрерывности. Теорема доказана.

Замечание 1°. При $m=n$ неравенство (48) превращается в равенство, так как в этом случае равенство имеет место в формуле (55). Следовательно, при $m=n$ равенство достигается и в (57). Используя замечания к лемме 2, мы можем заключить, что $\sum_{s=1}^{n} f(|\lambda_s|) \leqslant \sum_{s=1}^{n} f(\alpha_s)$ для любой функции $f(x)$, если только функция $\varphi(t)=f(e^t)$ выпукла. Возрастание оказывается излишним требованием. Например, при любом вещественном σ

$$\sum_{s=1}^{n} |\lambda_s|^{\sigma} \leqslant \sum_{s=1}^{n} \alpha_s^{\sigma}. \tag{58}$$

Замечание 2°. Рассмотрим функцию

$$f(x)=\ln(1+xz), \qquad x \geqslant 0, \tag{59}$$

где z фиксировано и положительно. Легко проверить, что функция (59) удовлетворяет всем условиям теоремы 2. Поэтому при любом m, $1 \leqslant m \leqslant n$, имеем:

$$\sum_{s=1}^{m} \ln(1+|\lambda_s|z) \leqslant \sum_{s=1}^{m} \ln(1+\alpha_s z).$$

Потенцируя, получаем неравенство

$$\prod_{s=1}^{m} (1+|\lambda_s|z) \leqslant \prod_{s=1}^{m} (1+\alpha_s z), \tag{60}$$

которое используется в теории интегральных операторов.

§ 4. Максимально-минимальные свойства сумм и произведений собственных чисел эрмитовых операторов

В настоящем параграфе мы получим обобщение ряда результатов, относящихся к экстремальным свойствам собственных чисел эрмитовых операторов (см. § 7 гл. X).

1°. Для дальнейшего удобно придать теореме 12 гл. X, устанавливающей основное максимально-минимальное свойство собственных чисел, несколько иную формулировку.

Пусть A — эрмитов оператор, действующий в n-мерном унитарном пространстве R, и пусть

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n \tag{61}$$

— его собственные числа. Обозначим через R_q q-мерное подпространство пространства R.

Справедлива следующая формула:

$$\lambda_q = \max_{R_q} \min_{\substack{x \in R_q \\ (x, x)=1}} (Ax, x). \tag{62}$$

В этой формуле минимум берется по всем нормированным векторам x, принадлежащим некоторому фиксированному подпространству R_q, а затем берется максимум по всем q-мерным подпространствам. Равенство (62) составляет содержание теоремы 12 гл. X и представляет собой видоизмененную запись формулы (79). Действительно, всякое q-мерное подпространство R_q может быть рассмотрено как совокупность векторов, удовлетворяющих некоторой системе $n-q$ независимых линейных уравнений

$$L_k(x) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n-q \tag{63}$$

(см. обозначения на стр. 288). Если ввести эрмитову форму $B(x, x) \equiv \equiv \sum_{s=1}^{n} |x_s|^2$ и выбирать лишь нормированные векторы x, то тогда $B(x, x) = 1$ и

$$\mu\left(\frac{A}{B}, L_1, L_2, \ldots, L_{n-q}\right) = \min_{\substack{x \in R_q \\ (x, x)=1}} (Ax, x). \tag{64}$$

В силу (79) гл. X мы получаем:

$$\lambda_{(n-q+1)} = \max_{R_q} \min_{\substack{x \in R_q \\ (x, x)=1}} (Ax, x), \tag{65}$$

где $n-q+1$ — номер собственного числа оператора A при нумерации, принятой в гл. X (в возрастающем порядке). Легко сообразить, что при новой нумерации $\lambda_{(n-q+1)} = \lambda_q$. Таким образом, соотношение (62) действительно имеет место. Легко также видеть, что согласно (62)

$$\lambda_1 = \max_{(x, x)=1} (Ax, x), \tag{66}$$

$$\lambda_n = \min_{(x, x)=1} (Ax, x). \tag{66'}$$

Непосредственным обобщением равенства (66) является следующее предложение, принадлежащее Фаню [177a].

Теорема 3. *Для любого эрмитова оператора A с собственными числами* (61) *и любого $m \leqslant n$ справедлива формула*

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m = \max_{(x_i, x_j)=\delta_{ij}} (Ax_i, x_i). \tag{67}$$

Максимум в правой части (67) берется по всем системам взаимно ортогональных нормированных векторов

$$x_1, x_2, \ldots, x_m. \tag{68}$$

Для доказательства рассмотрим ортонормированный базис собственных векторов оператора A:

$$e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n.$$

Полагая $x_i = \sum_{s=1}^{n} (x_i, e_s) e_s$, легко найдем:

$$(Ax_i, x_i) = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s |(x_s, e_s)|^2. \tag{69}$$

Расширим систему (68) до ортонормированного базиса в R и заметим, что

$$\sum_{s=1}^{n} |(x_i, e_s)|^2 = (x_i, x_i) = 1, \tag{70}$$

$$\sum_{i=1}^{n} |(x_i, e_s)|^2 = (e_s, e_s) = 1. \tag{71}$$

Матрица $\| |(x_i, e_s)|^2 \|_1^n$, таким образом, является двояко стохастической. Из равенств (69) следует, что последовательность

$$(Ax_i, x_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{72}$$

связана с последовательностью (61) двояко стохастической матрицей. На основании леммы 1 (см. (10′)) мы заключаем, что

$$\sum_{i=1}^{m} (Ax_i, x_i) \leqslant \sum_{i=1}^{m} \lambda_i. \tag{73}$$

Так как, далее, при $x_i = e_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ в формуле (73) достигается равенство, то теорема доказана.

Если наряду с оператором A ввести оператор $-A$, собственные числа которого, очевидно, равны $-\lambda_s$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$, то на основании доказанной теоремы можно легко заключить, что

$$\lambda_n + \lambda_{n-1} + \ldots + \lambda_{n-m+1} = \min_{(x_i, x_j) = \delta_{ij}} \sum_{i=1}^{m} (Ax_i, x_i). \tag{74}$$

Эта формула обобщает равенство (66′).

Замечание. Из неравенств (73) на основании леммы 2 заключаем, что для любой непрерывной выпуклой возрастающей функции $\varphi(t)$ и любого m имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^{m} \varphi(a_{ii}) \leqslant \sum_{i=1}^{m} \varphi(\lambda_i),$$

где $a_{ii} = (Ax_i, x_i)$.

2°. Дальнейшее обобщение формулы (62) связано с установлением максимально-минимальных свойств сумм собственных чисел эрмитова оператора A вида

$$\lambda_{i_1} + \lambda_{i_2} + \ldots + \lambda_{i_l}, \tag{75}$$

где $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_l \leqslant n$ — некоторый набор натуральных чисел. Соответствующая теорема принадлежит Г. Виландту [260e].

Сохраняя в основном ход рассуждений Виландта, мы докажем более общее предложение, установленное Амир Моэзом [149]. Этим предложением мы воспользуемся и при оценке произведений собственных и сингулярных чисел.

Предварительно введем некоторые обозначения. Пусть

$$1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leqslant n \tag{76}$$

— фиксированный набор m натуральных чисел. Рассмотрим некоторую цепочку последовательно вложенных подпространств пространства R:

$$R_{i_1} \subset R_{i_2} \subset \ldots \subset R_{i_m}, \tag{77}$$

где индекс указывает размерность подпространства. Пусть, далее,

$$x_{i_1},\ x_{i_2},\ \ldots,\ x_{i_m} \tag{78}$$

— система m взаимно ортогональных и нормированных векторов:

$$(x_{i_k},\ x_{i_{k'}}) = \delta_{kk'}, \tag{79}$$

таких, что

$$x_{i_k} \in R_{i_k} \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m). \tag{80}$$

Условимся называть систему векторов (78) системой, *подчиненной* цепочке (77).

Сформулируем и докажем теперь следующую лемму:

Лемма 7 (см. [149]).

Пусть A — эрмитов оператор с собственными числами

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n, \tag{61}$$

и пусть

$$\varphi(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_m) \tag{81}$$

— монотонно возрастающая по каждому аргументу функция m вещественных переменных ($m \leqslant n$)). Пусть (77) — некоторая цепочка подпространств, построенная по фиксированному набору (76), и пусть*

$$x_{i_1},\ x_{i_2},\ \ldots,\ x_{i_m} \tag{82}$$

— подчиненная этой цепочке система векторов. Обозначим через P_m оператор проектирования на подпространство

$$[x_{i_1},\ x_{i_2},\ \ldots,\ x_{i_m}], \tag{83}$$

натянутое на векторы (82), и пусть $\tilde{\lambda}_1 \geqslant \tilde{\lambda}_2 \geqslant \ldots \geqslant \tilde{\lambda}_m$ — собственные числа эрмитова оператора

$$P_m A P_m, \tag{83'}$$

*рассматриваемого в подпространстве (83)**). Тогда*

$$\varphi(\lambda_{i_1},\ \lambda_{i_2},\ \ldots,\ \lambda_{i_m}) = \max_{R_{i_1} \subset R_{i_2} \subset \ldots \subset R_{i_m}}\ \min_{x_{i_k} \in R_{i_k}} \varphi(\tilde{\lambda}_1,\ \tilde{\lambda}_2,\ \ldots,\ \tilde{\lambda}_m). \tag{84}$$

Поясним, что в формуле (84) сначала выбирается некоторая цепочка подпространств и находится минимум по всем подчиненным ей системам векторов; после этого берется максимум по всевозможным цепочкам.

Доказательство формулы (84), очевидно, сводится к доказательству следующих двух утверждений.

---

*) Предполагается, что область определения функции $\varphi(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_m)$ содержит куб

$$\alpha \leqslant t_s \leqslant \beta, \qquad s = 1,\ 2,\ \ldots,\ m,$$

где α и β — границы спектра оператора A.

**) Определение оператора проектирования дано на стр. 244.

А. *К любой цепочке* (77) *всегда можно подобрать такую подчиненную систему* (78), *что*

$$\varphi(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \ldots, \tilde{\lambda}_m) \leqslant \varphi(\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \ldots, \lambda_{i_m}). \tag{85}$$

В. *Существует такая цепочка* (77), *что для любой подчиненной ей системы векторов выполняется неравенство*

$$\varphi(\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \ldots, \lambda_{i_m}) \leqslant \varphi(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \ldots, \tilde{\lambda}_m). \tag{86}$$

Докажем сначала утверждение В. Пусть

$$e_1, e_2, \ldots, e_n \tag{87}$$

— базис собственных векторов оператора A, соответствующих собственным числам (61).

Выберем следующую цепочку подпространств:

$$R_{i_k} = [e_1, e_2, \ldots, e_{i_k}], \qquad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{88}$$

и покажем, что в этом случае неравенство (86) выполняется всегда. Пусть (78) — система векторов, подчиненная цепочке (88), и пусть S_l — некоторое l-мерное подпространство, принадлежащее оболочке (83). Как мы видели [см. (62)], при любом выборе S_l

$$\tilde{\lambda}_l \geqslant \min_{\substack{x \in S_l \\ (x, x)=1}} (P_m A P_m x, x). \tag{89}$$

Заметив, что при $x \in S_l$ $(P_m A P_m x, x) = (A P_m x, P_m x) = (Ax, x)$, положим

$$S_l = [x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_l}].$$

Легко видеть, что при этом $S_l \subset R_l$, вследствие чего мы получаем:

$$\min_{\substack{x \in S_l \\ (x, x)=1}} (Ax, x) \geqslant \min_{\substack{x \in R_l \\ (x, x)=1}} (Ax, x). \tag{90}$$

Но минимум в правой части (90) достигается на собственном векторе e_{i_l} и равен λ_{i_l}. Сравнивая (90) и (89), мы заключаем, что

$$\tilde{\lambda}_l \geqslant \lambda_{i_l}.$$

Отсюда в силу возрастания функции (81) следует (86). Таким образом, утверждение В доказано.

Утверждение А доказывается труднее. Мы проведем его по индукции, предполагая, что для операторов, действующих в $(n-1)$-мерном пространстве, это утверждение справедливо. Заметим, что в случае $n=1$ (пространство одномерно) $\lambda_{i_1} = \tilde{\lambda}_{i_1}$ и неравенство (85) имеет место для любой функции $\varphi(t)$.

Переходя к случаю n-мерного пространства, мы можем считать, что $m < n$. Действительно, при $m = n$ подпространство (83) совпадает со всем пространством, $\tilde{\lambda}_s = \lambda_s$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$, и, следовательно, неравенство (85) справедливо.

При $m < n$ мы разберем два подслучая:

1) Пусть $i_m < n$, тогда существует некоторое $(n-1)$-мерное подпространство $\tilde{R}_{n-1}$, содержащее все подпространства цепочки (77). Пусть P_{n-1} — оператор проектирования на подпространство $\tilde{R}_{n-1}$. Введем в $\tilde{R}_{n-1}$

эрмитов оператор

$$A_{n-1} = P_{n-1} A P_{n-1}. \tag{91}$$

Ясно, что для всех $x \in R_{n-1}$ имеет место равенство $(A_{n-1}x, x) = (Ax, x)$. Если λ'_s $(s = 1, 2, \ldots, n-1)$ — собственные числа оператора A_{n-1}, то в силу теоремы 14 (стр. 291) *)

$$\lambda_s \geqslant \lambda'_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{92}$$

По индуктивному предположению, для любой цепочки (77) в $\widetilde{R}_{n-1}$ найдется подчиненная ей система векторов (78) таких, что

$$\varphi(\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2, \ldots, \widetilde{\lambda}_m) \leqslant \varphi(\lambda'_{i_1}, \lambda'_{i_2}, \ldots, \lambda'_{i_m}).$$

Отсюда в силу (92) сразу следует, что неравенство (85) в рассматриваемом случае действительно имеет место.

2) Рассмотрим теперь случай $i_m = n$ $(m < n)$. Пусть

$$i_m = n, \; i_{m+1} = n-1, \; \ldots, \; i_{m-p} = n-p \qquad (p \geqslant 0) \tag{93}$$

— последние элементы набора (76), и пусть число $n-p-1$ уже не принадлежит набору (76).

Обозначим через $i_{m'}$ наибольший из оставшихся номеров набора (76). Очевидно **),

$$i_{m'} \leqslant n-p-2. \tag{94}$$

Цепочка подпространств (77) в рассматриваемом случае может быть записана следующим образом:

$$R_{i_1} \subset R_{i_2} \subset \ldots \subset R_{i_{m'}} \subset R_{n-p} \subset R_{n-p+1} \subset \ldots \subset R_n. \tag{95}$$

Пусть

$$e_{n-p}, \; e_{n-p+1}, \; \ldots, \; e_n \tag{96}$$

— собственные векторы оператора A, занумерованные так же, как и в (87). Обозначим через R_{n-1} $(n-1)$-мерное подпространство, содержащее векторы (96) (их всего $p+1$) и подпространство $R_{i_{m'}}$.

Такое подпространство действительно существует, ибо

$$p+1+i_{m'} \leqslant p+1+n-p-2 = n-1.$$

Наряду с цепочкой (95) рассмотрим цепочку

$$R_{i_1} \subset R_{i_2} \subset \ldots \subset R_{i_{m'}} \subset \widetilde{R}_{n-p-1} \subset \widetilde{R}_{n-p} \subset \ldots \subset \widetilde{R}_{n-1}, \tag{97}$$

которая получается из цепочки (95), если каждое подпространство в (95) заменить его пересечением с подпространством $\widetilde{R}_{n-1}$. Ясно, что первые m' подпространств цепочки (95) при этом не изменяются, так как они содержатся в $\widetilde{R}_{n-1}$; последующие подпространства цепочки уменьшат свою размерность на единицу ***). Введем снова оператор A_{n-1} на

*) Напомним, что в § 7 гл. X собственные числа занумерованы в порядке возрастания. Неравенства (92) легко также следуют из формулы (62).

**) Может случиться, что номера (93) исчерпывают весь набор (76), тогда для сохранения единообразия мы будем считать $i_{m'} = 0$, а соответствующее подпространство $R_{i_{m'}}$ — состоящим из нуль-вектора.

***) Если размерность пересечения не уменьшается, то, очевидно, пересечение всегда можно сузить так, чтобы подпространства в цепочке (97) имели указанные размерности.

подпространстве $\widetilde{R}_{n-1}$ по формуле (91). По индуктивному предположению, к цепочке (97) можно подобрать подчиненную систему векторов

$$x_{i_1},\ x_{i_2},\ \ldots,\ x_{i_{m'}},\ x_{n-p-1},\ \ldots,\ x_{n-1} \tag{98}$$

таких, что

$$\varphi(\widetilde{\lambda}_1,\ \widetilde{\lambda}_2,\ \ldots,\ \widetilde{\lambda}_m) \leqslant \varphi(\lambda'_{i_1},\ \lambda'_{i_2},\ \ldots,\ \lambda'_{i_{m'}},\ \lambda'_{n-p-1},\ \ldots,\ \lambda'_{n-1}). \tag{99}$$

В правой части штрихами обозначены собственные числа оператора A_{n-1}. Согласно (92) имеем:

$$\lambda_{i_1} \geqslant \lambda'_{i_1},\ \lambda_{i_2} \geqslant \lambda'_{i_2},\ \ldots,\ \lambda_{i_m} \geqslant \lambda'_{i_{m'}}. \tag{100}$$

Разумеется, на основании (92) мы не можем утверждать, что

$$\lambda_{n-p} \geqslant \lambda'_{n-p-1},\ \lambda_{n-p+1} \geqslant \lambda'_{n-p},\ \ldots,\ \lambda_n \geqslant \lambda'_{n-1}. \tag{100'}$$

Однако поскольку векторы (96) лежат в подпространстве $\widetilde{R}_{n-1}$, они являются собственными векторами оператора A_{n-1}. Соответствующие им собственные числа $\lambda_{n-p} \geqslant \lambda_{n-p+1} \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$ во всяком случае не меньше, чем числа $\lambda'_{n-p+1} \geqslant \lambda'_{n-p} \geqslant \ldots \geqslant \lambda'_{n-p}$, которые являются наименьшими собственными числами оператора A_{n-1}. Таким образом, (100′) имеет место, и в силу (100) и (100′) мы заключаем, что

$$\varphi(\lambda'_{i_1},\ \lambda'_{i_2},\ \ldots,\ \lambda'_{i_m},\ \lambda'_{n-p-1},\ \lambda'_{n-p}) \leqslant \varphi(\lambda_{i_1},\ \lambda_{i_2},\ \ldots,\ \lambda_{i_{m'}},\ \lambda_{n-p},\ \ldots,\ \lambda_n). \tag{101}$$

Это неравенство вместе с (99) приводит к доказательству утверждения А, поскольку система векторов (98) подчинена не только цепочке (97), но и исходной цепочке (95). Таким образом, лемма 7 доказана полностью.

Из доказанной леммы вытекает следующая теорема:

Теорема 4 (см. [260e]). *Пусть A — эрмитов оператор с собственными числами $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$. Пусть*

$$1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leqslant n \tag{102}$$

— фиксированный набор n натуральных чисел; тогда

$$\lambda_{i_1} + \lambda_{i_2} + \ldots + \lambda_{i_m} = \max_{R_{i_1} \subset R_{i_2} \subset \ldots \subset R_{i_m}} \ \min_{x_{i_k} \in R_{i_k}} \sum_{k=1}^{m} (Ax_{i_k},\ x_{i_k}), \tag{103}$$

где минимум берется по всем системам векторов x_{i_k} ($k = 1, 2, \ldots, m$), подчиненным цепочке) $R_{i_1} \subset R_{i_2} \subset \ldots \subset R_{i_m}$.*

Для доказательства заметим, что матрица оператора $P_m A P_m$ (см. лемму 7) в ортонормированном базисе (82) имеет вид

$$\| (Ax_{i_k},\ x_{i_{k'}}) \|_{k,\ k'=1}^{m},$$

так как

$$(P_m A P_m x_{i_k},\ x_{i_{k'}}) = (Ax_{i_k},\ x_{i_{k'}}).$$

Поэтому сумма, стоящая в правой части (103), есть след оператора $P_m A P_m$ и, значит, равна $\widetilde{\lambda}_1 + \widetilde{\lambda}_2 + \ldots + \widetilde{\lambda}_m$. Формула (103) после этих замечаний следует из леммы 7 при

$$\varphi(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_m) \equiv t_1 + t_2 + \ldots + t_m.$$

Теорема 4 доказана.

---

*) Определение см. на стр. 547.