Укажем, что формула (62), равно как и (67) и (74), является частным случаем теоремы 4.

В заключение установим следующее утверждение, тоже непосредственно вытекающее из леммы 7.

Теорема 5 (см. [149]). *Пусть $A$ — неотрицательно определенный эрмитов оператор, и пусть*

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n \geqslant 0$$

*— его собственные значения. Пусть $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leqslant n$ — фиксированный набор $m$ натуральных чисел. Тогда*

$$\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\ldots\lambda_{i_m} = \max_{R_{i_1}\subset R_{i_2}\subset\ldots\subset R_{i_m}} \min_{x_{i_k}\in R_{i_k}} \operatorname{Det} \|(Ax_{i_k}, x_{i_{k'}})\|_{k,k'=1}^{m}, \tag{104}$$

*где минимум берется по всем системам векторов, подчиненным цепочке $R_{i_1} \subset R_{i_2} \subset \ldots \subset R_{i_m}$.*

Для доказательства теоремы достаточно в формуле (84) положить

$$\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_m) = t_1 t_2 \ldots t_m \qquad (t_s \geqslant 0,\ s = 1, 2, \ldots, m)$$

и заметить, что стоящий в правой части (104) определитель равен $\tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2\ldots\tilde{\lambda}_m$.

Теоремами 4 и 5 мы воспользуемся в следующем параграфе при выводе неравенств для сумм и произведений собственных и сингулярных чисел.

## § 5. Неравенства для собственных и сингулярных чисел сумм и произведений операторов

Пусть $A$ и $B$ — два эрмитовых оператора в $n$-мерном унитарном пространстве $R$, собственные числа которых известны. Теоремы предыдущего параграфа дают возможность оценить суммы вида (75) собственных чисел оператора $A+B$. Близкие по характеру оценки мы получим и в случае произведения операторов. Мы начнем со следующего предложения.

Теорема 6 (см. [260e]). *Пусть $A$, $B$ и $C$ — эрмитовы операторы такие, что $C = A + B$; пусть $\lambda_s$, $\mu_s$ и $\nu_s$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$ — собственные числа операторов $A$, $B$ и $C$ соответственно, занумерованные в порядке убывания.*

*Тогда для любого набора $m$ натуральных чисел*

$$1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leqslant n \tag{105}$$

*справедливо неравенство*

$$\nu_{i_1} + \nu_{i_2} + \ldots + \nu_{i_m} \leqslant \lambda_{i_1} + \lambda_{i_2} + \ldots + \lambda_{i_m} + \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_m. \tag{106}$$

*При $m = n$ в формуле (106) достигается равенство.*

Доказательство. По заданному набору (105) выберем такую цепочку подпространств

$$R_{i_1} \subset R_{i_2} \subset \ldots \subset R_{i_m}, \tag{107}$$

чтобы для любой системы векторов

$$x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}, \tag{108}$$

подчиненной цепочке (107), выполнялось неравенство

$$\nu_{i_1} + \nu_{i_2} + \ldots + \nu_{i_m} \leqslant \sum_{k=1}^{m} (Cx_{i_k}, x_{i_k}). \tag{109}$$

Такая цепочка (107) найдется в силу теоремы 4 (ср. лемму 7

Заметив, что

$$\sum_{k=1}^{m} (\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_{i_k}, \boldsymbol{x}_{i_k}) = \sum_{k=1}^{m} (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{i_k}, \boldsymbol{x}_{i_k}) + \sum_{k=1}^{m} (\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_{i_k}, \boldsymbol{x}_{i_k}), \tag{110}$$

подберем такую систему векторов, подчиненную *) цепочке (107), чтобы

$$\sum_{k=1}^{m} (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{i_k}, \boldsymbol{x}_{i_k}) \leqslant \lambda_{i_1} + \lambda_{i_2} + \ldots + \lambda_{i_m}. \tag{111}$$

Такую систему векторов можно найти также на основании теоремы 4 (ср. лемму 7, А). Так как, далее, в силу теоремы 3 для любой ортогональной нормированной системы $\boldsymbol{x}_{i_1}, \boldsymbol{x}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{x}_{i_k}$

$$\sum_{k=1}^{m} (\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_{i_k}, \boldsymbol{x}_{i_k}) \leqslant \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_m, \tag{112}$$

то неравенство (106) следует из (109), (110), (111) и (112). При $m = n$ (106) превращается в равенство, поскольку $\operatorname{Sp} \boldsymbol{C} = \operatorname{Sp} \boldsymbol{A} + \operatorname{Sp} \boldsymbol{B}$.

Теорема 6 доказана полностью.

Следствие. *Для любой непрерывной выпуклой функции* $\varphi(t)$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{s=1}^{n} \varphi(\nu_s - \lambda_s) \leqslant \sum_{s=1}^{n} \varphi(\mu_s). \tag{113}$$

Этот результат следует из неравенств (106) на основании замечания к лемме 2.

Оказывается, неравенства типа (106) справедливы для сингулярных чисел произвольных линейных операторов. Для доказательства соответствующего предложения мы используем следующее замечание: пусть $A$ — матрица некоторого линейного оператора $\boldsymbol{A}$ в ортонормированном базисе, и пусть $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n$ — сингулярные числа $\boldsymbol{A}$. Рассмотрим квадратную матрицу

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix}$$

порядка $2n$. Мы сейчас покажем, что собственные числа матрицы $\widehat{A}$ равны $\pm \alpha_s$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$. Действительно, раскрыв характеристический определитель $\Delta(\lambda) = |\widehat{A} - \lambda E_{2n}|$ по формуле (1б) стр. 59, легко найдем:

$$\Delta(\lambda) = |\lambda^2 E_n - A^* A|.$$

Отсюда сразу следует сформулированное утверждение.

Сопоставив каждому оператору $\boldsymbol{A}$ оператор $\widehat{\boldsymbol{A}}$, действующий в $2n$-мерном унитарном пространстве, мы на основании теоремы 6 установим следующее предложение:

Теорема 7 (см. [149]). *Пусть* $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ *и* $\boldsymbol{C}$ — *линейные операторы в* $n$-*мерном унитарном пространстве. Пусть* $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$, *и пусть* $\alpha_s$, $\beta_s$ *и* $\gamma_s$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$ — *сингулярные числа операторов* $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ *и* $\boldsymbol{C}$, *занумерованные в порядке убывания. Тогда для любого набора натуральных*

*) Определение см. на стр. 547.

*чисел* (105) *справедливо неравенство*

$$\gamma_{i_1}+\gamma_{i_2}+\ldots+\gamma_{i_m}\leqslant\alpha_{i_1}+\alpha_{i_2}+\ldots+\alpha_{i_m}+\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_m. \quad (114)$$

Замечание. Так как собственные числа операторов $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ и $\widehat{C}$ располагаются относительно начала координат симметричными парами, неравенства (114) на основании теоремы 6 легко обобщаются следующим образом:

$$\pm(\gamma_{i_1}-\alpha_{i_1})\pm(\gamma_{i_2}-\alpha_{i_2})\pm\ldots\pm(\gamma_{i_m}-\alpha_{i_m})\leqslant\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_m.$$

Поскольку выбор знака перед каждой скобкой произволен, то

$$|\gamma_{i_1}-\alpha_{i_1}|+|\gamma_{i_2}-\alpha_{i_2}|+\ldots+|\gamma_{i_m}-\alpha_{i_m}|\leqslant\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_m. \quad (114')$$

Используя лемму 2, мы можем на основании неравенств (114) заключить, что для любой непрерывной возрастающей выпуклой функции $\varphi(t)$, $t\geqslant 0$, и любого $m\leqslant n$

$$\sum_{s=1}^{m}\varphi(|\gamma_s-\alpha_s|)\leqslant\sum_{s=1}^{m}\varphi(\beta_s)\ ^{*)}.$$

Перейдем теперь к оценке сингулярных и собственных чисел произведений двух операторов. Основной в этом направлении является следующая теорема, обобщающая неравенство (35) (см. лемму 5).

Теорема 8. *Пусть* $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ *и* $\boldsymbol{C}$ — *линейные операторы в n-мерном унитарном пространстве. Пусть* $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$ *и пусть* $\alpha_s$, $\beta_s$ *и* $\gamma_s$ $(s=1, 2, \ldots, n)$ — *сингулярные числа операторов* $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ *и* $\boldsymbol{C}$ *соответственно, занумерованные в порядке убывания; тогда для любого набора натуральных чисел*

$$1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_m\leqslant n \quad (115)$$

*справедливы неравенства*

$$\gamma_{i_1}\gamma_{i_2}\ldots\gamma_{i_m}\leqslant\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\ldots\alpha_{i_m}\beta_1\beta_2\ldots\beta_m, \quad (116)$$

$$\gamma_{i_1}\gamma_{i_2}\ldots\gamma_{i_m}\leqslant\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\beta_{i_1}\beta_{i_2}\ldots\beta_{i_m}. \quad (116')$$

Доказательство этой теоремы вполне аналогично доказательству теоремы 6.

Докажем сначала неравенства (116′). На основании леммы 4 § 2 получаем:

$$[(\boldsymbol{Cx}_{i_k},\ \boldsymbol{Cx}_{i_k})]=[(\boldsymbol{ABx}_{i_k},\ \boldsymbol{ABx}_{i_k})]\leqslant\alpha_1^2\alpha_2^2\ldots\alpha_m^2[(\boldsymbol{Bx}_{i_k},\ \boldsymbol{Bx}_{i_k})] \quad (117)$$

для любой системы векторов $\boldsymbol{x}_{i_k}$ $(k=1, 2, \ldots, m)$. По данному набору натуральных чисел (115) найдем на основании теоремы 5 такую цепочку подпространств, чтобы для любой подчиненной ей системы векторов выполнялось неравенство

$$\gamma_{i_1}^2\gamma_{i_2}^2\ldots\gamma_{i_m}^2\leqslant[(\boldsymbol{C}^*\boldsymbol{Cx}_{i_k},\ \boldsymbol{x}_{i_k})], \quad (118)$$

после чего на основании той же теоремы 5 найдем такую подчиненную выбранной цепочке систему векторов, чтобы

$$[(\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{Bx}_{i_k},\ \boldsymbol{x}_{i_k})]\leqslant\beta_{i_1}^2\beta_{i_2}^2\ldots\beta_{i_m}^2. \quad (119)$$

Очевидно, неравенство (116) уже следует из неравенств (117), (118) и (119).

*) По поводу этих неравенств см. [212e].

Для доказательства неравенства (116′) следует повторить рассуждение применительно к оператору $C^* = B^*A^*$ и воспользоваться при этом тем фактом, что сингулярные числа у сопряженных операторов равны [см. (82), стр. 251]. Теорема 8 доказана полностью.

Заметим попутно, что сингулярные числа операторов $AB$ и $BA$ в общем случае не совпадают.

Отметим еще следующий факт, вытекающий из теоремы 8:

Теорема 9. *Пусть $A$ и $B$ — два положительно определенных эрмитовых оператора с собственными числами $\lambda_s$ и $\mu_s$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$, занумерованными в убывающем порядке, и пусть*

$$\nu_1 \geqslant \nu_2 \geqslant \ldots \geqslant \nu_n \tag{120}$$

*— собственные числа оператора $AB$.*

*Тогда для любого набора* (115) *выполняется неравенство*

$$\nu_{i_1}\nu_{i_2} \ldots \nu_{i_m} \leqslant \lambda_{i_1}\lambda_{i_2} \ldots \lambda_{i_m}\mu_1\mu_2 \ldots \mu_m. \tag{121}$$

Доказательство. Так как оператор $B$ невырожден, то

$$AB = B^{-1/2}(B^{1/2}AB^{1/2})\,B^{1/2} = B^{-1/2}\{(A^{1/2}B^{1/2})^*(A^{1/2}B^{1/2})\}\,B^{1/2} \tag{122}$$

и, следовательно, собственные числа (120) являются квадратами сингулярных чисел оператора $A^{1/2}\cdot B^{1/2}$.

Применяя к произведению $A^{1/2}\cdot B^{1/2}$ неравенство (116), получаем (121).

## § 6. Другая постановка задачи о спектре суммы и произведения эрмитовых операторов

В настоящем параграфе мы сопоставим набору собственных чисел $\nu_1 \geqslant \nu_2 \geqslant \ldots \geqslant \nu_n$ суммы эрмитовых операторов $A$ и $B$ точку в $n$-мерном координатном пространстве и рассмотрим множество точек, получающихся при сложении всевозможных операторов $A$ и $B$ с данными спектрами. Аналогичную задачу мы рассмотрим и в случае произведения операторов.

Постановка задач на собственные значения в указанной геометрической форме принадлежит И. М. Гельфанду (см. по этому поводу [76], [106], [113], [191c].

Мы приведем здесь лишь аналоги теорем 6 и 9, первоначально полученные другими методами.

1° Нам понадобится геометрическое описание всех последовательностей $\alpha'$, которые мажорируются данной последовательностью $\alpha$. Соответствующую лемму мы установим, используя некоторые результаты Фробениуса, Кёнига и Биркгофа. Начнем со следующего замечания.

Пусть $T = \| t_{ij} \|^n$ — квадратная матрица. *Нормальным набором* элементов матрицы $T$ назовем набор $n$ элементов этой матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца, т. е. набор вида

$$t_{1j_1},\ t_{2j_2},\ \ldots,\ t_{nj_n}, \tag{123}$$

где $j_1, j_2, \ldots, j_n$ — некоторая перестановка индексов $1, 2, \ldots, n$.

Справедливо следующее предложение, имеющее самостоятельное значение в ряде разделов математики.

Лемма 8 (Фробениус — Кёниг [182e], [203]). *Пусть $T = \| t_{ij} \|_1^n$ — квадратная матрица порядка $n$ с неотрицательными элементами, и пусть каждый нормальный набор матрицы $T$ содержит нулевой элемент; тогда существует состоящий из нулей минор матрицы $T$ размеров $p \times q$ такой, что $p + q = n + 1$.*

Доказательство *) мы проведем по индукции, предположив, что для матриц всех порядков $k < n$ лемма справедлива. Случай $n = 1$ тривиален.

Обращаясь к матрице $T$ порядка $n$, мы можем, очевидно, считать, что не все ее элементы равны нулю. Пусть для определенности $t_{nn} \neq 0$ (этого всегда можно добиться перестановками строк и столбцов, так как при этом условия леммы не нарушаются).

Для матрицы $T_1 = \| t_{ij} \|_1^{n-1}$, очевидно, выполняются условия леммы, и по индуктивному предположению найдется состоящий из нулей минор $M_1$ матрицы $T_1$ размеров $p_1 \times q_1$:

$$p_1 + q_1 = n. \tag{124}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что минор $M_1$ расположен на пересечении первых $p_1$ строк и первых $q_1$ столбцов матрицы $T$.

Разобьем матрицу $T$ следующим образом на блоки:

$$T = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ q_1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\qquad\qquad}^{q_1} & \overbrace{\qquad}^{p_1} \end{array} \\ \left\| \begin{array}{c|c} M_1 & T_2 \\ \hline T_3 & \end{array} \right\| \end{array}$$

и рассмотрим квадратные матрицы $T_2$ и $T_3$ размеров $p_1 \times p_1$ и $q_1 \times q_1$.

Хотя бы одна из матриц $T_2$ или $T_3$ обладает тем свойством, что каждый нормальный набор ее элементов содержит нулевой элемент (в противном случае можно было бы образовать нормальный набор положительных элементов всей матрицы $T$). Пусть указанным свойством обладает матрица $T_2$. По предположению индукции, $T_2$ обладает состоящим из одних нулей минором $M_2$ размеров $p_2 \times q_2$:

$$p_2 + q_2 = p_1 + 1. \tag{125}$$

Очевидно, можно считать, что минор $M_2$ расположен в строках матрицы $T$ с номерами $1, 2, \ldots, p_2$ и в столбцах с номерами $q_1 + 1, q_1 + 2, \ldots, q_1 + q_2$. Легко видеть, что при этом минор матрицы $T$, расположенный в строках с номерами $1, 2, \ldots, p_2$ и в столбцах с номерами $1, 2, \ldots, q_1, q_1 + 1, \ldots, q_1 + q_2$, состоит из одних нулей, причем в силу (124) и (125)

$$p_2 + (q_1 + q_2) = q_1 + p_1 + 1 = n + 1.$$

Лемма 8 доказана.

Следствие. *Пусть элементы квадратной матрицы $T$ неотрицательны и сумма элементов в каждой строке и в каждом столбце равна $\omega > 0$. Тогда матрица $T$ обладает нормальным набором положительных элементов.*

В самом деле, допустив противное, мы сможем согласно лемме 8 указать минор матрицы $T$ размеров $p \times q$, $p + q = n + 1$, состоящий из одних нулей. Легко видеть, что сумма элементов матрицы $T$, расположенных в тех $p$ строках и тех $q$ столбцах, на пересечении которых расположен данный минор, равна $p\omega + q\omega = (n + 1)\omega$. Последнее, однако, невозможно, так как сумма всех элементов матрицы $T$ равна $n\omega$.

Условимся в дальнейшем матрицу $P$ порядка $n$ называть матрицей перестановки (permutation matrix), если она обладает нормальным набо-

*) См. [172].

ром элементов, каждый из которых равен единице, а все остальные элементы матрицы равны нулю. Ясно, что умножение матрицы $P$ на столбцевую матрицу $x$ приводит к некоторой перестановке элементов матрицы $x$.

Так как и, обратно, каждая перестановка элементов $x$ порождает некоторую матрицу $P$, то всего существует $n!$ различных матриц перестановок.

Докажем теперь следующее предложение, принадлежащее Биркгофу [153].

Лемма 9. *Множество всех двояко стохастических матриц совпадает с выпуклой оболочкой матриц перестановок. Другими словами, любая двояко стохастическая матрица $T$ может быть представлена в виде*

$$T=\sum_{s=1}^{n!}\tau_s P_s, \tag{126}$$

*где*

$$\tau_s\geqslant 0, \qquad \sum_{s=1}^{n!}\tau_s=1, \tag{127}$$

*а $P_s$ — матрицы перестановок. Обратно, правая часть* (126) *при условии* (127) *является двояко стохастической матрицей.*

Последняя часть утверждения почти очевидна. В самом деле, сумма элементов $i$-го столбца матрицы $\tau_s P_s$ равна $\tau_s$. Поэтому сумма элементов $i$-го столбца правой части (126) равна $\sum_{s=1}^{n!}\tau_s=1$. Аналогично в случае строк.

Доказательство первой части леммы существенно использует предыдущую лемму 8.

Пусть $T$ — двояко стохастическая матрица. Тогда по следствию из леммы 8 существует положительный набор элементов

$$t_{1j_1},\ t_{2j_2},\ \ldots,\ t_{nj_n} \tag{128}$$

этой матрицы. Пусть

$$\min_s t_{sj_s}=\tau_1 \qquad (\tau_1>0), \tag{129}$$

и пусть $P_1$ — матрица перестановки, у которой на местах элементов набора (128) стоят единицы. Рассмотрим матрицу

$$B_1=T-\tau_1 P_1. \tag{130}$$

В силу (129) элементы матрицы $B$ неотрицательны, а сумма элементов в каждой строке и в каждом столбце $B_1$ равна

$$1-\tau_1=\omega_1\geqslant 0.$$

Заметим, что число нулевых элементов $B_1$ во всяком случае на единицу больше, чем у матрицы $T$. Если $\omega_1=0$, то $B_1=0$, и лемма доказана. Если $\omega_1>0$, то $B_1$ обладает нормальным набором положительных элементов, и, повторив рассуждение, мы придем к неотрицательной матрице $B_2=T-\tau_1P_1-\tau_2P_2$, число нулевых элементов которой уже на два больше, чем у $T$. Суммы элементов в столбцах и строках $B_2$ равны $1-\tau_1-\tau_2=\omega_2\geqslant 0$. Ясно, что на некотором $k$-м шаге ($k<n^2-n+1$) этот процесс приведет к числу $\omega_k=1-\tau_1-\tau_2-\ldots-\tau_k=0$ и, следовательно, к матрице

$$B_k=T-\tau_1P_1-\tau_2P_2-\ldots-\tau_kP_k=0.$$

Действительно, при $k = n^2 - n + 1$ матрица $B_k$ уже не имеет нормального набора положительных элементов (у нее $n^2 - n + 1$ нулевых элементов), и, следовательно, $\omega_k$ не может быть положительным числом. Лемма 9 доказана.

2° Условимся каждой числовой последовательности $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ставить в соответствие точку в $n$-мерном координатном пространстве $\boldsymbol{D}_n$.

Пусть

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n \tag{131}$$

— некоторая последовательность. Рассмотрим $n!$ последовательностей, получающихся из последовательности (131) всевозможными перестановками ее элементов

$$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_n}. \tag{131'}$$

Сопоставив каждой последовательности (131′) точку в $\boldsymbol{D}_n$, обозначим через $K(\alpha)$ линейную выпуклую оболочку, натянутую на эти точки.

Легко видеть, что множество $K(\alpha)$ состоит из всех точек

$$x = \sum_{s=1}^{n!} \tau_s P_s \alpha, \tag{132}$$

где $\tau_s \geqslant 0$, $\sum\limits_{s=1}^{n!} \tau_s = 1$, $P_s$ — матрицы перестановок и $\alpha$ — столбцевая матрица с координатами (131).

Заметим попутно, что каждая точка принадлежит множеству $K(\alpha)$ вместе с $n!$ точками, получающимися перестановками ее координат. Для доказательства достаточно умножить равенство (132) на матрицу перестановки и воспользоваться тем, что произведение матриц перестановок есть матрица перестановки.

Мы теперь без труда докажем следующее предложение:

Лемма 10. *Для того чтобы последовательность*

$$\alpha_1' \geqslant \alpha_2' \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n' \tag{133}$$

*мажорировалась последовательностью* $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n$, *необходимо и достаточно, чтобы точка* $\alpha'$ *с координатами* (133) *принадлежала выпуклой линейной оболочке* $K(\alpha)$ *).

Доказательство леммы. Пусть сначала $\alpha' \in K(\alpha)$, тогда

$$\alpha' = \sum_{s=1}^{n!} \tau_s P_s \alpha, \tag{134}$$

где $\tau_s \geqslant 0$, $\sum\limits_{s=1}^{n!} \tau_s = 1$, а $P_s$ — матрицы перестановок. Следовательно, по лемме

$$\alpha' = T\alpha, \tag{135}$$

где $T$ — двояко стохастическая матрица, и значит, согласно лемме 1 последовательность (133) мажорируется последовательностью (131).

---

*) Это утверждение было установлено Радо [234], использовавшего при доказательстве теорему об отделении выпуклых множеств плоскостями. Другое доказательство, основанное на теореме о крайних точках выпуклых множеств, дано в работе [113], содержащей обстоятельный обзор литературы.

Идея приводимого здесь доказательства, опирающегося на лемму Биркгофа, принадлежит А. Хорну [191d].

Пусть теперь, наоборот, известно, что $\alpha' < \alpha$, тогда по лемме 1 найдется дважды стохастическая матрица $T$, с которой выполняется равенство (135). Этому равенству согласно лемме 9 можно придать вид (134), откуда уже следует, что $\alpha' \in K(\alpha)$.

3° Перейдем теперь к теоремам, составляющим цель настоящего параграфа.

Теорема 10 (см. [106а]). *Пусть $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ — эрмитовы операторы в $n$-мерном унитарном пространстве с собственными значениями*

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n \tag{136}$$

и

$$\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \ldots \geqslant \mu_n. \tag{137}$$

*Пусть $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ и пусть*

$$\nu_1 \geqslant \nu_2 \geqslant \ldots \geqslant \nu_n \tag{138}$$

*— собственные числа $\boldsymbol{C}$. Обозначим через $K_1$ выпуклую линейную оболочку точек*

$$(\lambda_1 + \mu_{j_1}, \lambda_2 + \mu_{j_2}, \ldots, \lambda_n + \mu_{j_n}) \tag{139}$$

*и через $K_2$ выпуклую линейную оболочку точек*

$$(\mu_1 + \lambda_{j_1}, \mu_2 + \lambda_{j_2}, \ldots, \mu_n + \lambda_{j_n}) \tag{140}$$

*(берутся всевозможные перестановки $j_1, j_2, \ldots, j_n$ чисел $1, 2, \ldots, n$).*

*Тогда точка $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ принадлежит пересечению оболочек $K_1$ и $K_2$.*

Доказательство. Рассмотрим точку

$$(\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \ldots, \nu_n - \lambda_n). \tag{141}$$

Согласно теореме 6 [см. неравенства (106)] последовательность, полученная упорядочением координат точки (141), мажорируется последовательностью $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$. На основании леммы 10 мы заключаем, что точка (141) принадлежит выпуклой линейной оболочке точек $(\mu_{j_1}, \mu_{j_2}, \ldots, \mu_{j_n})$. Отсюда следует, что $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n) \in K_1$. Поменяв ролями $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, легко получим, что $\nu \in K_2$. Таким образом, теорема 10 доказана.

Мы вывели теорему 10 из теоремы 6. Легко видеть, что и обратно, ввиду леммы 10 теорема 6 следует из теоремы 10*).

В связи с теоремой 10 сделаем несколько замечаний.

Обозначим через $M$ множество точек (138), отвечающих спектрам операторов $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$, где $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ — всевозможные эрмитовы операторы с данными спектрами (136) и (150). Утверждение теоремы 10 состоит в том, что $M \subset K_1 \cap K_2$.

Полное описание множества $M$ до сих пор не получено, несмотря на имеющиеся в этой области важные исследования ([76], [191с]).

В частности, в работе [191с] найдено полное описание множества $M$ для случая $n \leqslant 4$.

Приведем без доказательства относящийся к этому вопросу следующий просто формулируемый результат [106а]:

*Пусть при всех $i = 1, 2, \ldots, n-1$*

$$\mu_1 - \mu_n < \lambda_{i+1} - \lambda_i \tag{142}$$

*) В [106а] теорема 10 доказана другим методом.

*или*

$$\lambda_1 - \lambda_n < \mu_{i+1} - \mu_i. \tag{142'}$$

*Тогда*

$$M = K_1 \cap K_2.$$

Отметим здесь же, что при условии (142) или (142′) среди собственных значений оператора $C = A + B$ нет кратных. В самом деле, пусть, например, выполнено условие (142). Согласно теореме 10

$$\nu_{i+1} - \nu_i = \lambda_{i+1} - \lambda_i + \sum_{s=1}^{n!} \tau_s (\mu_{(s)} - \mu_{(s')}),$$

где

$$\tau_s \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \sum_{s=1}^{n!} \tau_s = 1.$$

Поэтому $\nu_{i+1} - \nu_i \geqslant \lambda_{i+1} - \lambda_i - \sum_{s=1}^{n!} \tau_s (\mu_1 - \mu_n) = \lambda_{i+1} - \lambda_i - (\mu_1 - \mu_n) > 0$ и, следовательно, $\nu_{i+1} \neq \nu_i$.

Сформулируем в геометрических терминах теорему, эквивалентную теореме 9.

Теорема 11 ([106]). *Пусть $A$ и $B$ — положительно определенные эрмитовы операторы с собственными числами $\lambda_s$ и $\mu_s$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$, занумерованными в убывающем порядке, и пусть*

$$\nu_1 \geqslant \nu_2 \geqslant \ldots \geqslant \nu_n$$

*— собственные числа оператора $C = AB$. Пусть $K_1$ — выпуклая линейная оболочка точек*

$$(\ln \lambda_1 + \ln \mu_{j_1}, \ln \lambda_2 + \ln \mu_{j_2}, \ldots, \ln \lambda_n + \ln \mu_{j_n})$$

*и $K_2$ — выпуклая линейная оболочка точек*

$$(\ln \mu_1 + \ln \lambda_{j_1}, \ln \mu_2 + \ln \lambda_{j_2}, \ldots, \ln \mu_n + \ln \lambda_{j_n}).$$

*Тогда точка с координатами $(\ln \nu_1, \ln \nu_2, \ldots, \ln \nu_n)$ принадлежит пересечению оболочек $K_1$ и $K_2$.*

Доказательство. Прологарифмировав неравенства (121), получим:

$$(\ln \nu_{i_1} - \ln \lambda_{i_1}) + (\ln \nu_{i_2} - \ln \lambda_{i_2}) + \ldots + (\ln \nu_{i_m} - \ln \lambda_{i_m}) \leqslant$$
$$\leqslant \ln \mu_1 + \ln \mu_2 + \ldots + \ln \mu_m.$$

И в этом случае при $m = n$ достигается равенство, ибо $|C| = |A||B|$.

Далее поступаем так же, как в теореме 10.

Отметим также следующую теорему о спектре произведения унитарных матриц, принадлежащую А. А. Нудельману и П. А. Шварцман (УМН, т. 13, вып. 6 (84), 1958).

Пусть $0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \varphi_2 \leqslant \ldots \leqslant \varphi_n < 2\pi$ — аргументы собственных чисел унитарной матрицы $U$, и пусть $0 \leqslant \psi_1 \leqslant \psi_2 \leqslant \ldots \leqslant \psi_n < 2\pi$ — аргументы собственных чисел унитарной матрицы $V$. Пусть, кроме того, $\varphi_n + \psi_n - \varphi_1 - \psi_1 < 2\pi$. Обозначим через $N_1$ выпуклую оболочку, натянутую на $n!$ векторов $(\varphi_1 + \psi_{i_1}, \varphi_2 + \psi_{i_2}, \ldots, \varphi_n + \psi_{i_n})$, а через $N_2$ — выпуклую оболочку векторов $(\psi_1 + \varphi_{i_1}, \psi_2 + \varphi_{i_2}, \ldots, \psi_n + \varphi_{i_n})$. Пусть, наконец, $0 \leqslant \omega_1 \leqslant \omega_2 \leqslant \ldots \leqslant \omega_n < 2\pi$ — аргументы собственных чисел матрицы $UV$; тогда точка с координатами $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ принадлежит пересечению выпуклых оболочек $N_1$ и $N_2$.

# ЛИТЕРАТУРА

## А. МОНОГРАФИИ, ОБЗОРЫ, УЧЕБНИКИ


1. Айнс Э. Л., Обыкновенные дифференциальные уравнения, ДНТВУ, 1939, гл. XIX.
2. Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, Гостехиздат, 1948, гл. I.
3. Ахиезер Н. И. и Крейн М. Г., О некоторых вопросах теории моментов, ДНТВУ, 1938.
4. Бернштейн С. Н., Теория вероятностей, 4-е изд., Гостехиздат, 1946.
5. Бохер М., Введение в высшую алгебру, ОНТИ, 1933.
6. Булгаков Б. В., Колебания, т. I, Гостехиздат, 1949, гл. I.
7. Гантмахер Ф. Р. и Крейн М. Г., Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, 2-е изд., Гостехиздат, 1950.
8. Гельфанд И. М., Лекции по линейной алгебре, 2-е изд., Гостехиздат, 1951.
9. Геронимус Я. Л., Теория ортогональных многочленов, Гостехиздат, 1950, гл. II.
10. Граев Д. А., Элементы высшей алгебры, Киев, 1914.
11. Еругин Н. П., Приводимые системы, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. XIII (1946).
12. Еругин Н. П., Метод Лаппо-Данилевского в теории линейных дифференциальных уравнений, Изд-во Ленингр. ун-та, 1956.
13. Каган В. Ф., Основания теории определителей, Гос. изд-во Украины, 1922.
14. Клейн Ф., Высшая геометрия, ГОНТИ, 1939, §§ 96—99.
15. Крейн М. Г., Основные положения теории λ-зон устойчивости канонической системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, Сб. «Памяти А. А. Андронова», Изд-во Академии наук СССР, 1955.
16. Крейн М. Г. и Наймарк М. А., Метод симметрических и эрмитовых форм в теории отделения корней алгебраических уравнений, Харьков, 1936.
17. Крейн М. Г. и Рутман М. А., Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха, УМН 3, № 1 (23) (1948).
18. Кудрявцев Л. Д., О некоторых математических вопросах теории электрических цепей, УМН 3, № 4 (26) (1948).
19. Курант Р. и Гильберт Д., Методы математической физики, т. I, 3-е изд., Гостехиздат, 1951, гл. I, II.
20. Курош А. Г., Курс высшей алгебры, 3-е изд., Гостехиздат, 1952.
21. Лаппо-Данилевский И. А., а) Теория функций от матриц и систем линейных дифференциальных уравнений, Гостехиздат, 1934.
    б) Mémoires sur la théorie des systèmes des équations différentielles linéaires, т. I, II, III, Труды Физико-матем. ин-та им. В. А. Стеклова, VI—VIII (1934—1936).
22. Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат, 1950.
23. Малкин И. Г., Теория устойчивости движения, Гостехиздат, 1952.
24. Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, Гостехиздат, 1948.
25. Марков А. А., Избранные труды, Гостехиздат, 1948.
26. Мейман Н. Н., Некоторые вопросы расположения корней полиномов, УМН 4, № 6 (34) (1949).
27. Наймарк Ю. И., Устойчивость линеаризованных систем, Изд-во Ленингр. Военно-воздушной инж. академии, 1949.
28. Потапов В. П., Мультипликативная структура $J$-нерастягивающих матриц функций, Труды Моск. матем. о-ва 4 (1955).
29. Романовский В. И., Дискретные цепи Маркова, Гостехиздат, 1948.
30. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. III, Физматгиз, 1958.
31. Стильтьес Т. И., Исследование о непрерывных дробях, ОНТИ, Харьков, 1936.

32. Фаддеев Д. К. и Соминский И. С., Сборник задач по высшей алгебре, 2-е изд., Гостехиздат, 1949.
33. Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, Гостехиздат, 1950.
34. Фрезер Р., Дункан Б., Коллар А., Теория матриц и ее приложения к дифференциальным уравнениям и динамике, ИЛ, 1950.
35. Харди Г., Литтлвуд Дж., Пойа Г., Неравенства, ИЛ, 1948.
36. Чебышев П. Л., Полное собрание сочинений, т. III, Изд-во АН СССР, 1948.
37. Чеботарев Н. Г. и Мейман Н. Н., Проблема Рауса — Гурвица для полиномов и целых функций, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. XXVI, Изд-во АН СССР (1949).
38. Четаев Н. Г., Устойчивость движения, Гостехиздат, 1946.
39. Шапиро Г. М. Высшая алгебра, 4-е изд., Учпедгиз, 1938.
40. Шилов Г. Е., Введение в теорию линейных пространств, Гостехиздат, 1952.
41. Широков П. А., Тензорное исчисление, ГТТИ, 1934.
42. Шрейер О. и Шпернер Е., а) Введение в линейную алгебру в геометрическом изложении, ОНТИ, 1934;
б) Теория матриц, ОНТИ, 1936.
43. Aitken A. C., Determinants and matrices Edinbourg, 5-е изд., 1948.
44. Bodewig E., Matrix calculus, Amsterdam, 1956; New York, Interscience publ., 1959.
45. Cahen G., Eléments de calcul matriciel, Paris, 1955.
46. Collatz L., Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen, Leipzig, 1949.
47. Cullis C. E., Matrices and determinoids, т. I—III, Cambridge, 1913—1925.
48. Jung H., Matrizen und Determinanten. Eine Einführung, Leipzig, 1953.
49. Gröbner W., Matrizenrechnung, München, 1956.
50. Kowalewski G., Einführung in die Determinantentheorie, Leipzig, 1909.
51. Lichnerowicz A., Algèbre et analyse linéaires, 2 ed., Paris, 1956.
52. Mac Duffee C. C., a) The theory of matrices, Berlin, 1933;
b) Vectors and matrices, New York, 1943.
53. Marden M., The geometry of the zeros of a polynomial in a complex variable, New York, 1949.
54. Mirsky L., An introduction to linear algebra, Oxford, 1955.
55. Muir, Sir Thomas, The theory of determinants, t. I—III, Cambridge, 1906—1923.
56. Muth P., Theorie und Anwendung der Elementarteilertheorie, Leipzig, 1899.
57. Parodi M., Sur quelques propriétés des valeurs caractéristiques des matrices carrées, Memorial des Sciences Mathématiques, № 118, Paris, 1952.
58. Perlis S., Theory of matrices, Cambridge, 1952.
59. Pickert G., Normalformen von Matrize, Enzykl. Math. Wissensch. I. 1.7. Band 1. Algebra und Zahlentheorie, 1. Teil B. Algebra. Heft 3, Teil 1. Leipzig, 1953.
60. Routh E. J., a) Stability of a given state of motion, London, 1877;
b) The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies, ч. II, 5-е изд., London, 1892.
61. Schlesinger L., a) Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen, Berlin, 1908,
b) Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage, Berlin, 1922.
62. Schmeidler W., Vorträge über Determinanten und Matrizen mit Anwendungen in Physik und Technik, Berlin, 1949.
63. Schwerdtfeger H., Introduction to linear algebra and the theory of matrices, Groningen, 1950.
64. Thrall R. and Tornheim L., Vector spaces and matrices, New York — London, 1957.
65. Turnbull H. W. and Aitken A. C., An introduction to the theory of canonical matrices, London, 1932.
66. Turnbull H. W., The theory of determinants, matrices and invariants, London, 1929.
67. Volterra V. et Hostinsky B., Opérations infinitésimales linéaires, Paris, 1938.
68. Wedderburn J. H. M., Lectures on matrices, New York, 1934.
69. Weyl H., Mathematische Analyse des Raumproblems, Berlin, 1923.
70. Winter A., Spektraltheorie der unendlichen Matrizen, Leipzig, 1929.
71. Zurmühl R., Matrizen und ihre technischen Anwendungen, 3-te Auf., Berlin, 1961.

## Б. СПЕЦИАЛЬНЫЕ СТАТЬИ


72. Азбелев Н. и Виноград Р., Процесс последовательных приближений для отыскания собственных чисел и собственных векторов, ДАН **83** (1952), 173—174.
73. Айзерман М. А., Об учете нелинейных функций от нескольких аргументов при исследовании устойчивости системы автоматического регулирования, Автоматика и телемеханика, т. VIII, № 1 (1947).
74. Аржаных И. С., Распространение метода А. Н. Крылова на полиномиальные матрицы, ДАН **81** (1951), 749—752.
75. Атрашенок П. В., Определение произвола в выборе матрицы, приводящей систему линейных дифференциальных уравнений к системе с постоянными коэффициентами, Вестник Ленингр. ун-та, сер. матем., физ. и хим. **2** (1953), 17—29.
76. Березин Ф. А. и Гельфанд И. М., Несколько замечаний к теории сферических функций на симметрических римановых многообразиях, Труды Московского матем. о-ва **5** (1956), 311—351.
77. Булгаков Б. В., Деление прямоугольных матриц, ДАН **85** (1952), 21—24.
78. Вержбицкий Б. Д., Некоторые вопросы теории рядов композиций нескольких матриц, Матем. сб. **5** (47) (1939), 505—512.
79. Вейленд Г., Представление векового уравнения в виде многочлена, перевод с англ., УМН **2**, № 4 (20) (1947), 128—158.
80. Виленкин Н. Я., Об одной оценке максимального собственного значения матрицы, Ученые записки Моск. гос. педагогического ин-та им. В. И. Ленина **CVIII**, № 2 (1957), 55—57.
81. Гантмахер Ф. Р., а) Геометрическая теория элементарных делителей по Круллю, Труды Одесского гос. ун-та, Математика, т. I (1935), 89—108.
б) К алгебраическому анализу метода акад. А. Н. Крылова преобразования векового уравнения. Труды II Всесоюзного матем. съезда, т. II (1934), 45—48.
в) On the classification of real simple Lie groups, Матем. сб. **5** (47) (1939), 217—250.
82. Гантмахер Ф. Р. и Крейн М. Г., а) К структуре ортогональной матрицы. Труды Физ.-мат. отдела ВУАН, Киев (1929), 1—8.
б) О нормальных операторах в эрмитовом пространстве, Известия Физ.-мат. об-ва при Казанском университете, т. IV, вып. 1, сер. 3 (1929—1930), 71—84.
в) Об одном специальном классе детерминантов в связи с интегральными ядрами Келлога, Матем. сб. **42** (1935), 501—508.
г) Sur les matrices oscillatoires, Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences, Paris, 201 (1935), 577—579.
д) Sur les matrices oscillatoires et complètement non-négatives, Compositio Mathematica **4** (1937), 445—476.
83. Гельфанд И. М., Лидский В. Б., О структуре областей устойчивости линейных канонических систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, УМН **10**, № 1 (63) (1955).
84. Гершгорин С. А., Ueber die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix, ИАН, сер. физ.-матем. (1931), 749—754.
85. Голубчиков А. Ф., а) Об одном матричном уравнении, Учен. зап. Сталингр. пед. ин-та, № 3 (1953), 71—82.
б) О структуре автоморфизмов комплексных простых групп Ли, ДАН **77**, 1 (1951), 7—9.
86. Граве Д. А., Малые колебания и некоторые предложения алгебры, ИАН, сер. физ.-матем. (1929), 563—570.
87. Гроссман Д. П., К задаче численного решения систем совместных линейных алгебраических уравнений, УМН **5**, № 3 (37) (1950), 87—103.
88. Данилевский А. М., О численном решении векового уравнения, Матем. сб. **2** (44) (1937), 169—172.
89. Дмитриев Н. А. и Дынкин Е. Б., а) О характеристических числах стохастических матриц, ДАН **49** (1945), 159—162.
б) Характеристические корни стохастических матриц, ИАН, матем. серия, **10** (1946), 167—194.
90. Донская Л. И., Построения решения линейной системы в окрестности регулярной особой точки в особых случаях, Вестник Ленингр. ун-та (1952), № 6.
б) О структуре решений системы линейных дифференциальных уравнений в окрестности регулярной особой точки, Вестник Ленингр. ун-та (1954), № 8, 55—64.

91. Дубнов Я. С., а) О совместных инвариантах системы аффиноров, Труды Всесоюзн. съезда матем. в Москве (1927), 236—237.
б) О симметрично сдвоенных ортогональных матрицах, М., Изв. асс. ин-тов ун-та (1927), 33—35.
в) О матрицах Дирака, М., Ученые зап. ун-та **2 : 2** (1934), 43—48.
91′. Дубнов Я. С. и Иванов В. К., О понижении степени аффинорных полиномов, ДАН СССР **41** (1943), 99—102.
92. Еругин Н. П., а) Sur la substitution exposante pour quelques systèmes irrégulières, Матем. сб. **42** (1935), 745—753.
б) Показательная подстановка иррегулярной системы линейных дифференциальных уравнений, ДАН СССР **17** (1937), 235—236.
в) О проблеме Римана для системы Гаусса. Л., Ученые зап. пед. ин-та **28** (1939), 293—304.
93. Ершов А. П., Об одном методе обращения матриц, ДАН СССР **100** (1955), 209—211.
93′. Каган В. Ф., О некоторых системах чисел, к которым приводят лоренцовы преобразования. М., Изв. асс. ин-тов ун-та (1927), 3—31.
94. Карпелевич Ф. И., О характеристических корнях матрицы с неотрицательными элементами, ИАН, матем. сер., **15** (1951), 361—383.
95. Коваленко К. Р. и Крейн М. Г., О некоторых исследованиях А. М. Ляпунова по дифференциальным уравнениям с периодическими коэффициентами ДАН **75** (1950), 495—499.
96. Колмогоров А. Н., Цепи Маркова со счетным множеством возможных состояний. М., Бюлл. ун-та (А) **1 : 3** (1937).
97. Котелянский Д. М., а) Про монотонні $n$-го порядка функції від матриць. Труды Одеського державного ун-ту, Збірник матем. відділу, т. 3 (1941), 103—114.
б) К теории неотрицательных и осцилляционных матриц., Укр. матем. журнал, **2**, № 2 (1950), 94—101.
в) О некоторых свойствах матриц с положительными элементами, Матем. сб. **31** (**73**) (1952), 497—506.
г) Об одном свойстве знакосимметрических матриц, УМН **8**, № 4 (56) (1953), 163—167.
д) О некоторых достаточных признаках вещественности и простоты матричного спектра, Матем. сб. **36**, № 1 (1955), 163—168.
е) О влиянии преобразования Гаусса на спектры матриц, УМН **10**, № 1 (1955), 117—121.
ж) О расположении точек матричного спектра, Укр. матем. журнал **7**, № 2 (1955), 131—133.
з) Оценки для определителей матриц с преобладающей главной диагональю, ИАН СССР, сер. матем., **20**, № 1 (1956), 137—144.
98. Кравчук М. Ф., а) До теорії перемінних матриць, Киев, Зап. физ.-матем. отд. АН УССР **1 : 2** (1924), 28—33.
б) До загальної теорії білінійних форм, Київ, Изв. Политехн. с.-х. ин-та **19** (1924), 17—18.
в) Про одне перетворення квадратичних форм, Київ. Зап. физ.-матем. отд. АН УССР **1 : 2** (1924), 87—90.
г) Про квадратичні форми та лінійні перетворення, Київ, Зап. физ.-матем. отд. АН УССР **1 : 3** (1924), 1—89.
д) Перемінні множини лінійних перетворень. Київ, Зап. с.-госп. ин-ту **1** (1926), 25—58.
е) Ueber vertauschbare Matrizen. Rend. circ. mat., Palermo **51**, (1927), 126—130.
ж) О структуре перестановочных групп матриц. Труды II Всесоюзн. матем. съезда, II (1934), 11—12.
99. Кравчук М. Ф. и Гольдбаум Я. С., а) Про групи коммутативних матриць, Київ, Труды авиац. ин-та (1929), 73—98 (1936), 12—23.
б) Об эквивалентности особенных пучков матриц Киев, Труды авиац. ин-та (1936), 5—27.
100. Красносельский М. А. и Крейн С. Г., Итерационный процесс с минимальными невязками, Матем. сб. **31** (**73**) (1952), 315—334.
101. Крейн М. Г., а) Добавление к работе «К структуре ортогональной матрицы», Труды физ.-мат. отдела ВУАН, Киев (1931), 103—107.
б) О спектре якобиевой формы в связи с теорией крутильных колебаний валов, Матем. сб. **40** (1933), 455—466.
в) Об одном новом классе эрмитовых форм, ИАН, сер. физ.-мат. (1933), 1259—1275.

г) Об узлах гармонических колебаний механических систем некоторого специального типа, Матем. сб. **41** (1934), 339—348.

д) Sur quelques applications des noyaux de Kellog aux problèmes d'oscillations. Сообщ. Харьк. матем. об-ва (4) **11** (1935), 3—19.

е) Sur les vibrations propres des tiges dont l'une des extrémités est encastrée et l'autre libre, там же (4) **12** (1935), 3—11.

ж) Обобщение некоторых исследований А. М. Ляпунова о линейных дифференциальных уравнениях с периодическими коэффициентами, ДАН **73** (1950), 445—448.

з) Об одном применении принципа неподвижной точки в теории линейных преобразований пространств с индефинитной метрикой, УМН **5**, № 2 (36) (1950), 180—190.

и) О применении одного алгебраического предложения в теории матриц монодромии, УМН **6**, № 1 (41) (1951), 171—177.

к) О некоторых вопросах, связанных с кругом идей Ляпунова в теории устойчивости, УМН **3**, № 3 (25) (1948), 166—169.

л) К теории целых матриц функций экспоненциального типа, Украинск. матем. ж. **3**, № 1 (1951), 164—173.

м) О некоторых задачах теории колебаний штурмовых систем, Прикл. матем. и механ. **16**, № 5 (1952), 555—568.

102. Крейн М. Г. и Наймарк М. А., а) Об одном преобразовании безутианты, приводящем к теореме Штурма, Харьков, Зап. матем о-ва (4) **10** (1933), 33—40.

б) О применении безутианты к вопросам отделения корней алгебраических уравнений, Труды Одесского гос. ун-та, Математика, т. I (1935), 51—69.

103. Крылов А. Н., О численном решении уравнения, которым в технических вопросах определяются частоты колебаний материальных систем, ИАН, серия физ.-мат. (1931), 491—539.

104. Лаппо-Данилевский И. А., а) Основные задачи теории систем линейных дифференциальных уравнений с произвольными рациональными коэффициентами, Труды 1-го Всесоюзн. съезда матем., ОНТИ (1936), 254—262.

б) Résolution algorithmique des problèmes réguliers de Poincaré et de Riemann, I, Журн. физ.-матем. о-ва, Л., **2 : 1** (1928), 94—120; II, там же, 121—154.

в) Théorie des matrices satisfaisantes à des systèmes des équations différentielles linéaires à coefficients rationnels arbitraires. Журн. физ.-матем. об-ва, Л., **2 : 2** (1928), 41—80.

105. Лившиц М. С. и Потапов В. П., Теорема умножения характеристических матриц-функций, ДАН СССР **72** (1950), 164—173.

106. Лидский В. Б., а) О собственных значениях суммы и произведения симметрических матриц, ДАН **75** (1950), 769—772.

б) Осцилляционные теоремы для канонической системы дифференциальных уравнений, ДАН **102** (1955), 877—880.

107. Липин Н. В., О регулярных матрицах. Л., Труды ин-та инж. ж.-д. транспорта **9** (1934), 105.

108. Лопшиц А. М., а) Векторное решение задачи о симметрически сдвоенных матрицах, Труды Всеросс. съезда матем. в Москве (1927), 186—187.

б) Характеристическое уравнение наинизшей степени для аффинора и применение его к интегрированию дифференциальных уравнений, Труды сем. по вект. и тенз. исчислению, вып. II—III (1935).

в) Численный метод нахождения собственных значений и собственных плоскостей линейного оператора, там же, т. VII, 233—259.

г) Экстремальная теорема для гиперэллипсоида и ее применение к решению системы линейных алгебраических уравнений, там же, т. IX (1952), 183—197.

109. Лузин Н. Н., а) О методе акад. А. Н. Крылова составления векового уравнения, ИАН, сер. физ.-матем. (1931), 903—958.

б) О некоторых свойствах перемещающего множителя в методе акад. А. Н. Крылова, ИАН, сер. физ.-матем. (1932), I, 596—638; II, 735—762; III, 1065—1102.

в) К изучению матричной теории дифференциальных уравнений, Атом. и телемех. 5 (1940), 3—66.

110. Любич Ю. И., Оценки для оптимальной детерминизации недетерминированных автономных автоматов, Сиб. матем ж. **5** (1964), 337—355.

111. Люстерник Л. А., а) Нахождение собственных значений функций на электрической схеме, Электричество **11** (1946), 67—68.

б) Об электрическом моделировании симметрических матриц, УМН **4 : 2** (30) (1949), 198—200.

Люстерник Л. А. и Прохоров А. М., Определение собственных значений и функций некоторых операторов с помощью электрической цепи, ДАН 55 (1947), 579—582; ИАН, ОФН 11 (1947), 141—145.
113. Маркус А. С., Собственные и сингулярные числа суммы и произведения линейных операторов, УМН, т. XIX, вып. 4 (118) (1965), стр. 93—123.
114. Маянц Л. С., Метод уточнения корней вековых уравнений высоких степеней и численного анализа их зависимости от параметров соответствующих матриц, ДАН 50 (1945), 121—124.
115. Нейгауз М. Г. и Лидский В. Б., Об ограниченности решений линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, ДАН 77 (1951), 183—193.
116. Папкович П. Ф., Об одном методе разыскания корней характеристического определителя, Прикл. матем. и мех. 1 (1933), 314—318.
117. Понтрягин Л. С., Эрмитовы операторы в пространстве с индефинитной метрикой, ИАН, сер. матем. 8 (1944), 243—280.
118. Потапов В. П., О голоморфных ограниченных в единичном круге матрицах-функциях, ДАН 72 (1950), 849—853.
119. Птак В., Об одной комбинаторной теореме и ее применении к неотрицательным матрицам, Чехосл. матем. ж. 8 (1958), 487—495.
120. Романовский В. И., а) Un théorème sur les zéros des matrices non-négatives, Bull. Soc. Math. France 61 (1933), 213—219.
б) Recherches sur les chaînes de Markoff, Acta Math. 66 (1935), 147—251.
121. Рехтман-Ольшанская П. Г., Об одном утверждении академика А. А. Маркова, УМН, т. XII, № 3 (75) (1959), 181—187.
122. Сарымсаков Т. А., О последовательности стохастических матриц, ДАН СССР 47 (1945), 331—333.
123. Севастьянов Б. А., Теория ветвящихся случайных процессов, УМН, т. VI, вып. 6 (1951), 46—99.
124. Семендяев К. А., О нахождении собственных значений и инвариантных многообразий матриц посредством итераций, Прикл. матем. и мех. 3 (1943), 193—221.
125. Смогоржевский А. С., По унітарні типи циркулянтів, Киев, Журн. матем. цикла АН УССР 1 (1932), 89—91.
126. Смогоржевский А. С. и Кравчук М. Ф., Про ортогональні перетворення, Киев, Зап. ин-та нар. просв. 2 (1927), 151—156.
127. Сулейманова Х. Р., а) Стохастические матрицы с действительными характеристическими числами, ДАН 66 (1949), 343—345.
б) О характеристических числах стохастических матриц, Учен. записки Моск. гос. пед. ин-та, сер. матем., 71, вып. 1 (1953), 167—197.
128. Султанов Р. М., Некоторые свойства матриц с элементами из некоммутативного кольца, Баку, Труды сектора матем. АН АзССР 2 (1946), 11—17.
129. Сушкевич А. К., Про деякі типи особливих матриць, Учені записки Харьківського держ. ун-ту 10 (1937), 1—16.
130. Турчанинов А. С., О некоторых приложениях исчисления матриц к линейным дифференциальным уравнениям, Одесса, Учен. зап. высш. шк. 1 (1921), 41—48.
131. Фаге М. К., а) Обобщение неравенства Адамара об определителях, ДАН 54 (1946), 765—768.
б) О симметризуемых матрицах, УМН 6, № 3 (43) (1951), 153—156.
132. Фаддеев Д. К., О преобразовании векового уравнения матрицы, Л., Труды Ин-та инж. пром. строит. 4 (1937), 78—86.
133. Хлодовский И. Н., К теории общего случая преобразования векового уравнения методом академика А. Н. Крылова, ИАН, сер. физ.-мат., 8 (1933), 1077—1102.
134. Хуа Ло-ген, а) Геометрия симметрических матриц над полем действительных чисел, ДАН 53 (1946), I, 99—102; II, 199—200.
б) Автоморфизмы действительной симплектической группы, ДАН 53, (1946), 307—310.
135. Хуа Ло-ген, Б. А. Розенфельд, Геометрия прямоугольных матриц и ее применения к вещественной проективной и неевклидовой геометрии, Известия высших учебных заведений СССР, Математика, 1 (1957), 233—246.
136. Цейтлин М. Л., Применение матричного исчисления к синтезу релейно-контактных схем, ДАН 86 (1952), 525—528.
137. Циммерман Г. К., Разложение нормы матрицы по произведениям норм ее строк, Научные зап. Николаевск. гос. пед. ин-та, 4 (1953), 130—135.

138. Шварцман А. П., О матрицах Грина самосопряженных конечноразностных операторов, Труды Одесского гос. ун-та, Математика, т. III (1941), 35—77.
139. Шиффнер Л. М., а) Разложение интегралов системы дифференциальных уравнений с правильными особыми точками в ряды по степеням элементов дифференциальных подстановок, Труды физ.-мат. ин-та им. Стеклова **9** (1935), 235—266.
б) О степени матрицы, Матем. сб. **42 : 3** (1935), 385—394.
140. Шостак Р. Я., О признаке условной определенности квадратичной формы переменных, подчиненных линейным связям, и о достаточном признаке условного экстремума функции переменных, УМН **9**, № 2 (1954), 199—206.
141. Шрейдер Ю. А., Решение систем линейных совместных алгебраических уравнений, ДАН **76** (1951), 651—655.
142. Штаерман И. Я., Новый метод решения некоторых алгебраических уравнений, которые имеют применения в математической физике и технике, Киев, Журн. ин-та матем. АН УССР **1** (1934), 83—89; **4** (1934), 9—20.
143. Штаерман И. Я. и Ахиезер Н. И., К теории квадратичных форм, Киев, Изв. политехн. с.-х. ин-та **19** (1934), 116—123.
144. Шура-Бура М. Р., Оценка ошибок при численном обращении матриц высокого порядка, УМН **6**, № 4 (44) (1951), 121—150.
145. Яглом И. М., Квадратичные и кососимметрические билинейные формы в вещественном симплектическом пространстве, Труды семинара по векторному и тензорному анализу (Москва, Гостехиздат) **8** (1950), 364—381.
146. Якубович В. А., Некоторые критерии приводимости системы дифференциальных уравнений, ДАН **66** (1949), 577—580.
147. Afriat S., Composite matrices, Quart. J. Math. **5**, N 18, 1954, 81—98.
148. Aitken A. C., Studies in practical mathematics. The evaluation with applications of a certain triple product matrix, Proc. Roy. Soc., Edinbourgh **57**, 1936—1937.
149. Amir Moéz Ali R., Extreme properties of eigenvalues of a hermitian transformation and singular values of the sum and product of linear transformations. Duke Math. J. **23** (1956), 463—476.
150. Baker H. F., On the integration of linear differential equations, Proc. Lond. Math. Soc. **35** (1903), 333—378.
151. Barankin E. W., Bounds for characteristic roots of a matrix, Bull. Amer. Math. Soc. **51** (1945), 767—770.
152. Bartsch H., Abschätzungen für die kleinste charakteristische Zahl einer positiv-definiten Matrix, ZAM **34**, № 1—2 (1954), 72—74.
153. Birkhoff G. D., a) Equivalent singular points of ordinary linear differential equations, Math. Ann. **74** (1913), 134—139.
b) Tres observations sobre el algebra lineal, Revista Universidad Nacional Tucuman, ser. A, 5 (1946), 147—151.
154. Birkhoff Garrett, On product integration, Journ. of Math. and Phys., т. XVI (1937), 104—132.
155. Bellman R., Notes on matrix theory, Amer. Math. Monthly **60** (1953), 173—175; **62**, № 3 (1955), 172—173; № 8 (1955), 571—572; № 9 (1955), 647—648; **64**, № 3 (1957), 189—191.
156. Bellman R., Hoffman A., On a theorem of Ostrowski, Arch. Math. **5**, № 1—3 (1954), 123—127.
157. Bendat J., Scherman S., Monotone and convex operator functions, Trans. Amer. Math. Soc. **9**, № 1 (1955), 58—71.
158. Berge C., Sur une propriété des matrices doublement stochastiques, C. r. Acad. Sci. **241**, № 3 (1955), 269—271.
159. Bjerhammar A., Rectangular reciprocal matrices, with specially references to geodesic calculus, Bull. geod. int. (1951), 188—220.
160. Bott R., Duffin R., On the algebra of networks, Trans. Amer. Math. Soc. **74**, № 1 (1953), 99—109.
161. Brauer A., Limits for the characteristic roots of a matrix, Duke Math. J. I, **13** (1946), 387—395; II, **14** (1947), 21—26; III, **15** (1948), 871—877; IV, V, **19** (1952), 73—91, 553—563; VI, **22**, 1955, 387—395.
b) Über die Lage der charakteristischen Wurzeln einer Matrix, J. reine und angew. Math. **192**, № 2 (1953), 113—116.
c) Bounds for the rations of the coordinates of the characteristic vectors of a matrix, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **41**, № 3 (1955), 162—164.
d) The theorems of Ledermann and Ostrowski on positive matrices Duke, Math. J. **24**, № 2 (1957), 265—274.

162. Brenner J., Bounds for determinants, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **40** (1954), 452—454; Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 532—534; C. R. Acad. Sci. **238** (1954), 555—556.
163. Bruijn N., Inequalities concerning minors and eigenvalues, Nieuw. arch. wiskunde 4, № 1 (1956), 18—35.
164. Bruijn N., Szekeres C., On some exponential and polar representations of matrices, Nieuw arch. wiskunde **3**, № 1 (1955), 20—32.
165. Cayley A., A memoire on the theory of matrices, London, Phil. Trans. **148** (1857), 17—37; Coll Works **2**, 476—496.
166. Cohen H. E., On a lemma of Stiltjes on matrices, Amer. Math. Monthly **56** (1949), 328—329.
167. Collatz L., a) Einschließungssatz für die charakteristischen Zahlen von Matrizen, Math. Zs. **48** (1942), 221—226.
b) Über monotone Systeme linearer Ungleichungen, J. reine und angew. Math. **194**, № 1—4 (1955), 193—194.
168. Cremer H., Die Verringerung der Zahl der Stabilitätskriterien bei Voraussetzung positiver Koeffizienten der charakteristischen Gleichung, ZAM **33**, № 7 (1953), 222—227.
169. Cremer H., Effertz F. H., Über die algebraischen Kriterien für die Stabilitat von Regelungssystemen. Math. Ann. **137**, 4 (1959), 328—350.
170. Diliberto S., On system of ordinary differential equations. Contributions to the theory of non-linear oscilations, Princeton (1950), 1—38.
171. Dobsch O., Matrixfunktionen beschränkter Schwankung, Math. Zs. **43** (1937), 353—388.
172. Dulmage L. and Halperin I., On a theorem of Frobenius — König and J. von Neumann's game of hide and seek, Trans. Roy. Soc. Canada, ser. III, **49** (1955), 23—29.
173. Duncan W., Reciprocation of triply-partitioned matrices, J. Roy. Aeronaut. Soc. **60**, № 542 (1956), 131—132.
174. Egervary E., a) On hypermatrices whose blocks are commetable in pairs and their application in lattice-dynamics, Acta scient. math. **15**, № 3—4 (1954), 211—222.
b) On a lemma of Stieltjes on matrices, Acta Scient. Math. **15**, № 2 (1954), 99—103.
175. Epstein M., Flanders H., On the reduction of a matrix to diagonal form, Amer. Math. Monthly **62**, № 3 (1955), 168—171.
176. Faedo S., Un nuovo problema di stabilita per le equazioni algebriche a coefficienti reali, Aun. Scuola notm. super. Pisa Sci. fis. e. mat. **7**, № 1—2 (1953), 53—63.
177. Fan Ky, a) On a theorem of Weyl concerning eigenvalues of linear transformations, Proc. Nat. Acad. Sc. I, **35** (1949), 652—655; II, 36 (1950), 31—35.
b) Maximum properties and inequalities for the eigenvalues of completely continuous operators, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **37** (1951), 760—766.
c) A comparision theorem for eigenvalues of normal matrices, Pacific J. Math. **5** (1955), 911—913.
d) Some inequalities concerning positive-definite Hermitian matrices, Proc. Cambridge Philos. Soc. **51**, № 3 (1955), 414—421.
178. Fan Ky, Hoffman A., Some metric inequalities in the space of matrices, Proc. Amer. Math. Soc. **6**, № 1 (1955), 111—116.
179. Fan Ky, Housenholder A. S., A note concerning positive matrices and M-matrices. Monatsh. Math. **63**, № 3 (1959), 265—270.
180. Fan Ky, Paul Gordon, Imbedding conditions for Hermitian and normal matrices, Canad. J. Math. **9** (1957), 298—304.
181. Fan Ky, Todd J., A determinantial inequality, J. London Math. Soc. **30**, № 1 (1955), 58—64.
182. Frobenius G., a) Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen, J. reine und angew. Math. **84** (1877), 1—63.
b) Ueber die cogredienten Transformationen der bilinearen Formen, Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Phys.-math. Klasse, Berlin (1896), 7—16.
c) Ueber die vertauschbaren Matrizen, ibidem (1896), 601—604.
d) Ueber Matrizen aus positiven Elementen, ibidem (1908), 471—476; (1909), 514—518.
e) Ueber Matrizen aus nicht negativen Elementen, ibidem (1912), 456—477.
f) Ueber das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen, ibidem (1894), 241—256; 407—431.

183. Gautschi W., Bounds of matrices with regard to an hermitian metric, Compositio math. 12, № 1 (1954), 1—16.
184. Goddard L., An extension of a matrix theorem of A. Brauer, Proc. Intern Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam (1954), 22—23.
185. Haynsworth E., Bounds for determinants with dominant main diagonal, Duke Math. J. 20, № 2 (1953), 199—209.
186. Hellman O., Die Anwendung des Matrizanten bei Eigenwertaufgaben, ZAM 35, № 8 (1955), 300—315.
187. Hjelmslev J., Introduction à la théorie des suites monotones, Oversight over Kgl. Danske Videnskaberns Selbskabs Forhandlinger, 1914, 1—74.
188. Hoffman A., Taussky Olga, A characterisation of normal matrices, J. Res. Nat. Bur. Standards 52, № 1 (1954), 17—19.
189. Hoffman A., Wielandt H., The variation of the spectrum of a normal matrix, Duke Math. J. 20, № 1 (1953), 37—39.
190. Holladay I., Varga R., On powers of non-negative matrices, Proc. Amer. Math. Soc. 9 (1958), 631—634.
191. Horn A., a) On the eigenvalues of a matrix with prescribed singular values, Proc. Amer. Math. Soc. 5, № 1 (1954), 4.
b) On the singular values of product of completely continuous operators, Proc. Nat. Acad. USA 36, № 7 (1950), 374—375.
c) Eigenvalues of sums of Hermitian matrices, Pacific Journal of Math. 12, № 1 (1962), 225—241.
d) Doubly stochastic matrices and the diagonal of a rotation matrix, Amer. Journ. Math. 76, № 3 (1954), 620—630.
192. Hsu P. L., a) On symmetric, orthogonal, and skew symmetric matrices, Proc. Edinburgh Math. Soc., ser. 2, 10 (1953), 37—44.
b) On a kind of transformations of matrices, Acta Math. Sinica 5, № 3, 333—347.
193. Hoteling H., Some new methods in matrix calculation, Ann. Math. Stat. 14, № 1 (1943).
194. Hua Loo-keng, a) On the theory of automorphic functions of a matrix variable, Amer. J. Math. 66 (1944), I, 470—488; II, 531—563.
b) Geometries of matrices, Trans. Amer. Math. Soc. 57 (1945), 441—490.
c) Orthogonal classification of Hermitian matrices, Trans. Amer. Math. Soc. 59 (1946), 508—523.
d) Inequalities involving determinants, Acta Math. Sinica 5 (1955), 463—470.
195. Hermite C., Sur le nombre des racines d'une équation algébrique comprise entre des limites données, J. für die reine und angew.Math. 52 (1856), 39—51.
196. Hurwitz A., Ueber die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt, Math. Ann. 46 (1895), 273—284.
197. Ingraham M. H., On the reduction of a matrix to its rational canonical form, Bull. Amer. Math. Soc. 39 (1933), 379—382.
198. Jonescu D., O identitate importantá ai descompunere a unei forme bilineare intro sumá de produse, Gaz., mat. si fiz. A7, № 7 (1955), 303—312.
199. Jongmans F., Problemes matriciels lies an ring, Bull, de la Soc. Roy. sci de Liege 29 (1960), 3—4, 51—60.
200. Ishak M., Sur les spectres des matrices, Sémin. P. Dubreil et Ch. Pisot. Fac. sci. Paris 9, № 14 (1955—1956), 1—14.
201. Khan N. A., The characteristic roots of the product of matrices, Quart. J. Math. 7, № 26 (1956), 138—143.
202. Kowalewski G., Natürliche Normalformen linearer Transformationen, Leipz. Ber. 69 (1917), 325—335.
203. König D., Ueber Graphen und ihre Anvendungen, Math. Ann. (1916), 453—465.
204. Kraus F., Ueber konvexe Matrixfunktionen, Math. Zs. 41 (1936), 18—42.
205. Kronecker L., Algebraische Reduktion der Scharen bilinearer Formen, Sitzungsber. Akademie Berlin (1890), 763—776.
206. Krull W., Theorie und Anwendung der verallgemeinerten Abelschen Gruppen, Sitzb. Heidl. Akad. (1926), 1.
207. Ledermann W., a) Reduction of singular pencils of matrices, Proc. Edinb. Math. Soc., cep. 2, 4 (1935), 92—105.
b) Bounds for the greatest latent root of positive matrix, J. of Lond. Math. Soc. 25 (1950), 265—268.
208. Liénard et Chipart, Sur la signe de la partie réelle des racines d'une équation algébrique, J. de Math. pure et appl. (6) 10 (1914), 291—346.
209. Löwner K., a) Ueber monotone Matrixfunktionen, Math. Zs. 38 (1933), 177—216.

b) Some classes of functions defined by difference or differential inequalities, Bull. Amer. Math. Soc. **56** (1950), 308—319.

210. Marcus M., a) A remark on a norm inequality for square matrices, Proc. Amer. Math. Soc. **6**, № 1 (1955), 117—119.
b) An eigenvalue inequality for the product of normal matrices, Amer. Math. Monthly **63**, № 3 (1956), 173—174.

211. Marcus M., McGregor J. L., Extremal properties of Hermitian matrices, Canad. J. Math. **8** (1956), 524—531.

212. Mirsky L., a) An inequality for positive definite matrices, Amer. Math. Monthly **62**, № 6 (1955), 428—430.
b) The norm of adjugate and inverse matrices, Arch. Math. **7** (1956), 276—277.
c) The spread of a matrix, Mathematica **3** (1956), 127—130.
d) Inequalities for normal and Hermitian matrices, Duke Math. J. **24**, № 4 (1957), 591—599.
e) Symmetric gange functions and unitarily invariant norms, Quart. J. Math. **11** (1960), 50—59.

213. Mitrović D., Conditions graphiques pour que toutes les racines d'une équation algébrique soient à parties réelles négatives, C. r. Acad. Sci. **240**, № 11 (1955), 1177—1179.

214. Moore, Bull. Amer. Math. Soc. **26** (1920), 394—395.

215. Morgenstern D., Eine Verschärfung der Ostrowski'schen Determinantenabschätzung, Math. Zs. **66** (1956), 143—146.

216. Motzkin T., Taussky Olga, Pairs of matrices with property W, Trans. Amer. Math. Soc. I, **73**, № 1 (1952), 108—114; II, **80**, № 2 (1955), 387—401.

217. Nagy Bela, Remark on S. N. Roy's paper «A useful theorem in matrix theory», Proc. Amer. Math. Soc. **7**, № 1 (1956).

218. Neumann J., a) Approximative of matrices of high order, Portug. Math. **3** (1942), 1—62.
b) Some matrix-inequalities and metrization of matrix-space, Известия Научно-исследовательского ин-та математики и механики при Томском государств. ун-те им. В. В. Куйбышева, т. 1, вып. 3 (1937).

219. Okamoto M., On a certain type of matrices with an application to experimental design., Osaka Math. J. **6**, № 1 (1954), 73—82.

220. Oppenheim A., Inequalities connected with definite Hermitian forms, Amer. Math. Monthly **61**, № 7 (1954), 463—466.

221. Orlando L., Sul problema di Hurwitz relativo alle parti realli delle radici di un'equazione algebrica, Math. Ann. **71** (1911), 233—245.

222. Ostrowski A., a) Bounds for the greatest latent root of a positive matrix, J. of London Math. Soc. **27** (1952), 253—256.
b) Sur quelques applications des fonctions convexes et concaves au sens de J. Schur, J. Math. pures et appl. **31** (1952), 253—292.

223. Ostrowski A., c) On nearly triangular matrices, J. Res. Nat. Standards **52**, № 6 (1954), 344—345.
d) On the spektrum of one-parametric family of matrices, J. reine und angew. Math. **193**, № 3/4 (1954), 143—160.
e) Sur les determinants à diagonale dominante, Bul. Soc. math. Belgique **7**, № 1 (1955), 46—51.
f) Note on bounds for some determinants, Duke Math. J. **22**, № 1 (1955), 95—102.
g) Über Normen von Matrizen, Math. Zs. **63**, № 1 (1955), 2—18.

224. Papulis A., Limits on the zeros of a network determinant, Quart. Appl. Math. **15**, № 2 (1957), 193—194.

225. Parodi M., a) Remarques sur la stabilité, C. R. Acad. Sci. Paris **228** (1949), 51—52, ibidem, 807—808, 1198—1200.
b) Sur une propriété des racines d'une equation qui intervient en mécanique, C. R. Acad. Sci. **241**, № 16 (1955), 1019—1021.
c) Sur la localisation des valeurs caracteristiques des matrices dans le plan complexe, C. R. Acad. sci. **242**, № 22 (1956), 2617—2618.

226. Peano G., Intégration par séries des équations différentielles linéaires, Math. Ann. **32** (1888), 450—456.

227. Penrose R., a) A generalized inverse for matrices, Proc. Cambridge Phil. Soc. **51**, № 3 (1955), 406—413.
b) On best approximate solutions of linear matrix equations, Proc. Cambridge Phil. Soc. **52**, № 1 (1956), 17—19.

228. Perfect H., a) On matrices with positive elements, Quart. J. Math. **2** (1951), 286—290.

b) On positive stochastic matrices with real characteristic roots, Proc. Cambridge Phil. Soc. **48** (1952), 271—276.

c) Methods of constructing certain stochastic matrices, I, Duke Math. J. **20**, № 3 (1953), 395—404; II, **22**, № 2 (1955), 303—311.

d) A lower bound for the diagonal elements of a non-negative matrix, J. London Math. Soc. **31** (1956), 491—493.

229. Perkins P., A theorem on regular matrices, Pacif. J. Math. **11** (1961), 1529—1533.

230. Perron O., a) Jacobischer Kettenbruchalgorithmus, Math. Ann. **64** (1907), 1—76.

b) Ueber Matrizen, ibidem, **64** (1907), 248—263.

231. Phillips H. B., Functions of matrices, Amer. J. Math. **41** (1919), 266—278.

232. Pignani, On certain matrix equations, Amer. Math. Monthly (1957), 573—576.

233. Polya G., Remark on Weyl's note, Proc. Nat. Acad. USA **36** (1950), 49—50.

234. Rado R., An ineguality, J. London Math. Soc. **27** (1952), 1—6.

235. Rasch G., Zur Theorie und Anwendung des Produktintegrals, J. für die reine und angew. Math. **171** (1934), 65—119.

236. Rham G. de, Sur un théorème de Stieltjes relatif à certain matrices, Acad. Sci. Serbe, Publ. Inst. Math., 1952, 133—154.

237. Richter H., a) Über Matrixfunktionen, Math. Ann. **122** (1950), 16—35.

b) Bemerkung zur Norm der inversen einer Matrix, Arch. Math. **5**, № 4—6 (1954), 447—448.

c) Zur Abschätzung von Matrizennormen , Math. Nachrichten **18** (1959), 178—187.

238. Roth W., a) On the characteristic polynomial of the product of two matrices, Proc. Amer. Math. Soc. **5**, № 1 (1954), 1—3.

b) On the characteristic polynomial of the product of several matrices, Proc. Amer. Math. Soc. **7**, № 4 (1956), 578—582.

239. Roy S., A useful theorem in matrix theory, Proc. Amer. Math. Soc. **5**, № 4 (1954), 635—638.

240. Schneider H., a) An inequality for latent rosts applied to determinants with dominant principal diagonal, J. London Math. Soc. **28**, 1, № 109 (1953), 8—20.

b) A pair of matrices with property W, Amer. Math. Monthly **62**, № 4 (1955), 247—249.

c) A matrix problem concerning projections, Proc. Edinbourgh Math. Soc. **10**, № 3 (1956), 129—130.

d) The elementary divisors, associated with 0, of a singular $I$-matrix, Proc. Edingbourgh Math. Soc. **10**, № 3 (1956), 108—122.

241. Schoda K., Über mit einer Matrix vertauschbaren Matrizen, Math. Zs. **29** (1929), 696—712.

242. Schoenberg J., a) Ueber variationsvermindernde lineare Transformationen, Math. Zs. **32** (1930), 321—328.

b) Zur Abzählung der reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen, Math. Zs. **38** (1933), 546.

243. Schoenberg T., Whitney A., A theorem on polygons in dimensions with application to variation-diminishing linear transformations, Comp. Math. **9** (1951), 141—160.

244. Schur J., Über die charakteristischen Wurzeln einer linearen Substitution mit einer Anwendung auf die Theorie der Integralgleichungen, Math. Ann. **66** (1909), 488—510.

245. Sedláček I., O incidenčnich maticich orientovaných grafů, Časop. pěst. mat. **84** (1959), 303—316.

246. Siegel C. L., Symplectic Geometry, Am. J. Math. **65** (1943), 1—86.

247. Stenzel H., Ueber die Darstellbarkeit einer Matrix als Produkt von zwei symmetrischen Matrizen, Math. Zs. **15** (1922).

248. Stöhr A., Oszillationstheoreme für die Eigenvectoren spezieller Matrizen, J. reine und angew. Math., **B. 185**, № 3 (1943).

249. Taussky Olga, a) Bounds for characteristic roots of matrices, Duke Math. J. **15** (1948), 1043—1044.

b) A determinantal inequality of H. P. Robertson, J. Washington Acad. of Science **47**, № 8 (1957), 263—264.

250. Toeplitz O., Das algebraische Analogen zu einem Satz von Fejer, Math. Zs. **2** (1918), 187—197.

251. Turnbull H. W., On the reduction of singular matrix pencils, Proc. Edinbourgh Math. Soc., cep. 2, 4 (1935), 67—76.

252. Vivier M., Note sur les structure unitaires et paraunitaires, C. R. Acad. sci. **240**, № 10 (1955), 1039—1041.
253. Volterra V., Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari, Mem. Soc. Ital., Sci. (3) **6** (1887), 1—104; (3) **12** (1902), 3—68.
254. Walker A., Weston J., a) Inclusion theorems for the eigenvalues of a normal matrix, J. London Math. Soc. **24** (1944), 28—31.
b) Ein Einschliesungssatz für charakteristische Wurzeln normaler Matrizen, Arch. der Math. **1**, 1948/49, 348—352.
c) Die Einschliesung von Eigenwerten normaler Matrizen, Math. Ann. **121** (1949), 234—241.
255. Weierstrass K., Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen, Monatsh. Akad. Wissenschaft, Berlin (1867), 310—338.
256. Wellstein J., Ueber symmetrische, alternierende und orthogonale Normalformen von Matrizen, J. für die reine und angew. Math. **163** (1930), 166—182.
257. Weyl H., Inequalities between the two kinds of eigenvalues of a linear transformation, Proc. Nat. Acad. Sci. **35** (1949), 408—411.
258. Weyr E., Zur Theorie der bilinearen Formen, Monatsh. für Math. und Phys. (1890), 163—236.
259. Whitney A., A reduction theorem for totaly positive matrices, J. Analyse Math. **2** (1952), 88—92.
260. Wielandt H., a) Unzerlegbare, nicht negative Matrizen, Math. Zs. **52** (1950), 642—648.
b) Lineare Scharen von Matrizen mit reellen Eigenwerten, Math. Zs. **53** (1950), 219—225.
c) Pairs of normal matrices with property W, J. Res. Nat. Bur. Standards **51**, № 2 (1953), 89—90.
d) Inclusions theorems for eigenvalues, Nat. Bur. Standards, Appl. Math. № 29 (1953), 75—78.
e) An extremum property of sums of eigenvalues, Proc. Amer. Math. Soc. **6**, № 1 (1955), 106—110.
f) On eigenvalues of sums of normal matrices, Pacif. J. Math. **5**, № 4 (1955), 633—638.
261. Wong Y., a) An inequality for Minkowski matrices, Proc. Amer. Math. Soc. **4**, № 1 (1953), 137—141.
b) On non-negativ-valued matrices, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **40**, № 2 (1954), 121—124.
262. Winter A., On criteria for linear stability, J. Math. Mech. **6** (1957), 301—309.

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ


Алгоритм Гаусса 41
— — обобщенный 55
— —, механическая интерпретация 45
— Рауса 472

Базис векторного пространства 66
— ортонормированный 224

Вектор 65
— главный пучка квадратичных форм 281
— — — эрмитовых форм 301
— собственный линейного оператора 82
— — матрицы 82
—, аннулирующий многочлен 171
—, координаты 67
—, минимальный многочлен 172
—, норма 409
—, относительный аннулирующий многочлен 177
—, — минимальный многочлен 177
Векторы линейно зависимые и линейно независимые см. Зависимость линейных векторов
Вероятность абсолютная 390
— — предельная 391
— — — средняя 393
— переходная 381
— — предельная 386
— — — средняя 393
Вычитание матриц 16

Делитель элементарный квадратной матрицы 147
— — λ-матрицы 145
Дефект линейного оператора 77
— матрицы 77
Дискриминант квадратичной формы 267
— эрмитовой формы 298
Дополнение ортогональное 241

Жорданова форма см. Форма нормальная квадратной матрицы жорданова (верхняя)

Зависимость линейная векторов 66
— — —, критерий Грама 225
Задача Рауса — Гурвица обобщенная 533
Закон инерции квадратичных форм 269
— — эрмитовых форм 299

Индекс импримитивности 377
— Коши 469
Интеграл мультипликативный 434
— — в комплексной области 439
— от матрицы 127

Компонента линейного оператора кососимметрическая 255
— — — симметрическая 255
Конгруэнтность пучков симметрических матриц 345
— симметрических матриц 269
Координаты вектора 67
Корень из матрицы 212
Критерий Адамара 406
— — для блочных матриц 413
— Грама линейной зависимости векторов 225
— Льенара и Шипара 508
— Ляпунова 425
— подобия матриц 150
— Рауса 475
— Рауса — Гурвица 486
— Фидлера 416
— эквивалентности λ-матриц 144
— — строгой регулярных пучков матриц 332
— — — сингулярных пучков матриц 344

Линейный оператор см. Оператор линейный
Логарифм матрицы 219
λ-матрица 135
—, инвариантные многочлены 143
—, ранг 143
—, элементарные делители 145
—, — операции (левые и правые) 135 и 136

Матрица 13
— ассоциированная $p$-я 30
— бесконечная вполне положительная 524
— — ганкелева 495
— блочная 55
— Вандермонда обобщенная 395
— вполне неотрицательная 395
— — положительная 395
— ганкелева 301
— главная пучка квадратичных форм 282
— Гурвица 483
— двояко стохастическая 536
— диагональная 14
— единичная 24
— жорданова (верхняя и нижняя) 153
— идемпотентная 208
— импримитивная 377
— инволютивная 81
— интегральная 418
— квадратная 13
— —, аннулирующий многочлен 98
— —, дефект 77
— —, естественная нормальная форма (первая и вторая) 152
— —, жорданова нормальная форма (верхняя и нижняя) 153, 189 и 154, 190
— —, инвариантные многочлены 147
— —, компоненты 111
— —, минимальный многочлен 98
— —, перестановка рядов 352
— —, порядок 13
— —, разложение на треугольные множители 49
— —, след 96
— —, функция от нее 103
— —, характеристический многочлен 92
— —, элементарные делители 145
— квазидиагональная 56
— квазитреугольная (верхняя и нижняя) 56
— комплексная кососимметрическая 313
— — —, нормальная форма 322
— — неособенная, полярное разложение 317
— — ортогональная 313
— — —, нормальная форма 327
— — симметрическая 313
— — —, нормальная форма 319
— кососимметрическая 29
— Ляпунова 422
— многочленная см. $\lambda$-матрица
— — квадратная 87
— неособенная 26
— неотрицательная 352
— неразложимая 352
— —, индекс импримитивности 377
— нильпотентная 208
— нормальная 244
— обратная 26
— ограниченная 132
— ортогональная 238
— особенная 26
— осцилляционная 398
Матрица положительная 352
— преобразующая 150
— примитивная 377
— присоединенная 92
— — приведенная 99
— проекционная 81
— простой структуры 85
— прямоугольная 13
— псевдообратная 32
— разложимая 352
— —, нормальная форма 372
— Рауса 484
— симметрическая 29
— сопряженная 29
— столбцевая 14
— стохастическая 381
— строчная 14
— транспонированная 29
— треугольная (верхняя и нижняя) 28
— унитарная 238, 244
— фундаментальная 86
— характеристическая 92
— эрмитова 244
— якобиева 395
—, интеграл 127
—, корень из нее 212
—, логарифм 219
—, минор 14
—, многочлен от нее 24
—, производная 124
—, ранг 14
—, степень 24
—, функция от нее см. Функция от матрицы
Матрицант 430
Матрицы перестановочные (коммутирующие) 18
— подобные 80
—, вычитание 16
—, сложение 15
—, умножение 17
—, — на число 16
Метод Гревилля нахождения псевдообратной матрицы 39
— Крылова 190
— Лагранжа приведения к сумме квадратов квадратичной формы 271
— — — — — — эрмитовой формы 299
— построения преобразующей матрицы 159
— Фаддеева 96
— Якоби приведения к сумме квадратов квадратичной формы 272
— — — — — — эрмитовой формы 299
Метрика 223
— евклидова 225
— эрмитова 223
— — неотрицательная 223
— — положительно определенная 223
Минор 14
— главный 14
— почти главный 398
Многочлен аннулирующий вектора 171
— — матрицы 98
— — пространства 172

Многочлен инвариантный квадратной матрицы 145
— — λ-матрицы 143
— интерполяционный Лагранжа — Сильвестра 104
— матричный 87
— — регулярный 87
— —, левое и правое деление 87
— минимальный вектора 172
— — — относительный 177
— — матрицы 98
— — пространства 172
— от матрицы 24
— характеристический 82, 92
Модуль линейного оператора левый 249
— — — правый 249

Неравенства Вейля 251, 542
— Неймана — Хорна 539
— Сильвестра 78
Неравенство Адамара 230
— — обобщенное 231
— Бесселя 235
— Буняковского 232
— детерминантное для вполне неотрицательных матриц 396
Норма вектора 409
— линейного оператора 410
— матрицы 410

Оператор линейный 70
— — в $\boldsymbol{R}$ 79
— — вещественный 256
— — инволютивный 81
— — кососимметрический 255
— — неособенный 81
— — нормальный в евклидовом пространстве 254
— — — в унитарном пространстве 242
— — ортогональный 255
— — — второго рода 255
— — — первого рода 255
— — проекционный 81
— — простой структуры 84
— — псевдообратный 265
— — симметрический 254
— — — неотрицательный 254
— — — положительно определенный 254
— — сопряженный 240
— — транспонированный 254
— — унитарный 243
— — эрмитов 243
— — — неотрицательный 248
— — — положительно определенный 248
— —, дефект 77
— —, инвариантное подпространство 173
— —, кососимметрическая и симметрическая компоненты 255
— —, левый и правый модули 249
— —, полярное разложение в евклидовом пространстве 260
— —, полярное разложение в унитарном пространстве 249
Оператор линейный, ранг 77
— —, собственные векторы 82
— —, характеристические (собственные) числа 82
Операторы линейные, сложение 71
— —, умножение 71
— —, умножение на число 73
Операция элементарная 135
— — левая 136
— — правая 136
Определитель Грама 226
— —, геометрический смысл 229
— Гурвица 485
— Маркова 521, 525
Ортогонализация ряда векторов 233

Параметры Маркова 518
Перестановка рядов в квадратной матрице 352
Подпространство 68
— инвариантное 173
— координатное 353
— циклическое 178
Порядок матрицы 13
Предел последовательности матриц 49
Преобразование координат 70
— — ортогональное 238
— — унитарное 238
— линейное 15
— Ляпунова 428
Приведение квадратичной формы к главным осям 279
— — — к сумме квадратов 271
— эрмитовой формы к главным осям 300
Проблема Рауса — Гурвица 468
Проектирование ортогональное 227
Проекционная матрица 81
Проекционный оператор 81
Производная мультипликативная 434
— от матрицы 124
Пространство 65
— бесконечномерное 66
— векторное см. Пространство
— евклидово 225
— конечномерное 66
— унитарное 223
— —, ортонормированный базис 224
—, аннулирующий многочлен 171
—, базис 66
—, метрика см. Метрика
—, минимальный многочлен 172
Псевдообратная матрица 32
Пучок квадратичных форм 281
— — — регулярный 281
— — —, главная матрица 282
— — —, главный вектор 281
— — —, характеристические числа 281
— — —, характеристическое уравнение 281
— матриц 331
— — регулярный 332
— — —, каноническая форма 334
— — сингулярный 332
— — —, каноническая форма 340

Пучок матриц сингулярный, ранг 335
— эрмитовых форм 301
— — — регулярный 301
— — —, главный вектор 301
— — —, характеристические числа 301
— — —, характеристическое уравнение 301

Равенство Парсеваля 237
Разложение квадратной матрицы на треугольные множители 49
— полярное комплексной матрицы 317
— — линейного оператора в евклидовом пространстве 260
— — — — в унитарном пространстве 249
Ранг квадратичной формы 268
— линейного оператора 77
— матрицы 14
— — многочленной 143
— сингулярного пучка матриц 335
— эрмитовой формы 298
Ряд векторов ортогональный 233
— — полный 236
— —, ортогонализация 233

Сигнатура квадратичной формы 270
— эрмитовой формы 299
Система линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами 419
— — — — — — — приводимая 423
— — — — — — — — аналитическая 461
— — — — — — —, интегральная матрица 419
— — — — — — —, преобразование Ляпунова 422
— — — — с постоянными коэффициентами 124
Системы векторов биортонормированные 241
Скелетное разложение матрицы 32
След матрицы 96
Сложение линейных операторов 71
— матриц 15
Собственное число см. Число собственное
Степень матрицы 24
Схема Рауса 474
Сходимость в среднем 236

Теорема Безу обобщенная 92
— Гамильтона — Кэли 93
— Гершгорина 415
— Еругина 426
— Кронекера об ассоциированных матрицах 86
— Ляпунова 479
— Маркова 528
— Неймана — Хорна 541
— Ольги Тауски 409
— о расщеплении вторая 179
— — — первая 173
Теорема о расщеплении третья 181
— Перрона 354
— Рауса 475
— Рауса — Гурвица 483
— Стильтьеса 512
— Фробениуса о ганкелевых формах 305
— — о неотрицательных матрицах 355
— Чебышева — Маркова 531
— Штурма 471
— Шура 242
Тождество Сильвестра детерминантное 47

Умножение линейных операторов 71
— матриц 17
— на число линейного оператора 73
— — — матрицы 16
Уравнение матричное многочленное 209
— характеристическое (вековое) матрицы 82
— — пучка квадратичных форм 281
— — — эрмитовых форм 301

Форма билинейная 267
— квадратичная 225, 267
— — вещественная 267
— — ганкелева 301
— — неотрицательная 276
— — неположительная 276
— — отрицательно определенная 276
— — положительно определенная 225, 276
— — сингулярная 267
— —, дискриминант 267
— —, закон инерции 269
— —, приведение к главным осям 279
— —, приведение к сумме квадратов 271
— —, ранг 268
— —, сигнатура 270
— —, формула Якоби 272
— нормальная квадратной матрицы естественная первая 152
— — — — — вторая 152
— — — — жорданова верхняя 153, 189
— — — — — нижняя 154, 190
— — комплексной кососимметрической матрицы 322
— — — ортогональной матрицы 327
— — — симметрической матрицы 319
— — разложимой матрицы 372
— эрмитова 224, 297
— — билинейная 297
— — неотрицательная 224, 300
— — неположительная 300
— — отрицательно определенная 300
— — положительно определенная 224, 300
— — сингулярная 298
— —, дискриминант 298
— —, закон инерции 299
— —, приведение к главным осям 300
— —, формула Якоби 299
Формула Бине — Коши 20
— Орландо 488

Формула основная для функции от матрицы 111
— Чебышева — Маркова 532
— Якоби для квадратичной формы 272
— — для эрмитовой формы 299
Формулы Кэли 252
— — в евклидовом пространстве 261
Функция от матрицы 103
— — —, основная формула 111
— от многих матриц аналитическая 465

Характеристическое число см. Число характеристическое

Цепочка векторов жорданова 188
— — — нижняя 189
Цепь Маркова однородная 381
— — — ациклическая 386
— — — неразложимая 386
— — — правильная 386
— — — разложимая 386
— — — регулярная 386
Цепь Маркова однородная циклическая 386

Число характеристическое (собственное) линейного оператора 82
— — пучка квадратичных форм 281
— — — — —, экстремальные свойства 286
— — — эрмитовых форм 301
— — — — —, экстремальные свойства 301

Эквивалентность линейных двучленов 148
— λ-матриц 137
— — левая 137
— — правая 137
— —, критерий 144
— рядов векторов 233
— строгая пучков матриц 331
— — — — регулярных, критерий 332
— — — — сингулярных, критерий 344
Элементарный делитель см. Делитель элементарный