оператора A (они суть соответственно левый и правый модули оператора A), а унитарные множители U и U_1 определяются однозначно лишь в случае неособенного A.

Из (78) легко находим:

$$AA^* = H^2, \quad A^*A = U^{-1}H^2U. \tag{82}$$

Если A — нормальный оператор ($AA^* = A^*A$), то из (82) вытекает:

$$H^2U = UH^2. \tag{83}$$

Поскольку $H = \sqrt{H^2} = g(H^2)$ (см. § 11), то из (83) следует перестановочность U с H. Обратно, если H и U перестановочны между собой, то из (82) вытекает, что A — нормальный оператор. Теорема доказана.

Вряд ли необходимо особо отмечать то, что наряду с операторными равенствами (78) и (79) имеют место соответствующие матричные равенства.

Характеристические числа оператора $H = \sqrt{AA^*}$ (которые в силу (82) являются также характеристическими числами оператора $H_1 = \sqrt{A^*A}$), называют иногда сингулярными числами оператора A [1]).

Разложения (78) и (79) являются аналогом представления комплексного числа z в виде $z = ru$, где $r = |z|$, а $|u| = 1$.

Пусть теперь $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — полная ортонормированная система собственных векторов произвольного унитарного оператора U. Тогда

$$Ux_k = e^{if_k}x_k, \quad (x_kx_l) = \delta_{kl} \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n), \tag{84}$$

где f_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — вещественные числа. Определим эрмитов оператор F равенствами

$$Fx_k = f_kx_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{85}$$

Тогда [2])

$$e^{iF}x_k = e^{if_k}x_k \qquad (k = 1, \ldots, n). \tag{85'}$$

Из (84) и (85′) следует

$$U = e^{iF}. \tag{86}$$

Таким образом, унитарный оператор U всегда представим в виде (86), где F — эрмитов оператор. Обратно, если F — эрмитов оператор, то $U = e^{iF}$ — унитарный оператор.

Разложения (78) и (79) вместе с (86) дают следующие равенства:

$$A = He^{iF}, \tag{87}$$

$$A = e^{iF_1}H_1, \tag{88}$$

---

[1]) Если характеристические числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ и сингулярные числа $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ линейного оператора A занумеровать так, чтобы

$$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_n|, \quad \varrho_1 \geqslant \varrho_2 \geqslant \ldots \geqslant \varrho_n,$$

то имеют место неравенства Вейля

$$|\lambda_1| \leqslant \varrho_1, \quad |\lambda_1| + |\lambda_2| \leqslant \varrho_1 + \varrho_2, \ldots |\lambda_1| + \ldots + |\lambda_n| \leqslant \varrho_1 + \ldots + \varrho_n.$$

Более подробно об этом см. в Добавлении на стр. 542. (*Прим. ред.*)

[2]) $e^{iF} = r(F)$, где $r(\lambda)$ — интерполяционный многочлен Лагранжа для функции e^{iF} в точках $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

где $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{F}_1$ — эрмитовы операторы и притом $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{H}_1$ неотрицательны.

Разложения (87) и (88) являются аналогом представления комплексного числа z в виде $z=re^{i\varphi}$, где $r\geqslant 0$ и φ — вещественные числа.

Замечание. В равенстве (86) оператор $\boldsymbol{F}$ не определяется однозначно заданием оператора $\boldsymbol{U}$. Действительно, оператор $\boldsymbol{F}$ определяется при помощи чисел f_k $(k=1, 2, \ldots, n)$, а к каждому из этих чисел можно прибавить произвольную кратность 2π, не изменяя исходных равенств (84). Выбирая надлежащим образом эти слагаемые, кратные 2π, мы можем достичь того, чтобы из $e^{if_k}=e^{if_l}$ всегда следовало: $f_k=f_l$ $(1\leqslant k, l\leqslant n)$. Тогда можно определить интерполяционный многочлен $g(\lambda)$ равенствами

$$g(e^{if_k})=f_k \qquad (k=1, 2, \ldots, n). \tag{89}$$

Из (84), (85) и (89) будет следовать:

$$\boldsymbol{F}=g(\boldsymbol{U})=g(e^{i\boldsymbol{F}}). \tag{90}$$

Совершенно аналогично можно нормировать выбор $\boldsymbol{F}_1$ так, чтобы

$$\boldsymbol{F}_1=h(\boldsymbol{U}_1)=h(e^{i\boldsymbol{F}}), \tag{91}$$

где $h(\lambda)$ — некоторый многочлен.

В силу (90) и (91) перестановочность $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{U}$ ($\boldsymbol{H}_1$ и $\boldsymbol{U}_1$) влечет перестановочность $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{F}$ (соответственно $\boldsymbol{H}_1$ и $\boldsymbol{F}_1$) и наоборот. Поэтому согласно теореме 8 оператор $\boldsymbol{A}$ будет нормальным тогда и только тогда, когда в формуле (87) $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{F}$ (или в формуле (88) $\boldsymbol{H}_1$ и $\boldsymbol{F}_1$) перестановочны между собой, если только характеристические числа оператора $\boldsymbol{F}$ (соответственно $\boldsymbol{F}_1$) надлежащим образом нормированы.

В основе формулы (86) лежит тот факт, что функциональная зависимость

$$\mu=e^{if} \tag{92}$$

переводит n произвольных чисел на вещественной оси $f_1, f_2, \ldots, f_n$ в некоторые числа $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, лежащие на окружности $|\mu|=1$, и наоборот.

Трансцендентную зависимость (92) можно заменить рациональной зависимостью

$$\mu=\frac{1+if}{1-if}, \tag{93}$$

которая переводит вещественную ось $f=\bar{f}$ в окружность $|\mu|=1$; при этом бесконечно удаленная точка на вещественной оси переходит в точку $\mu=-1$. Из (93) находим:

$$f=i\frac{1-\mu}{1+\mu}. \tag{94}$$

Повторяя рассуждения, которые привели нас к формуле (86), мы из (93) и (94) получим две взаимно обратные формулы:

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{U}&=(\boldsymbol{E}+i\boldsymbol{F})(\boldsymbol{E}-i\boldsymbol{F})^{-1},\\ \boldsymbol{F}&=i(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{U})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{U})^{-1}.\end{aligned}\right\} \tag{95}$$

Мы получили формулы Кэли. Эти формулы устанавливают взаимно однозначное соответствие между произвольными эрмитовыми опе-

раторами F и теми унитарными операторами U, у которых среди характеристических чисел нет -1 [1]).

Формулы (86), (87), (88) и (95), конечно, будут верны и тогда, когда мы в них все операторы заменим соответствующими матрицами.

Пользуясь полярным разложением матрицы A ранга r:

$$A=U_1H_1 \qquad (H_1=\sqrt{A^*A},\ U^*U=E) \tag{96}$$

и формулой (71)

$$H_1=V^{-1}\,\|\mu_i\delta_{ik}\|_1^n\,V \qquad (V^*V=E,\ \mu_1>0,\ \ldots,\ \mu_r>0,\ \mu_{r+1}=\ldots=\mu_n=0), \tag{97}$$

можно произвольную квадратную матрицу A ранга r представить в виде произведения

$$A=UMV, \tag{98}$$

где $U=U_1V^{-1}$ и V — унитарные матрицы ($U^*U=V^*V=E$), а M — диагональная матрица

$$M=\{\mu_1,\ \ldots,\ \mu_r,\ 0,\ \ldots,\ 0\} \qquad (\mu_1>0,\ \ldots,\ \mu_r>0), \tag{98'}$$

в которой диагональные элементы являются характеристическими числами правого модуля $H_1=\sqrt{A^*A}$ (а следовательно, и левого модуля $H=\sqrt{AA^*}$) матрицы A.

Формулу (98) можно записать в виде

$$A=X\Delta Y^*, \tag{99}$$

где X и Y — $n\times r$-матрицы, образованные первыми r столбцами унитарных матриц U и V^*, а Δ — диагональная матрица r-го порядка:

$$\Delta=\{\mu_1,\ \ldots,\ \mu_r\} \qquad (\mu_1>0,\ \ldots,\ \mu_r>0). \tag{100}$$

Пусть теперь A — произвольная прямоугольная $m\times n$-матрица ранга r. Примем сначала, что $m\leqslant n$. Дополним матрицу A нулевыми строками до квадратной матрицы A_1, после чего применим формулу

$$A_1=\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}=X_1\Delta Y^*. \tag{101}$$

Представим $n\times r$-матрицу X_1 в виде

$$X_1=\begin{array}{c} r \\ \begin{pmatrix} X \\ \widehat{X} \end{pmatrix}\begin{array}{l} \}\,m \\ \}\,n-m \end{array} \end{array}.$$

Тогда из равенства (101) найдем:

$$A=X\Delta Y^* \tag{102}$$

и

$$\widehat{X}\Delta Y^*=0. \tag{103}$$

Умножим обе части этого равенства справа на Y. Тогда, поскольку $Y^*Y=E$, получим: $\widehat{X}\Delta=0$, т. е. $\widehat{X}=0$. Но тогда столбцы матрицы X, как и столбцы матрицы Y, унитарно-ортогональны между собой и нормированы.

Случай $m\geqslant n$ сводится к случаю $m\leqslant n$, если применить сначала формулу к матрице A^*, а затем из полученного равенства определить матрицу A. Мы установили следующую теорему [2]):

Теорема 9. *Произвольная прямоугольная $m\times n$-матрица ранга r всегда представима в виде произведения*

$$A=X\Delta Y^*, \tag{104}$$

---

[1]) Особую точку -1 можно заменить любым числом μ_0 ($|\mu_0|=1$). Для этого вместо (93) надо взять дробно-линейную функцию, отображающую вещественную ось $f=\bar{f}$ на окружность $|\mu|=1$ и переводящую точку $f=\infty$ в точку $\mu=\mu_0$. При этом соответствующим образом видоизменятся формулы (94) и (95).

[2]) См. Lanzoc C., Linear systems in selfadjoint form, Amer. Math. Monthly, v. 65, 1958, стр. 665—779; Schwerdtfeger H., Direct proof of Lanzoc's decomposition theorem; там же, v. 67, 1960, стр. 855—860.

где X и Y — унитарные по отношению к столбцам прямоугольные матрицы соответственно размеров $m \times r$ и $n \times r$, а Δ — диагональная матрица r-го порядка с положительными диагональными элементами $\mu_1, \ldots, \mu_r$ [1]).

Полагая $B = X$, $C = \Delta Y$, мы приходим к установленному в главе I (стр. 32) разложению

$$A = BC, \tag{105}$$

где матрицы B и C имеют соответствующие размеры $m \times r$ и $r \times n$. Однако доказанная теорема дает уточнение этого разложения. Она утверждает, что множители B и C могут быть выбраны так, чтобы в матрице B все столбцы, а в матрице C все строки были унитарно-ортогональны между собой.

§ 13. Линейные операторы в евклидовом пространстве

Рассмотрим n-мерное евклидово пространство $\boldsymbol{R}$. Пусть дан произвольный линейный оператор $\boldsymbol{A}$ в $\boldsymbol{R}$.

Определение 10. Линейный оператор $\boldsymbol{A}'$ называется *транспонированным* оператором для оператора $\boldsymbol{A}$, если для любых векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ из $\boldsymbol{R}$:

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}'\boldsymbol{y}). \tag{106}$$

Существование и единственность транспонированного оператора устанавливаются совершенно аналогично тому, как это делалось в § 8 для сопряженного оператора в унитарном пространстве.

Транспонированный оператор обладает следующими свойствами:

1° $(\boldsymbol{A}')' = \boldsymbol{A}$,

2° $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})' = \boldsymbol{A}' + \boldsymbol{B}'$,

3° $(\alpha\boldsymbol{A})' = \alpha\boldsymbol{A}'$ (α — вещественное число),

4° $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})' = \boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'$.

Введем ряд определений.

Определение 11. Линейный оператор $\boldsymbol{A}$ называется *нормальным*, если

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}.$$

Определение 12. Линейный оператор $\boldsymbol{S}$ называется *симметрическим*, если

$$\boldsymbol{S}' = \boldsymbol{S}.$$

Определение 13. Симметрический оператор $\boldsymbol{S}$ называется *неотрицательным*, если для любого вектора $\boldsymbol{x}$ из $\boldsymbol{R}$

$$(\boldsymbol{S}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geqslant 0.$$

Определение 14. Симметрический оператор $\boldsymbol{S}$ называется *положительно определенным*, если для любого вектора $\boldsymbol{x} \neq 0$ из $\boldsymbol{R}$

$$(\boldsymbol{S}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) > 0.$$

Определение 15. Линейный оператор $\boldsymbol{K}$ называется *кососимметрическим*, если

$$\boldsymbol{K}' = -\boldsymbol{K}.$$

---

[1]) $\mu_1, \ldots, \mu_r$ — отличные от нуля характеристические числа матрицы $\sqrt{AA^*}$ (или $\sqrt{A^*A}$).

Произвольный линейный оператор $\boldsymbol{A}$ всегда представим, и притом однозначно, в виде

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{S}+\boldsymbol{K}, \tag{107}$$

где $\boldsymbol{S}$ — симметрический, а $\boldsymbol{K}$ — кососимметрический оператор.

Действительно, из (107) следует:

$$\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{S}-\boldsymbol{K}. \tag{108}$$

Из (107) и (108) вытекает:

$$\boldsymbol{S}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}'), \quad \boldsymbol{K}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}'). \tag{109}$$

Обратно, формулы (109) всегда определяют симметрический оператор $\boldsymbol{S}$ и кососимметрический $\boldsymbol{K}$, для которых имеет место равенство (107).

$\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{K}$ носят название *симметрической* и *кососимметрической компонент* оператора $\boldsymbol{A}$.

Определение 16. Оператор $\boldsymbol{O}$ называется *ортогональным*, если он сохраняет метрику пространства, т. е. если для любых векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ из $\boldsymbol{R}$

$$(\boldsymbol{O}\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{O}\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}). \tag{110}$$

Равенство (110) в силу (106) можно переписать так: $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{O}'\boldsymbol{O}\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$. Отсюда следует:

$$\boldsymbol{O}'\boldsymbol{O}=\boldsymbol{E}. \tag{111}$$

Обратно, из (111) вытекает (110) (при произвольных векторах $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$)[1]. Из (111) следует: $|\boldsymbol{O}|^2=1$, т. е.

$$|\boldsymbol{O}|=\pm 1.$$

Мы будем ортогональный оператор $\boldsymbol{O}$ называть *оператором первого рода*, если $|\boldsymbol{O}|=1$, и *второго рода*, если $|\boldsymbol{O}|=-1$.

Симметрический, кососимметрический, ортогональный операторы суть частные виды нормального оператора.

Рассмотрим произвольный ортонормированный базис в данном евклидовом пространстве. Пусть линейному оператору $\boldsymbol{A}$ в этом базисе соответствует матрица $A=\|a_{ik}\|_1^n$ (здесь все a_{ik} — вещественные числа). Читатель без труда покажет, что транспонированному оператору $\boldsymbol{A}'$ отвечает в этом же базисе транспонированная матрица $A'=\|a'_{ik}\|_1^n$, где $a'_{ik}=a_{ki}$ $(i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Отсюда вытекает, что в ортонормированном базисе нормальному оператору $\boldsymbol{A}$ отвечает нормальная матрица A $(AA'=A'A)$, симметрическому оператору $\boldsymbol{S}$ отвечает симметрическая матрица $S=\|s_{ik}\|_1^n$ $(S'=S)$, кососимметрическому оператору $\boldsymbol{K}$ — кососимметрическая матрица $K=\|k_{ij}\|_1^n$ $(K'=-K)$ и, наконец, ортогональному оператору $\boldsymbol{O}$ — ортогональная матрица O $(OO'=E)$[2].

Аналогично тому, как это делалось в § 8 для сопряженного оператора, здесь устанавливается следующее предложение:

Если некоторое подпространство $\boldsymbol{S}$ в $\boldsymbol{R}$ инвариантно относительно линейного оператора $\boldsymbol{A}$, то ортогональное дополнение $\boldsymbol{T}$ к $\boldsymbol{S}$ в $\boldsymbol{R}$ инвариантно относительно оператора $\boldsymbol{A}'$.

---

[1]) Ортогональные операторы в евклидовом пространстве образуют группу (эту группу называют ортогональной).

[2]) Исследованию структуры ортогональных матриц посвящены работы [91б, 108а, 82а]. Ортогональную матрицу, как и ортогональный оператор, мы будем называть матрицей первого или второго рода в зависимости от того, $|O|=+1$ или $|O|=-1$.

Для исследования линейных операторов в евклидовом пространстве $\boldsymbol{R}$ мы расширим евклидово пространство $\boldsymbol{R}$ до некоторого унитарного пространства $\widetilde{\boldsymbol{R}}$. Это расширение проведем следующим образом:

1. Векторы из $\boldsymbol{R}$ будем называть «вещественными» векторами.

2. Введем в рассмотрение «комплексные» векторы $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{y}$, где $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ — вещественные векторы, т. е. $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{R}$.

3. Естественным образом определяются операции сложения комплексных векторов и умножения на комплексное число. Тогда совокупность всех комплексных векторов образует n-мерное векторное пространство $\widetilde{\boldsymbol{R}}$ над полем комплексных чисел, содержащее в себе как часть $\boldsymbol{R}$.

4. В $\widetilde{\boldsymbol{R}}$ вводится эрмитова метрика так, чтобы в $\boldsymbol{R}$ она совпадала с имеющейся там евклидовой метрикой. Читатель легко проверит, что искомая эрмитова метрика задается следующим образом:

Если $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+i\boldsymbol{v}$ и $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\in\boldsymbol{R})$, то

$$(\boldsymbol{z}\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{x}\boldsymbol{u})+(\boldsymbol{y}\boldsymbol{v})+i\,[(\boldsymbol{y}\boldsymbol{u})-(\boldsymbol{x}\boldsymbol{v})].$$

Полагая при этом $\overline{\boldsymbol{z}}=\boldsymbol{x}-i\boldsymbol{y}$ и $\overline{\boldsymbol{w}}=\overline{\boldsymbol{u}}-i\boldsymbol{v}$, будем иметь:

$$(\overline{\boldsymbol{z}}\overline{\boldsymbol{w}})=\overline{(\boldsymbol{z}\boldsymbol{w})}.$$

Если выбрать вещественный базис, т. е. базис в $\boldsymbol{R}$, то $\widetilde{\boldsymbol{R}}$ будет представлять собой совокупность всех векторов с комплексными, а $\boldsymbol{R}$ — с вещественными координатами в этом базисе.

Всякий линейный оператор $\boldsymbol{A}$ в $\boldsymbol{R}$ однозначно расширяется до линейного оператора в $\widetilde{\boldsymbol{R}}$:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{y})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}.$$

Среди всех линейных операторов в $\widetilde{\boldsymbol{R}}$ операторы, получившиеся в результате такого расширения из операторов в $\boldsymbol{R}$, характеризуются тем, что переводят $\boldsymbol{R}$ в $\boldsymbol{R}$ $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}\subset\boldsymbol{R})$. Такие операторы будем называть *вещественными*.

В вещественном базисе вещественные операторы определяются вещественными матрицами, т. е. матрицами с вещественными элементами.

Вещественный оператор $\boldsymbol{A}$ переводит комплексно сопряженные векторы $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{y}$ и $\overline{\boldsymbol{z}}=\boldsymbol{x}-i\boldsymbol{y}$ $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\in\boldsymbol{R})$ снова в комплексно сопряженные:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{A}\boldsymbol{y},\quad \boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{z}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-i\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}\quad (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{R}).$$

У вещественного оператора вековое уравнение имеет вещественные коэффициенты, поэтому вместе с корнем p-й кратности λ оно имеет и корень p-й кратности $\overline{\lambda}$. Из $\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}=\lambda\boldsymbol{z}$ следует: $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{z}}=\overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{z}}$, т. е. сопряженным характеристическим числам соответствуют сопряженные собственные векторы[1]).

Двумерное подпространство $[\boldsymbol{z}, \overline{\boldsymbol{z}}]$ имеет вещественный базис: $\boldsymbol{x}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{z}+\overline{\boldsymbol{z}})$, $\boldsymbol{y}=\frac{1}{2i}(\boldsymbol{z}-\overline{\boldsymbol{z}})$. Плоскость в $\boldsymbol{R}$ с этим базисом будем называть инвариантной плоскостью оператора $\boldsymbol{A}$, отвечающей паре характеристических чисел λ, $\overline{\lambda}$. Пусть $\lambda=\mu+i\nu$.

---

[1]) Если характеристическому числу λ вещественного оператора A отвечают линейно независимые собственные векторы $z_1, z_2, \ldots, z_p$, то характеристическому числу $\overline{\lambda}$ отвечают линейно независимые собственные векторы $\overline{z}_1, \overline{z}_2, \ldots, \overline{z}_p$.

Тогда, как легко видеть,

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mu\boldsymbol{x}-\nu\boldsymbol{y},$$
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=\nu\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y}.$$

Рассмотрим вещественный оператор $\boldsymbol{A}$ простой структуры с характеристическими числами:

$$\lambda_{2k-1}=\mu_k+i\nu_k,\ \lambda_{2k}=\mu_k-i\nu_k,\ \lambda_l=\mu_l\quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ q;\ l=2q+1,\ \ldots,\ n),$$

где μ_k, ν_k, μ_l — вещественные числа, причем $\nu_k\neq 0$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ q)$.

Тогда соответствующие этим характеристическим числам собственные векторы $\boldsymbol{z}_1,\ \boldsymbol{z}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{z}_n$ можно выбирать так, чтобы

$$\boldsymbol{z}_{2k-1}=\boldsymbol{x}_k+i\boldsymbol{y}_k,\ \boldsymbol{z}_{2k}=\boldsymbol{x}_k-i\boldsymbol{y}_k,\ \boldsymbol{z}_l=\boldsymbol{x}_l\quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ q);\quad (l=2q+1,\ \ldots,\ n). \tag{112}$$

Векторы

$$\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{y}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{x}_q,\ \boldsymbol{y}_q,\ \boldsymbol{x}_{2q+1},\ \ldots,\ \boldsymbol{x}_n \tag{113}$$

образуют базис в евклидовом пространстве $\boldsymbol{R}$. При этом

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k&=\mu_k\boldsymbol{x}_k-\nu_k\boldsymbol{y}_k,\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_k&=\nu_k\boldsymbol{x}_k+\mu_k\boldsymbol{y}_k,\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_l&=\mu_l\boldsymbol{x}_l\end{aligned}\qquad \begin{pmatrix}k=1,\ 2,\ \ldots,\ q,\\ l=2q+1,\ \ldots,\ n\end{pmatrix}. \tag{114}$$

В базисе (113) оператору $\boldsymbol{A}$ соответствует вещественная квазидиагональная матрица

$$\left\{\begin{Vmatrix}\mu_1 & \nu_1\\ -\nu_1 & \mu_1\end{Vmatrix},\ \ldots,\ \begin{Vmatrix}\mu_q & \nu_q\\ -\nu_q & \mu_q\end{Vmatrix},\ \mu_{2q+1},\ \ldots,\ \mu_n\right\}. \tag{115}$$

Таким образом, *для каждого оператора $\boldsymbol{A}$ простой структуры в евклидовом пространстве существует такой базис, в котором оператору $\boldsymbol{A}$ соответствует матрица вида* (115). *Отсюда следует, что всякая вещественная матрица простой структуры вещественно-подобна канонической матрице вида* (115):

$$A=T\left\{\begin{Vmatrix}\mu_1 & \nu_1\\ -\nu_1 & \mu_1\end{Vmatrix},\ \ldots,\ \begin{Vmatrix}\mu_q & \nu_q\\ -\nu_q & \mu_q\end{Vmatrix},\ \mu_{2q+1},\ \ldots,\ \mu_n\right\}T^{-1}\quad (T=\overline{T}). \tag{116}$$

Транспонированный оператор $\boldsymbol{A}'$ для $\boldsymbol{A}$ в $\boldsymbol{R}$ после расширения становится сопряженным оператором $\boldsymbol{A}^*$ для $\boldsymbol{A}$ в $\widetilde{\boldsymbol{R}}$. Следовательно, *нормальный, симметрический, кососимметрический, ортогональный операторы в $\boldsymbol{R}$ после расширения становятся соответственно нормальным, эрмитовым, умноженным на i эрмитовым, унитарным вещественным операторами в $\boldsymbol{R}$.*

Нетрудно показать, что *для нормального оператора $\boldsymbol{A}$ в евклидовом пространстве можно выбрать канонический базис — ортонормированный базис* (113), *для которого имеют место равенства* (114)[1]. *Поэтому вещественная нормальная матрица всегда вещественно- и ортогонально-подобна матрице вида* (115):

$$A=O\left\{\begin{Vmatrix}\mu_1 & \nu_1\\ -\nu_1 & \mu_1\end{Vmatrix},\ \ldots,\ \begin{Vmatrix}\mu_q & \nu_q\\ -\nu_q & \mu_q\end{Vmatrix},\ \mu_{2q+1},\ \ldots,\ \mu_n\right\}O^{-1}\qquad (O=O'^{-1}=\overline{O}). \tag{117}$$

[1]) Из ортонормированности базиса (112) в эрмитовой метрике следует ортонормированность базиса (113) в соответствующей евклидовой метрике.

У симметрического оператора $\boldsymbol{S}$ в евклидовом пространстве все характеристические числа вещественны, так как после расширения этот оператор становится эрмитовым. Для симметрического оператора $\boldsymbol{S}$ в формулах (114) следует положить $q=0$. Тогда получим:

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{x}_l=\mu_l\boldsymbol{x}_l \quad [(\boldsymbol{x}_k\boldsymbol{x}_l)=\delta_{kl};\ k,\ l=1,\ 2,\ \ldots,\ n]. \tag{118}$$

Симметрический оператор $\boldsymbol{S}$ в евклидовом пространстве всегда имеет ортонормированную систему собственных векторов с вещественными характеристическими числами[1]). Поэтому *вещественная симметрическая матрица всегда вещественно- и ортогонально-подобна диагональной матрице:*

$$S=O\{\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_n\}O^{-1} \quad (O=O'^{-1}=\overline{O}). \tag{119}$$

У кососимметрического оператора $\boldsymbol{K}$ в евклидовом пространстве все характеристические числа чисто мнимы (после расширения этот оператор равен произведению i на эрмитов оператор). Для кососимметрического оператора в формулах (114) следует положить:

$$\mu_1=\mu_2=\ldots=\mu_q=\mu_{2q+1}=\ldots=\mu_n=0,$$

после чего эти формулы принимают вид

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}_k&=-\nu_k\boldsymbol{y}_k,\\ \boldsymbol{K}\boldsymbol{y}_k&=\ \ \nu_k\boldsymbol{x}_k, \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ q;\ l=2q+1,\ \ldots,\ n).\\ \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}_l&=0\end{aligned} \tag{120}$$

Поскольку $\boldsymbol{K}$ является нормальным оператором, базис (113) можно считать ортонормированным. Таким образом, *всякая вещественная кососимметрическая матрица вещественно- и ортогонально-подобна канонической кососимметрической матрице*:

$$K=O\left\{\begin{Vmatrix}0 & \nu_1\\ -\nu_1 & 0\end{Vmatrix},\ \ldots,\ \begin{Vmatrix}0 & \nu_q\\ -\nu_q & 0\end{Vmatrix},\ 0,\ \ldots,\ 0\right\}O^{-1}\ (O=O'^{-1}=\overline{O}). \tag{121}$$

У ортогонального оператора $\boldsymbol{O}$ в евклидовом пространстве все характеристические числа по модулю равны единице (после расширения такой оператор становится унитарным). Поэтому в случае ортогонального оператора в формулах (114) следует положить:

$$\mu_k^2+\nu_k^2=1,\ \mu_l=\pm 1 \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ q;\ l=2q+1,\ \ldots,\ n).$$

При этом базис (113) можно считать ортонормированным. Формулы (114) можно представить в виде

$$\begin{aligned}\boldsymbol{O}\boldsymbol{x}_k&=\cos\varphi_k\boldsymbol{x}_k-\sin\varphi_k\boldsymbol{y}_k,\\ \boldsymbol{O}\boldsymbol{y}_k&=\sin\varphi_k\boldsymbol{x}_k+\cos\varphi_k\boldsymbol{y}_k,\\ \boldsymbol{O}\boldsymbol{x}_l&=\pm\boldsymbol{x}_l\end{aligned} \quad \begin{pmatrix}k=1,\ 2,\ \ldots,\ q,\\ l=2q+1,\ \ldots,\ n\end{pmatrix}. \tag{122}$$

Из сказанного следует, что *всякая вещественная ортогональная матрица вещественно- и ортогонально-подобна канонической ортогональной*:

$$O=O_1\left\{\begin{Vmatrix}\cos\varphi_1 & \sin\varphi_1\\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1\end{Vmatrix},\ \ldots,\ \begin{Vmatrix}\cos\varphi_q & \sin\varphi_q\\ -\sin\varphi_q & \cos\varphi_q\end{Vmatrix},\ \pm 1,\ \ldots,\ \pm 1\right\}O_1^{-1} \tag{123}$$

$$(O_1=O_1'^{-1}=\overline{O}_1).$$

---

[1]) Симметрический оператор S является неотрицательным, если в (118) все $\mu_l\geqslant 0$, и положительно определенным, если в (118) все $\mu_l>0$.

Пример. Рассмотрим произвольное конечное вращение вокруг точки O в трехмерном евклидовом пространстве. Оно переводит направленный отрезок $\overrightarrow{OA}$ в направленный отрезок $\overrightarrow{OB}$ и потому может быть рассматриваемо как оператор $\boldsymbol{O}$ в трехмерном векторном пространстве (образованном всевозможными отрезками $\overrightarrow{OA}$). Этот оператор линейный и притом ортогональный. Определитель этого оператора равен единице, так как оператор $\boldsymbol{O}$ не изменяет ориентации в пространстве.

Итак, $\boldsymbol{O}$—ортогональный оператор первого рода. Для него формулы (122) будут выглядеть так:

$$\boldsymbol{O}x_1=\cos\varphi x_1-\sin\varphi y_1,$$
$$\boldsymbol{O}y_1=\sin\varphi x_1+\cos\varphi y_1,$$
$$\boldsymbol{O}x_2=\pm x_2.$$

Из равенства $|\boldsymbol{O}|=1$ следует, что $\boldsymbol{O}x_2=x_2$. Это означает, что все точки прямой, проходящей через точку O в направлении вектора x_2, неподвижны. Таким образом, мы видим, что имеет место утверждение:

Произвольное конечное вращение твердого тела вокруг неподвижной точки может быть осуществлено конечным поворотом на угол φ вокруг некоторой неподвижной оси, проходящей через эту точку.

Рассмотрим теперь произвольное конечное движение в трехмерном евклидовом пространстве, переводящее точку x в точку

$$x'=c+\boldsymbol{O}x. \qquad (*)$$

Движение складывается из поворота $\boldsymbol{O}$ вокруг некоторой оси, проходящей через начало координат, и параллельного сдвига на вектор c. Обозначим через u, z_1, z_2 собственные векторы $\boldsymbol{O}$, соответствующие характеристическим числам $\lambda=1$, λ_1, λ_2 (при этом $\lambda_2=\bar{\lambda}_1$, $z_2=\bar{z}_1$):

$$\boldsymbol{O}u=u,\ \boldsymbol{O}z_1=\lambda_1 z_1,\ \boldsymbol{O}z_2=\lambda_2 z^2.$$

Докажем существование такой точки x_0, перемещение которой $x_0'-x_0$ параллельно вектору u (т. е. параллельно оси конечного поворота $\boldsymbol{O}$). Для этого положим

$$c=\gamma u+\gamma_1 z_1+\gamma_2 z_2,\ x_0=\xi u+\xi_1 z_1+\xi_2 z_2\ (\gamma_2=\bar{\gamma}_1,\ \xi_2=\bar{\xi}_1)$$

и найдем, что

$$x_0'-x_0=c+(\boldsymbol{O}-E)\,x_0=\gamma u+[\gamma_1+(\lambda_1-1)\,\xi_1]\,z_1+[\gamma_2+(\lambda_2-1)\,\xi_2]\,z_2.$$

Поэтому, определив координаты ξ_1 и ξ_2 искомой точки x_0 из равенств

$$\xi_1=\frac{\gamma_1}{1-\lambda_1},\quad \xi_2=\frac{\gamma_2}{1-\lambda_2}=\bar{\xi}_1,$$

получим для перемещения точки x_0 требуемую формулу

$$x_0'-x_0=\gamma u.$$

Складывая почленно это равенство с вытекающим из (*) равенством

$$x'-x_0'=\boldsymbol{O}(x-x_0),$$

получим

$$x'-x_0=\boldsymbol{O}(x-x_0)+\gamma u. \qquad (**)$$

Эта формула показывает, что при рассматриваемом конечном движении радиус-вектор точки, проведенный из x_0, поворачивается вокруг некоторой оси на фиксированный угол; затем к нему прибавляется параллельный оси вектор γu. Другими словами, движение представляет собой винтовой сдвиг вокруг оси, проходящей через точку x_0 параллельно вектору u. Нами доказана теорема Эйлера—Даламбера:

Произвольное конечное движение в трехмерном евклидовом пространстве представляет собой винтовое перемещение вокруг некоторой неподвижной оси.

§ 14. Полярное разложение оператора и формулы Кэли в евклидовом пространстве

1. В § 12 было установлено полярное разложение линейного оператора в унитарном пространстве. Совершенно аналогично получается полярное разложение линейного оператора в евклидовом пространстве.

Теорема 9. *Линейный оператор A всегда представим в виде произведений*

$$A = SO, \tag{124}$$

$$A = O_1 S_1, \tag{125}$$

где S и S_1 — неотрицательные симметрические, а O и O_1 — ортогональные операторы; при этом $S = \sqrt{AA'} = g(AA')$, $S_1 = \sqrt{A'A} = h(A'A)$, где $g(\lambda)$, $h(\lambda)$ — вещественные многочлены.

В том и только в том случае, когда A — нормальный оператор, множители S и O (множители S_1 и O_1) между собой перестановочны [1].

Аналогичное предложение имеет место для матриц.

Отметим геометрическое содержание формул (124) и (125). Будем откладывать векторы n-мерного точечного евклидова пространства из начала координат. Тогда каждый вектор будет радиус-вектором некоторой точки пространства. Ортогональное преобразование, осуществляемое оператором O (или O_1), является «вращением» в этом пространстве, поскольку оно сохраняет евклидову метрику и оставляет на месте начало координат [2]. Симметрический же оператор S (или S_1) осуществляет «дилатацию» n-мерного пространства (т. е. «растяжение» вдоль n взаимно перпендикулярных направлений с различными в общем случае коэффициентами растяжения $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ ($\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ — произвольные неотрицательные числа). Согласно формулам (124) и (125) произвольное линейное однородное преобразование n-мерного евклидова пространства можно получить, осуществляя последовательно некоторое вращение и некоторую дилатацию (в любом порядке).

2. Подобно тому как это было сделано в предыдущем параграфе для унитарного оператора, рассмотрим теперь некоторые представления для ортогонального оператора в евклидовом пространстве R.

Пусть K — произвольный кососимметрический оператор ($K' = -K$) и

$$O = e^K. \tag{126}$$

Тогда O — ортогональный оператор первого рода. Действительно,

$$O' = e^{K'} = e^{-K} = O^{-1}$$

и

$$|O| = 1 \text{ [3]}.$$

---

[1]) Как и в теореме 8, операторы S и S_1 определяются однозначно заданием A. Если A — неособенный оператор, то однозначно определяются и ортогональные множители O и O_1.

[2]) В случае $|O| = 1$ это будет собственно вращением; в случае же $|O| = -1$ это будет соединение вращения с зеркальным отображением относительно некоторой координатной плоскости.

[3]) Если $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — характеристические числа оператора K, то $\mu_1 = e^{k_1}$, $\mu_2 = e^{k_2}, \ldots, \mu_n = e^{k_n}$ — характеристические числа оператора $O = e^K$; при этом $|O| = \mu_1\mu_2 \ldots \mu_n = e^{\sum_{i=1}^{n} k_i} = 1$, поскольку $\sum_{i=1}^{n} k_i = 0$.

Покажем, что любой ортогональный оператор первого рода представим в виде (126). Для этого возьмем соответствующую ортогональную матрицу O. Поскольку $|O|=1$, то согласно формуле (123) [1])

$$O=O_1\left\{\begin{Vmatrix}\cos\varphi_1 & \sin\varphi_1\\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1\end{Vmatrix},\ \ldots,\ \begin{Vmatrix}\cos\varphi_q & \sin\varphi_q\\ -\sin\varphi_q & \cos\varphi_q\end{Vmatrix},\ +1,\ \ldots,\ +1\right\}O_1^{-1} \quad (127)$$

$$(O_1=O_1'^{-1}=\overline{O}_1).$$

Определим кососимметрическую матрицу K равенством

$$K=O_1\left\{\begin{Vmatrix}0 & \varphi_1\\ -\varphi_1 & 0\end{Vmatrix},\ \ldots,\ \begin{Vmatrix}0 & \varphi_q\\ -\varphi_q & 0\end{Vmatrix},\ 0\ \ldots,\ 0\right\}O_1^{-1}. \quad (128)$$

Поскольку

$$e^{\begin{Vmatrix}0 & \varphi\\ -\varphi & 0\end{Vmatrix}}=\begin{Vmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{Vmatrix},$$

то из (127) и (128) следует:

$$O=e^K. \quad (129)$$

Матричное равенство (129) влечет операторное равенство (126).

Для представления ортогонального оператора второго рода введем в рассмотрение специальный оператор $\boldsymbol{W}$, определив его в некотором ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ равенствами

$$\boldsymbol{W}\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{W}\boldsymbol{e}_{n-1}=\boldsymbol{e}_{n-1},\ \boldsymbol{W}\boldsymbol{e}_n=-\boldsymbol{e}_n. \quad (130)$$

$\boldsymbol{W}$ — ортогональный оператор второго рода. Если $\boldsymbol{O}$ — произвольный ортогональный оператор второго рода, то $\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{O}$ и $\boldsymbol{O}\boldsymbol{W}^{-1}$ суть операторы первого рода и потому представимы в виде $e^{\boldsymbol{K}}$ и $e^{\boldsymbol{K}_1}$, где $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{K}_1$ — кососимметрические операторы. Отсюда получим формулы для ортогонального оператора второго рода

$$\boldsymbol{O}=\boldsymbol{W}e^{\boldsymbol{K}}=e^{\boldsymbol{K}_1}\boldsymbol{W}. \quad (131)$$

Базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ в формулах (130) можно выбрать так, чтобы он совпадал с базисом $\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{y}_k, \boldsymbol{x}_l$ ($k=1, 2, \ldots, q$; $l=2q+1, \ldots, n$) в формулах (120) и (122). Определенный таким образом оператор $\boldsymbol{W}$ будет перестановочен с $\boldsymbol{K}$; поэтому две формулы (131) сольются в одну:

$$\boldsymbol{O}=\boldsymbol{W}e^{\boldsymbol{K}} \quad (\boldsymbol{W}=\boldsymbol{W}'=\boldsymbol{W}^{-1};\ \boldsymbol{K}'=-\boldsymbol{K},\ \boldsymbol{W}\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}\boldsymbol{W}). \quad (132)$$

Остановимся еще на формулах Кэли, устанавливающих связь между ортогональными и кососимметрическими операторами в евклидовом пространстве. Формула

$$\boldsymbol{O}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{K})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{K})^{-1}, \quad (133)$$

как легко проверить, переводит кососимметрический оператор $\boldsymbol{K}$ в ортогональный $\boldsymbol{O}$. Из (133) можно выразить $\boldsymbol{K}$ через $\boldsymbol{O}$:

$$\boldsymbol{K}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{O})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{O})^{-1}. \quad (134)$$

---

[1]) Среди характеристических чисел ортогональной матрицы O первого рода имеется четное число равных -1. Диагональная матрица $\begin{Vmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{Vmatrix}$ может быть записана в виде $\begin{Vmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{Vmatrix}$ при $\varphi=\pi$.

Формулы (133) и (134) устанавливают взаимно однозначное соответствие между кососимметрическими операторами и теми ортогональными операторами, которые не имеют характеристического числа -1. Вместо (133) и (134) можно взять формулы

$$\boldsymbol{O} = -(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{K})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{K})^{-1}, \tag{135}$$

$$\boldsymbol{K} = (\boldsymbol{E}+\boldsymbol{O})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{O})^{-1}. \tag{136}$$

В этом случае роль особой точки будет играть число $+1$.

3. Полярное разложение вещественной матрицы в соответствии с теоремой 9 позволяет получить основные формулы (117), (119), (121), (123), не прибегая к включению евклидова пространства в унитарное так, как это было сделано ранее. Второй вывод основных формул опирается на следующую теорему:

Теорема 10. *Если две вещественные нормальные матрицы подобны:*

$$B = T^{-1}AT \quad (AA' = A'A, \quad BB' = B'B, \quad A = \overline{A}, \quad B = \overline{B}), \tag{137}$$

то эти матрицы вещественно- и ортогонально-подобны:

$$B = O^{-1}AO \quad (O = \overline{O} = O'^{-1}). \tag{138}$$

Доказательство. Поскольку нормальные матрицы A и B имеют одни и те же характеристические числа, то (см. 2° на стр. 246) существует такой многочлен $g(\lambda)$, что

$$A' = g(A), \quad B' = g(B).$$

Поэтому вытекающее из (137) равенство

$$g(B) = T^{-1}g(A)T$$

может быть записано так:

$$B' = T^{-1}A'T. \tag{139}$$

Переходя в этом равенстве к транспонированным матрицам, получим:

$$B = T'AT'^{-1}. \tag{140}$$

Сопоставление (137) с (140) дает:

$$TT'A = ATT'. \tag{141}$$

Воспользуемся теперь полярным разложением матрицы T:

$$T = SO, \tag{142}$$

где $S = \sqrt{TT'} = h(TT')$ [$h(\lambda)$ — многочлен] — симметрическая, а O — вещественная ортогональная матрица. Поскольку согласно (141) матрица A перестановочна с TT', то она же перестановочна с матрицей $S = h(TT')$. Поэтому подставляя в (137) выражение для T из (142), будем иметь:

$$B = O^{-1}S^{-1}ASO = O^{-1}AO.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим вещественную каноническую матрицу

$$\left\{\begin{Vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ -\nu_1 & \mu_1 \end{Vmatrix}, \ldots, \begin{Vmatrix} \mu_q & \nu_q \\ -\nu_q & \mu_q \end{Vmatrix}, \quad \mu_{2q+1}, \ldots, \mu_n\right\}. \tag{143}$$

Матрица (143) нормальна и имеет характеристические числа $\mu_1 \pm i\nu_1, \ldots$ $\ldots, \mu_q \pm i\nu_q, \mu_{2q+1}, \ldots, \mu_n$. Так как нормальные матрицы имеют простую

структуру, то любая нормальная матрица, имеющая те же характеристические числа, подобна (а в силу теоремы 10 вещественно- и ортогонально-подобна) матрице (143). Таким образом, приходим к формуле (117).

Совершенно так же получаются формулы (119), (121), (123).

§ 15. Коммутирующие нормальные операторы

В § 10 мы доказали, что два коммутирующих оператора $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ в n-мерном пространстве $\boldsymbol{R}$ всегда имеют общий собственный вектор. Методом индукции можно показать, что это положение справедливо не только для двух, но для любого конечного числа коммутирующих операторов. Действительно, если даны m попарно коммутирующих операторов $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \ldots, \boldsymbol{A}_m$, среди которых первые $m-1$ имеют общий собственный вектор $\boldsymbol{x}$, то, повторяя дословно рассуждения леммы 1 (стр. 245) [в качестве $\boldsymbol{A}$ берем любое $\boldsymbol{A}_i$ ($i=1, 2, \ldots, m$), а в качестве $\boldsymbol{B}$ — оператор $\boldsymbol{A}_m$], мы получаем вектор $\boldsymbol{y}$, который является общим собственным вектором операторов $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \ldots, \boldsymbol{A}_m$.

Доказанное положение справедливо и для бесконечного множества коммутирующих операторов, поскольку такое множество может содержать только конечное число ($\leqslant n^2$) линейно независимых операторов, а общий собственный вектор последних будет общим собственным вектором всех операторов из данного множества.

Пусть теперь дано произвольное конечное или бесконечное множество попарно коммутирующих нормальных операторов $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \ldots$ Все они имеют общий собственный вектор $\boldsymbol{x}_1$. Обозначим $(n-1)$-мерное подпространство, состоящее из всех векторов из $\boldsymbol{R}$, ортогональных к $\boldsymbol{x}_1$, через $\boldsymbol{T}_1$. Согласно § 10, 3° (стр. 247) подпространство $\boldsymbol{T}_1$ инвариантно относительно операторов $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \ldots$ Поэтому все эти операторы имеют общий собственный вектор $\boldsymbol{x}_2$ в $\boldsymbol{T}_1$. Рассматривая ортогональное дополнение $\boldsymbol{T}_2$ к плоскости $[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2]$, выделим в нем вектор $\boldsymbol{x}_3$ и т. д. Таким образом, мы получим ортогональную систему $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ общих собственных векторов для операторов $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \ldots$ Эти векторы можно пронормировать. Нами доказана

Теорема 11. *Если дано конечное или бесконечное множество попарно коммутирующих нормальных операторов $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \ldots$ в унитарном пространстве $\boldsymbol{R}$, то все эти операторы имеют полную ортонормированную систему общих собственных векторов $\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \ldots, \boldsymbol{z}_n$:*

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}_i = \lambda_i \boldsymbol{z}_i,\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{z}_i = \lambda_i' \boldsymbol{z}_i,\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{z}_i = \lambda_i'' \boldsymbol{z}_i,\ \ldots\ [(\boldsymbol{z}_i \boldsymbol{z}_k) = \delta_{ik};\ i, k = 1, 2, \ldots, n]. \quad (144)$$

В матричной формулировке эта теорема гласит:

Теорема 11′. *Если дано конечное или бесконечное множество попарно коммутирующих нормальных матриц, то все эти матрицы одним и тем же унитарным преобразованием могут быть приведены к диагональному виду, т. е. существует такая унитарная матрица U, что*

$$\left.\begin{aligned} &A = U\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}U^{-1},\ B = U\{\lambda_1', \ldots, \lambda_n'\}U^{-1}, \\ &C = U\{\lambda_1'', \ldots, \lambda_n''\}U^{-1},\ \ldots\ (U = U^{*-1}). \end{aligned}\right\} \quad (145)$$

Пусть теперь даны коммутирующие нормальные операторы в евклидовом пространстве $\boldsymbol{R}$. Обозначим через $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \ldots$ линейно независимые среди них (их конечное число). Включим (с сохранением метрики) $\boldsymbol{R}$ в унитарное пространство $\tilde{\boldsymbol{R}}$, как это было сделано в § 13. Тогда согласно теореме 11 операторы $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \ldots$ будут иметь в $\tilde{\boldsymbol{R}}$ полную общую

ортонормированную систему собственных векторов $z_1, z_2, \ldots, z_n$, т. е. будут выполняться равенства (144).

Рассмотрим произвольную линейную комбинацию операторов $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \ldots$:

$$\boldsymbol{P} = \alpha \boldsymbol{A} + \beta \boldsymbol{B} + \gamma \boldsymbol{C} + \ldots$$

При любых вещественных значениях $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ оператор $\boldsymbol{P}$ является вещественным ($\boldsymbol{A}\boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{R}$) нормальным оператором в $\widetilde{\boldsymbol{R}}$ и

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{P}z_j = \Lambda_j z_j, \quad \Lambda_j = \alpha\lambda_j + \beta\lambda_j' + \gamma\lambda_j'' + \ldots \\ [(z_j z_k) = \delta_{jk}; \quad j, k = 1, 2, \ldots, n]. \end{array}\right\} \tag{146}$$

Характеристические числа Λ_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ оператора $\boldsymbol{P}$ являются линейными формами относительно $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ В силу вещественности оператора $\boldsymbol{P}$ эти формы можно разбить на попарно комплексно сопряженные и вещественные; при надлежащей нумерации собственных векторов будем иметь:

$$\Lambda_{2k-1} = M_k + iN_k, \ \Lambda_{2k} = M_k - iN_k, \ \Lambda_l = M_l \tag{147}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, q; \ l = 2q + 1, \ldots, n),$$

где M_k, N_k, M_l — вещественные линейные формы от $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

В соответствии с этим мы можем в (146) считать векторы z_{2k-1} и z_{2k} комплексно сопряженными, а z_l — вещественными:

$$z_{2k-1} = x_k + iy_k, \ z_{2k} = x_k - iy_k, \ z_l = x_l \tag{148}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, q; \quad l = 2q + 1, \ldots, n).$$

Тогда, как легко видеть, вещественные векторы

$$x_k, \ y_k, \ x_l \quad (k = 1, 2, \ldots, q; \ l = 2q + 1, \ldots, n) \tag{149}$$

образуют ортонормированный базис в $\boldsymbol{R}$. В этом каноническом базисе имеем[1]):

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{P}x_k = M_k x_k - N_k y_k, \\ \boldsymbol{P}y_k = N_k x_k + M_k y_k, \\ \boldsymbol{P}x_l = M_l x_l \end{array}\right. \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots, q, \\ l = 2q + 1, \ldots, n \end{pmatrix}. \tag{150}$$

Поскольку все операторы данного множества получаются из $\boldsymbol{P}$ при частных значениях $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, то базис (149), не зависящий от этих параметров, является общим каноническим базисом для всех данных операторов.

Нами доказана

Теорема 12. *Если дано любое множество коммутирующих нормальных линейных операторов в евклидовом пространстве $\boldsymbol{R}$, то все эти операторы имеют общий ортонормированный канонический базис x_k, y_k, x_l.*

$$\left.\begin{array}{ll} \boldsymbol{A}x_k = \mu_k x_k - \nu_k y_k, & \boldsymbol{B}x_k = \mu_k' x_k - \nu_k' y_k, \ \ldots, \\ \boldsymbol{A}y_k = \nu_k x_k + \mu_k y_k, & \boldsymbol{B}y_k = \nu_k' x_k + \mu_k' y_k, \ \ldots, \\ \boldsymbol{A}x_l = \mu_l x_l; & \boldsymbol{B}x_l = \mu_l' x_l, \ \ldots \end{array}\right\} \tag{151}$$

---

[1]) Равенства (150) следуют из равенств (146), (147) и (148).

Приведем матричную формулировку теоремы 12:

Теорема 12′. *Любое множество коммутирующих вещественных нормальных матриц A, B, C, ... при помощи одного и того же вещественного ортогонального преобразования O может быть приведено к каноническому виду*

$$\left.\begin{aligned} A &= O\left\{\begin{Vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ -\nu_1 & \mu_1 \end{Vmatrix}, \ldots, \begin{Vmatrix} \mu_q & \nu_q \\ -\nu_q & \mu_q \end{Vmatrix}, \mu_{2q+1}, \ldots, \mu_n\right\} O^{-1}, \\ B &= O\left\{\begin{Vmatrix} \mu_1' & \nu_1' \\ -\nu_1' & \mu_1' \end{Vmatrix}, \ldots, \begin{Vmatrix} \mu_q' & \nu_q' \\ -\nu_q' & \mu_q' \end{Vmatrix}, \mu_{2q+1}', \ldots, \mu_n'\right\} O^{-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (152)$$

Примечание. Если какой-либо из операторов $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, ... (какая-либо из матриц A, B, C, ...), например $\boldsymbol{A}$ (A), является симметрическим (симметрической), то в соответствующих формулах (151) [соответственно (в 152)] все ν равны нулю. В случае косой симметрии все μ равны нулю. В случае, если $\boldsymbol{A}$ — ортогональный оператор (A — ортогональная матрица), то $\mu_k = \cos\varphi_k$, $\nu_k = \sin\varphi_k$, $\mu_l = \pm 1$ $(k = 1, 2, \ldots, q;\ l = 2q+1, \ldots, n)$.

§ 16. Псевдообратный оператор

Пусть дан произвольный линейный оператор $\boldsymbol{A}$, отображающий n-мерное унитарное пространство $\boldsymbol{R}$ в m-мерное унитарное пространство $\boldsymbol{S}$ (см. гл. III, § 2). Обозначим через r ранг оператора A, т. е. число измерений подпространства $\boldsymbol{AR}$. Рассмотрим два ортогональных расщепления пространств $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{S}$:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{R}_2, \quad \boldsymbol{R}_1 \perp \boldsymbol{R}_2, \quad \boldsymbol{R}_2 = \boldsymbol{N}_{\boldsymbol{A}}, \tag{153}$$

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2, \quad \boldsymbol{S}_1 \perp \boldsymbol{S}_2, \quad \boldsymbol{S}_1 = \boldsymbol{AR}. \tag{154}$$

Здесь подпространство $\boldsymbol{R}_2 = \boldsymbol{N}_{\boldsymbol{A}}$ состоит из всех векторов $x \in \boldsymbol{R}$, удовлетворяющих уравнению $\boldsymbol{A}x = 0$. Поэтому число измерений подпространства $\boldsymbol{R}_2$ равно $d = n - r$ (см. стр. 78). Следовательно, число измерений ортогонального дополнения $\boldsymbol{R}_1$ равно r.

С другой стороны, $\boldsymbol{AR}_2 \equiv 0$ и $\boldsymbol{AR}_1 \equiv \boldsymbol{AR} \equiv \boldsymbol{S}_1$. Поскольку подпространства $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{S}_1$ имеют одно и то же число измерений r, то линейный оператор $\boldsymbol{A}$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между векторами подпространств $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{S}_1$. Поэтому однозначно определяется обратный оператор $\boldsymbol{A}^{-1}$, отображающий $\boldsymbol{S}_1$ в $\boldsymbol{R}_1$.

Псевдообратным оператором $\boldsymbol{A}^+$ для оператора $\boldsymbol{A}$ назовем линейный оператор, отображающий $\boldsymbol{S}$ в $\boldsymbol{R}$ и определяемый равенствами

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{y} &= \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y} \qquad (\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{S}_1), \\ \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{y} &= 0 \qquad\quad\ (\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{S}_2). \end{aligned}\right\} \tag{155}$$

Псевдообратный оператор $\boldsymbol{A}^+$ однозначно определяется заданием линейного оператора $\boldsymbol{A}$, отображающего пространство $\boldsymbol{R}$ в $\boldsymbol{S}$ и заданием метрики в пространствах $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{S}$. При изменении метрики в пространствах $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{S}$ изменяется и псевдообратный оператор $\boldsymbol{A}^+$ [1]).

Роль псевдообратного оператора выясняется из следующей геометрической интерпретации.

Уравнение

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{y} \tag{156}$$

---

[1]) В этом отличие от обратного оператора $\boldsymbol{A}^{-1}$, определение которого не связано с метрикой. Но зато псевдообратный оператор $\boldsymbol{A}^+$ определяется в общем случае при любых m, n, r, а обратный оператор $\boldsymbol{A}^{-1}$ может быть определен лишь в частном случае, когда линейный оператор $\boldsymbol{A}$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между векторами пространств $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{S}$, т. е. когда $m = n = r$. В этом частном случае оператор $\boldsymbol{A}^+$ не зависит от метрики пространств $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{S}$ и совпадает с обратным оператором $\boldsymbol{A}^{-1}$.

при заданном $y \in S$ либо не имеет решений в $\boldsymbol{R}$ (если y не принадлежит подпространству $S = A\boldsymbol{R}$), либо имеет решения (если $y \in A\boldsymbol{R}$). В последнем случае все решения уравнения (156) получаются из одного решения x^0 прибавлением произвольного вектора $x_2 \in \boldsymbol{R}_2 = \boldsymbol{N}_A$.

Докажем, что вектор

$$x^0 = A^+ y \tag{157}$$

представляет собой *наилучшее приближенное решение* уравнения (156), т. е.

$$|Ax^0 - y| = \min_{x \in \boldsymbol{R}} |Ax - y| \tag{158}$$

и из всех векторов $x \in \boldsymbol{R}$, для которых этот минимум реализуется, вектор x^0 имеет наименьшую длину $|x^0|$.

Действительно, пусть $y = y_1 + y_2$ $(y_1 \in S_1,\ y_2 \in S_2)$ и $x^0 = A^+ y = A^+ y_1$. Тогда $y_1 = Ax^0$ представляет собой ортогональную проекцию вектора y на подпространство $S = A\boldsymbol{R}$, состоящее из всех векторов вида Ax, где $x \in \boldsymbol{R}$. Поэтому имеет место равенство (158). С другой стороны, пусть $x' \in \boldsymbol{R}$ — какой-либо другой вектор $(x' \neq x^0)$, для которого реализуется минимум (158). Тогда

$$Ax' = Ax^0 = y_1 \tag{159}$$

и, следовательно,

$$A(x' - x^0) = 0, \tag{160}$$

т. е. $x' - x^0 \in \boldsymbol{R}_2$. Поэтому, поскольку $x^0 \perp (x_0' - x^0)$, то по теореме Пифагора из равенства $x' = x^0 + (x' - x^0)$ находим:

$$|x'|^2 = |x^0|^2 + |x' - x^0|^2 > |x^0|^2. \tag{161}$$

Таким образом, *существует только одно наилучшее приближенное решение уравнения* (156) *и это решение определяется формулой* (157).

Выберем в пространствах $\boldsymbol{R}$ и S ортонормированные базисы. В этих базисах квадрат длины векторов $x \in \boldsymbol{R}$ и $y \in S$ определяется формулами

$$|x|^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2, \qquad |y|^2 = \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 \tag{162}$$

и векторные равенства

$$Ax = y, \qquad x^0 = A^+ y$$

переходят в матричные

$$Ax = y, \qquad x^0 = A^+ y. \tag{163}$$

Поскольку x^0 при любом y представляет собой наилучшее приближенное решение [в смысле метрики (162)] системы линейных уравнений, то A^+ — псевдообратная матрица для прямоугольной матрицы A (см. гл. I, § 4). Таким образом, если в пространствах $\boldsymbol{R}$ и S выбраны ортонормированные базисы, то операторам A и A^+ в этих базисах соответствуют взаимно псевдообратные матрицы A и A^+.

ГЛАВА X

КВАДРАТИЧНЫЕ И ЭРМИТОВЫ ФОРМЫ

§ 1. Преобразование переменных в квадратичной форме

1. *Квадратичной формой* называется однородный многочлен второй степени относительно n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Квадратичную форму всегда можно представить в виде

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k \quad (a_{ik}=a_{ki};\ i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где $A=\|a_{ik}\|_1^n$ — симметрическая матрица.

Обозначая через x столбцевую матрицу $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и пользуясь сокращенным обозначением для квадратичной формы

$$A(x,\ x)=\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k, \tag{1}$$

мы можем написать [1]):

$$A(x,\ x)=x'Ax. \tag{2}$$

Если $A=\|a_{ik}\|_1^n$ — вещественная симметрическая матрица, то форма (1) называется *вещественной*. В этой главе мы будем в основном рассматривать вещественные квадратичные формы.

Определитель $|A|=|a_{ik}|_1^n$ называется *дискриминантом* квадратичной формы $A(x, x)$. Форма называется *сингулярной*, если ее дискриминант равен нулю.

Каждой квадратичной форме соответствует *билинейная форма*

$$A(x,\ y)=\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}x_iy_k \tag{3}$$

или

$$A(x,\ y)=x'Ay \quad [x=(x_1,\ \ldots,\ x_n),\ y=(y_1,\ \ldots,\ y_n)]. \tag{4}$$

Если $x^1, x^2, \ldots, x^l, y^1, y^2, \ldots, y^m$ — столбцевые матрицы, а $c_1, c_2, \ldots, c_l, d_1, d_2, \ldots, d_m$ — скаляры, то в силу билинейности выражения $A(x, y)$ [см. (4)]

$$A\Big(\sum_{i=1}^{l} c_ix^i,\ \sum_{j=1}^{m} d_jy^j\Big)=\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m} c_i\,d_jA(x^i,\ y^j). \tag{5}$$

---

[1]) Значок $'$ означает транспонирование. В формуле (2) квадратичная форма представлена в виде произведения трех матриц: строчной x', квадратной A и столбцевой x.

Если задан некоторый симметрический оператор A в n-мерном евклидовом пространстве и этому оператору в некотором ортонормированном базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ соответствует матрица $A = \| a_{ik} \|_1^n$ [1]), то для любых векторов

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \qquad y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$$

имеет место тождество

$$A(x, y) = (Ax, y) = (x, Ay)\ ^{2}).$$

В частности,

$$A(x, x) = (Ax, x) = (x, Ax).$$

При этом

$$a_{ik} = (Ae_i, e_k) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

2. Посмотрим, как изменяется матрица коэффициентов формы при преобразовании переменных:

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} t_{ik} \xi_k \qquad i = (1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

В матричной записи это преобразование выглядит так:

$$x = T\xi. \tag{6'}$$

Здесь x и ξ — столбцевые матрицы: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, а T — *преобразующая матрица*: $T = \| t_{ik} \|_1^n$.

Подставляя в (2) выражение для x, из (6′) получим:

$$A(x, x) = \xi' T' A T \xi = \xi' \widetilde{A} \xi = \widetilde{A}(\xi, \xi),$$

где

$$\widetilde{A} = T' A T. \tag{7}$$

Формула (7) выражает матрицу $\widetilde{A} = \| \widetilde{a}_{ik} \|_1^n$ коэффициентов преобразованной формы $\widetilde{A}(\xi, \xi) = \sum_{i, k=1}^{n} \widetilde{a}_{ik} \xi_i \xi_k$ через матрицу коэффициентов первоначальной формы $A = \| a_{ik} \|_1^n$ и матрицу преобразования $T = \| t_{ik} \|_1^n$.

Из формулы (7) следует, что при преобразовании формы ее дискриминант умножается на квадрат определителя преобразования:

$$|\widetilde{A}| = |A| \, |T|^2. \tag{8}$$

В дальнейшем мы будем пользоваться исключительно неособенными преобразованиями переменных ($|T| \neq 0$). При таких преобразованиях, как видно из формулы (7), ранг матрицы коэффициентов остается неизменным (ранг матрицы A равен рангу матрицы $\widetilde{A}$) [3]). Ранг матрицы коэффициентов обычно называют *рангом формы*.

---

[1]) $Ae_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} e_i$ $(k = 1, \ldots, n)$; см. стр. 70.

[2]) В $A(x, y)$ скобки составляют часть условного обозначения; в (Ax, y) и в (x, Ay) скобки обозначают скалярное произведение.

[3]) См. стр. 27.

Определение 1. Две симметрические матрицы A и $\widetilde{A}$, связанные равенством (7), в котором $|T| \neq 0$, называются *конгруэнтными*.

Таким образом, с каждой квадратичной формой связан целый класс попарно конгруэнтных симметрических матриц. Как было уже отмечено выше, все эти матрицы имеют один и тот же ранг — ранг формы. Ранг является инвариантом для данного класса матриц. В случае вещественной квадратичной формы вторым инвариантом является так называемая «сигнатура» квадратичной формы. К введению этого понятия мы и переходим.

§ 2. Приведение квадратичной формы к сумме квадратов. Закон инерции

Вещественную квадратичную форму $A(x, x)$ можно бесчисленным множеством способов представить в виде

$$A(x, x) = \sum_{i=1}^{r} a_i X_i^2, \tag{9}$$

где $a_i \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ и

$$X_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} x_k \quad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

— независимые вещественные линейные формы от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (отсюда $r \leqslant n$).

Рассмотрим неособенное преобразование переменных, при котором первые r из новых переменных $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ связаны с $x_1, x_2, \ldots, x_n$ формулами[1])

$$\xi_i = X_i \quad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

Тогда в новых переменных

$$A(x, x) = \widetilde{A}(\xi, \xi) = \sum_{i=1}^{r} a_i \xi_i^2$$

и, следовательно, матрица $\widetilde{A}$ имеет диагональный вид:

$$\widetilde{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_r, 0, \ldots, 0\}.$$

Но ранг матрицы $\widetilde{A}$ равен r. Следовательно, *число квадратов в представлении* (9) *всегда равно рангу формы.*

Мы покажем, что неизменным при различных представлениях формы $A(x, x)$ в виде (9) является не только число всех квадратов, но и число положительных[2]) (а значит, и число всех отрицательных) квадратов.

Теорема 1 (закон инерции квадратичных форм). *При представлении вещественной квадратичной формы $A(x, x)$ в виде суммы*

---

[1]) Нужное преобразование получаем, дополняя систему линейных форм $X_1, \ldots, X_r$ линейными формами $X_{r+1}, \ldots, X_n$ так, чтобы n форм X_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ были независимы, и полагая $\xi_j = X_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

[2]) Под числом положительных (отрицательных) квадратов в представлении (9) мы понимаем число положительных (соответственно отрицательных) коэффициентов a_i.

независимых квадратов[1])

$$A(x, x) = \sum_{i=1}^{r} a_i X_i^2$$

число положительных квадратов и число отрицательных квадратов не зависят от способа представления формы в указанном виде.

Доказательство. Пусть наряду с представлением (9) имеет место другое представление формы $A(x, x)$ в виде суммы независимых квадратов

$$A(x, x) = \sum_{i=1}^{r} b_i Y_i^2,$$

и пусть

$$a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ \ldots,\ a_h > 0,\ a_{h+1} < 0,\ \ldots,\ a_r < 0,$$
$$b_1 > 0,\ b_2 > 0,\ \ldots,\ b_g > 0,\ b_{g+1} < 0,\ \ldots,\ b_r < 0.$$

Допустим, что $h \neq g$, например $h < g$. Тогда в тождестве

$$\sum_{i=1}^{r} a_i X_i^2 = \sum_{i=1}^{r} b_i Y_i^2 \tag{10}$$

дадим переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$ значения, удовлетворяющие системе $r-(g-h)$ уравнений

$$X_1 = 0,\ X_2 = 0,\ \ldots,\ X_h = 0,\ Y_{g+1} = 0,\ \ldots,\ Y_r = 0 \tag{11}$$

и не обращающие в нуль хотя бы одну из форм $X_{h+1}, \ldots, X_r$[2]). При этих значениях переменных левая часть тождества (10) равна

$$\sum_{j=h+1}^{r} a_j X_j^2 < 0,$$

а правая равна

$$\sum_{k=1}^{g} b_k Y_k^2 \geqslant 0.$$

Таким образом, допущение $h \neq g$ привело нас к противоречию. Теорема доказана.

Определение 2. Разность σ между числом π положительных и числом ν отрицательных квадратов в представлении формы $A(x, x)$ называют *сигнатурой* формы $A(x, x)$.

Ранг r и сигнатура σ определяют однозначно числа π и ν, так как

$$r = \pi + \nu, \quad \sigma = \pi - \nu.$$

Заметим еще, что в формуле (9) положительный множитель $\sqrt{|a_i|}$ можно отнести к форме X_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$. Тогда формула (9) принимает вид

$$A(x, x) = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_\pi^2 - X_{\pi+1}^2 - \ldots - X_r^2. \tag{12}$$

---

[1]) Под суммой независимых квадратов мы понимаем сумму вида (9), в которой все $a_i \neq 0$ и формы $X_1, X_2, \ldots, X_r$ линейно независимы.

[2]) Такие значения существуют, так как в противном случае уравнения $X_{h+1} = 0, \ldots, X_r = 0$, а значит, и все r уравнений $X_1 = 0, \ldots, X_r = 0$ были бы следствием $r-(g-h)$ уравнений (11). Это невозможно, поскольку линейные формы $X_1, X_2, \ldots, X_r$ независимы.

Полагая $\xi_i = X_i\,(i = 1, 2, \ldots, r)$[1]), мы форму $A(x, x)$ приводим к каноническому виду

$$\widetilde{A}(\xi, \xi) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_\pi^2 - \xi_{\pi+1}^2 - \ldots - \xi_r^2. \tag{13}$$

Отсюда на основании теоремы 1 заключаем, что *всякая вещественная симметрическая матрица A конгруэнтна диагональной матрице, у которой диагональные элементы равны* $+1$, -1 *или* 0:

$$A = T'\{\underbrace{+1, \ldots, +1}_{\pi}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{\nu}, 0, \ldots, 0\}\,T. \tag{14}$$

В следующем параграфе будет дано правило для определения сигнатуры по коэффициентам квадратичной формы.

§ 3. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к сумме квадратов. Формула Якоби

Из предыдущего параграфа вытекает, что для определения ранга и сигнатуры формы достаточно каким-либо способом привести эту форму к сумме независимых квадратов.

Мы изложим здесь метод приведения Лагранжа.

1. Метод Лагранжа. Пусть дана квадратичная форма

$$A(x, x) = \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k.$$

Рассмотрим два случая:

1) При некотором $g\,(1 \leqslant g \leqslant n)$ диагональный коэффициент $a_{gg} \neq 0$. Тогда, полагая

$$A(x, x) = \frac{1}{a_{gg}}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{gk} x_k\right)^2 + A_1(x, x), \tag{15}$$

непосредственной проверкой убеждаемся в том, что квадратичная форма $A_1(x, x)$ уже не содержит переменной x_g. Этот способ выделения квадрата из квадратичной формы применим всегда, когда в матрице $A = \|a_{ik}\|_1^n$ имеются диагональные элементы, отличные от нуля.

2) Коэффициенты $a_{gg} = 0$, $a_{hh} = 0$, но $a_{gh} \neq 0$. В этом случае полагаем:

$$A(x, x) = \frac{1}{2a_{hg}}\left[\sum_{k=1}^{n} (a_{gk} + a_{hk})\,x_k\right]^2 - \frac{1}{2a_{hg}}\left[\sum_{k=1}^{n} (a_{gk} - a_{hk})\,x_k\right]^2 + A_2(x, x). \tag{16}$$

Формы

$$\sum_{k=1}^{n} a_{gk} x_k, \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{hk} x_k \tag{17}$$

линейно независимы, так как первая содержит x_h, но не содержит x_g, а вторая, наоборот, содержит x_g, но не содержит x_h. Поэтому и формы, стоящие под знаком квадрата в (16), линейно независимы [как сумма и разность независимых линейных форм (17)].

Таким образом, мы выделили в $A(x, x)$ два независимых квадрата. Каждый из этих квадратов содержит x_g и x_h, в то время как форма $A_2(x, x)$, как легко проверить, этих переменных не содержит.

---

[1]) См. сноску [1]) на стр. 269.

Последовательным комбинированием приемов 1) и 2) можно всегда с помощью рациональных операций привести форму $A(x, x)$ к сумме квадратов. При этом полученные квадраты будут независимы, так как на каждом этапе выделяемые квадраты содержат переменные, которые отсутствуют в последующих квадратах.

Заметим еще, что основные формулы (15) и (16) могут быть записаны так:

$$A(x, x)=\frac{1}{4a_{gg}}\left(\frac{\partial A}{\partial x_g}\right)^2+A_1(x, x), \tag{15'}$$

$$A(x, x)=\frac{1}{8a_{gh}}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial x_g}+\frac{\partial A}{\partial x_h}\right)^2-\left(\frac{\partial A}{\partial x_g}-\frac{\partial A}{\partial x_h}\right)^2\right]+A_2(x, x). \tag{16'}$$

Пример.

$$A(x, x)=4x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-4x_1x_2-4x_1x_3+4x_1x_4+4x_2x_3-4x_3x_4.$$

Применяем формулу (15′) ($g=1$):

$$A(x, x)=\frac{1}{16}(8x_1-4x_2-4x_3+4x_4)^2+A_1(x, x)=(2x_1-x_2-x_3+x_4)^2+A_1(x, x),$$

где

$$A_1(x, x)=2x_2x_3+2x_2x_4-2x_3x_4.$$

Применяем формулу (16′) ($g=2$, $h=3$):

$$A_1(x, x)=\frac{1}{8}(2x_2+2x_3)^3-\frac{1}{8}(2x_3-2x_2+4x_4)^2+A_2(x, x)=$$

$$=\frac{1}{2}(x_2+x_3)^2-\frac{1}{2}(x_3-x_2+2x_4)^2+A_2(x, x),$$

где

$$A_2(x, x)=2x_4^2.$$

Окончательно

$$A(x, x)=(2x_1-x_2-x_3+x_4)^2+\frac{1}{2}(x_2+x_3)^2-\frac{1}{2}(x_3-x_2+2x_4)^2+2x_4^2,$$

$$r=4, \quad \sigma=2.$$

2. Формула Якоби. Обозначим через r ранг квадратичной формы $A(x, x)=\sum\limits_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k$ и допустим, что

$$D_k=A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & k\\ 1 & 2 & \dots & k\end{pmatrix}\neq 0 \qquad (k=1, 2, \dots, r). \tag{18}$$

Поскольку $a_{11}=D_1\neq 0$, то, выделяя по методу Лагранжа из формы $A(x, x)$ один квадрат, получим:

$$A(x, x)=\frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n)^2+A_1(x, x), \tag{19}$$

где квадратичная форма

$$A_1(x, x)=\sum_{i,\,k=2}^{n} a_{ik}^{(1)}x_ix_k \qquad (a_{ik}^{(1)}=a_{ki}^{(1)}, \quad i, k=2, \dots, n) \tag{20}$$

не содержит переменной x_1. Из тождества (19) следует, что коэффициенты формы $A_1(x, x)$ определяются формулами

$$a_{ik}^{(1)}=a_{ik}-\frac{a_{1i}a_{1k}}{a_{11}} \qquad (i, k=2, \dots, n). \tag{21}$$

Но тогда эти коэффициенты совпадают с соответствующими элементами

матрицы

$$G_1 = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{Vmatrix},$$

которая получается из симметрической матрицы $A = \| a_{ik} \|_1^n$ после применения к ней первого этапа алгоритма исключения Гаусса[1]) (см. гл. II, § 1).

Таким образом, процесс выделения одного квадрата по методу Лагранжа, по существу, совпадает с первым этапом алгоритма Гаусса. Элементы первой строки матрицы G_1 являются коэффициентами в выделяемом квадрате; величина, обратная элементу a_{11}, является множителем при квадрате. Остальные элементы матрицы G_1 определяют коэффициенты формы $A_1(x, x)$. Для выделения второго квадрата следует выполнить второй этап алгоритма Гаусса и т. д. Применяя к симметрической матрице $A = \| a_{ik} \|_1^n$ полный алгоритм Гаусса, состоящий из r этапов[2]), получим матрицу

$$G_r = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2r}^{(1)} & a_{2,r+1}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr}^{(r-1)} & a_{r,r+1}^{(r-1)} & \dots & a_{rn}^{(r-1)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix}$$

и соответственно представление квадратичной формы $A(x, x)$ в виде суммы квадратов

$$A(x, x) = \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{a_{kk}^{(k-1)}} (a_{kk}^{(k-1)} x_k + a_{k,k+1}^{(k-1)} x_{k+1} + \dots + a_{kn}^{(k-1)} x_n)^2 \qquad (22)$$

$$(a_{1j}^{(0)} = a_{1j}, \quad j = 1, \dots, n).$$

Введем сокращенные обозначения для независимых линейных форм

$$X_k = a_{kk}^{(k-1)} x_k + a_{k,k+1}^{(k-1)} x_{k+1} + \dots + a_{kn}^{(k-1)} x_n \quad (a_{1k}^{(0)} = a_{1k};\ k = 1, \dots, r). \qquad (23)$$

Замечая, что[3])

$$a_{kk}^{(k-1)} = \frac{D_k}{D_{k-1}} \qquad (k = 1, \dots, r;\ D_0 = 1,\ a_{11}^{(0)} = a_{11}). \qquad (24)$$

можно тождество (22) записать в виде

$$A(x, x) = \sum_{k=1}^{r} \frac{D_{k-1}}{D_k} X_k^2 \qquad (D_0 = 1) \qquad (25)$$

---

[1]) Из формулы (21) и симметричности матрицы $A = \| a_{ik} \|_1^n$ следует симметричность матрицы $A_1 = \| a_{ik} \|_2^n$.

[2]) Выполнение алгоритма возможно благодаря неравенствам (18). Из этих неравенств следует, что $a_{11} \neq 0$, $a_{22}^{(1)} \neq 0$, ..., $a_{rr}^{(r-1)} \neq 0$ (см. стр. 44).

[3]) См. стр. 44; формулы (24) получаются приравниванием последовательных главных миноров D_{k-1} и D_k в матрицах A и G_r; при этом получаем $D_k = a_{11} a_{22}^{(1)} \dots a_{kk}^{(k-1)}$ $(k = 1, 2, \dots, r)$.

Эта формула, дающая представление квадратичной формы $A(x, x)$ в виде суммы независимых квадратов, носит название формулы Якоби[1]).

Для коэффициентов, фигурирующих в формуле Якоби линейных форм X_k, имеют место равенства[2])

$$a_{kq}^{(k-1)} = \frac{A\begin{pmatrix} 1 \ldots k-1 & k \\ 1 \ldots k-1 & q \end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix} 1 \ldots k-1 \\ 1 \ldots k-1 \end{pmatrix}}, \qquad (k=1, \ldots, r). \tag{26}$$

Если через G обозначить произвольную верхнюю треугольную матрицу, у которой первые r строк совпадают с соответствующими строками матрицы G_r, то на основе формулы Якоби можно утверждать, что преобразование переменных $\xi = Gx$ $(\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n))$ переводит квадратичную форму $\sum_{k=1}^{n} D_{k-1}/D_k \xi_k^2$ с диагональной матрицей коэффициентов $\hat{D} = \{1/D_1, D_1/D_2, \ldots, D_{r-1}/D_r, 0, \ldots, 0\}$ в квадратичную форму $A(x, x)$. Но тогда [см. (7)] справедливо равенство

$$A = G'\hat{D}G.$$

Эта формула устанавливает разложение симметрической матрицы A на треугольные множители и совпадает с формулой (55) на стр. 55.

Формулу Якоби часто представляют в другом виде.

Вместо X_k $(k=1, 2, \ldots, r)$ вводят линейно независимые формы

$$Y_k = D_{k-1}X_k \qquad (k=1, 2, \ldots, r;\ D_0 = 1). \tag{27}$$

Тогда формула Якоби (25) запишется так:

$$A(x, x) = \sum_{k=1}^{r} \frac{Y_k^2}{D_{k-1}D_k}. \tag{28}$$

Здесь

$$Y_k = c_{kk}x_k + c_{k,\,k+1}x_{k+1} + \ldots + c_{kn}x_n \qquad (k=1, 2, \ldots, r), \tag{29}$$

где

$$c_{kq} = A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k-1 & k \\ 1 & 2 & \ldots & k-1 & q \end{pmatrix} \qquad (q=k, k+1, \ldots, n;\ k=1, 2, \ldots, r). \tag{30}$$

Пример.

$$A(x, x) = x_1^2 + 3x_2^2 - 3x_4^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 6x_2x_3 + 8x_2x_4 + 2x_3x_4.$$

Приводим матрицу

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -3 & 4 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & -3 \end{Vmatrix}$$

к гауссовой форме

$$G = \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Отсюда $r=2$, $a_{11}=1$, $a_{22}^{(1)} = -1$.

[1]) Другой вывод формулы Якоби, не использующий алгоритма Гаусса, можно найти, например, в [7], стр. 43—44.

[2]) См. формулу (13) на стр. 43.

Формула (22) дает:

$$A(x, x)=(x_1-2x_2+x_3-x_4)^2-(-x_2-x_3+2x_4)^2.$$

Из формулы Якоби (28) вытекает

Теорема 2 (Якоби). *Если для квадратичной формы*

$$A(x, x)=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k$$

ранга r имеют место неравенства

$$D_k=A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & k\\ 1 & 2 & \dots & k\end{pmatrix}\neq 0 \qquad (k=1, 2, \dots, r), \tag{31}$$

то число положительных квадратов π и число отрицательных квадратов ν формы $A(x, x)$ совпадают соответственно с числом знакопостоянств P и с числом знакоперемен V в ряду чисел

$$1, D_1, D_2, \dots, D_r, \tag{32}$$

т. е. $\pi=P(1, D_1, D_2, \dots, D_r)$, $\nu=V(1, D_1, D_2, \dots, D_r)$ и сигнатура

$$\sigma=r-2V(1, D_1, D_2, \dots, D_r). \tag{33}$$

Замечание 1. *В случае, когда в ряду чисел $1, D_1, \dots, D_r\neq 0$ имеются нули, но нет трех подряд идущих нулей, для определения сигнатуры можно пользоваться формулой*

$$\sigma=r-2V(1, D_1, D_2, \dots, D_r),$$

опуская нулевое D_k, если $D_{k-1}D_{k+1}\neq 0$, и полагая в случае $D_k=D_{k+1}=0$

$$V(D_{k-1}, D_k, D_{k+1}, D_{k+2})=\begin{cases} 1 \text{ при } \dfrac{D_{k+2}}{D_{k-1}}<0,\\ 2 \text{ при } \dfrac{D_{k+2}}{D_{k-1}}>0.\end{cases} \tag{34}$$

Мы приводим здесь это правило без обоснования[1]).

Замечание 2. *При наличии трех подряд идущих нулей в ряду $D_1, D_2, \dots, D_{r-1}$ сигнатура квадратичной формы не может быть непосредственно определена при помощи теоремы Якоби.* В этом случае знаки ненулевых D_k не определяют сигнатуру формы. Следующий пример убеждает нас в этом:

$$A(x, x)=2a_1x_1x_4+a_2x_2^2+a_3x_3^2 \qquad (a_1a_2a_3\neq 0).$$

Здесь

$$D_1=D_2=D_3=0, \qquad D_4=-a_1^2a_2a_3\neq 0.$$

В то же время

$$\nu=\begin{cases} 1 \text{ при } a_2>0, \quad a_3>0,\\ 3 \text{ при } a_2<0, \quad a_3<0.\end{cases}$$

В обоих случаях $D_4<0$.

Замечание 3. *Если $D_1\neq 0, \dots, D_{r-1}\neq 0$, а $D_r=0$, то знаки $D_1, D_2, \dots, D_{r-1}$ не определяют сигнатуру формы.* В качестве подтверждающего примера можно привести форму

$$ax_1^2+ax_2^2+bx_3^2+2ax_1x_2+2ax_2x_3+2ax_1x_3=a(x_1+x_2+x_3)^2+(b-a)x_3^2.$$

Однако в последнем случае перенумерацией переменных можно достичь того, чтобы имело место и неравенство $D_r\neq 0$. Действительно, пусть s-я строка ($s\geqslant r$) линейно независима по отношению к первым $r-1$ строкам. Поменяем между собой

[1]) Это правило было установлено для случая одного нулевого D_k Гундельфингером и для двух подряд идущих нулевых D_k Фробениусом [182f].

номера переменных x_r и x_s. После этого в новой матрице коэффициентов A первые r строк, а значит (в силу симметричности матрицы) и первые r столбцов, линейно независимы. Тогда в произвольном миноре r-го порядка Δ_r каждую строку представим в виде линейной комбинаций первых r строк, а затем каждый столбец — в виде линейной комбинации первых r столбцов. В соответствии с этим, расщепляя минор Δ_r на сумму определителей r-го порядка, мы в конце концов получим, что минор Δ_r равен произведению главного минора D_r на некоторый числовой множитель: $\Delta_r = cD_r$. Но среди миноров Δ_r имеются отличные от нуля миноры, так как r — ранг матрицы A. Поэтому $D_r \neq 0$.

§ 4. Положительные квадратичные формы

В этом параграфе мы остановимся на специальном, но важном классе положительных квадратичных форм.

Определение 3. Вещественная квадратичная форма $A(x, x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k$ называется *неотрицательной* (*неположительной*), если при любых вещественных значениях переменных

$$A(x, x) \geqslant 0 \qquad (\leqslant 0). \tag{35}$$

В этом случае симметрическая матрица коэффициентов A называется положительно полуопределенной (отрицательно полуопределенной).

Определение 4. Вещественная квадратичная форма $A(x, x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k$ называется *положительно определенной* (*отрицательно определенной*), если при любых не равных одновременно нулю вещественных значениях переменных ($x \neq 0$)

$$A(x, x) > 0 \qquad (< 0). \tag{36}$$

В этом случае матрица A также называется положительно определенной (отрицательно определенной).

Класс положительно определенных (отрицательно определенных) форм является частью класса неотрицательных (соответственно неположительных) форм.

Пусть дана неотрицательная форма $A(x, x)$. Представим ее в виде суммы независимых квадратов:

$$A(x, x) = \sum_{i=1}^{r} a_iX_i^2. \tag{37}$$

В этом представлении все квадраты должны быть положительными:

$$a_i > 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r). \tag{38}$$

Действительно, если бы какое-либо a_i было <0, то можно было бы подобрать такие значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, при которых

$$X_1 = \ldots = X_{i-1} = X_{i+1} = \ldots = X_r = 0, \qquad X_i \neq 0.$$

Но тогда при этих значениях переменных форма $A(x, x)$ имела бы отрицательное значение, что по условию невозможно. Очевидно, что и обратно, из (37) и (38) следует положительность формы $A(x, x)$.

Таким образом, неотрицательная квадратичная форма характеризуется равенствами $\sigma = r$ ($\pi = r$, $\nu = 0$).

Пусть теперь $A(x, x)$ — положительно определенная форма. Тогда $A(x, x)$ и неотрицательная форма. Поэтому она представима в виде (37),

где все a_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ положительны. Из положительной определенности формы следует, что $r = n$. Действительно, в случае $r < n$ можно подобрать такие не равные одновременно нулю значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, при которых все X_i обращались бы в нуль. Но тогда в силу (37) $A(x, x) = 0$ при $x \neq 0$, что противоречит условию (36).

Легко видеть, что и обратно, если в (37) $r = n$ и все $a_1, a_2, \ldots, a_n$ положительны, то $A(x, x)$ — положительно определенная форма.

Другими словами, *неотрицательная форма тогда и только тогда является положительно определенной, когда она не сингулярна.*

Следующая теорема дает критерий положительной определенности формы в виде неравенств, которым должны удовлетворять коэффициенты формы. При этом используются уже встречавшиеся в предыдущих параграфах обозначения для последовательных главных миноров матрицы A:

$$D_1 = a_{11}, \quad D_2 = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}, \ldots, D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Теорема 3. *Для того чтобы квадратичная форма была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства*

$$D_1 > 0, \quad D_2 > 0, \ldots, D_n > 0. \tag{39}$$

Доказательство. Достаточность условий (39) следует непосредственно из формулы Якоби (28). Необходимость условий (39) устанавливается следующим образом. Из положительной определенности формы $A(x, x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k$ следует положительная определенность «урезанных» форм[1])

$$A_p(x, x) = \sum_{i,k=1}^{p} a_{ik}x_ix_k \qquad (p = 1, 2, \ldots, n).$$

Но тогда все эти формы должны быть несингулярны, т. е.

$$D_p = |A_p| \neq 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots, n).$$

Теперь мы имеем возможность воспользоваться формулой Якоби (28) (при $r = n$). Поскольку в правой части этой формулы все квадраты должны быть положительными, то

$$D_1 > 0, \quad D_1D_2 > 0, \quad D_2D_3 > 0, \ldots, D_{n-1}D_n > 0.$$

Отсюда следуют неравенства (39). Теорема доказана.

Поскольку любой главный минор матрицы A при надлежащей перенумерации переменных можно поместить в левый верхний угол, то имеет место

Следствие. *В положительно определенной квадратичной форме* $A(x, x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k$ *все главные миноры матрицы коэффициентов*

---

[1]) Форма $A_p(x, x)$ получается из формы $A(x, x)$, если в последней положить $x_{p+1} = \ldots = x_n = 0$ $(p = 1, 2, \ldots, n)$.

положительны[1]):

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ i_1 & i_2 & \dots & i_p \end{pmatrix} > 0 \quad (1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_p \leqslant n;\ p = 1, 2, \dots, n). \tag{40}$$

Замечание. Из неотрицательности последовательных главных миноров

$$D_1 \geqslant 0,\ D_2 \geqslant 0,\ \dots,\ D_n \geqslant 0$$

не следует неотрицательность формы $A(x, x)$. Действительно, форма

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2,$$

в которой $a_{11} = a_{12} = 0$, $a_{22} < 0$, удовлетворяет условиям $D_1 \geqslant 0$, $D_2 \geqslant 0$, но не является неотрицательной.

Однако имеет место следующая

Теорема 4. *Для того чтобы квадратичная форма* $A(x, x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k$ *была неотрицательной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры ее матрицы коэффициентов были неотрицательны:*

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ i_1 & i_2 & \dots & i_p \end{pmatrix} \geqslant 0 \quad (1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_p \leqslant n;\ p = 1, 2, \dots, n).$$

Доказательство. Введем вспомогательную форму

$$A_\varepsilon(x, x) = A(x, x) + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \quad (\varepsilon > 0).$$

Очевидно, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} A_\varepsilon(x, x) = A(x, x)$.

Из неотрицательности формы $A(x, x)$ следует положительная определенность формы $A_\varepsilon(x, x)$ и, следовательно, неравенства (см. следствие из теоремы 3)

$$A_\varepsilon\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ i_1 & i_2 & \dots & i_p \end{pmatrix} > 0 \quad (1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_p \leqslant n;\ p = 1, 2, \dots, n).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем условия (40).

Пусть, наоборот, даны условия (40). Из этих условий следует:

$$A_\varepsilon\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ i_1 & i_2 & \dots & i_p \end{pmatrix} = \varepsilon^p + \dots \geqslant \varepsilon^p > 0 \quad (1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_p \leqslant n;\ p = 1, 2, \dots, n).$$

Но тогда (согласно теореме 3) $A_\varepsilon(x, x)$ — положительно определенная форма

$$A_\varepsilon(x, x) > 0 \quad (x \neq 0).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем отсюда:

$$A(x, x) \geqslant 0.$$

Теорема доказана.

---

[1]) Таким образом, из положительности последовательных главных миноров вещественной симметрической матрицы следует положительность всех остальных главных миноров.

Условия неположительности и отрицательной определенности формы получаются соответственно из неравенств (39) и (40), если эти неравенства применить к форме $-A(x, x)$.

Теорема 5. *Для того чтобы квадратичная форма $A(x, x)$ была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы имели место неравенства*

$$D_1<0,\ D_2>0,\ D_3<0,\ \ldots,\ (-1)^n D_n>0, \tag{39'}$$

Теорема 6. *Для того чтобы квадратичная форма $A(x, x)$ была неположительной, необходимо и достаточно, чтобы имели место неравенства*

$$(-1)^p A\begin{pmatrix} i_1\, i_2 \ldots i_p \\ i_1\, i_2 \ldots i_p \end{pmatrix} \geqslant 0 \quad (1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_p\leqslant n;\ p=1, 2, \ldots, n). \tag{40'}$$

§ 5. Приведение квадратичной формы к главным осям

Рассмотрим произвольную вещественную квадратичную форму

$$A(x, x)=\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k.$$

Ее матрица коэффициентов $A=\|a_{ik}\|_1^n$ является вещественной симметрической. Поэтому (см. гл. IX, § 13) она ортогонально-подобна некоторой вещественной диагональной матрице Λ, т. е. существует такая вещественная ортогональная матрица O, что

$$\Lambda=O^{-1}AO \quad (\Lambda=\|\lambda_i\delta_{ik}\|_1^n,\quad OO'=E). \tag{41}$$

Здесь $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — характеристические числа матрицы A.

Поскольку для ортогональной матрицы $O^{-1}=O'$, то из (41) следует, что форма $A(x, x)$ при ортогональном преобразовании переменных

$$x=O\xi \qquad (OO'=E) \tag{42}$$

или в более подробной записи

$$x_i=\sum_{k=1}^{n} o_{ik}\xi_k \quad \left(\sum_{j=1}^{n} o_{ij}o_{kj}=\delta_{ik};\ i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n\right) \tag{42'}$$

переходит в форму

$$\Lambda(\xi, \xi)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\xi_i^2. \tag{43}$$

Теорема 7. *Вещественная квадратичная форма $A(x, x)=\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k$ всегда может быть приведена при помощи ортогонального преобразования к канонической форме* (43); *при этом $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — характеристические числа матрицы $A=\|a_{ik}\|_1^n$.*

Приведение квадратичной формы $A(x, x)$ при помощи ортогонального преобразования к канонической форме (43) называется *приведением к главным осям*. Это название связано с тем, что уравнение центральной гиперповерхности второго порядка,

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k=c \qquad (c=\text{const}\neq 0), \tag{44}$$

при ортогональном преобразовании переменных (42) принимает канонический вид

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \frac{\xi_i^2}{a_i^2} = 1 \left(\frac{\varepsilon_i}{a_i^2} = \frac{\lambda_i}{c}; \quad \varepsilon_i = \pm 1; \quad i = 1, 2, \ldots, n \right). \tag{45}$$

Если мы будем рассматривать $x_1, x_2, \ldots, x_n$ как координаты в некотором ортонормированном базисе n-мерного евклидова пространства, то $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ будут координатами в новом ортонормированном базисе того же пространства, причем «поворот»[1]) осей осуществляется ортогональным преобразованием (42). Новые оси координат являются осями симметрии центральной поверхности (44) и обычно называются *главными осями* этой поверхности.

Из формулы (43) следует, что *ранг r формы $A(x, x)$ равен числу отличных от нуля характеристических чисел матрицы A, а сигнатура σ равна разности между числом положительных и числом отрицательных характеристических чисел матрицы A.*

Отсюда, в частности, вытекает и такое предложение:

Если при непрерывном изменении коэффициентов квадратичной формы остается неизменным ее ранг, то при этом изменении коэффициентов остается неизменной и ее сигнатура.

При этом мы исходим из того, что непрерывное изменение коэффициентов влечет непрерывное изменение характеристических чисел. Сигнатура может измениться лишь тогда, когда какое-либо характеристическое число поменяет знак. Но тогда в какой-то промежуточный момент рассматриваемое характеристическое число обратится в нуль, что влечет изменение ранга формы.

Из формулы (43) также следует, что вещественная симметрическая матрица A является положительно полуопределенной (положительно определенной) в том и только в том случае, когда все характеристические числа матрицы A неотрицательны (положительны)[2]), т. е. когда она представима в виде

$$A = O \| \lambda_i \delta_{ik} \|_1^n O^{-1} \quad [\lambda_i \geqslant 0 \ (> 0); \ i = 1, \ldots, n]. \tag{46}$$

Положительно полуопределенная (определенная) матрица

$$F = O \| \sqrt{\lambda_i} \delta_{ik} \|_1^n O^{-1} \tag{47}$$

является корнем квадратным из положительно полуопределенной (определенной) матрицы A:

$$F = \sqrt{A}. \tag{48}$$

---

[1]) Если $|O| = -1$, то преобразование (45) представляет собой соединение вращения с зеркальным отображением (см. стр. 260). Однако приведение к главным осям можно всегда осуществить при помощи ортогональной матрицы O первого рода ($|O| = 1$). Это следует из того, что, не меняя канонической формы, мы можем сделать дополнительное преобразование

$$\xi_i = \xi_i' \ (i = 1, 2, \ldots, n-1), \quad \xi_n = -\xi_n'.$$

[2]) Отсюда сразу следует, что в ортонормированном базисе евклидова пространства неотрицательному (положительно определенному) оператору A отвечает положительно полуопределенная (положительно определенная) матрица A. В этом можно убедиться и непосредственно, сопоставляя определения 3 и 4 из § 11 гл. IX.

§ 6. Пучок квадратичных форм

В теории малых колебаний приходится одновременно рассматривать две квадратичные формы, из которых одна задает потенциальную, а вторая — кинетическую энергию системы. Вторая форма всегда является положительно определенной.

Изучению системы двух таких форм мы посвящаем этот параграф.

Две вещественные квадратичные формы

$$A(x, x) = \sum_{i, k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k, \qquad B(x, x) = \sum_{i, k=1}^{n} b_{ik}x_ix_k$$

определяют *пучок* форм $A(x, x) - \lambda B(x, x)$ (λ — параметр).

Если форма $B(x, x)$ — положительно определенная, то пучок $A(x, x) - \lambda B(x, x)$ называют *регулярным*.

Уравнение

$$|A - \lambda B| = 0$$

называется характеристическим уравнением пучка форм $A(x, x) - \lambda B(x, x)$.

Обозначим через λ_0 какой-либо корень этого уравнения. Поскольку матрица $A - \lambda_0 B$ особенная, то существует столбец $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \neq 0$ такой, что $(A - \lambda_0 B)z = 0$ или

$$Az = \lambda_0 Bz \qquad (z \neq 0).$$

Число λ_0 мы будем называть *характеристическим числом пучка* $A(x, x) - \lambda B(x, x)$, а z — соответствующим *главным столбцом* или «*главным вектором*» этого пучка. Имеет место следующая

Теорема 8. *Характеристическое уравнение*

$$|A - \lambda B| = 0$$

регулярного пучка форм $A(x, x) - \lambda B(x, x)$ *всегда имеет* n *вещественных корней* λ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, *которым соответствуют главные векторы* $z^k = (z_{1k}, z_{2k}, \ldots, z_{nk})$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$:

$$Az^k = \lambda_k Bz^k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{49}$$

Эти главные векторы z^k *могут быть выбраны так, чтобы выполнялись соотношения*[1])

$$B(z^i, z^k) = \delta_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n). \tag{50}$$

Доказательство. Заметим, что равенства (49) могут быть записаны так:

$$B^{-1}Az^k = \lambda_k z^k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{49'}$$

Таким образом, наша теорема утверждает, что матрица

$$D = B^{-1}A \tag{51}$$

имеет: 1° простую структуру, 2° вещественные характеристические числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ и 3° собственные столбцы (векторы) $z^1, z^2, \ldots, z^n$, соответствующие этим характеристическим числам и удовлетворяющие соотношениям (50).

---

[1]) Иногда говорят, что равенства (50) выражают собой ортонормированность векторов $z^1, \ldots, z^n$ в B-метрике.

Матрица D, являясь произведением двух симметрических матриц B^{-1} и A, не обязательно сама должна быть симметрической, поскольку $D=B^{-1}A$, а $D'=AB^{-1}$. Однако, полагая $F=\sqrt{B}$ [1]), из равенства (51) легко получаем:

$$D=F^{-1}SF, \tag{52}$$

где

$$S=F^{-1}AF^{-1} \tag{52'}$$

— симметрическая матрица. Из того, что *матрица D подобна симметрической матрице S*, сразу следуют утверждения 1° и 2°. Обозначая через u^k $(k=1, \ldots, n)$ пронормированную систему собственных векторов симметрической матрицы S:

$$Su^k=\lambda_k u^k \ (k=1, \ldots, n), \qquad (u^k)'\,u^l=\delta_{kl} \ (k,\ l=1, \ldots, n) \tag{53}$$

и полагая

$$u^k=Fz^k \quad (k=1, \ldots, n), \tag{54}$$

мы из равенств (52), (52'), (53), (54) найдем:

$$Dz^k=\lambda_k z^k, \quad B(z^k,\ z^l)=(z^k)'\,Bz^l=\delta_{kl},$$

где $k,\ l=1, \ldots, n$, т. е. доказано утверждение 3°, и теорема 8 доказана полностью.

Заметим, что из (50) следует, что столбцы $z^1, z^2, \ldots, z^n$ линейно независимы. В самом деле, пусть

$$\sum_{k=1}^{n} c_k z^k=0. \tag{55}$$

Тогда при любом i $(1\leqslant i\leqslant n)$ согласно (50)

$$0=B\Big(z^i,\ \sum_{k=1}^{n} c_k z_k\Big)=\sum_{k=1}^{n} c_k B(z_i,\ z_k)=c_i.$$

Таким образом, в (55) все c_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ равны нулю, и никакой линейной зависимости между столбцами $z^1, z^2, \ldots, z^n$ не существует.

Квадратную матрицу, составленную из главных столбцов $z^1, z^2, \ldots, z^n$, удовлетворяющих соотношениям (50),

$$Z=(z^1,\ z^2,\ \ldots,\ z^n)=\|z_{ik}\|_1^n$$

мы будем называть *главной матрицей* для пучка форм $A(x,\ x)-\lambda B(x,\ x)$. Главная матрица Z — неособенная ($|Z|\neq 0$), поскольку ее столбцы линейно независимы.

Равенства (50) могут быть записаны так:

$$z^{i\prime}Bz^k=\delta_{ik} \qquad (i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{56}$$

Кроме того, помножив обе части равенств (49) слева на строчную матрицу $z^{i\prime}$, получим:

$$z^{i\prime}Az^k=\lambda_k z^{i\prime}Bz^k=\lambda_k\delta_{ik} \qquad (i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{57}$$

Вводя главную матрицу $Z=(z^1,\ z^2,\ \ldots,\ z^n)$, мы равенства (56) и (57) можем представить в виде

$$Z'AZ=\|\lambda_k\delta_{ik}\|_1^n, \quad Z'BZ=E. \tag{58}$$

---

[1]) F — положительно определенная матрица (см. стр. 280). Поэтому $|F|\neq 0$.

Формулы (58) показывают, что неособенное преобразование

$$x = Z\xi \tag{59}$$

одновременно приводит квадратичные формы $A(x, x)$ и $B(x, x)$ к суммам квадратов:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \xi_k^2 \text{ и } \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2. \tag{60}$$

Это свойство преобразования (59) характеризует главную матрицу Z. Действительно, пусть преобразование (59) одновременно приводит формы $A(x, x)$ и $B(x, x)$ к каноническим видам (60). Тогда имеют место равенства (58), а следовательно, для столбцов матрицы Z, (56) и (57). Из (58) следует неособенность матрицы Z ($|Z| \neq 0$). Равенства же (57) перепишем так:

$$z^{i'}(Az^k - \lambda_k Bz^k) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n); \tag{61}$$

здесь k имеет произвольное фиксированное значение ($1 \leqslant k \leqslant n$). Систему равенств (61) можно объединить в одно равенство:

$$Z'(Az^k - \lambda_k Bz^k) = 0,$$

откуда, поскольку Z' — неособенная матрица,

$$Az^k - \lambda_k Bz^k = 0,$$

т. е. при любом k получаем (49). Следовательно, Z — главная матрица. Нами доказана

Теорема 9. *Если $Z = \| z_{ik} \|_1^n$ — главная матрица регулярного пучка форм $A(x, x) - \lambda B(x, x)$, то преобразование*

$$x = Z\xi \tag{62}$$

приводит одновременно формы $A(x, x)$ и $B(x, x)$ соответственно к суммам квадратов

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \xi_k^2, \qquad \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2, \tag{63}$$

где (63) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — *характеристические числа пучка $A(x, x) - \lambda B(x, x)$, соответствующие столбцам $z^1, z^2, \ldots, z^n$ матрицы Z.*

Обратно, если некоторое преобразование (62) *одновременно переводит формы $A(x, x)$ и $B(x, x)$ к виду* (63), *то $Z = \| z_{ik} \|_1^n$ — главная матрица регулярного пучка форм $A(x, x) - \lambda B(x, x)$.*

Иногда характерное свойство преобразования (62), сформулированное в теореме 9, используется для построения главной матрицы и доказательства теоремы 8[1]). Для этого сначала совершают преобразование переменных $x = Ty$, приводящее форму $B(x, x)$ к единичной сумме квадратов $\sum_{k=1}^{n} y_k^2$ (что всегда возможно, поскольку $B(x, x)$ — положительно определенная форма). При этом форма $A(x, x)$ переходит в некоторую форму $A_1(y, y)$. Теперь форму $A_1(y, y)$ приводят к виду $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \xi_k^2$ при помощи ортогонального преобразования $y = O\xi$ (приведение к главным осям!).

---

[1]) См. [7], стр. 56—57.

При этом, очевидно[1]), $\sum_{k=1}^{n} y_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2$. Таким образом, преобразование $x = Z\xi$, где $Z = TO$, приводит данные две формы к виду (63). После этого показывают (как это было сделано на стр. 282), что столбцы $z^1, z^2, \ldots, z^n$ матрицы Z удовлетворяют соотношениям (49) и (50).

В частном случае, когда $B(x, x)$ — единичная форма, т. е. $B(x, x) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$ и, следовательно, $B = E$, характеристическое уравнение пучка $A(x, x) - \lambda B(x, x)$ совпадает с характеристическим уравнением матрицы A, а главные векторы пучка становятся собственными векторами матрицы A. В этом случае соотношения (50) записываются так: $z^{i\prime} z^k = \delta_{ik}$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$, и выражают ортонормированность столбцов $z^1, z^2, \ldots, z^n$.

Теоремы 8 и 9 допускают наглядную геометрическую интерпретацию. Введем евклидово пространство $\boldsymbol{R}$ с базисом $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и основной метрической формой $B(x, x)$.

Рассмотрим в $\boldsymbol{R}$ центральную гиперповерхность второго порядка, уравнение которой

$$A(x, x) \equiv \sum_{i, k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k = c. \tag{64}$$

После преобразования координат $x = Z\xi$, где $Z = \| z_{ik} \|_1^n$ — главная матрица пучка $A(x, x) - \lambda B(x, x)$, новыми базисными векторами являются векторы $z^1, z^2, \ldots, z^n$, координаты которых в старом базисе составляют столбцы матрицы Z, т. е. главные векторы пучка. Эти векторы образуют ортонормированный базис, в котором уравнение гиперповерхности (64) имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \xi_k^2 = c. \tag{65}$$

Следовательно, главные векторы пучка $z^1, z^2, \ldots, z^n$ совпадают по направлению с главными осями гиперповерхности (64), а характеристические числа пучка $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ определяют величины полуосей: $\lambda_k = \pm \frac{c}{a_k^2}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Таким образом, задача определения характеристических чисел и главных векторов регулярного пучка форм $A(x, x) - \lambda B(x, x)$ эквивалентна задаче приведения к главным осям уравнения (64) центральной гиперповерхности второго порядка в том случае, когда уравнение гиперповерхности задано в обобщенной косоугольной системе координат[2]), в которой «единичная сфера» имеет уравнение $B(x, x) = 1$.

Пример.

Дано уравнение поверхности второго порядка

$$2x^2 - 2y^2 - 3z^2 - 10yz + 2xz - 4 = 0 \tag{66}$$

в обобщенной косоугольной системе координат, в которой уравнение единичной сферы

$$2x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2xz = 1. \tag{67}$$

Требуется уравнение (66) привести к главным осям.

---

[1]) Ортогональные преобразования не меняют суммы квадратов переменных, поскольку $(Ox)' Ox = x'x$.

[2]) То есть косоугольная система координат с различными масштабами длин вдоль осей.

В данном случае

$$A=\begin{Vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \\ 1 & -5 & -3 \end{Vmatrix}, \qquad B=\begin{Vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Характеристическое уравнение пучка $|A-\lambda B|=0$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} 2-2\lambda & 0 & 1-\lambda \\ 0 & -2-3\lambda & -5 \\ 1-\lambda & -5 & -3-2\lambda \end{vmatrix}=0. \tag{68}$$

Это уравнение имеет три корня: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=-4$.

Координаты главного вектора, соответствующего характеристическому числу 1, обозначим через u, v, w. Величины u, v, w определяются из системы однородных уравнений, коэффициенты которых совпадают с элементами определителя (68) при $\lambda=1$:

$$\begin{aligned} 0\cdot u+0\cdot v+0\cdot w&=0, \\ 0\cdot u-5v-5w&=0, \\ 0\cdot u-5v-5w&=0. \end{aligned}$$

Фактически мы здесь имеем лишь одно соотношение

$$v+w=0.$$

Характеристическому числу $\lambda=1$ должны отвечать два ортонормированных главных вектора. Координаты первого можем выбрать произвольно, лишь бы выполнялось условие $v+w=0$. Выберем их так:

$$u=0,\ v,\ w, \text{ где } w=-v.$$

Координаты второго главного вектора возьмем в виде

$$u',\ v',\ w', \text{ где } w'=-v',$$

и запишем условие ортогональности $[B(z^1, z^2)=0]$:

$$2uu'+3vv'+2ww'+uw'+u'w=0.$$

Отсюда найдем: $u'=5v'$. Таким образом, координаты второго главного вектора

$$u'=5v',\ v',\ w'=-v'.$$

Аналогично, полагая в характеристическом определителе $\lambda=-4$, найдем для соответствующего главного вектора:

$$u'',\ v''=-u'',\ w''=-2u''.$$

Величины v, v' и u'' определяются из условия: координаты главного вектора должны удовлетворять уравнению единичной сферы $[B(x, x)=1]$, т. е. уравнению (67). Отсюда находим:

$$v=\frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad v'=\frac{1}{3\sqrt{5}}, \qquad u''=-\frac{1}{3}.$$

Поэтому главная матрица имеет вид

$$Z=\begin{Vmatrix} 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{Vmatrix},$$

и соответствующее преобразование координат ($x=Z\xi$) приводит уравнения (66) и (67) к каноническому виду

$$\xi_1^2+\xi_2^2-4\xi_3^2-4=0, \quad \xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2=1.$$

Первое уравнение может быть еще записано так:

$$\frac{\xi_1^2}{4}+\frac{\xi_2^2}{4}-\frac{\xi_3^2}{1}=1.$$

Это — уравнение однополостного гиперболоида вращения с вещественной полуосью, равной 2, и мнимой, равной 1. Координаты орта оси вращения определяются третьим столбцом матрицы Z, т. е. равны $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$. Координаты ортов других двух ортогональных осей задаются первым и вторым столбцами.

§ 7. Экстремальные свойства характеристических чисел регулярного пучка форм[1])

1. Пусть даны две квадратичные формы:

$$A(x, x)=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k \quad \text{и} \quad B(x, x)=\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}x_ix_k,$$

причем форма $B(x, x)$ — положительно определенная. Характеристические числа регулярного пучка форм $A(x, x)-\lambda B(x, x)$ занумеруем так, чтобы они шли в неубывающем порядке:

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n. \tag{69}$$

Соответствующие этим характеристическим числам главные векторы[2]) по-прежнему будем обозначать через $z^1, z^2, \ldots, z^n$:

$$z^k=(z_{1k}, z_{2k}, \ldots, z_{nk}); \quad z=1, 2, \ldots, n.$$

Определим наименьшее значение (минимум) отношения форм $\frac{A(x, x)}{B(x, x)}$, рассматривая все возможные значения переменных, не равные одновременно нулю ($x \neq 0$). Для этого удобно перейти к новым переменным $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ при помощи преобразования

$$x=Z\xi \qquad \left(x_i=\sum_{k=1}^{n} z_{ik}\xi_k;\ i=1, 2, \ldots, n\right),$$

где $Z=\|z_{ik}\|_1^n$ — главная матрица пучка $A(x, x)-\lambda B(x, x)$. В новых переменных отношение форм представится в виде [см. (63)]

$$\frac{A(x, x)}{B(x, x)}=\frac{\lambda_1\xi_1^2+\lambda_2\xi_2^2+\ldots+\lambda_n\xi_n^2}{\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2}. \tag{70}$$

Возьмем на числовой оси n точек $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Припишем этим точкам соответственно неотрицательные массы $m_1=\xi_1^2, m_2=\xi_2^2, \ldots, m_n=\xi_n^2$. Тогда согласно формуле (70) отношение $\frac{A(x, x)}{B(x, x)}$ будет числовой координатой центра этих масс. Поэтому

$$\lambda_1 \leqslant \frac{A(x, x)}{B(x, x)} \leqslant \lambda_n.$$

Отбрасывая временно вторую часть неравенства, выясним, когда в первой части имеет место знак равенства. Для этого выделим в (69)

---

[1]) При изложении этого параграфа мы следуем книге [7], § 10.

[2]) Здесь мы употребляем термин «главный вектор» в смысле главного столбца пучка. См. стр. 281. Вообще в этом параграфе, имея в виду геометрическую интерпретацию (см. стр. 284), мы часто столбец будем называть вектором.

группы равных характеристических чисел:

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_{p_1} < \lambda_{p_1+1} = \ldots = \lambda_{p_1+p_2} < \ldots \tag{71}$$

Центр масс может совпадать с крайней точкой λ_1 лишь в том случае, когда все массы вне этой точки равны нулю, т. е. когда

$$\xi_{p_1+1} = \ldots = \xi_n = 0.$$

В этом случае соответствующее x будет линейной комбинацией главных столбцов $z^1, z^2, \ldots, z^{p_1}$ [1]). Поскольку все эти столбцы отвечают характеристическим числам, равным λ_1, то и x будет главным столбцом (вектором) для $\lambda = \lambda_1$.

Нами доказана

Теорема 10. *Наименьшее характеристическое число регулярного пучка $A(x, x) - \lambda B(x, x)$ является минимумом отношения форм $A(x, x)$ и $B(x, x)$*

$$\lambda_1 = \min \frac{A(x, x)}{B(x, x)}, \tag{72}$$

причем этот минимум достигается только на векторах, являющихся главными для характеристического числа λ_1.

2. Для того чтобы дать аналогичную «минимальную» характеристику для следующего характеристического числа λ_2, ограничимся рассмотрением всех векторов x, ортогональных к z^1, т. е. удовлетворяющих уравнению [2])

$$B(z^1, x) = 0.$$

Для этих векторов

$$\frac{A(x, x)}{B(x, x)} = \frac{\lambda_2 \xi_2^2 + \ldots + \lambda_n \xi_n^2}{\xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2}$$

и, следовательно,

$$\min \frac{A(x, x)}{B(x, x)} = \lambda_2 \qquad [B(z^1, x) = 0].$$

При этом знак равенства достигается только на тех векторах, ортогональных к z^1, которые являются главными для характеристического числа λ_2.

Переходя к дальнейшим характеристическим числам, мы в конце концов получим следующую теорему:

Теорема 11. *При любом p $(1 \leqslant p \leqslant n)$ p-е по величине характеристическое число λ_p в ряду* (69) *является минимумом отношения*

---

[1]) Из $x = Z\xi$ следует: $x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k z^k$.

[2]) Здесь и дальше под ортогональностью двух векторов (столбцов) x, y мы будем понимать ортогональность в B-метрике, т. е. равенство $B(x, y) = 0$. Это находится в полном соответствии с геометрической интерпретацией, данной в предыдущем параграфе. Мы рассматриваем величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ как координаты вектора x в некотором базисе евклидова пространства, в котором квадрат длины (норма) вектора задается положительно определенной формой $B(x, x) = \sum_{i,k=1}^{n} b_{ik} x_i x_k$. В этой метрике векторы $z^1, z^2, \ldots, z^n$ образуют ортонормированный базис. Поэтому если вектор $x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k z^k$ ортогонален к одному из z^k, то соответствующее $\xi_k = 0$.

форм

$$\lambda_p = \min \frac{A(x, x)}{B(x, x)} \tag{73}$$

при условии, что варьируемый вектор x ортогонален к первым $p-1$ ортонормированным главным векторам $z^1, z^2, \ldots, z^{p-1}$:

$$B(z^1, x) = 0, \ldots, B(z^{p-1}, x) = 0. \tag{74}$$

При этом минимум достигается только на тех векторах, которые удовлетворяют условию (74) и являются одновременно главными векторами для характеристического числа λ_p.

3. Характеристика числа λ_p, данная в теореме 11, имеет то неудобство, что она связана с предыдущими главными векторами $z^1, z^2, \ldots, z^{p-1}$ и, следовательно, может быть использована только тогда, когда эти векторы известны. Кроме того, в выборе этих векторов имеется известный произвол.

Для того чтобы дать характеристику числа λ_p $(p = 1, 2, \ldots, n)$, свободную от указанных недостатков, мы введем понятие о связях, наложенных на переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Пусть даны линейные формы от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$L_k(x) = l_{1k}x_1 + l_{2k}x_2 + \ldots + l_{nk}x_n \quad (k = 1, 2, \ldots, h). \tag{74'}$$

Мы будем говорить, что на переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ или (что то же) на вектор x наложены h связей $L_1, L_2, \ldots, L_h$, если рассматриваются лишь значения переменных, удовлетворяющие системе уравнений

$$L_k(x) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, h). \tag{74''}$$

Сохраняя обозначения (74′) для произвольных линейных форм, мы введем специализированные обозначения для «скалярных произведений» вектора x на главные векторы $z^1, z^2, \ldots, z^n$:

$$\widetilde{L}_k(x) = B(z^k, x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)^{1)}. \tag{75}$$

Кроме того, в случае, когда на варьируемый вектор наложены связи (74″), будем обозначать $\min \frac{A(x, x)}{B(x, x)}$ так:

$$\mu\left(\frac{A}{B}; L_1, L_2, \ldots, L_h\right).$$

В этих обозначениях равенство (73) запишется так:

$$\lambda_p = \mu\left(\frac{A}{B}; \widetilde{L}_1, \widetilde{L}_2, \ldots, \widetilde{L}_{p-1}\right) \qquad (p = 1, 2, \ldots, n). \tag{76}$$

Рассмотрим связи

$$L_1(x) = 0, \ldots, L_{p-1}(x) = 0 \tag{77}$$

и

$$\widetilde{L}_{p+1}(x) = 0, \ldots, \widetilde{L}_n(x) = 0. \tag{78}$$

Поскольку число связей (77) и (78) меньше n, то существует вектор $x^{(1)} \neq 0$, удовлетворяющий одновременно всем этим связям. Так как связи (78) выражают ортогональность вектора x к главным векторам

---

1) $\widetilde{L}_k(x) = z^{k'}Bx = \widetilde{l}_{1k}x_1 + \widetilde{l}_{2k}x_2 + \ldots + \widetilde{l}_{nk}x_n$, где $\widetilde{l}_{1k}, \widetilde{l}_{2k}, \ldots, \widetilde{l}_{nk}$ — элементы строчной матрицы $z^{k'}B$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

$z^{p+1}, \ldots, z^n$, то соответствующие вектору $x^{(1)}$ координаты $\xi_{p+1} = \ldots = \xi_n = 0$. Поэтому согласно (70) 65

$$\frac{A(x^{(1)}, x^{(1)})}{B(x^{(1)}, x^{(1)})} = \frac{\lambda_1\xi_1^2 + \ldots + \lambda_p\xi_p^2}{\xi_1^2 + \ldots + \xi_p^2} \leqslant \lambda_p.$$

Но тогда

$$\mu\left(\frac{A}{B};\ L_1,\ L_2,\ \ldots,\ L_{p-1}\right) \leqslant \frac{A(x^{(1)}, x^{(1)})}{B(x^{(1)}, x^{(1)})} \leqslant \lambda_p.$$

Это неравенство в соединении с (76) показывает, что при варьировании связей $L_1, L_2, \ldots, L_{p-1}$ величина μ остается $\leqslant \lambda_p$ и достигает λ_p, если взять специализированные связи $\tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \ldots, \tilde{L}_{p-1}$.

Нами доказана

Теорема 12. *Если мы рассмотрим минимум отношения двух форм* $\frac{A(x, x)}{B(x, x)}$ *при произвольных* $p-1$ *связях* $L_1, L_2, \ldots, L_{p-1}$ *и будем варьировать связи, то максимум этих минимумов будет равен* λ_p:

$$\lambda_p = \max \mu\left(\frac{A}{B};\ L_1,\ L_2,\ \ldots,\ L_{p-1}\right) \qquad (p = 1, \ldots, n). \tag{79}$$

Теорема 12 дает «максимально-минимальную» характеристику числам $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ в отличие от «минимальной» характеристики, о которой идет речь в теореме 11.

4. Заметим, что при замене формы $A(x, x)$ в пучке $A(x, x) - \lambda B(x, x)$ на форму $-A(x, x)$ все характеристические числа пучка меняют знак, а соответствующие главные векторы остаются неизменными. Таким образом, характеристическими числами пучка $-A(x, x) - \lambda B(x, x)$ являются числа $-\lambda_n \leqslant -\lambda_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant -\lambda_1$.

Кроме того, обозначая через

$$\nu\left(\frac{A}{B};\ L_1,\ L_2,\ \ldots,\ L_h\right) = \max \frac{A(x, x)}{B(x, x)} \tag{80}$$

в случае, когда на варьируемый вектор наложены связи $L_1, L_2, \ldots, L_h$, мы сможем написать:

$$\mu\left(-\frac{A}{B};\ L_1,\ L_2,\ \ldots,\ L_h\right) = -\nu\left(\frac{A}{B};\ L_1,\ L_2,\ \ldots,\ L_h\right)$$

и

$$\max \mu\left(-\frac{A}{B};\ L_1,\ L_2,\ \ldots,\ L_h\right) = -\min \nu\left(\frac{A}{B};\ L_1,\ L_2,\ \ldots,\ L_h\right).$$

Поэтому, применяя к отношению $-\frac{A(x, x)}{B(x, x)}$ теоремы 10, 11, 12, мы вместо формул (72), (76), (79) получим формулы

$$\lambda_n = \max \frac{A(x, x)}{B(x, x)},$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_{n-p+1} &= \nu\left(\frac{A}{B};\ \tilde{L}_n,\ \tilde{L}_{n-1},\ \ldots,\ \tilde{L}_{n-p+2}\right), \\ \lambda_{n-p+1} &= \min \nu\left(\frac{A}{B};\ L_1,\ L_2,\ \ldots,\ L_{p-1}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (p = 2, \ldots, n).$$

Эти формулы устанавливают соответственно «максимальные» и «минимально-максимальные» свойства чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, которые мы сформулируем в виде следующей теоремы:

Теорема 13. *Пусть характеристическим числам*

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$$

регулярного пучка форм $A(x, x) - \lambda B(x, x)$ *соответствуют линейно независимые главные векторы пучка* $z^1, z^2, \ldots, z^n$. *Тогда*

1) *Наибольшее характеристическое число* λ_n *является максимумом отношения форм*

$$\lambda_n = \max \frac{A(x, x)}{B(x, x)}, \tag{81}$$

причем этот максимум достигается только на главных векторах пучка, соответствующих характеристическому числу λ_n.

2) *p-е (с конца) характеристическое число* λ_{n-p+1} $(2 \leqslant p \leqslant n)$ *является максимумом того же отношения форм*

$$\lambda_{n-p+1} = \max \frac{A(x, x)}{B(x, x)} \tag{82}$$

при условии, что на варьируемый вектор x *наложены связи:*

$$B(z^n, x) = 0, \ B(z^{n-1}, x) = 0, \ \ldots, B(z^{n-p+2}, x) = 0, \tag{83}$$

т. е.

$$\lambda_{n-p+1} = \nu\left(\frac{A}{B}; \tilde{L}_n, \tilde{L}_{n-1}, \ldots, \tilde{L}_{n-p+2}\right); \tag{84}$$

этот максимум достигается только на главных векторах пучка, соответствующих характеристическому числу λ_{n-p+1} *и удовлетворяющих связям* (83).

3) *Если в максимуме отношения форм* $\frac{A(x, x)}{B(x, x)}$ *при связях*

$$L_1(x) = 0, \ \ldots, L_{p-1}(x) = 0$$

$(2 \leqslant p \leqslant n)$ *варьировать связи, то наименьшее значение (минимум) этого максимума равно* λ_{n-p+1}:

$$\lambda_{n-p+1} = \min \nu\left(\frac{A}{B}; L_1, L_2, \ldots, L_{p-1}\right). \tag{85}$$

5. Пусть даны h *независимых* связей[1])

$$L_1^0(x) = 0, \ L_2^0(x) = 0, \ \ldots, \ L_h^0(x) = 0. \tag{86}$$

Тогда из них можно выразить h из переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ через остальные переменные, которые мы обозначим буквами $v_1, v_2, \ldots, v_{n-h}$. Поэтому при наложении связей (86) регулярный пучок форм $A(x, x) - \lambda B(x, x)$ переходит в пучок $A^0(v, v) - \lambda B^0(v, v)$, причем $B^0(v, v)$ — снова положительно определенная форма (только от $n-h$ переменных). Полученный таким образом регулярный пучок имеет $n-h$ вещественных характеристических чисел

$$\lambda_1^0 \leqslant \lambda_2^0 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{n-h}^0. \tag{87}$$

При наложении связей (86) можно по-разному выразить все переменные через $n-h$ независимых $v_1, v_2, \ldots, v_{n-h}$. Однако характеристические числа (87) не зависят от этого произвола и имеют вполне определенные значения. Это следует хотя бы из максимально-минимальных свойств

[1]) Связи (86) являются независимыми, когда независимы линейные формы $L_1^0(x), L_2^0(x), \ldots, L_h^0(x)$, стоящие в левых частях уравнений связей.

характеристических чисел

$$\lambda_1^0 = \min \frac{A^0(v, v)}{B^0(v, v)} = \mu\left(\frac{A}{B};\ L_1^0,\ L_2^0,\ \ldots,\ L_h^0\right) \tag{88}$$

и вообще

$$\lambda_p^0 = \max \mu\left(\frac{A^0}{B^0};\ L_1,\ L_2,\ \ldots,\ L_{p-1}\right) =$$

$$= \max \mu\left(\frac{A}{B};\ L_1^0,\ \ldots,\ L_h^0;\ L_1,\ \ldots,\ L_{p-1}\right), \tag{89}$$

при этом в формуле (89) варьируются только связи $L_1, L_2, \ldots, L_{p-1}$.

Имеет место

Теорема 14. *Если $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ — характеристические числа регулярного пучка форм $A(x, x) - \lambda B(x, x)$, а $\lambda_1^0 \leqslant \lambda_2^0 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{n-h}^0$ — характеристические числа того же пучка при наложении h независимых связей, то*

$$\lambda_p \leqslant \lambda_p^0 \leqslant \lambda_{p+h} \quad (p = 1, 2, \ldots, n-h). \tag{90}$$

Доказательство. Неравенства $\lambda_p \leqslant \lambda_p^0$ $(p = 1, 2, \ldots, n-h)$ сразу следуют из формул (79) и (89). Действительно, при добавлении новых связей величина минимума $\mu\left(\frac{A}{B};\ L_1, \ldots, L_{p-1}\right)$ увеличивается или остается прежней. Поэтому

$$\mu\left(\frac{A}{B};\ L_1, \ldots, L_{p-1}\right) \leqslant \mu\left(\frac{A}{B};\ L_1^0, \ldots, L_h^0;\ L_1, \ldots, L_{p-1}\right).$$

Отсюда

$$\lambda_p = \max \mu\left(\frac{A}{B};\ L_1, \ldots, L_{p-1}\right) \leqslant \lambda_p^0 =$$

$$= \max \mu\left(\frac{A}{B};\ L_1^0, \ldots, L_h^0;\ L_1, \ldots, L_{p-1}\right).$$

Вторые части неравенств (90) имеют место в силу соотношений

$$\lambda_p^0 = \max \mu\left(\frac{A}{B};\ L_1^0, \ldots, L_h^0;\ L_1, \ldots, L_{p-1}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \max \mu\left(\frac{A}{B};\ L_1, \ldots, L_{p-1}, L_p, \ldots, L_{p+h-1}\right) = \lambda_{p+h}.$$

Здесь в правой части варьируются не только связи $L_1, \ldots, L_{p-1}$, но и связи $L_p, \ldots, L_{p+h-1}$; в левой же части последние связи заменены фиксированными связями $L_1^0, \ldots, L_h^0$.

Теорема доказана.

6. Пусть даны два регулярных пучка форм

$$A(x, x) - \lambda B(x, x), \quad \widetilde{A}(x, x) - \lambda \widetilde{B}(x, x) \tag{91}$$

и пусть при любом $x \neq 0$

$$\frac{A(x, x)}{B(x, x)} \leqslant \frac{\widetilde{A}(x, x)}{\widetilde{B}(x, x)}.$$

Тогда, очевидно,

$$\max \mu\left(\frac{A}{B};\ L_1, L_2, \ldots, L_{p-1}\right) \leqslant \max \mu\left(\frac{\widetilde{A}}{\widetilde{B}};\ L_1, L_2, \ldots, L_{p-1}\right)$$

$$(p = 1, 2, \ldots, n).$$

Поэтому, обозначая через $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ и $\tilde{\lambda}_1 \leqslant \tilde{\lambda}_2 \leqslant \ldots \leqslant \tilde{\lambda}_n$ соответственно характеристические числа пучков (91), будем иметь:

$$\lambda_p \leqslant \tilde{\lambda}_p \quad (p = 1, 2, \ldots, n).$$

Таким образом, доказана

Теорема 15. *Если даны два регулярных пучка форм $A(x, x) - \lambda B(x, x)$ и $\tilde{A}(x, x) - \lambda \tilde{B}(x, x)$ с характеристическими числами соответственно $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ и $\tilde{\lambda}_1 \leqslant \tilde{\lambda}_2 \leqslant \ldots \leqslant \tilde{\lambda}_n$, то из тождественного соотношения*

$$\frac{A(x, x)}{B(x, x)} \leqslant \frac{\tilde{A}(x, x)}{\tilde{B}(x, x)} \tag{92}$$

следует:

$$\lambda_p \leqslant \tilde{\lambda}_p \quad (p = 1, 2, \ldots, n). \tag{93}$$

Рассмотрим частный случай, когда в неравенстве (92) $B(x, x) \equiv \tilde{B}(x, x)$. В этом случае разность $\tilde{A}(x, x) - A(x, x)$ является неотрицательной квадратичной формой и поэтому может быть представлена в виде суммы независимых положительных квадратов:

$$\tilde{A}(x, x) = A(x, x) + \sum_{i=1}^{r} [X_i(x)]^2.$$

Тогда при наложении r независимых связей

$$X_1(x) = 0, \quad X_2(x) = 0, \ \ldots, \ X_r(x) = 0$$

формы $A(x, x)$ и $\tilde{A}(x, x)$ совпадают, и пучки $A(x, x) - \lambda B(x, x)$ и $\tilde{A}(x, x) - \lambda B(x, x)$ имеют одни и те же характеристические числа

$$\lambda_1^0 \leqslant \lambda_2^0 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{n-r}^0.$$

Применяя теорему 14 к каждому из пучков $A(x, x) - \lambda B(x, x)$ и $\tilde{A}(x, x) - \lambda B(x, x)$, будем иметь:

$$\tilde{\lambda}_p \leqslant \lambda_p^0 \leqslant \lambda_{p+r} \quad (p = 1, 2, \ldots, n-r).$$

Присоединяя сюда неравенство (93), приходим к теореме:

Теорема 16. *Если $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ и $\tilde{\lambda}_1 \leqslant \tilde{\lambda}_2 \leqslant \ldots \leqslant \tilde{\lambda}_n$ — характеристические числа двух регулярных пучков форм $A(x, x) - \lambda B(x, x)$ и $\tilde{A}(x, x) - \lambda B(x, x)$, где*

$$\tilde{A}(x, x) = A(x, x) + \sum_{i=1}^{r} [X_i(x)]^2,$$

а $X_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ — независимые линейные формы, то имеют место неравенства[1])

$$\lambda_p \leqslant \tilde{\lambda}_p \leqslant \lambda_{p+r} \quad (p = 1, 2, \ldots, n). \tag{94}$$

Совершенно аналогично доказывается

Теорема 17. *Если $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ и $\tilde{\lambda}_1 \leqslant \tilde{\lambda}_2 \leqslant \ldots \leqslant \tilde{\lambda}_n$ — характеристические числа регулярных пучков форм $A(x, x) - \lambda B(x, x)$, и $A(x, x)$ —*

---

[1]) Вторые части этих неравенств имеют место только при $p \leqslant n - r$.

$-\lambda\widetilde{B}(x, x)$, где форма $\widetilde{B}(x, x)$ получается из $B(x, x)$ прибавлением r положительных квадратов, то имеют место неравенства[1])

$$\lambda_{p-r} \leqslant \widetilde{\lambda}_p \leqslant \lambda_p \quad (p=1, 2, \ldots, n). \tag{95}$$

Замечание. В теоремах 16 и 17 можно утверждать, что при некотором p имеем $\lambda_p < \widetilde{\lambda}_p$ (соответственно $\widetilde{\lambda}_p < \lambda_p$), если, конечно, $r \neq 0$[2]).

§ 8. Малые колебания системы с n степенями свободы

Результаты предыдущих двух параграфов имеют важные приложения в теории малых колебаний механической системы с n степенями свободы.

Рассмотрим свободные колебания консервативной механической системы с n степенями свободы вблизи ее устойчивого положения равновесия. Отклонение системы от положения равновесия будем задавать при помощи независимых обобщенных координат $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Само положение равновесия при этом соответствует нулевым значениям этих координат: $q_1=0$, $q_2=0, \ldots, q_n=0$. Тогда кинетическая энергия системы представится в виде квадратичной формы относительно обобщенных скоростей $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$[3]):

$$T = \sum_{i, k=1}^{n} b_{ik}(q_1, q_2, \ldots, q_n)\dot{q}_i\dot{q}_k.$$

Разлагая коэффициенты $b_{ik}(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ в ряд по степеням $q_1, q_2, \ldots, q_n$,

$$b_{ik}(q_1, q_2, \ldots, q_n) = b_{ik} + \ldots \quad (i, k=1, 2, \ldots, n)$$

и сохраняя (ввиду малости отклонений $q_1, q_2, \ldots, q_n$) только постоянные члены b_{ik}, будем иметь:

$$T = \sum_{i, k=1}^{n} b_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k \quad (b_{ik}=b_{ki};\ i, k=1, 2, \ldots, n).$$

Кинетическая энергия всегда положительна и обращается в нуль только при нулевых скоростях $\dot{q}_1=\dot{q}_2=\ldots=\dot{q}_n=0$. Поэтому $\sum\limits_{i, k=1}^{n} b_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k$ — положительно определенная форма.

Потенциальная энергия системы является функцией от координат: $\Pi(q_1, q_2, \ldots, q_n)$. Не нарушая общности, можем принять $\Pi_0 = \Pi(0, 0, \ldots, 0) = 0$. Тогда, разлагая потенциальную энергию в ряд по степеням $q_1, q_2, \ldots, q_n$, получим:

$$\Pi = \sum_{i=1}^{n} a_i q_i + \sum_{i, k=1}^{n} a_{ik} q_i q_k + \ldots$$

Поскольку в положении равновесия потенциальная энергия всегда имеет стационарное значение, то

$$a_i = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}\right)_0 = 0 \quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

---

[1]) Первые части неравенств имеют место при $p > r$.

[2]) См. [7], стр. 71—73.

[3]) Точкой мы обозначаем производную по времени.

Сохраняя только члены второго порядка относительно $q_1, q_2, \ldots, q_n$, мы будем иметь:

$$\Pi = \sum_{i,\, k=1}^{n} a_{ik} q_i q_k \quad (a_{ik} = a_{ki};\quad i,\, k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n).$$

Таким образом, потенциальная энергия Π и кинетическая энергия T определяются двумя квадратичными формами:

$$\Pi = \sum_{i,\, k=1}^{n} a_{ik} q_i q_k, \quad T = \sum_{i,\, k=1}^{n} b_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k, \tag{96}$$

причем вторая форма — положительно определенная.

Напишем теперь дифференциальные уравнения движения в форме уравнений Лагранжа второго рода[1]):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \quad (i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n). \tag{97}$$

Подставляя сюда вместо T и Π их выражения из (96), получаем:

$$\sum_{k=1}^{n} b_{ik} \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^{n} a_{ik} q_k = 0 \quad (k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n). \tag{98}$$

Вводя в рассмотрение вещественные симметрические матрицы

$$A = \| a_{ik} \|_1^n \quad \text{и} \quad B = \| b_{ik} \|_1^n$$

и столбцевую матрицу $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$, мы систему уравнений (98) можем записать в следующей матричной форме:

$$B\ddot{q} + Aq = 0. \tag{98'}$$

Будем искать решения системы (98) в виде гармонических колебаний

$$q_1 = v_1 \sin(\omega t + \alpha), \quad q_2 = v_2 \sin(\omega t + \alpha), \ \ldots, \ q_n = v_n \sin(\omega t + \alpha);$$

в матричной записи

$$q = v \sin(\omega t + \alpha). \tag{99}$$

Здесь $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ — постоянный амплитудный столбец («вектор»), ω — частота и α — начальная фаза колебаний.

Подставляя выражение (99) для q в (98′), получим после сокращения на $\sin(\omega t + \alpha)$:

$$Av = \lambda B v \quad (\lambda = \omega^2).$$

Но это уравнение совпадает с уравнением (49). Следовательно, искомый амплитудный вектор является главным вектором, а квадрат частоты $\lambda = p^2$ — соответствующим характеристическим числом регулярного пучка форм $A(x, x) - \lambda B(x, x)$.

Мы наложим на потенциальную энергию дополнительное ограничение, потребовав, чтобы функция $\Pi(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ в положении равновесия имела строгий минимум[2]).

---

[1]) См., например, Г. К. Суслов, Теоретическая механика, § 191 или Ф. Р. Гантмахер, Лекции по аналитической механике, § 6.

[2]) То есть чтобы значение Π_0 в положении равновесия было меньше всех других значений функции в некоторой окрестности положения равновесия.

Тогда на основании теоремы Лежен-Дирихле[1]) положение равновесия системы будет устойчивым. С другой стороны, сделанное нами допущение означает, что квадратичная форма $\Pi = A(q, q)$ также является положительно определенной.

Согласно теореме 8 регулярный пучок форм $A(x, x) - \lambda B(x, x)$ имеет n вещественных характеристических чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ и n соответствующих этим числам главных векторов $v^1, v^2, \ldots, v^n$ $[v^k = (v_{1k}, v_{2k}, \ldots, v_{nk})$; $k = 1, 2, \ldots, n]$, удовлетворяющих условиям

$$B(v^i, v^k) = \sum_{\mu, \nu=1}^{n} b_{\mu\nu} v_{\mu i} v_{\nu k} = \delta_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n). \tag{100}$$

Из положительной определенности формы $A(x, x)$ следует, что все характеристические числа пучка $A(x, x) - \lambda B(x, x)$ положительны[2]):

$$\lambda_k > 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Но тогда существует n гармонических колебаний[3])

$$v^k \sin(\omega_k t + \alpha_k) \quad (\omega_k^2 = \lambda_k, \ k = 1, 2, \ldots, n), \tag{101}$$

амплитудные векторы которых $v^k = (v_{1k}, v_{2k}, \ldots, v_{nk})$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ удовлетворяют условиям «ортонормированности» (100).

В силу линейности уравнения (98′) произвольное колебание может быть получено наложением гармонических колебаний (101):

$$q = \sum_{k=1}^{n} A_k \sin(\omega_k t + \alpha_k) v^k, \tag{102}$$

где A_k, α_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — произвольные постоянные. Действительно, при любых значениях этих постоянных выражение (102) является решением уравнения (98′). С другой стороны, за счет произвольных постоянных можно удовлетворить любым начальным условиям:

$$q|_{t=0} = q_0, \quad \dot{q}|_{t=0} = \dot{q}_0.$$

В самом деле, из (102) находим:

$$q_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k \sin \alpha_k v^k, \quad \dot{q}_0 = \sum_{k=1}^{n} \omega_k A_k \cos \alpha_k v^k. \tag{103}$$

Поскольку главные столбцы $v^1, v^2, \ldots, v^n$ всегда линейно независимы, то из равенств (103) однозначно определяются величины $A_k \sin \alpha_k$ и $\omega_k A_k \cos \alpha_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ и, следовательно, произвольные постоянные A_k и α_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Решение (102) нашей системы дифференциальных уравнений (98) может быть более подробно записано так:

$$q_i = \sum_{k=1}^{n} A_k \sin(\omega_k t + \alpha_k) v_{ik}. \tag{104}$$

Заметим, что к тем же формулам (102), (104) можно прийти, исходя из теоремы 9. Действительно, рассмотрим неособенное преобразование

---

[1]) См. Г. К. Суслов, Теоретическая механика, § 210; Ф. Р. Гантмахер, Лекции по аналитической механике, § 33.

[2]) Это следует хотя бы из представления (63).

[3]) Здесь начальные фазы α_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — произвольные постоянные.

переменных с матрицей $V = \| v_{ik} \|_1^n$, приводящее одновременно обе формы $A(x, x)$ и $B(x, x)$ к каноническому виду (63). Полагая

$$q_i = \sum_{k=1}^{n} v_{ik}\theta_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{105}$$

или в сокращенной записи

$$q = V\theta \quad [\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)] \tag{106}$$

и замечая, что $\dot{q} = V\dot{\theta}$, будем иметь:

$$\Pi = A(q, q) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_k \theta_k^2, \qquad T = B(q, q) = \sum_{k=1}^{n} \theta_k^2. \tag{107}$$

Координаты $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$, в которых потенциальная и кинетическая энергии представляются в виде (107), называются *нормальными координатами*.

Воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода (98), подставив в них вместо Π и T их выражения (107). Получим:

$$\ddot{\theta}_k + \lambda_k \theta_k = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{108}$$

Поскольку форма $A(q, q)$ — положительно определенная, то все числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ положительны и могут быть представлены в виде

$$\lambda_k = \omega_k^2 \quad (\omega_k > 0;\ k = 1, 2, \ldots, n). \tag{109}$$

Из (107) и (108) находим:

$$\theta_k = A_k \sin(\omega_k t + \alpha_k) \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{110}$$

Подставляя эти выражения для θ_k в равенства (105), получим снова формулы (104) и, следовательно, (102). Величины v_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ при обоих выводах будут одни и те же, поскольку согласно теореме 9 матрица $V = \| v_{ik} \|_1^n$ в (106) есть главная матрица регулярного пучка форм $A(x, x) - \lambda B(x, x)$.

Отметим еще механическую интерпретацию теорем 14 и 15.

Занумеруем частоты $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ данной механической системы в порядке неубывания:

$$0 < \omega_1 \leqslant \omega_2 \leqslant \ldots \leqslant \omega_n.$$

Этим определится и расположение соответствующих характеристических чисел $\lambda_k = \omega_k^2$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ пучка $A(x, x) - \lambda B(x, x)$:

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n.$$

Наложим на данную систему h независимых конечных стационарных связей[1]). Поскольку отклонения $q_1, q_2, \ldots, q_n$ считаются малыми величинами, то эти связи можно считать линейными относительно $q_1, q_2, \ldots, q_n$:

$$L_1(q) = 0, \quad L_2(q) = 0, \quad \ldots, \quad L_h(q) = 0.$$

После наложения связей наша система будет иметь $n - h$ степеней свободы. Частоты этой системы

$$\omega_1^0 \leqslant \omega_2^0 \leqslant \ldots \leqslant \omega_{n-h}^0$$

---

[1]) Конечная стационарная связь выражается уравнением $f(q_1, q_2, \ldots, q_n) = 0$, где $f(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ — некоторая функция от обобщенных координат.

связаны с характеристическими числами $\lambda_1^0 \leqslant \lambda_2^0 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{n-h}^0$ пучка $A(x, x) - \lambda B(x, x)$ при наложении связей $L_1, L_2, \ldots, L_h$ соотношениями $\lambda_j^0 = \omega_j^{02}$ $(j = 1, 2, \ldots, n-h)$. Поэтому из теоремы 14 непосредственно следует:

$$\omega_j \leqslant \omega_j^0 \leqslant \omega_{j+h} \quad (j = 1, 2, \ldots, n-h).$$

Таким образом, *при наложении h связей частоты системы могут только увеличиться, однако при этом величина новой j-й частоты ω_j^0 не может превзойти величины прежней $(j+h)$-й частоты ω_{j+h}.*

Точно так же на основании теоремы 15 можно утверждать, что *при увеличении жесткости системы, т. е. при увеличении формы $A(q, q)$ для потенциальной энергии [без изменения формы $B(q, q)$], частоты могут только увеличиться, а при увеличении инерции системы, т. е. при увеличении формы $B(\dot{q}, \dot{q})$ для кинетической энергии [без изменения формы $A(q, q)$], частоты могут только уменьшиться.*

Теоремы 16 и 17 вносят дополнительное уточнение в это положение.

§ 9. Эрмитовы формы [1])

Все результаты §§ 1—7 этой главы, установленные для вещественных квадратичных форм, могут быть перенесены на эрмитовы формы.

Напомним [2]), что *эрмитовой формой* называется выражение

$$H(x, x) = \sum_{i, k=1}^{n} h_{ik} x_i \bar{x}_k \quad (h_{ik} = \bar{h}_{ki}; \quad k = 1, 2, \ldots, n). \tag{111}$$

Эрмитовой форме (111) соответствует следующая *билинейная эрмитова форма*:

$$H(x, y) = \sum_{i, k=1}^{n} h_{ik} x_i \bar{y}_k; \tag{112}$$

при этом

$$H(y, x) = \overline{H(x, y)} \tag{113}$$

и, в частности,

$$H(x, x) = \overline{H(x, x)}, \tag{113'}$$

т. е. форма $H(x, x)$ принимает только вещественные значения.

Матрица коэффициентов эрмитовой формы $H = \| h_{ik} \|_1^n$ является эрмитовой, т. е. $H^* = H$ [3]).

Пользуясь матрицей $H = \| h_{ik} \|_1^n$, можно представить $H(x, y)$ и, в частности, $H(x, x)$ в виде произведения трех матриц — строчной, квадратной и столбцевой:

$$H(x, y) = x' H \bar{y}, \quad H(x, x) = x' H \bar{x} \text{ [4])}. \tag{114}$$

---

[1]) В предыдущих параграфах все числа и переменные были вещественными. В этом же параграфе все числа и переменные принимают комплексные значения.

[2]) См. гл. IX, § 2.

[3]) Звездочкой * мы отмечаем переход к сопряженной матрице (см. гл. I, § 3).

[4]) Здесь $x = x(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $\bar{y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n)$; значок $'$ означает транспонирование.

Если

$$x=\sum_{i=1}^{m} c_i u^i, \quad y=\sum_{k=1}^{p} d_k v^k, \tag{115}$$

где u^i, v^k — столбцевые матрицы, c_i, d_k — комплексные числа ($i=1, 2, \ldots, m$; $k=1, 2, \ldots, p$), то

$$H(x, y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} c_i\bar{d}_k H(u^i, v^k). \tag{116}$$

Подвергнем переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ линейному преобразованию

$$x_i=\sum_{k=1}^{n} t_{ik}\xi_k \quad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{117}$$

или в матричной записи

$$x=T\xi \quad (T=\|t_{ik}\|_1^n). \tag{117'}$$

После преобразования эрмитова форма $H(x, x)$ примет вид

$$\tilde{H}(\xi, \xi)=\sum_{i,\,k=1}^{n} \tilde{h}_{ik}\xi_i\bar{\xi}_k,$$

где матрица новых коэффициентов $\tilde{H}=\|\tilde{h}_{ik}\|_1^n$ связана с матрицей старых коэффициентов $H=\|h_{ik}\|_1^n$ формулой

$$\tilde{H}=T'H\bar{T}. \tag{118}$$

В этом непосредственно убеждаемся после замены во второй формуле (114) x на $T\xi$.

Если положить $T=\bar{W}$, то формулу (118) можно еще переписать так:

$$\tilde{H}=W^*HW. \tag{119}$$

Из формулы (118) следует, что ранги матриц H и $\tilde{H}$ равны, если преобразование (117) — неособенное ($|T|\neq 0$). Ранг матрицы H называется *рангом формы* $H(x, x)$.

Определитель $|H|$ называется *дискриминантом* эрмитовой формы $H(x, x)$. Из (118) следует формула преобразования дискриминанта при переходе к новым переменным:

$$|\tilde{H}|=|H||T||\bar{T}|.$$

Эрмитова форма называется *сингулярной*, если ее дискриминант равен нулю. Очевидно, сингулярная форма остается сингулярной при любом преобразовании переменных (117).

Эрмитову форму $H(x, x)$ можно бесчисленным множеством способов представить в виде

$$H(x, x)=\sum_{i=1}^{r} a_i X_i\bar{X}_i, \tag{120}$$

где $a_i\neq 0$ ($i=1, 2, \ldots, r$) — вещественные числа, а

$$X_i=\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}x_k \quad (i=1, 2, \ldots, r)$$

— независимые комплексные линейные формы от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ [1]).

[1]) Следовательно, $r\leqslant n$.

Правую часть в (120) будем называть *суммой независимых квадратов*[1]), а каждое слагаемое в этой сумме — *положительным* или *отрицательным квадратом* в зависимости от того, соответствующее $a_i > 0$ или < 0. Как и для квадратичных форм, число r в (120) равно рангу формы $H(x, x)$.

Теорема 18 (закон инерции эрмитовых форм). *При представлении эрмитовой формы $H(x, x)$ в виде суммы независимых квадратов*

$$H(x, x) = \sum_{i=1}^{r} a_i X_i \overline{X}_i$$

число положительных и число отрицательных квадратов не зависят от способа представления.

Доказательство совершенно аналогично доказательству теоремы 1 (стр. 270).

Разность σ между числом π положительных и числом ν отрицательных квадратов в (120) называется сигнатурой эрмитовой формы $H(x, x)$: $\sigma = \pi - \nu$.

Метод Лагранжа приведения квадратичных форм к сумме квадратов может быть использован и для эрмитовых форм, только при этом основные формулы (15) и (16) на стр. 271 должны быть заменены формулами[2])

$$H(x, x) = \frac{1}{h_{gg}} \left| \sum_{k=1}^{n} h_{kg} x_k \right|^2 + H_1(x, x), \tag{121}$$

$$H(x, x) = \frac{1}{2} \left\{ \left| \sum_{k=1}^{n} \left(h_{kf} + \frac{h_{kg}}{h_{fg}} \right) x_k \right|^2 - \left| \sum_{k=1}^{n} \left(h_{kf} - \frac{h_{kg}}{h_{fg}} \right) x_k \right|^2 \right\} + H_2(x, x). \tag{122}$$

Пусть теперь для эрмитовой формы $H(x, x) = \sum_{i, k=1}^{n} h_{ik} x_i x_k$ ранга r выполняются неравенства

$$D_k = H \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix} \neq 0. \tag{123}$$

Тогда совершенно так же, как и для квадратичной формы (см. стр. 273—274), получаем формулу Якоби в двух видах:

$$H(x, x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{D_{k-1}}{D_k} X_k \overline{X}_k, \qquad H(x, x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{Y_k \overline{Y}_k}{D_{k-1} D_k} \qquad (D_0 = 1), \tag{124}$$

где

$$X_k = \frac{1}{D_k} Y_k, \quad Y_k = c_{kk} x_k + c_{k, k+1} x_k + \dots + c_{kn} x_n \quad (k = 1, \dots, r), \tag{125}$$

а

$$c_{kq} = H \begin{pmatrix} 1 & \dots & k-1 & q \\ 1 & \dots & k-1 & k \end{pmatrix} \qquad (q = k, k+1, \dots, n;\ k = 1, \dots, r). \tag{126}$$

---

[1]) Эта терминология связана с тем, что произведение $X_i \overline{X}_i$ равно квадрату модуля X_i ($X_i \overline{X}_i = |X_i|^2$).

[2]) Формула (121) применяется в случае, когда $h_{gg} \neq 0$, а формула (122) — в случае, когда $h_{ff} = h_{gg} = 0$, а $h_{fg} \neq 0$.

В соответствии с формулой Якоби (124) число отрицательных квадратов в представлении формы $H(x, x)$ равно числу знакоперемен в ряду $1, D_1, D_2, \ldots, D_r$

$$\nu = V(1, D_1, D_2, \ldots, D_r) \tag{127}$$

и, следовательно, сигнатура σ эрмитовой формы $H(x, x)$ определится формулой

$$\sigma = r - 2V(1, D_1, D_2, \ldots, D_r). \tag{128}$$

Все замечания относительно особых случаев, которые могут здесь представиться, сделанные для квадратичных форм (§ 3), автоматически переносятся на эрмитовы формы.

Определение 5. Эрмитова форма $H(x, x) = \sum_{i, k=1}^{n} h_{ik} x_i \bar{x}_k$ называется *неотрицательной* (*неположительной*), если при любых значениях переменных

$$H(x, x) \geqslant 0 \quad (\text{соответственно } \leqslant 0).$$

Определение 6. Эрмитова форма $H(x, x) = \sum_{i, k=1}^{n} h_{ik} x_i \bar{x}_k$ называется *положительно определенной* (*отрицательно определенной*), если при любых значениях переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, не равных одновременно нулю,

$$H(x, x) > 0 \quad (\text{соответственно } < 0).$$

Теорема 19. *Для того чтобы эрмитова форма* $H(x, x) = \sum_{i, k=1}^{n} h_{ik} x_i \bar{x}_k$ *была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы имели место неравенства*

$$D_k = H\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k \\ 1 & 2 & \ldots & k \end{pmatrix} > 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{129}$$

Теорема 20. *Для того чтобы эрмитова форма* $H(x, x) = \sum_{i, k=1}^{n} h_{ik} x_i \bar{x}_k$ *была неотрицательной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы* $H = \| h_{ik} \|_1^n$ *были неотрицательны:*

$$H\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_p \end{pmatrix} \geqslant 0 \qquad (i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n;\ p = 1, 2, \ldots, n). \tag{130}$$

Доказательство теорем 19 и 20 совершенно аналогично доказательству теорем 3 и 4 для квадратичных форм.

Условия отрицательной определенности и неположительности эрмитовой формы $H(x, x)$ получаются соответственно из условий (129) и (130), если последние применить к форме $-H(x, x)$.

Из теоремы 5′ главы IX (стр. 248) следует теорема о приведении эрмитовой формы к главным осям:

Теорема 21. *Эрмитова форма* $H(x, x) = \sum_{i, k=1}^{n} h_{ik} x_i \bar{x}_k$ *всегда может быть приведена при помощи унитарного преобразования переменных*

$$x = U\xi \qquad (UU^* = E) \tag{131}$$