к канонической форме

$$\Lambda(\xi, \xi) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i \bar{\xi}_i; \tag{132}$$

при этом $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — *характеристические числа матрицы* $H = \| h_{ik} \|_1^n$.

Справедливость теоремы 21 вытекает из формулы

$$H = U \| \lambda_i \delta_{ik} \| U^{-1} = T' \| \lambda_i \delta_{ik} \| \bar{T} \quad (U' = \bar{U}^{-1} = T). \tag{133}$$

Пусть даны две эрмитовы формы $H(x, x) = \sum_{i, k=1}^{n} h_{ik} x_i \bar{x}_k$ и $G(x, x) = \sum_{i, k=1}^{n} g_{ik} x_i \bar{x}_k$. Рассмотрим пучок эрмитовых форм $H(x, x) - \lambda G(x, x)$ (λ — вещественный параметр). Этот пучок называется *регулярным*, если форма $G(x, x)$ — положительно определенная. При помощи эрмитовых матриц $H = \| h_{ik} \|_1^n$ и $G = \| g_{ik} \|_1^n$ составим уравнение

$$| H - \lambda G | = 0.$$

Это уравнение называется *характеристическим уравнением пучка эрмитовых форм.* Корни этого уравнения называются *характеристическими числами пучка.*

Если λ_0 — характеристическое число пучка, то существует столбец $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \neq 0$ такой, что

$$Hz = \lambda_0 z.$$

Столбец z мы будем называть *главным столбцом* или *главным вектором пучка* $H(x, x) - \lambda G(x, x)$, соответствующим характеристическому числу λ_0.

Имеет место

Теорема 22. *Характеристическое уравнение регулярного пучка эрмитовых форм* $H(x, x) - \lambda G(x, x)$ *имеет* n *вещественных корней* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. *Этим корням соответствуют* n *главных векторов* $z^1, z^2, \ldots, z^n$, *удовлетворяющих условиям «ортонормированности»*:

$$G(z^i, z^k) = \delta_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Доказательство совершенно аналогично доказательству теоремы 8.

Все экстремальные свойства характеристических чисел регулярного пучка квадратичных форм сохраняют свою силу и для эрмитовых форм.

Теоремы 10—17 сохраняют свою силу, если в этих теоремах термин «квадратичные формы» заменить везде термином «эрмитовы формы». Доказательства теорем остаются при этом неизменными.

§ 10. Ганкелевы формы

Пусть даны $2n - 1$ чисел $s_0, s_1, \ldots, s_{2n-2}$. При помощи этих чисел составим квадратичную форму от n переменных

$$S(x, x) = \sum_{i, k=0}^{n-1} s_{i+k} x_i x_k. \tag{134}$$

Квадратичная форма (134) называется *ганкелевой.* Соответствующая ей симметрическая матрица $S = \| s_{i+k} \|_0^{n-1}$ также называется *ганкелевой.*

Эта матрица имеет вид

$$S=\begin{Vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \dots & s_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-2} \end{Vmatrix}.$$

Последовательные главные миноры матрицы S будем обозначать через $D_1, D_2, \dots, D_n$:

$$D_p=|s_{i+k}|_0^{p-1} \qquad (p=1, 2, \dots, n).$$

В настоящем параграфе мы установим основные результаты Фробениуса относительно ранга и сигнатуры вещественных ганкелевых форм[1]).

Предварительно докажем две леммы.

Лемма 1. *Если в ганкелевой матрице $S=\|s_{i+k}\|_0^{n-1}$ первые h строк линейно независимы, а первые $h+1$ строк линейно зависимы, то*

$$D_h\neq 0.$$

Доказательство. Обозначим через $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_h, \Gamma_{h+1}$ первые $h+1$ строк матрицы S. По условию теоремы строки $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_h$ линейно независимы, а строка Γ_{h+1} линейно выражается через эти строки:

$$\Gamma_{h+1}=\sum_{j=1}^{h}\alpha_j\Gamma_{h-j+1}$$

или

$$s_q=\sum_{j=1}^{h}\alpha_j s_{q-j} \quad (q=h, h+1, \dots, h+n-1). \tag{135}$$

Выпишем матрицу, состоящую из первых h строк $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_h$ матрицы S:

$$\begin{Vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{h-1} & s_h & s_{h+1} & \dots & s_{h+n-2} \end{Vmatrix}. \tag{136}$$

Эта матрица имеет ранг h. С другой стороны, в силу (135) любой столбец этой матрицы выражается линейно через h предыдущих столбцов. Следовательно, любой столбец матрицы выражается линейно через h первых столбцов. Но тогда, поскольку ранг матрицы (136) равен h, эти первые h столбцов матрицы (136) должны быть линейно независимы, т. е.

$$D_h\neq 0.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Если для матрицы $S=\|s_{i+k}\|_0^{n-1}$ при некотором $h\,(<n)$*

$$D_h\neq 0, \quad D_{h+1}=\dots=D_n=0 \tag{137}$$

и

$$t_{ik}=\frac{S\begin{pmatrix}1 \dots h\ h+i+1\\ 1 \dots h\ h+k+1\end{pmatrix}}{S\begin{pmatrix}1 \dots h\\ 1 \dots h\end{pmatrix}}=\frac{1}{D_h}\begin{vmatrix} D_h & \begin{matrix} s_{h+k}\\ \vdots \\ s_{2h+k-1}\end{matrix} \\ s_{h+i} \dots s_{2h+i-1} & s_{2h+i+k}\end{vmatrix} \tag{138}$$

$$(i, k=0, 1, \dots, n-h-1)$$

[1]) См. [182f].

то матрица $T=\|t_{ik}\|_0^{n-h-1}$ *также ганкелева и все ее элементы, расположенные над второй диагональю, равны нулю, т. е. существуют такие числа* $t_{n-h-1}, \ldots, t_{2n-2h-2}$, *что*

$$t_{ik}=t_{i+k} \quad (i, k=0, 1, \ldots, n-h-1; \quad t_0=t_1=\ldots=t_{n-h-2}=0).$$

Доказательство. Введем в рассмотрение матрицы

$$T_p=\|t_{ik}\|_0^{p-1} \qquad (p=1, 2, \ldots, n-h).$$

В этих обозначениях $T=T_{n-h}$.

Мы докажем, что любая из матриц $T_p\,(p=1, 2, \ldots, n-h)$ является ганкелевой и что в ней $t_{ik}=0$ при $i+k\leqslant p-2$. Доказательство будем вести индуктивно относительно p.

Для матрицы T_1 наше утверждение тривиально, для матрицы T_2 оно очевидно, так как

$$T_2=\begin{Vmatrix} t_{00} & t_{01} \\ t_{10} & t_{11} \end{Vmatrix}, \quad t_{01}=t_{10} \text{ (в силу симметрии } S) \text{ и } t_{00}=\frac{D_{h+1}}{D_h}=0.$$

Допустим, что наше утверждение справедливо для матрицы $T_p\,(p<n-h)$, и докажем его справедливость для матрицы $T_{p+1}=\|t_{ik}\|_0^p$. Из допущения следует существование таких чисел $t_{p-1}, t_p, \ldots, t_{2p-2}$, что при $t_0=\ldots=t_{p-2}=0$

$$T_p=\|t_{i+k}\|_0^{p-1}.$$

При этом

$$|T_p|=\pm t_{p-1}^p. \tag{139}$$

С другой стороны, пользуясь детерминантным тождеством Сильвестра [см. (28) на стр. 48], найдем:

$$|T_p|=\frac{D_{h+p}}{D_h}=0. \tag{140}$$

Из сопоставления (139) с (140) получаем:

$$t_{p-1}=0. \tag{141}$$

Далее из (138):

$$t_{ik}=s_{2h+i+k}+\frac{1}{D_h}\begin{vmatrix} & & s_{h+k} \\ & D_h & \vdots \\ & & s_{2h+k-1} \\ s_{h+i} & \ldots\; s_{2h+i-1} & 0 \end{vmatrix}. \tag{142}$$

На основании предыдущей леммы из (137) следует, что $(h+1)$-я строка матрицы $S=\|s_{i+k}\|_0^{n-1}$ линейно зависит от первых h строк:

$$s_q=\sum_{g=1}^{h}\alpha_g s_{q-g} \quad (q=h,\ h+1, \ldots, h+n-1). \tag{143}$$

Пусть $i, k\leqslant p\leqslant i+k\leqslant 2p-1$. При этом одно из чисел i и k меньше p. Не нарушая общности рассуждений, примем, что $i<p$. Тогда, разлагая с помощью (143) последний столбец в определителе, стоящем в правой

части равенства (142), и снова используя соотношения (142), будем иметь:

$$t_{ik} = s_{2h+i+k} + \sum_{g=1}^{h} \frac{a_g}{D_h} \begin{vmatrix} & & s_{h+k-g} \\ & D_h & \vdots \\ & & s_{2h+k-g-1} \\ s_{h+i} & \dots & s_{2h+i-1} \quad 0 \end{vmatrix} =$$

$$= s_{2h+i+k} + \sum_{g=1}^{h} a_g (t_{i,\,k-g} - s_{2h+i+k-g}). \tag{144}$$

Но в силу допущения индукции имеет место (141), и поскольку в (144) $i < p$, $k-g < p$ и $i+k-g \leqslant 2p-2$, то $t_{i,\,k-g} = t_{i+k-g}$. Следовательно, при $i+k < p$ все $t_{ik} = 0$, а при $p \leqslant i+k \leqslant 2p-1$ величина t_{ik} в силу (144) зависит только от $i+k$.

Таким образом, T_{p+1} — ганкелева матрица и в этой матрице все элементы $t_0, t_1, \dots, t_{p-1}$, стоящие над второй диагональю, равны нулю.

Лемма доказана.

Пользуясь леммой 2, докажем следующую теорему:

Теорема 23. *Если ганкелева матрица $S = \| s_{i+k} \|_0^{n-1}$ имеет ранг r и при некотором $h (< r)$*

$$D_h \neq 0, \quad D_{h+1} = \dots = D_r = 0,$$

то главный минор r-го порядка, образованный первыми h и последними $r-h$ линиями матрицы S, не равен нулю:

$$D^{(r)} = S \begin{pmatrix} 1 \dots h, & n-r+h+1, & n-r+h+2, & \dots, & n \\ 1 \dots h, & n-r+h+1, & n-r+h+2, & \dots, & n \end{pmatrix} \neq 0.$$

Доказательство. На основании предыдущей леммы матрица

$$T = \| t_{ik} \|_0^{n-h-1} \left[t_{ik} = \frac{S \begin{pmatrix} 1 \dots h & h+i+1 \\ 1 \dots h & h+k+1 \end{pmatrix}}{S \begin{pmatrix} 1 \dots h \\ 1 \dots h \end{pmatrix}} (i,\ k = 0,\ 1,\ \dots,\ n-h-1) \right]$$

есть ганкелева матрица, в которой все элементы над второй диагональю равны нулю. Поэтому

$$|T| = \pm t_{0,\,n-h-1}^{n-h}.$$

С другой стороны[1]), $|T| = \frac{D_n}{D_h} = 0$. Следовательно, $t_{0,\,n-h-1} = 0$, и матрица T имеет вид

$$T = \begin{Vmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & u_{n-h-1} \\ \vdots & & & & \iddots & \vdots \\ \vdots & & & \iddots & & \vdots \\ \vdots & & \iddots & & & \vdots \\ \vdots & \iddots & & & & \vdots \\ 0 & u_{n-h-1} & \dots & u_2 & & u_1 \end{Vmatrix}.$$

[1]) На основании детерминантного тождества Сильвестра [см. (28) на стр. 48].

Матрица T должна иметь ранг $r-h$[1]). Поэтому при $r<n-1$ в матрице T элементы $u_{r-h+1}=\ldots=u_{n-h+1}=0$ и матрица T всегда имеет вид

$$T=\begin{Vmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \iddots & \vdots \\ \vdots & & \iddots & & 0 \\ \vdots & \iddots & & & u_{r-h} \\ \vdots & \iddots & & \iddots & \vdots \\ \vdots & \iddots & \iddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & u_{r-h} \cdots & u_1 \end{Vmatrix} \quad (u_{r-h}\neq 0).$$

Но тогда в силу тождества Сильвестра (см. стр. 48)

$$D^{(r)}=D_hT\begin{pmatrix} n-r+1 & \ldots & n-h \\ n-r+1 & \ldots & n-h \end{pmatrix}=\pm D_h u_{r-h}^{r-h}\neq 0,$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим вещественную[2]) ганкелеву форму

$$S(x, x)=\sum_{i,\,k=0}^{\infty} s_{i+k}x_ix_k$$

ранга r. Обозначим через π, ν, σ соответственно число положительных квадратов, число отрицательных квадратов и сигнатуру этой формы:

$$\pi+\nu=r,$$

$$\sigma=\pi-\nu=r-2\nu.$$

Согласно теореме Якоби (стр. 275) эти величины могут быть определены из рассмотрения знаков последовательных миноров

$$D_0=1,\ D_1,\ D_2,\ \ldots,\ D_{r-1},\ D_r \tag{145}$$

при помощи формул

$$\left.\begin{aligned} &\pi=P(1, D_1, \ldots, D_r),\ \nu=V(1, D_1, \ldots, D_r), \\ &\sigma=P(1, D_1, \ldots, D_r)-V(1, D_1, \ldots, D_r)=r-2V(1, D_1, \ldots, D_r). \end{aligned}\right\} \tag{146}$$

Эти формулы становятся неприменимыми в случае, когда последний член в ряду (145) либо три подряд идущих промежуточных члена равны нулю (см. § 3). Однако для ганкелевой формы, как показал Фробениус,

---

[1]) Из тождества Сильвестра следует, что все миноры матрицы T, у которых порядок $>r-h$, равны нулю. С другой стороны, матрица S содержит некоторый окаймляющий D_h минор r-го порядка, отличный от нуля. Отсюда следует, что и соответствующий минор порядка $r-h$ матрицы T отличен от нуля.

[2]) В предыдущих леммах 1, 2 и теореме 23 в качестве основного поля можно было брать произвольное числовое поле и, в частности, поле всех комплексных чисел или поле всех вещественных чисел.

можно дать правило, позволяющее использовать формулы (146) в самом общем случае:

Теорема 24 (Фробениуса). *Для вещественной ганкелевой формы*

$$S(x, x) = \sum_{i, k=0}^{n-1} s_{i+k} x_i x_k$$

ранга r *величины* π, ν, σ *могут быть определены из формул* (146), *если*

1) *при*

$$D_h \neq 0, \; D_{h+1} = \ldots = D_r = 0 \; (h < r) \tag{147}$$

заменить в этих формулах D_r *на* $D^{(r)}$, *где*

$$D^{(r)} = S\begin{pmatrix} 1 \ldots h \; n-r+h+1 \ldots n \\ 1 \ldots h \; n-r+h+1 \ldots n \end{pmatrix} \neq 0;$$

2) *в любой группе из* p *промежуточных нулевых определителей*

$$(D_h \neq 0)\, D_{h+1} = D_{h+2} = \ldots = D_{h+p} = 0 \; (D_{h+p+1} \neq 0) \tag{148}$$

нулевым определителям приписать знаки по формуле

$$\operatorname{sign} D_{h+j} = (-1)^{\frac{j(j-1)}{2}} \operatorname{sign} D_h. \tag{149}$$

При этом величины P, V, $P-V$, *соответствующие группе* (148), *получат значения*[1])

	p нечетно	p четно
$P_{h,p} = P(D_h, D_{h+1}, \ldots, D_{h+p+1})$	$\frac{p+1}{2}$	$\frac{p+1+\varepsilon}{2}$
$V_{h,p} = V(D_h, D_{h+1}, \ldots, D_{h+p+1})$	$\frac{p+1}{2}$	$\frac{p+1-\varepsilon}{2}$
$P_{h,p} - V_{h,p}$	0	ε

; (150)

$$\varepsilon = (-1)^{\frac{p}{2}} \operatorname{sign} \frac{D_{h+p+1}}{D_h}.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $D_r \neq 0$. В этом случае формы

$$S(x, x) = \sum_{i, k=0}^{n-1} s_{i+k} x_i x_k \quad \text{и} \quad S_r(x, x) = \sum_{i, k=0}^{r-1} s_{i+k} x_i x_k$$

имеют не только один и тот же ранг r, но и одну и ту же сигнатуру σ.

[1]) Формулы (149) и (150) применимы и к случаю (147), только здесь нужно положить $p = r - h - 1$ и под D_{h+p+1} понимать не $D_r = 0$, а $D^{(r)} \neq 0$.

Действительно, пусть

$$S(x, x) = \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i Z_i^2$$

где Z_i — вещественные линейные формы, а $\varepsilon_i = \pm 1$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$. Положим $x_{r+1} = \ldots = x_n = 0$ Тогда формы $S(x, x)$, Z_i перейдут соответственно в $S_r(x, x)$, $\widehat{Z}_i (i = 1, 2, \ldots, r)$, причем $S_r(x, x) = \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i \widehat{Z}_i^2$, т. е. $S_r(x, x)$ имеет такое же число положительных (отрицательных) независимых квадратов, как и форма $S(x, x)$ [1]). Таким образом, σ есть сигнатура формы $S_r(x, x)$.

Проварьируем непрерывно параметры $s_0, s_1, \ldots, s_{2r-2}$ так, чтобы при новых значениях параметров $s_0^*, s_1^*, \ldots, s_{2r-2}^*$ [2]) все члены ряда

$$1, D_1^*, D_2^*, \ldots, D_r^* \quad (D_q^* = |s_{i+k}^*|_0^{q-1};\ q = 1, 2, \ldots, r)$$

были отличны от нуля и чтобы в процессе варьирования ни один из отличных от нуля определителей (145) не обратился в нуль [3]).

Так как при варьировании не изменялся ранг формы $S_r(x, x)$, то не изменялась и ее сигнатура (см. стр. 280). Поэтому

$$\sigma = P(1, D_1^*, \ldots, D_r^*) - V(1, D_1^*, \ldots, D_r^*). \tag{151}$$

Если при некотором i $D_i \neq 0$, то

$$\operatorname{sign} D_i^* = \operatorname{sign} D_i.$$

Поэтому весь вопрос сводится к определению перемен знака между теми D_i^*, которым соответствуют $D_i = 0$. Точнее, для каждой группы вида (148) требуется определить

$$P(D_h^*, D_{h+1}^*, \ldots, D_{h+p+1}^*) - V(D_h^*, D_{h+1}^*, \ldots, D_{h+p}^*, D_{h+p+1}^*).$$

Для этого положим:

$$t_{ik} = \frac{1}{D_h} \begin{vmatrix} & & s_{h+k} \\ & D_h & \vdots \\ & & s_{2h+k-1} \\ s_{h+i} & \ldots\ s_{2h+i-1} & s_{2h+i+k} \end{vmatrix} \quad (i, k = 0, 1, \ldots, p).$$

Согласно лемме 2 матрица

$$T = \| t_{ik} \|_0^p$$

ганкелева и все элементы ее, стоящие над второй диагональю, равны

---

[1]) Линейные формы $\widehat{Z}_1, \widehat{Z}_2, \ldots, Z_r$ линейно независимы, поскольку квадратичная форма $S_r(x, x) = \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i \widehat{Z}_i^2$ имеет ранг r $(D_r \neq 0)$.

[2]) В этом параграфе значок* не означает перехода к сопряженной матрице.

[3]) Такую вариацию всегда можно осуществить, поскольку в пространстве параметров $s_0, s_1, \ldots, s_{2r-2}$ уравнение вида $D_i = 0$ определяет некоторую алгебраическую гиперповерхность. Если точка принадлежит нескольким таким гиперповерхностям, то она может быть всегда аппроксимирована сколь угодно близкими точками, лежащими вне этих гиперповерхностей.

нулю, т. е. матрица T имеет вид

$$T=\begin{Vmatrix} 0 & \cdots & 0 & t_p \\ \vdots & & \iddots & * \\ \vdots & \iddots & & \vdots \\ 0 & \iddots & & \vdots \\ t_p & * & \cdots & * \end{Vmatrix}. \tag{152}$$

Обозначим последовательные миноры матрицы T через $\widehat{D}_1, \widehat{D}_2, \ldots, \widehat{D}_{p+1}$:

$$\widehat{D}_q=|t_{ik}|_0^{q-1} \quad (q=1, 2, \ldots, p+1).$$

Наряду с матрицей T введем в рассмотрение матрицу

$$T^*=\|t_{ik}^*\|_0^p,$$

где

$$t_{ik}^*=\frac{1}{D_h^*}\begin{vmatrix} & & s_{h+k}^* \\ & D_h^* & \vdots \\ & & s_{2h+k-1}^* \\ s_{h+i} & \cdots\ s_{2h+i-1}^* & s_{2h+i+k}^* \end{vmatrix} \quad (i, k=0, 1, \ldots, p),$$

и соответственные определители

$$\widehat{D}_q^*=|t_{ik}^*|_0^{q-1} \quad (q=1, 2, \ldots, p+1).$$

Согласно детерминантному тождеству Сильвестра

$$D_{h+q}^*=D_h^*\widehat{D}_q^* \quad (q=1, 2, \ldots, p+1).$$

Поэтому

$$P(D_h^*, D_{h+1}^*, \ldots, D_{h+p+1}^*)-V(D_h^*, D_{h+1}^*, \ldots, D_{h+p+1}^*)=$$
$$=\widehat{P}(1, \widehat{D}_1^*, \ldots, \widehat{D}_{p+1}^*)-V(1, \widehat{D}_1^*, \ldots, \widehat{D}_{p+1}^*)=\widehat{\sigma}^*, \tag{153}$$

где $\widehat{\sigma}^*$ — сигнатура формы $T^*(x, x)=\sum\limits_{i, k=0}^{p} t_{ik}^* x_i x_k$.

Наряду с формой $T^*(x, x)$ рассмотрим формы

$$T(x, x)=\sum_{i, k=0}^{p} t_{i+k} x_i x_k \text{ и } T^{**}(x, x)=t_p(x_0x_p+x_1x_{p-1}+\ldots+x_px_0).$$

Матрица T^{**} получается из матрицы T [см. (152)], если в последней заменить нулями все элементы, стоящие под второй диагональю. Сигнатуры форм $T(x, x)$ и $T^{**}(x, x)$ обозначим соответственно через $\widehat{\sigma}$ и $\widehat{\sigma}^{**}$.

Так как формы $T^*(x, x)$ и $T^{**}(x, x)$ получаются из формы $T(x, x)$ таким варьированием коэффициентов, в процессе которого ранг формы не меняется ($|T^{**}| = |T| = \frac{D_{h+p+1}}{D_h} \neq 0$, $|T^*| = \frac{D^*_{h+p+1}}{D^*_h} \neq 0$), то и сигнатуры форм $T(x, x)$, $T^*(x, x)$ и $T^{**}(x, x)$ должны быть одинаковы:

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}^* = \hat{\sigma}^{**}. \tag{154}$$

Но

$$T^{**}(x, x) \begin{cases} 2t_p(x_0x_{2k-1} + \ldots + x_{k-1}x_k) & \text{при } p = 2k-1, \\ t_p[2(x_0x_{2k} + \ldots + x_{k-1}x_{k+1}) + x_k^2] & \text{при } p = 2k. \end{cases}$$

Так как каждое произведение вида $x_\alpha x_\beta$ при $\alpha \neq \beta$ можно заменить разностью квадратов $\left(\frac{x_\alpha + x_\beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_\alpha - x_\beta}{2}\right)^2$ и таким образом получить разложение $T^{**}(x, x)$ независимые вещественные квадраты, то

$$\widehat{\sigma^{**}} = \begin{cases} 0 & \text{при } p \text{ нечетном}, \\ \operatorname{sign} t_p & \text{при } p \text{ четном}. \end{cases} \tag{155}$$

С другой стороны, из (152)

$$\frac{D_{h+p+1}}{D_h} = |T| = (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} t_p^{p+1}. \tag{156}$$

Из (153), (154), (155) и (156) следует:

$$P(D^*_h, D^*_{h+1}, \ldots, D^*_{h+p+1}) - V(D^*_h, D^*_{h+1}, \ldots, D^*_{h+p+1}) = \\ = \begin{cases} 0 \text{ при } p \text{ нечетном}, \\ \varepsilon \text{ при } p \text{ четном}, \end{cases} \tag{157}$$

где

$$\varepsilon = (-1)^{\frac{p}{2}} \operatorname{sign} \frac{D_{h+p+1}}{D_h}.$$

Так как

$$P(D^*_{h+1}, D^*_{h+2}, \ldots, D^*_{h+p+1}) + V(D^*_{h+1}, D^*_{h+2}, \ldots, D^*_{h+p+1}) = p + 1, \tag{158}$$

то из (157) и (158) вытекает таблица (150).

Пусть теперь $D_r = 0$. Тогда при некотором $h < r$

$$D_h \neq 0, \quad D_{h+1} = \ldots = D_r = 0.$$

В этом случае согласно теореме 23

$$D^{(r)} = S\begin{pmatrix} 1 \ldots h & n-r+h+1 \ldots n \\ 1 \ldots h & n-r+h+1 \ldots n \end{pmatrix} \neq 0.$$

Рассматриваемый случай сводится к предыдущему перенумерацией переменных в квадратичной форме $S(x, x) = \sum\limits_{i,k=0}^{n-1} s_{i+k}x_ix_k$. Полагаем:

$$\tilde{x}_0 = x_0, \ \ldots, \ \tilde{x}_{h-1} = x_{h-1}, \ \tilde{x}_h = x_{n-r+h}, \ \ldots, \ \tilde{x}_{r-1} = x_{n-1}, \\ \tilde{x}_r = x_h, \ \ldots, \ \tilde{x}_{n-1} = x_{n-r+h-1}. \tag{159}$$

При этом $S(x, x) = \sum\limits_{i,k=0}^{n-1} \tilde{s}_{i+k}x_ix_k$.

Исходя из структуры матрицы T на стр. 305 и пользуясь полученными из детерминантного тождества Сильвестра соотношениями

$$\widehat{D}_j = \frac{D_{h+j}}{D_h}, \quad \widehat{\widetilde{D}}_j = \frac{\widetilde{D}_{h+j}}{D_h} \quad (j = 1, 2, \ldots, n-h),$$

найдем, что ряд $1, \widetilde{D}_1, \widetilde{D}_2, \ldots, \widetilde{D}_n$ получается из ряда $1, D_1, D_2, \ldots, D_n$ заменой одного элемента D_r на $D^{(r)}$.

Таким образом, показано, что во всех случаях можно пользоваться таблицей (150).

Заметим, что при p нечетном [p — число нулевых определителей в группе (148)] из формулы (156) следует:

$$\operatorname{sign} \frac{D_{h+p+1}}{D_h} = (-1)^{\frac{p+1}{2}}. \tag{160}$$

Пользуясь этим равенством, читатель легко проверит, что таблице (150) соответствует то приписывание знаков нулевым определителям, которое дается формулой (149).

Теорема доказана полностью[1]).

Примечание. При $p=1$ из формулы (160) следует: $D_h D_{h+2} < 0$. Поэтому имеет место правило Гундельфингера, т. е. при подсчете $v(1, D_1, \ldots, D_r)$ можно D_{h+1} опустить. При $p=2$ из таблицы (150) вытекает правило Фробениуса (см. стр. 275).

---

[1] Нетрудно убедиться, что теорема 23, а с ней и теорема 24, сохраняют силу также при $h=0$, если считать, как мы условились на стр. 305, $D_0 \equiv 1$ (см. Фробениус, [182 f]).

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ

ГЛАВА XI

КОМПЛЕКСНЫЕ СИММЕТРИЧЕСКИЕ, КОСОСИММЕТРИЧЕСКИЕ И ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ

В главе IX в связи с изучением линейных операторов в евклидовом пространстве были исследованы вещественные симметрические, кососимметрические и ортогональные матрицы, т. е. вещественные квадратные матрицы, характеризуемые соответственно соотношениями

$$S' = S, \quad K' = -K, \quad O' = O^{-1}$$

(здесь $'$ означает переход к транспонированной матрице). Было выяснено, что в поле комплексных чисел все эти матрицы имеют линейные элементарные делители, и были установлены нормальные формы для этих матриц, т. е. «простейшие» вещественные симметрические, кососимметрические и ортогональные матрицы, которым вещественно- и ортогонально-подобны произвольные матрицы рассматриваемых типов.

Настоящая глава посвящена исследованию комплексных симметрических, кососимметрических и ортогональных матриц. Выясняется, какие элементарные делители могут иметь эти матрицы, и устанавливаются для них нормальные формы. Эти формы имеют значительно более сложную структуру, нежели соответствующие нормальные формы в вещественном случае. Предварительно в первом параграфе устанавливаются интересные связи между комплексными ортогональными, унитарными и вещественными симметрическими, кососимметрическими и ортогональными матрицами.

§ 1. Некоторые формулы для комплексных ортогональных и унитарных матриц

Начнем с леммы.

Лемма 1 [1]. 1. *Если матрица G одновременно является и эрмитовой и ортогональной ($G' = \overline{G} = G^{-1}$), то она представима в виде*

$$G = Ie^{iK}, \tag{1}$$

где I — вещественная симметрическая инволютивная матрица, а K — перестановочная с нею вещественная кососимметрическая матрица:

$$I = \overline{I} = I', \quad I^2 = E, \quad K = \overline{K} = -K'. \tag{2}$$

2. *Если дополнительно G является положительно определенной эрмитовой матрицей* [2], *то в формуле* (1) $I = E$ *и*

$$G = e^{iK}. \tag{3}$$

---

[1]) [81в], стр. 223—225.

[2]) То есть G — матрица коэффициентов положительно определенной эрмитовой формы (см. гл. X, § 9).

Доказательство. 1. Пусть

$$G = S + iT, \tag{4}$$

где S и T — вещественные матрицы. Тогда

$$\overline{G} = S - iT \quad \text{и} \quad G' = S' + iT'. \tag{5}$$

Поэтому равенство $\overline{G} = G'$ влечет: $S = S'$, $T = -T'$, т. е. S — симметрическая, а T — кососимметрическая матрица.

Далее, комплексное равенство $G\overline{G} = E$ после подстановки в него выражений для G и $\overline{G}$ из (4) и (5) распадается на два вещественных равенства:

$$S^2 + T^2 = E, \; ST = TS. \tag{6}$$

Второе из этих равенств показывает, что S и T коммутируют.

Согласно теореме 12′ главы IX (стр. 265) коммутирующие нормальные матрицы S и T можно одним и тем же вещественным ортогональным преобразованием привести к квазидиагональной канонической форме. Поэтому[1])

$$S = O\{s_1, s_1, s_2, s_2, \ldots, s_q, s_q, s_{2q+1}, \ldots, s_n\} O^{-1} \qquad (O = \overline{O} = O'^{-1}) \tag{7}$$

$$T = O\left\{\begin{Vmatrix} 0 & t_1 \\ -t_1 & 0 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 0 & t_2 \\ -t_2 & 0 \end{Vmatrix}, \ldots, \begin{Vmatrix} 0 & t_q \\ -t_q & 0 \end{Vmatrix}, 0, \ldots, 0\right\} O^{-1}$$

(числа s_i и t_i вещественны). Отсюда

$$G = S + iT = O\left\{\begin{Vmatrix} s_1 & it_1 \\ -it_1 & s_1 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} s_2 & it_2 \\ -it_2 & s_2 \end{Vmatrix}, \ldots, \begin{Vmatrix} s_q & it_q \\ -it_q & s_q \end{Vmatrix}, s_{2q+1}, \ldots, s_n\right\} O^{-1}. \tag{8}$$

С другой стороны, подставляя выражения (7) для S и T в первое из равенств (6), найдем:

$$s_1^2 - t_1^2 = 1, \; s_2^2 - t_2^2 = 1, \; \ldots, \; s_q^2 - t_q^2 = 1, \; s_{2q+1} = \pm 1, \; \ldots, \; s_n = \pm 1. \tag{9}$$

Теперь нетрудно проверить, что матрица типа $\begin{Vmatrix} s & it \\ -it & s \end{Vmatrix}$ при $s^2 - t^2 = 1$ всегда представима в виде

$$\begin{Vmatrix} s & it \\ -it & s \end{Vmatrix} = \varepsilon e^{i\begin{Vmatrix} 0 & \varphi \\ -\varphi & 0 \end{Vmatrix}},$$

где

$$|s| = \operatorname{ch}\varphi, \quad \varepsilon t = \operatorname{sh}\varphi, \quad \varepsilon = \operatorname{sign} s.$$

Поэтому в силу (8) и (9) имеем:

$$G = O\left\{\pm e^{i\begin{Vmatrix} 0 & \varphi_1 \\ -\varphi_1 & 0 \end{Vmatrix}}, \pm e^{i\begin{Vmatrix} 0 & \varphi_2 \\ -\varphi_2 & 0 \end{Vmatrix}}, \ldots, \pm e^{i\begin{Vmatrix} 0 & \varphi_q \\ -\varphi_q & 0 \end{Vmatrix}}, \pm 1, \ldots, \pm 1\right\} O^{-1}, \tag{10}$$

т. е.

$$G = Ie^{iK},$$

---

[1]) См. также примечание к теореме 12′ гл. IX (стр. 265).

где

$$\left.\begin{aligned} I &= O\{\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1\} O^{-1}, \\ K &= O\left\{\begin{Vmatrix} 0 & \varphi_1 \\ -\varphi_1 & 0 \end{Vmatrix}, \ldots, \begin{Vmatrix} 0 & \varphi_q \\ -\varphi_q & 0 \end{Vmatrix}, 0, \ldots, 0\right\} O^{-1} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

и

$$IK = KI.$$

Из (11) вытекают равенства (2).

2. Если дополнительно известно, что G — положительно определенная эрмитова матрица, то можно утверждать, что все характеристические числа матрицы G положительны (гл. IX, стр. 248). Но в силу формулы (10) этими характеристическими числами являются числа

$$\pm e^{\varphi_1}, \ \pm e^{-\varphi_1}, \ \pm e^{\varphi_2}, \ \pm e^{-\varphi_2}, \ \ldots, \ \pm e^{\varphi_q}, \ \pm e^{-\varphi_q}, \ \pm 1, \ \ldots, \ \pm 1$$

[здесь знаки соответствуют знакам в формуле (10)].

Поэтому в формуле (10) и в последующей формуле (11) всюду, где стоит $\pm$, сохраняется знак $+$. Следовательно,

$$I = O\{1, 1, \ldots, 1\} O^{-1} = E,$$

что и требовалось доказать.

Лемма доказана полностью.

С помощью леммы мы докажем следующую теорему:

Теорема 1. *Комплексная ортогональная матрица O всегда представима в виде*

$$O = Re^{iK}, \tag{12}$$

где R — вещественная ортогональная, а K — вещественная кососимметрическая матрица

$$R = \overline{R} = R'^{-1}, \quad K = \overline{K} = -K'. \tag{13}$$

Доказательство. Допустим, что формула (12) имеет место. Тогда

$$O^* = \overline{O}' = e^{iK}R'$$

и

$$O^*O = e^{iK}R'Re^{iK} = e^{2iK}.$$

Теперь в силу предыдущей леммы искомую вещественную кососимметрическую матрицу K можно определить из равенства

$$O^*O = e^{2iK}, \tag{14}$$

поскольку матрица O^*O — положительно определенная эрмитова и ортогональная матрица[1]). После того как матрица K определена из (14), мы находим R из (12):

$$R = Oe^{-iK}. \tag{15}$$

Тогда

$$R^*R = e^{-iK}O^*Oe^{iK} = E,$$

т. е. R — унитарная матрица. С другой стороны, из (15) следует, что матрица R как произведение двух ортогональных матриц сама

[1]) Комплексная ортогональная матрица O является неособенной, так как из равенства $OO' = E$ следует, что $|O| = \pm 1$.

ортогональна: $R'R=E$. Таким образом, R является одновременно унитарной и ортогональной и, следовательно, вещественной ортогональной. Формулу (15) можно записать в виде (12).

Теорема доказана[1]).

Установим теперь следующую лемму:

Лемма 2. *Если матрица D является одновременно симметрической и унитарной ($D=D'=\overline{D}^{-1}$), то она всегда представима в виде*

$$D=e^{iS}, \tag{16}$$

где S — вещественная симметрическая матрица ($S=\overline{S}=S'$).

Доказательство. Положим

$$D=U+iV \quad (U=\overline{U},\ V=\overline{V}). \tag{17}$$

Тогда

$$\overline{D}=U-iV, \quad D'=U'+iV'.$$

Комплексное равенство $D=D'$ распадается на два вещественных:

$$U=U', \quad V=V'.$$

Таким образом, U и V — вещественные симметрические матрицы.

Равенство $D\overline{D}=E$ влечет:

$$U^2+V^2=E, \quad UV=VU. \tag{18}$$

Согласно второму из этих равенств матрицы U и V коммутируют. Применяя к ним теорему 12′ (вместе с примечанием) главы IX (стр. 265), получим:

$$U=O\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}O^{-1}, \quad V=O\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}O^{-1}. \tag{19}$$

Здесь $O=\overline{O}=O'^{-1}$, а s_k и t_k ($k=1, 2, \ldots, n$) — вещественные числа. Теперь первое из равенств (18) дает:

$$s_k^2+t_k^2=1 \qquad (k=1, 2, \ldots, n).$$

Поэтому существуют такие вещественные числа φ_k ($k=1, 2, \ldots, n$), что

$$s_k=\cos\varphi_k, \quad t_k=\sin\varphi_k \quad (k=1, 2, \ldots, n).$$

Подставляя эти выражения для s_k и t_k в (19) и пользуясь (17), найдем:

$$D=O\{e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}, \ldots, e^{i\varphi_n}\}O^{-1}=e^{iS},$$

где

$$S=O\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}O^{-1}. \tag{20}$$

Из (20) следует: $S=\overline{S}=S'$.

Лемма доказана.

Пользуясь этой леммой, докажем следующую теорему:

Теорема 2. *Унитарная матрица U всегда представима в виде*

$$U=Re^{iS}, \tag{21}$$

где R — вещественная ортогональная, а S — вещественная симметрическая матрица:

$$R=\overline{R}=R'^{-1}, \quad S=\overline{S}=S'. \tag{22}$$

---

[1]) Формула (12), как и полярное разложение комплексной матрицы [в соответствии с формулами (87), (88) на стр. 249], имеет тесную связь с важной теоремой Картана, устанавливающей известные представления для автоморфизмов полуростых комплексных групп Ли [81в], стр. 232—233.

Доказательство. Из формулы (21) следует:

$$U' = e^{iS}R'. \tag{23}$$

Перемножая почленно (21) и (23), получим в силу (22):

$$U'U = e^{iS}R'Re^{iS} = e^{2iS}.$$

Согласно лемме 2 вещественную симметрическую матрицу S можно определить из уравнения

$$U'U = e^{2iS}, \tag{24}$$

поскольку матрица $U'U$ является симметрической унитарной. После того как матрица S определена, мы определим матрицу R равенством

$$R = Ue^{-iS}. \tag{25}$$

Тогда

$$R' = e^{-iS}U', \tag{26}$$

и потому из (24), (25) и (26) вытекает

$$R'R = e^{-iS}U'Ue^{-iS} = E,$$

т. е. R — ортогональная матрица.

С другой стороны, согласно (25) R есть произведение двух унитарных матриц и, следовательно, R — унитарная матрица. Поскольку R одновременно является ортогональной и унитарной, R — вещественная матрица. Формулу (25) можно переписать в виде (21).

Теорема доказана.

§ 2. Полярное разложение комплексной матрицы

Докажем следующую теорему:

Теорема 3. *Если $A = \| a_{ik} \|_1^n$ — неособенная матрица с комплексными элементами, то*

$$A = SO \tag{27}$$

и

$$A = O_1S_1, \tag{28}$$

где S и S_1 — комплексные симметрические, а O и O_1 — комплексные ортогональные матрицы. При этом

$$S = \sqrt{AA'} = f(AA'), \qquad S_1 = \sqrt{A'A} = f_1(A'A),$$

где $f(\lambda)$, $f_1(\lambda)$ — некоторые многочлены относительно λ.

Как в разложении (27), так и в разложении (28) сомножители S и O (соответственно O_1 и S_1) перестановочны между собой в том и только в тот случае, когда матрицы A и A' перестановочны между собой.

Доказательство. Достаточно установить разложение (27), так как, применив это разложение к матрице A' и определив из полученной формулы матрицу A, мы придем к разложению (28).

Если имеет место формула (27), то

$$A = SO, \qquad A' = O^{-1}S$$

и потому

$$AA' = S^2. \tag{29}$$

Обратно, поскольку AA' — неособенная матрица ($|AA'| = |A|^2 \neq 0$), то функция $\sqrt{\lambda}$ определена на спектре этой матрицы [1]), и, следовательно, существует такой интерполяционный многочлен $f(\lambda)$, что

$$\sqrt{AA'} = f(AA'). \tag{30}$$

Симметрическую матрицу (30) обозначим через

$$S = \sqrt{AA'}.$$

Тогда имеет место (29) и, следовательно, $|S| \neq 0$. Определяя матрицу O из равенства (27)

$$O = S^{-1}A,$$

легко проверяем, что эта матрица является ортогональной. Таким образом разложение (27) установлено.

Если в разложении (27) множители S и O перестановочны между собой, то перестановочны и матрицы

$$A = SO \text{ и } A' = O^{-1}S,$$

так как

$$AA' = S^2, \qquad A'A = O^{-1}S^2O.$$

Обратно, если $AA' = A'A$, то

$$S^2 = O^{-1}S^2O,$$

т. е. матрица O перестановочна с $S^2 = AA'$. Но тогда матрица O перестановочна и с матрицей $S = f(AA')$.

Таким образом теорема доказана полностью.

Пользуясь полярным разложением, докажем теорему:

Теорема 4. *Если две комплексные симметрические, либо кососимметрические, либо ортогональные матрицы подобны*

$$B = T^{-1}AT, \tag{31}$$

то эти матрицы ортогонально-подобны, т. е. существует такая ортогональная матрица O, что

$$B = O^{-1}AO. \tag{32}$$

Доказательство. Из условия теоремы следует существование такого многочлена $q(\lambda)$, что

$$A' = q(A), \qquad B' = q(B). \tag{33}$$

Этот многочлен $q(\lambda)$ в случае симметрических матриц тождественно равен λ, а в случае кососимметрических матриц тождественно равен $-\lambda$. Если же A и B — ортогональные матрицы, то $q(\lambda)$ — интерполяционный многочлен для $\frac{1}{\lambda}$ на общем спектре матриц A и B.

Пользуясь равенствами (33), мы проведем доказательство данной теоремы совершенно аналогично доказательству соответствующей теоремы 10 главы IX для вещественного случая (см. стр. 262). Из (31) следует:

$$q(B) = T^{-1}q(A)T$$

---

[1]) См. гл. V, § 1. Мы берем однозначную ветвь функции $\sqrt{\lambda}$ в односвязной области, содержащей все характеристические числа матрицы AA' и не содержащей числа 0.

или в силу (33)

$$B' = T^{-1}A'T.$$

Отсюда

$$B = T'AT'^{-1}.$$

Сопоставляя это равенство с (31), легко находим:

$$TT'A = ATT'. \tag{34}$$

Применим к неособенной матрице T полярное разложение

$$T = SO \quad (S = S' = f(TT'), \quad O' = O^{-1}).$$

Поскольку согласно (34) матрица TT' перестановочна с A, то и матрица $S = f(TT')$ также перестановочна с A. Поэтому, подставляя в (31) вместо T произведение SO, будем иметь:

$$B = O^{-1}S^{-1}ASO = O^{-1}AO.$$

Теорема доказана.

§ 3. Нормальная форма комплексной симметрической матрицы

Докажем следующую теорему.

Теорема 5. *Существует комплексная симметрическая матрица с любыми наперед заданными элементарными делителями* [1]).

Доказательство. Рассмотрим матрицу H n-го порядка, у которой элементы первой наддиагонали равны единице, а все остальные элементы равны нулю. Докажем, что существует симметрическая матрица S, подобная матрице H:

$$S = THT^{-1}. \tag{35}$$

Преобразующую матрицу T будем искать, исходя из условия:

$$S = THT^{-1} = S' = T'^{-1}H'T'.$$

Это условие можно переписать так:

$$VH = H'V, \tag{36}$$

где V—симметрическая матрица, связанная с T равенством

$$T'T = -2iV \text{ [2])}. \tag{37}$$

Вспоминая свойства матриц H и $F = H'$ (стр. 25—26), мы найдем, что любое решение V матричного уравнения (36) имеет следующий вид:

$$V = \begin{Vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ \vdots & & a_0 & a_1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{Vmatrix}, \tag{38}$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ — произвольные комплексные числа.

---

[1]) Относительно содержания настоящего параграфа, а также последующих §§ 4 и 5 см. [256].

[2]) Для упрощения дальнейших формул нам удобно здесь ввести множитель $-2i$.

Поскольку нам достаточно отыскать одну преобразующую матрицу T, то мы в этой формуле положим $a_0=1$, $a_1=\ldots=a_{n-1}=0$ и определим матрицу V равенством [1])

$$V=\begin{Vmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \ldots & 0 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{39}$$

Кроме того, преобразующую матрицу T будем искать в виде симметрической матрицы:

$$T=T'. \tag{40}$$

Тогда уравнение (37) для T перепишется так:

$$T^2=-2iV. \tag{41}$$

Теперь неизвестную матрицу T будем искать в виде многочлена от V. Поскольку $V^2=E$, в качестве такого многочлена можно взять многочлен первой степени: $T=\alpha E+\beta V$. Из уравнения (41), учитывая равенство $V^2=E$, найдем: $\alpha^2+\beta^2=0$, $2\alpha\beta=-2i$. Этим соотношениям мы удовлетворим, полагая $\alpha=1$, $\beta=-i$. Тогда

$$T=E-iV. \tag{42}$$

T — неособенная симметрическая матрица [2]). В то же время из (41): $T^{-1}=\frac{1}{2}iV^{-1}T=\frac{1}{2}iVT$, т. е.

$$T^{-1}=\frac{1}{2}(E+iV). \tag{43}$$

Таким образом, симметрическая форма S матрицы H определится равенством

$$S=THT^{-1}=\frac{1}{2}(E-iV)H(E+iV),\ V=\begin{Vmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \ldots & 0 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{44}$$

Поскольку матрица S удовлетворяет уравнению (36) и $V^2=E$, то равенство (44) может быть переписано еще так:

$$2S=(H+H')+i\,(HV-VH)=H+H'+i\,(H-H')\,V=$$

$$=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & \cdot & & \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 0 & \ldots & 1 & 0 \end{Vmatrix}+i\begin{Vmatrix} 0 & \ldots & 1 & 0 \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & -1 & \ldots & 0 \end{Vmatrix}. \tag{45}$$

Формула (45) определяет симметрическую форму S матрицы H.

[1]) Матрица V является одновременно симметрической и ортогональной.

[2]) Неособенность матрицы T следует, в частности, из (41), поскольку V — неособенная матрица.

В дальнейшем, если n — порядок матрицы H, $H = H^{(n)}$, то соответствующие матрицы T, V и S будем еще обозначать и так: $T^{(n)}$, $V^{(n)}$ и $S^{(n)}$.

Пусть даны произвольные элементарные делители:

$$(\lambda-\lambda_1)^{p_1}, \quad (\lambda-\lambda_2)^{p_2}, \ldots, (\lambda-\lambda_u)^{p_u}. \tag{46}$$

Составим соответствующую жорданову матрицу

$$J = \{\lambda_1 E^{(p_1)} + H^{(p_1)}, \quad \lambda_2 E^{(p_2)} + H^{(p_2)}, \ldots, \lambda_u E^{(p_u)} + H^{(p_u)}\}.$$

Для каждой матрицы $H^{(p_j)}$ введем соответствующую симметрическую форму $S^{(p_j)}$. Из

$$S^{(p_j)} = T^{(p_j)} H^{(p_j)} [T^{(p_j)}]^{-1} \quad (j = 1, 2, \ldots, u)$$

следует:

$$\lambda_j E^{(p_j)} + S^{(p_j)} = T^{(p_j)} [\lambda_j E^{(p_j)} + H^{(p_j)}] [T^{(p_j)}]^{-1}.$$

Поэтому, полагая

$$\widetilde{S} = \{\lambda_1 E^{(p_1)} + S^{(p_1)}, \lambda_2 E^{(p_2)} + S^{(p_2)}, \ldots, \lambda_u E^{(p_u)} + S^{(p_u)}\}, \tag{47}$$

$$T = \{T^{(p_1)}, T^{(p_2)}, \ldots, T^{(p_u)}\}, \tag{48}$$

будем иметь:

$$\widetilde{S} = TJT^{-1}.$$

$\widetilde{S}$ — симметрическая форма жордановой матрицы J. Матрица $\widetilde{S}$ подобна матрице J и имеет те же элементарные делители (46), что и матрица J. Теорема доказана.

Следствие 1. *Произвольная квадратная комплексная матрица $A = \| a_{ik} \|_1^n$ подобна симметрической матрице.*

Привлекая теорему 4, получим:

Следствие 2. *Произвольная комплексная симметрическая матрица $S = \| s_{ik} \|_1^n$ ортогонально-подобна симметрической матрице, имеющей нормальную форму $\widetilde{S}$, т. е. существует такая ортогональная матрица O, что*

$$S = O\widetilde{S}O^{-1}. \tag{49}$$

Нормальная форма комплексной симметрической матрицы имеет квазидиагональный вид

$$\widetilde{S} = \{\lambda_1 E^{(p_1)} + S^{(p_1)}, \lambda_2 E^{(p_2)} + S^{(p_2)}, \ldots, \lambda_u E^{(p_u)} + S^{(p_u)}\}, \tag{50}$$

где клетки $S^{(p)}$ определяются так [см. (44), (45)]:

$$2S^{(p)} = [E^{(p)} - iV^{(p)}] H^{(p)} [E^{(p)} + iV^{(p)}] =$$

$$= [H^{(p)} + H^{(p)\prime} + i(H^{(p)} - H^{(p)\prime}) V^{(p)}] =$$

$$= \begin{Vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{Vmatrix} + i \begin{Vmatrix} 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \end{Vmatrix}. \tag{51}$$

§ 4. Нормальная форма комплексной кососимметрической матрицы

Выясним, какие ограничения на элементарные делители накладывает косая симметрия матрицы. При этом мы будем опираться на следующую теорему:

Теорема 6. *Кососимметрическая матрица всегда имеет четный ранг.*

Доказательство. Пусть кососимметрическая матрица K имеет ранг r. Тогда среди строк матрицы K имеется r линейно независимых с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_r$; все остальные строки являются линейными комбинациями этих строк. Поскольку столбцы матрицы K получаются из соответствующих строк, если элементы последних помножить на -1, то и любой столбец матрицы K есть линейная комбинация столбцов с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_r$. Поэтому произвольный минор r-го порядка матрицы K может быть представлен в виде

$$\alpha K \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_r \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_r \end{pmatrix},$$

где α — число.

Отсюда вытекает, что

$$K \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_r \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_r \end{pmatrix} \neq 0.$$

Но кососимметрический определитель нечетного порядка всегда равен нулю. Следовательно, r — четное число.

Теорема доказана.

Теорема 7. 1° *Если λ_0 — характеристическое число кососимметрической матрицы K и ему соответствуют элементарные делители*

$$(\lambda-\lambda_0)^{f_1}, \quad (\lambda-\lambda_0)^{f_2}, \ldots, (\lambda-\lambda_0)^{f_t},$$

то $-\lambda_0$ также является характеристическим числом матрицы K и этому числу соответствуют элементарные делители матрицы K в том же числе и тех же степеней

$$(\lambda+\lambda_0)^{f_1}, \quad (\lambda+\lambda_0)^{f_2}, \ldots, (\lambda+\lambda_0)^{f_t}.$$

2° *Если число нуль является характеристическим числом кососимметрической матрицы K*[1]*, то в системе элементарных делителей матрицы K все элементарные делители четной степени, соответствующие характеристическому числу нуль, повторяются четное число раз.*

Доказательство. 1° Транспонированная матрица K' имеет те же элементарные делители, что и матрица K. Но $K' = -K$, а элементарные делители матрицы $-K$ получаются из элементарных делителей матрицы K, если в последних все характеристические числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ заменить на $-\lambda_1, -\lambda_2, \ldots$ Отсюда следует первая часть нашей теоремы.

2° Пусть характеристическому числу нуль матрицы K отвечает δ_1 элементарных делителей вида λ, δ_2 — вида λ^2 и т. д. Вообще мы через δ_p обозначим число элементарных делителей вида λ^p $(p=1, 2, \ldots)$. Мы докажем, что $\delta_2, \delta_4, \ldots$ — четные числа.

---

[1]) То есть если $|K|=0$. При n нечетном всегда $|K|=0$.

Дефект d матрицы K равен числу линейно независимых собственных векторов, соответствующих характеристическому числу нуль или, что то же, числу элементарных делителей вида λ, λ^2, λ^3, ... Поэтому

$$d = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots \tag{52}$$

Поскольку согласно теореме 6 ранг матрицы K — четное число, а $d = n - r$, то число d имеет ту же четность, что и число n. Такое же утверждение можно сделать относительно дефектов d_3, d_5, ... матриц K^3, K^5, ..., поскольку нечетные степени кососимметрической матрицы снова являются кососимметрическими матрицами. Поэтому все числа $d_1 = d$, d_3, d_5, ... имеют одну и ту же четность.

С другой стороны, при возведении матрицы K в степень m каждый элементарный делитель λ^p этой матрицы при $p < m$ расщепляется на p элементарных делителей (первой степени), а при $p \geqslant m$ — на m элементарных делителей [1]). Поэтому число элементарных делителей матриц K, K^3, ..., являющихся степенями λ, определится по формулам [2])

$$\begin{aligned} d_3 &= \delta_1 + 2\delta_2 + 3(\delta_3 + \delta_4 + \ldots), \\ d_5 &= \delta_1 + 2\delta_2 + 3\delta_3 + 4\delta_4 + 5(\delta_5 + \delta_6 + \ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{53}$$

Сопоставляя (52) с (53) и помня, что все числа $d_1 = d$, d_3, d_5, ... имеют одну и ту же четность, легко заключаем, что δ_2, δ_4, ... — четные числа.

Теорема доказана полностью.

Теорема 8. *Существует кососимметрическая матрица с любыми наперед заданными элементарными делителями, удовлетворяющими ограничениям 1°, 2° предыдущей теоремы.*

Доказательство. Найдем сначала кососимметрическую форму для квазидиагональной матрицы порядка $2p$:

$$J_{\lambda_0}^{(pp)} = \{\lambda_0 E + H, \ -\lambda_0 E - H\}, \tag{54}$$

имеющей два элементарных делителя $(\lambda - \lambda_0)^p$ и $(\lambda + \lambda_0)^p$; здесь $E = E^{(p)}$, $H = H^{(p)}$.

Будем искать такую преобразующую матрицу T, чтобы матрица

$$TJ_{\lambda_0}^{(pp)}T^{-1}$$

была кососимметрической, т. е. чтобы имело место равенство

$$TJ_{\lambda_0}^{(pp)}T^{-1} + T'^{-1}[J_{\lambda_0}^{(pp)}]'\,T' = 0$$

или

$$WJ_{\lambda_0}^{(pp)} + [J_{\lambda_0}^{(pp)}]'W = 0, \tag{55}$$

где W — симметрическая матрица, связанная с матрицей T равенством [3])

$$T'T = -2iW. \tag{56}$$

---

[1]) См. гл. VI, теорема 9 стр. 158.

[2]) Эти формулы были выведены (без ссылки на теорему 9) в гл. VI [см. формулы (49) на стр. 156].

[3]) См. сноску [2]) к стр. 319.

Разобьем матрицу W на четыре квадратных блока, каждый порядка p:

$$W=\begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда (55) можно переписать так:

$$\begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_0 E+H & 0 \\ 0 & -\lambda_0 E-H \end{pmatrix}+$$
$$+\begin{pmatrix} \lambda_0 E+H' & 0 \\ 0 & -\lambda_0 E-H' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}=0. \quad (57)$$

Выполняя указанные действия над блочными матрицами в левой части матричного уравнения (57), мы заменим это уравнение системой четырех матричных уравнений:

$$\left.\begin{array}{ll} 1)\ H'W_{11}+W_{11}(2\lambda_0 E+H)=0, & 2)\ H'W_{12}-W_{12}H=0, \\ 3)\ H'W_{21}-W_{21}H=0, & 4)\ H'W_{22}+W_{22}(2\lambda_0 E+H)=0. \end{array}\right\} \quad (58)$$

Уравнение $AX-XB=0$, где A и B — квадратные матрицы без общих характеристических чисел, имеет только нулевое решение $X=0$ [1]). Поэтому первое и четвертое уравнения (58) дают: $W_{11}=W_{22}=0$ [2]). Что же касается второго из этих уравнений, то, как мы видели при доказательстве теоремы 5, этому уравнению можно удовлетворить, полагая

$$W_{12}=V=\begin{Vmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad (59)$$

поскольку [см. (36)]

$$VH-H'V=0.$$

Из симметрии матрицы W следует, что

$$W_{21}=W'_{12}=V.$$

Тогда автоматически удовлетворяется и уравнение 3).

Таким образом,

$$W=\begin{pmatrix} 0 & V \\ V & 0 \end{pmatrix}=V^{(2p)}. \quad (60)$$

Но тогда, как уже было выяснено на стр. 320, уравнение (56) удовлетворится, если положить:

$$T=E^{(2p)}-iV^{(2p)}. \quad (61)$$

При этом

$$T^{-1}=\frac{1}{2}(E^{(2p)}+iV^{(2p)}). \quad (62)$$

---

[1]) См. гл. VIII, § 1.

[2]) При $\lambda_0\neq 0$ уравнения 1) и 4), кроме нулевых, других решений не имеют. При $\lambda_0=0$ существуют и другие решения, но мы выбираем нулевые решения.

Следовательно, искомая кососимметрическая матрица найдется по формуле

$$K_{\lambda_0}^{(pp)} = \frac{1}{2}\left[E^{(2p)} - iV^{(2p)}\right] J_{\lambda_0}^{(pp)} \left[E^{(2p)} + iV^{(2p)}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[J_{\lambda_0}^{(pp)} - J_{\lambda_0}^{(pp)\prime} + i\left(J_{\lambda_0}^{(pp)} V^{(2p)} - V^{(2p)} J_{\lambda_0}^{(pp)}\right)\right]\ ^{1)}. \qquad (63)$$

Подставляя вместо $J_{\lambda_0}^{(pp)}$ и $V^{(2p)}$ соответствующие блочные матрицы из (54) и (60), найдем:

$$2K_{\lambda_0}^{(pp)} = \begin{pmatrix} H-H' & 0 \\ 0 & H'-H \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} H+H'+2\lambda_0 E & 0 \\ 0 & -H-H'-2\lambda E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & V \\ V & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} H-H' & i(2\lambda_0 V + HV + VH) \\ -i(2\lambda_0 V + HV + VH) & H'-H \end{pmatrix}, \qquad (64)$$

т. е.

$$K_{\lambda_0}^{(pp)} = \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{cccccc|cccccc}
0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & i & 2\lambda_0 \\
-1 & 0 & \ddots & & & & & & & & \ddots & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & \ddots & 2\lambda_0 & i \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\
\vdots & & & & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & & & & 1 & i & & \ddots & & & \vdots \\
0 & \cdots & & & -1 & 0 & 2\lambda_0, & & i & & \cdots & 0 \\
\hline
0 & \cdots & & -i, & & -2\lambda_0 & 0 & -1 & & \cdots & & 0 \\
 & & \ddots & & -2\lambda_0, & -i & 1 & 0 & \ddots & & & \\
\vdots & & & \ddots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & & & \ddots & \vdots & \vdots & & & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & & & & \vdots & \vdots & & & & \ddots & \vdots \\
-i & & & & & \vdots & \vdots & & & & & -1 \\
-2\lambda_0 & -i & & & \cdots & 0 & 0 & & \cdots & & 1 & 0
\end{array} \right\|. \qquad (65)$$

Построим теперь кососимметрическую матрицу q-го порядка $K^{(q)}$, имеющую один элементарный делитель λ^q, где q — нечетное число. Очевидно, что искомая кососимметрическая матрица будет подобна матрице

$$J^{(q)} = \left\| \begin{array}{cccccccc}
0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 1 & & & & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\
\vdots & & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & & & & \ddots & \ddots & \\
\vdots & & & & & & -1 & 0 \\
\vdots & & & & & & 0 & -1 \\
0 & & \cdots & & & & 0 & 0
\end{array} \right\|. \qquad (66)$$

---

1) Здесь мы используем равенства (55), (60) и равенство $[V^{(2p)}]^2 = E^{(2p)}$. Из этих равенств следует, что $V^{(2p)} J_{\lambda_0}^{(pp)} = -J_{\lambda_0}^{(pp)\prime} V^{(2p)}$ и $V^{(2p)} J_{\lambda_0}^{(pp)} V^{(2p)} = -J_{\lambda_0}^{(pp)\prime}$.

В этой матрице все элементы вне первой наддиагонали равны нулю, а вдоль первой наддиагонали сначала идут $\frac{q-1}{2}$ единиц, а затем $\frac{q-1}{2}$ элементов, равных -1. Полагая

$$K^{(q)} = TJ^{(q)}T^{-1}, \tag{67}$$

из условия косой симметрии найдем:

$$W_1 J^{(q)} + J^{(q)\prime} W_1 = 0, \tag{68}$$

где

$$T'T = -2iW_1. \tag{69}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что матрица

$$W_1 = V^{(q)} = \begin{Vmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

удовлетворяет уравнению (68). Принимая это значение для W_1, мы из (69), как и ранее, находим

$$T = E^{(q)} - iV^{(q)}, \quad T^{-1} = \frac{1}{2}[E^{(q)} + iV^{(q)}], \tag{70}$$

$$2K^{(q)} = [E^{(q)} - iV^{(q)}]^{(q)}[E^{(q)} + iV^{(q)}]J = J^{(q)} - J^{(q)\prime} + i(J^{(q)} + J^{(q)\prime})V^{(q)}. \tag{71}$$

Произведя соответствующие вычисления, найдем:

$$2K^{(q)} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ -1 & 0 & \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot & \cdot & -1 \\ 0 & & & & & & 1 & 0 \end{Vmatrix} + i \begin{Vmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 \\ \cdot & & & & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ 0 & \cdot & -1 & & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{Vmatrix}. \tag{72}$$

Пусть даны произвольные элементарные делители, удовлетворяющие условиям теоремы 7:

$$\left.\begin{array}{ll} (\lambda - \lambda_j)^{p_j},\ (\lambda + \lambda_j)^{p_j} & (j = 1, 2, \dots, u), \\ \lambda^{q_k} & (k = 1, 2, \dots, v;\ q_1, q_2, \dots, q_v \text{ — нечетные числа}). \end{array}\right\}^{1)} \tag{73}$$

Тогда квазидиагональная кососимметрическая матрица

$$\widetilde{K} = \{K_{\lambda_1}^{(p_1 p_1)}, \dots, K_{\lambda_u}^{(p_u p_u)};\ K^{(q_1)}, \dots, K^{(q_v)}\} \tag{74}$$

или элементарные делители (73).

Теорема доказана.

Следствие. *Произвольная комплексная кососимметрическая матрица K ортогонально-подобна кососимметрической матрице, имеющей нормальную форму K, определяемую формулами* (74), (65), (72), т. е. *существует такая (комплексная) ортогональная матрица O, что*

$$K = O\widetilde{K}O^{-1}. \tag{75}$$

---

[1]) Среди чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_u$ могут быть и равные нулю. Кроме того, одно из чисел u и v может равняться нулю, т. е. в частном случае могут быть только элементарные делители одного типа.

Замечание. Если K — вещественная кососимметрическая матрица, то она имеет линейные элементарные делители (см. гл. IX, § 13)

$$\lambda - i\varphi_1,\ \lambda + i\varphi_1,\ \ldots,\ \lambda - i\varphi_u,\ \lambda + i\varphi_u,\ \underbrace{\lambda, \ldots, \lambda}_{v \text{ раз}} \quad (\varphi_j \text{ — вещественные числа}).$$

В этом случае, полагая в (74) все $p_j = 1$ и все $q_k = 1$, получим нормальную форму вещественной кососимметрической матрицы

$$\widetilde{K} = \left\{ \begin{Vmatrix} 0 & \varphi_1 \\ -\varphi_1 & 0 \end{Vmatrix}, \ldots, \begin{Vmatrix} 0 & \varphi_u \\ -\varphi_u & 0 \end{Vmatrix}, 0, \ldots, 0 \right\}.$$

§ 5. Нормальная форма комплексной ортогональной матрицы

Начнем с выяснения, какие ограничения на элементарные делители накладывает ортогональность матрицы.

Теорема 9. 1. *Если $\lambda_0 (\lambda_0^2 \neq 1)$ — характеристическое число ортогональной матрицы O и этому характеристическому числу соответствуют элементарные делители*

$$(\lambda - \lambda_0)^{f_1},\ (\lambda - \lambda_0)^{f_2},\ \ldots,\ (\lambda - \lambda_0)^{f_t},$$

то $\frac{1}{\lambda_0}$ также является характеристическим числом матрицы O и этому характеристическому числу соответствуют такие же элементарные делители, как и числу λ_0:

$$(\lambda - \lambda_0^{-1})^{f_1},\ (\lambda - \lambda_0^{-1})^{f_2},\ \ldots,\ (\lambda - \lambda_0^{-1})^{f_t}.$$

2. *Если $\lambda_0 = \pm 1$ является характеристическим числом ортогональной матрицы O, то элементарные делители четной степени, соответствующие этому характеристическому числу λ_0, повторяются четное число раз.*

Доказательство. 1. Для любой неособенной матрицы O при переходе от O к O^{-1} каждый элементарный делитель $(\lambda - \lambda_0)^f$ заменяется элементарным делителем $(\lambda - \lambda_0^{-1})^f$ [1]). С другой стороны, матрицы O и O' всегда имеют одни и те же элементарные делители. Поэтому из условия ортогональности $O' = O^{-1}$ сразу следует первая часть нашей теоремы.

2. Допустим, что число 1 является характеристическим числом матрицы O, а число -1 не является таковым ($|E - O| = 0$, $|E + O| \neq 0$). Тогда воспользуемся формулами Кэли (см. гл. IX, § 14), которые сохраняют свою силу и для комплексных матриц. Определим матрицу K равенством

$$K = (E - O)(E + O)^{-1}. \tag{76}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что $K' = -K$, т. е. что K — кососимметрическая матрица. Разрешая уравнение (76) относительно O, находим [2]):

$$O = (E - K)(E + K)^{-1}.$$

Полагая $f(\lambda) = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}$, имеем $f'(\lambda) = -\frac{2}{(1+\lambda)^2} \neq 0$. Следовательно, при переходе от матрицы K к матрице $O = f(K)$ элементарные делители

---

[1]) См. гл. VI, § 7. Полагая $f(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$, имеем $f'(\lambda) = -\frac{1}{\lambda^2} \neq 0$. Отсюда следует, что при переходе от матрицы O к матрице O^{-1} элементарные делители не расщепляются (см. стр. 158).

[2]) Заметим, что из (76) следует: $E + K = 2(E + O)^{-1}$ и, следовательно, $|E + K| = 2^n |E + O|^{-1} \neq 0$.

не расщепляются[1]). Поэтому в системе элементарных делителей матрицы O элементарные делители вида $(\lambda-1)^{2p}$ повторяются четное число раз, поскольку это имеет место для элементарных делителей вида λ^{2p} матрицы K (см. теорему 7).

Случай, когда ортогональная матрица O имеет характеристическое число -1, но не имеет характеристического числа $+1$, сразу сводится к разобранному случаю путем рассмотрения ортогональной матрицы $-O$.

Переходим к наиболее сложному случаю, когда матрица O одновременно имеет характеристическое число $+1$ и характеристическое число -1. Обозначим через $\psi(\lambda)$ минимальный многочлен матрицы O. Используя доказанную первую часть теоремы, мы сможем записать $\psi(\lambda)$ в виде

$$\psi(\lambda)=(\lambda-1)^{m_1}(\lambda+1)^{m_2}\prod_{j=1}^{u}(\lambda-\lambda_j)^{p_j}(\lambda-\lambda_j^{-1})^{p_j} \qquad (\lambda_j^2\neq 1;\ j=1, 2, \ldots, u).$$

Рассмотрим многочлен $g(\lambda)$ степени $<m$ [m — степень $\psi(\lambda)$], у которого $g(1)=1$, а все остальные $m-1$ значений на спектре матрицы O равны нулю, и положим[2]):

$$P=g(O). \tag{77}$$

Заметим, что функции $[g(\lambda)]^2$ и $g\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ принимают те же значения на спектре матрицы O, что и функция $g(\lambda)$. Поэтому

$$P^2=P, \quad P'=g(O')=g(O^{-1})=P, \tag{78}$$

т. е. P — симметрическая проекционная матрица[3]).

Определим многочлен $h(\lambda)$ и матрицу Q равенствами

$$h(\lambda)=(\lambda-1)\,g(\lambda), \tag{79}$$

$$Q=h(O)=(O-E)\,P. \tag{80}$$

Поскольку степень $[h(\lambda)]^{m_1}$ обращается в нуль на спектре матрицы O, эта степень делится на $\psi(\lambda)$ без остатка. Отсюда следует:

$$Q^{m_1}=0,$$

т. е. Q — нильпотентная матрица с индексом нильпотентности m_1.

Из (80) находим[4]):

$$Q'=(O'-E)\,P. \tag{81}$$

Рассмотрим матрицу

$$R=Q\,(Q'+2E). \tag{82}$$

Из (78), (80) и (81) следует:

$$R=QQ'+2Q=(O-O')\,P.$$

Из этого представления матрицы R видно, что R — кососимметрическая матрица.

---

[1]) См. стр. 158.

[2]) Из основной формулы (см. стр. 111)

$$g(A)=\sum_{k=1}^{s}[g(\lambda_k)\,Z_{k1}+g'(\lambda_k)\,Z_{k2}+\ldots]$$

следует, что

$$P=Z_{11}.$$

[3]) См. гл. III, § 6 (стр. 81).

[4]) Все фигурирующие здесь матрицы P, Q, Q', $O'=O^{-1}$ перестановочны между собой и с O, поскольку все они являются функциями от O.

С другой стороны, из (82)

$$R^k = Q^k (Q' + 2E)^k \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{83}$$

Но Q', как и Q, — нильпотентная матрица и, следовательно,

$$|Q' + 2E| \neq 0.$$

Поэтому из (83) вытекает, что при любом k матрицы R^k и Q^k имеют один и тот же ранг.

Но при k нечетном матрица R^k является кососимметрической и потому (см. стр. 322) имеет четный ранг. Следовательно, каждая из матриц

$$Q, \ Q^3, \ Q^5, \ \ldots$$

имеет четный ранг.

Поэтому, повторяя дословно для матрицы Q рассуждения, проведенные на стр. 322—323 для матрицы K, мы сможем утверждать, что среди элементарных делителей матрицы Q делители вида λ^{2p} повторяются четное число раз. Но каждому элементарному делителю λ^{2p} матрицы Q соответствует элементарный делитель $(\lambda - 1)^{2p}$ матрицы O и наоборот[1]). Отсюда следует, что среди элементарных делителей матрицы O делители вида $(\lambda - 1)^{2p}$ повторяются четное число раз.

Аналогичное утверждение для элементарных делителей вида $(\lambda + 1)^{2p}$ мы получим, применяя доказанное уже положение к матрице $-O$.

Таким образом, теорема доказана полностью.

Докажем теперь обратную теорему.

Теорема 10. *Любая система степеней вида*

$$\left.\begin{array}{l} (\lambda - \lambda_j)^{p_j}, \ (\lambda - \lambda_j^{-1})^{p_j} \quad (\lambda_j \neq 0;\ j = 1, 2, \ldots, u), \\ (\lambda - 1)^{q_1}, \ (\lambda - 1)^{q_2}, \ \ldots, \ (\lambda - 1)^{q_v}, \\ (\lambda + 1)^{t_1}, \ (\lambda + 1)^{t_2}, \ \ldots, \ (\lambda + 1)^{t_w} \\ (q_1, \ldots, q_v, t_1, \ldots, t_w \text{ — нечетные числа}) \end{array}\right\} \tag{84}$$

является системой элементарных делителей некоторой комплексной ортогональной матрицы O[2]).

Доказательство. Обозначим через μ_j числа, связанные с числами λ_j $(j = 1, 2, \ldots, u)$ равенствами

$$\lambda_j = e^{\mu_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, u).$$

Введем в рассмотрение «канонические» кососимметрические матрицы (см. предыдущий параграф)

$$K_{\mu_j}^{(p_j p_j)} \quad (j = 1, 2, \ldots, u); \quad K^{(q_1)}, \ldots, K^{(q_v)}; K^{(t_1)}, \ldots, K^{(t_w)},$$

имеющие соответственно элементарные делители

$$(\lambda - \mu_j)^{p_j}, \ (\lambda + \mu_j)^{p_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, u); \quad \lambda^{q_1}, \ldots, \lambda^{q_v}; \lambda^{t_1}, \ldots, \lambda^{t_w}.$$

Если K — кососимметрическая матрица, то

$$O = e^K$$

---

[1]) Поскольку $h(1) = 0$, $h'(1) \neq 0$, то при переходе от матрицы O к матрице $Q = h(O)$ элементарные делители вида $(\lambda - 1)^{2p}$ матрицы O, не расщепляясь, заменяются элементарными делителями λ^{2p} (см. гл. VI, § 7).

[2]) Некоторые (или даже все) из чисел λ_j могут равняться ± 1. Одно число или два из чисел u, v, w могут равняться нулю. Тогда элементарные делители соответствующего вида отсутствуют у матрицы O.

является ортогональной ($O' = e^{K'} = e^{-K} = O^{-1}$). При этом каждому элементарному делителю $(\lambda - \mu)^p$ матрицы K отвечает элементарный делитель $(\lambda - e^{\mu})^p$ матрицы O [1]).

Поэтому квазидиагональная матрица

$$\widetilde{O} = \{e^{K_{\mu_1}^{(p_1 p_1)}}, \ldots, e^{K_{\mu_u}^{(p_u p_u)}}; e^{K^{(q_1)}}, \ldots, e^{K^{(q_v)}}; -e^{K^{(t_1)}}, \ldots, -e^{K^{(t_w)}}\} \quad (85)$$

является ортогональной и имеет элементарные делители (84).

Теорема доказана.

Из теорем 4, 9 и 10 вытекает

Следствие. *Произвольная (комплексная) ортогональная матрица O всегда ортогонально-подобна ортогональной матрице, имеющей нормальную форму $\widetilde{O}$, т. е. существует такая ортогональная матрица O_1, что*

$$O = O_1 \widetilde{O} O_1^{-1}. \quad (86)$$

Примечание. Подобно тому как это было сделано для кососимметрической матрицы $\widetilde{K}$, можно конкретизировать форму диагональных клеток в нормальной форме $\widetilde{O}$ [2]).

---

[1]) Это следует из того, что при $f(\lambda) = e^{\lambda}$ имеем: $f'(\lambda) = e^{\lambda} \neq 0$ при любом λ

[2]) См. [256].

ГЛАВА XII

СИНГУЛЯРНЫЕ ПУЧКИ МАТРИЦ

§ 1. Введение

1. Настоящая глава посвящена следующей задаче:

Даны четыре матрицы A, B; A_1, B_1 одинаковых размеров $m \times n$ с элементами из числового поля K. Требуется найти, при каких условиях существуют две квадратные неособенные матрицы P и Q соответственно порядков m и n такие, что одновременно

$$PAQ = A_1, \quad PBQ = B_1 \text{ [1]}. \tag{1}$$

Вводя в рассмотрение пучки матриц $A + \lambda B$ и $A_1 + \lambda B_1$, два матричных равенства (1) можно заменить одним равенством

$$P(A + \lambda B)Q = A_1 + \lambda B_1. \tag{2}$$

Определение 1. Два пучка прямоугольных матриц $A + \lambda B$ и $A_1 + \lambda B_1$ одних и тех же размеров $m \times n$, связанные равенством (2), в котором P и Q — постоянные (т. е. не зависящие от λ) квадратные неособенные матрицы соответственно порядков m и n, мы будем называть *строго эквивалентными* [2].

Согласно общему определению эквивалентности λ-матриц (см. гл. VI, стр. 138) пучки $A + \lambda B$ и $A_1 + \lambda B_1$ являются эквивалентными, если имеет место равенство вида (2), в котором P и Q — две квадратные λ-матрицы с постоянными и отличными от нуля определителями. При строгой же эквивалентности требуется дополнительно, чтобы матрицы P и Q не зависели от λ [3].

Критерий эквивалентности пучков $A + \lambda B$ и $A_1 + \lambda B_1$ следует из общего критерия эквивалентности λ-матриц и состоит в совпадении инвариантных многочленов или, что то же, элементарных делителей пучков $A + \lambda B$ и $A_1 + \lambda B_1$ (см. гл. VI, стр. 144).

В настоящей главе будет установлен критерий строгой эквивалентности двух пучков матриц и для каждого пучка будет определена строго эквивалентная ему каноническая форма.

---

[1]) Если такие матрицы P и Q существуют, то их элементы могут быть выбраны из поля K. Это вытекает из того, что равенства (1) могут быть переписаны в виде $PA = A_1Q^{-1}$, $PB = B_1Q^{-1}$ и потому равносильны некоторой системе линейных однородных уравнений с коэффициентами из поля K относительно элементов матриц P и Q^{-1}.

[2]) См. гл. VI, стр. 138.

[3]) Мы заменили встречающийся в литературе термин «эквивалентные пучки» термином «строго эквивалентные пучки» для того, чтобы резко разграничить определение 1 от определения эквивалентности из гл. VI.

2. Поставленная задача допускает естественную геометрическую интерпретацию. Рассмотрим пучок линейных операторов $\boldsymbol{A} + \lambda \boldsymbol{B}$, отображающих $\boldsymbol{R}_n$ в $\boldsymbol{R}_m$. При определенном выборе базисов в этих пространствах пучку операторов $\boldsymbol{A} + \lambda \boldsymbol{B}$ отвечает пучок прямоугольных матриц $A + \lambda B$ (размером $m \times n$); при изменении базисов в $\boldsymbol{R}_n$ и $\boldsymbol{R}_m$ пучок $A + \lambda B$ заменяется строго эквивалентным пучком $P(A + \lambda B)Q$, где P и Q — квадратные неособенные матрицы порядков m и n (см. гл. III, §§ 2 и 4). Таким образом, критерий строгой эквивалентности дает характеристику того класса пучков матриц $A + \lambda B$ (размером $m \times n$), которые описывают один и тот же пучок операторов $\boldsymbol{A} + \lambda \boldsymbol{B}$, отображающих $\boldsymbol{R}_n$ в $\boldsymbol{R}_m$, при различных выборах базисов в этих пространствах.

Для получения канонической формы пучка нужно найти те базисы в $\boldsymbol{R}_n$ и $\boldsymbol{R}_m$, в которых пучок операторов $\boldsymbol{A} + \lambda \boldsymbol{B}$ описывается возможно более простой матрицей.

Поскольку пучок операторов задается двумя операторами $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, то можно еще сказать, что *настоящая глава посвящена одновременному изучению двух операторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, отображающих $\boldsymbol{R}_n$ в $\boldsymbol{R}_m$.*

3. Все пучки матриц $A + \lambda B$ размером $m \times n$ подразделяются на два основных типа: на *регулярные* и *сингулярные* пучки.

Определение 2. Пучок матриц $A + \lambda B$ называется *регулярным*, если 1) A и B — квадратные матрицы одного и того же порядка n и 2) определитель $|A + \lambda B|$ не равен тождественно нулю. Во всех остальных случаях ($m \neq n$ или $m = n$, но $|A + \lambda B| \equiv 0$) пучок называется *сингулярным*.

Критерий строгой эквивалентности, а также каноническая форма для регулярных пучков матриц были установлены К. Вейерштрассом в 1867 г. [150] на основе его теории элементарных делителей, изложенной нами в главах VI и VII. Аналогичные вопросы для сингулярных пучков получили свое разрешение позже, в 1890 г., в исследованиях Л. Кронекера [133] [1]). Результаты Кронекера и составляют основное содержание этой главы.

§ 2. Регулярный пучок матриц

1. Рассмотрим частный случай, когда пучки $A + \lambda B$ и $A_1 + \lambda B_1$ состоят из квадратных матриц ($m = n$) и $|B| \neq 0$, $|B_1| \neq 0$. В этом случае, как было доказано в главе VI (стр. 140), два понятия «эквивалентность» и «строгая эквивалентность» пучков совпадают. Поэтому, применяя к пучкам общий критерий эквивалентности λ-матриц (стр. 148), приходим к теореме:

Теорема 1. *Два пучка квадратных матриц одного и того же порядка $A + \lambda B$ и $A_1 + \lambda B_1$, у которых $|B| \neq 0$ и $|B_1| \neq 0$, являются строго эквивалентными в том и только в том случае, когда эти пучки имеют одни и те же элементарные делители в поле K.*

Пучок квадратных матриц $A + \lambda B$ с $|B| \neq 0$ в главе VI называется регулярным, поскольку он представляет собой частный случай регулярного матричного многочлена относительно λ (см. гл. IV, стр. 87). В предыдущем параграфе настоящей главы мы дали более широкое определение регулярного пучка. Согласно этому определению в регулярном пучке возможно равенство $|B| = 0$ (и даже $|A| = |B| = 0$).

---

[1]) Из дальнейших исследований, в которых по-иному трактуются сингулярные пучки матриц, укажем на [99б, 251, 207а].

Для того чтобы выяснить, сохранится ли теорема 1 для регулярных пучков (при расширенном определении 1), рассмотрим следующий пример:

$$A+\lambda B=\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \end{Vmatrix}+\lambda\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{Vmatrix},\quad A_1+\lambda B_1=\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}+\lambda\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}. \qquad (3)$$

Нетрудно видеть, что здесь каждый из пучков $A+\lambda B$ и $A_1+\lambda B_1$ имеет только один элементарный делитель $\lambda+1$. В то же время эти пучки не являются строго эквивалентными, так как матрицы B и B_1 имеют соответственно ранги 2 и 1, а из равенства (2), если бы оно имело место, следовало бы, что ранги матриц B и B_1 равны между собой. При этом пучки (3) являются регулярными согласно определению 1, так как

$$|A+\lambda B|\equiv|A_1+\lambda B_1|\equiv\lambda+1.$$

Разобранный пример показывает, что теорема 1 неверна при расширенном определении регулярного пучка.

2. Для того чтобы сохранить теорему 1, нам придется ввести понятие о «бесконечных» элементарных делителях пучка. Будем пучок $A+\lambda B$ задавать при помощи «однородных» параметров λ, μ : $\mu A+\lambda B$. Тогда определитель $\Delta(\lambda, \mu)\equiv|\mu A+\lambda B|$ будет однородной функцией от λ, μ. Определяя наибольший общий делитель $D_k(\lambda, \mu)$ всех миноров k-го порядка матрицы $\mu A+\lambda B$ ($k=1, 2, \ldots, n$), получим инвариантные многочлены по известным формулам

$$i_1(\lambda, \mu)=\frac{D_n(\lambda, \mu)}{D_{n-1}(\lambda, \mu)},\quad i_2(\lambda, \mu)=\frac{D_{n-1}(\lambda, \mu)}{D_{n-2}(\lambda, \mu)},\quad \ldots;$$

при этом все $D_k(\lambda, \mu)$ и $i_j(\lambda, \mu)$ — однородные относительно λ и μ многочлены. Разлагая инвариантные многочлены на степени неприводимых в поле K однородных многочленов, получим элементарные делители $e_\alpha(\lambda, \mu)$ ($\alpha=1, 2, \ldots$) пучка $\mu A+\lambda B$ в поле K.

Совершенно очевидно, что, полагая $\mu=1$ в $e_\alpha(\lambda, \mu)$, мы вернемся к элементарным делителям $e_\alpha(\lambda)$ пучка $A+\lambda B$. Обратно, из каждого элементарного делителя $e_\alpha(\lambda)$ степени q пучка $A+\lambda B$ мы получим соответствующий элементарный делитель $e_\alpha(\lambda, \mu)$ по формуле $e_\alpha(\lambda, \mu)=\mu^q e_\alpha\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$. Таким способом могут быть получены все элементарные делители пучка $\mu A+\lambda B$ за исключением элементарных делителей вида μ^q.

Элементарные делители вида μ^q существуют в том и только в том случае, когда $|B|=0$, и носят название «бесконечных» элементарных делителей для пучка $A+\lambda B$.

Поскольку из строгой эквивалентности пучков $A+\lambda B$ и $A_1+\lambda B_1$ следует строгая эквивалентность пучков $\mu A+\lambda B$ и $\mu A_1+\lambda B_1$, то у строго эквивалентных пучков $A+\lambda B$ и $A_1+\lambda B_1$ должны совпадать не только «конечные», но и «бесконечные» элементарные делители.

Пусть теперь даны два регулярных пучка $A+\lambda B$ и $A_1+\lambda B_1$, у которых соответственно совпадают все (в том числе и бесконечные) элементарные делители. Введем однородные параметры: $\mu A+\lambda B$, $\mu A_1+\lambda B_1$. Преобразуем параметры:

$$\begin{aligned}\lambda&=\alpha_1\tilde{\lambda}+\alpha_2\tilde{\mu},\\ \mu&=\beta_1\tilde{\lambda}+\beta_2\tilde{\mu}\end{aligned}\qquad (\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\neq 0).$$

В новых параметрах пучки запишутся так: $\tilde{\mu}\tilde{A}+\tilde{\lambda}\tilde{B}$, $\tilde{\mu}\tilde{A}_1+\tilde{\lambda}\tilde{B}_1$, где

$\widetilde{B} = \beta_1 A + \alpha_1 B$, $\widetilde{B}_1 = \beta_1 A_1 + \alpha_1 B_1$. Из регулярности пучков $\mu A + \lambda B$ и $\mu A_1 + \lambda B_1$ вытекает, что можно подобрать числа α_1 и β_1 так, чтобы $|\widetilde{B}| \neq 0$ и $|\widetilde{B}_1| \neq 0$.

Поэтому согласно теореме 1 пучки $\widetilde{\mu}\widetilde{A} + \widetilde{\lambda}\widetilde{B}$ и $\widetilde{\mu}\widetilde{A}_1 + \widetilde{\lambda}\widetilde{B}_1$, а следовательно, и исходные пучки $\mu A + \lambda B$ и $\mu A_1 + \lambda B_1$ (или, что то же, $A + \lambda B$ и $A_1 + \lambda B_1$) строго эквивалентны. Таким образом, мы пришли к следующему обобщению теоремы 1.

Теорема 2. *Для того чтобы два регулярных пучка $A + \lambda B$ и $A_1 + \lambda B_1$ были строго эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы эти пучки имели одни и те же («конечные» и «бесконечные») элементарные делители.*

В разобранном ранее примере пучки (3) имели один и тот же «конечный» элементарный делитель $\lambda + 1$, но отличались «бесконечными» элементарными делителями (первый пучок имеет один «бесконечный» элементарный делитель μ^2, а второй — два: μ, μ). Поэтому эти пучки и не оказались строго эквивалентными.

3. Пусть теперь дан произвольный регулярный пучок $A + \lambda B$. Тогда существует такое число c, что $|A + cB| \neq 0$. Данный пучок представим в виде $A_1 + (\lambda - c) B$, где $A_1 = A + cB$ и потому $|A_1| \neq 0$. Умножим пучок слева на A_1^{-1}: $E + (\lambda - c) A_1^{-1} B$. Преобразованием подобия приводим этот пучок к виду

$$E + (\lambda - c)\{J_0, J_1\} = \{E - cJ_0 + \lambda J_0, E - cJ_1 + \lambda J_1\}\ ^{1)}, \tag{4}$$

где $\{J_0, J_1\}$ — квазидиагональная нормальная форма матрицы $A_1^{-1}B$, J_0 — жорданова нильпотентная[2]) матрица, а $|J_1| \neq 0$.

Первый диагональный блок правой части (4) умножим на $(E - cJ_0)^{-1}$. Получим: $E + \lambda (E - cJ_0)^{-1} J_0$. Здесь коэффициент при λ — нильпотентная матрица[3]). Поэтому преобразованием подобия этот пучок можно привести к виду

$$E + \widehat{\lambda J_0} = \{N^{(u_1)}, N^{(u_2)}, \ldots, N^{(u_s)}\}$$
$$(N^{(u)} = E^{(u)} + \lambda H^{(u)})\ ^{4)}. \tag{5}$$

Второй диагональный блок в правой части (4) умножением на J_1^{-1}, а затем преобразованием подобия может быть приведен к виду $J + \lambda E$, где J — матрица, имеющая нормальную форму[5]), а E — единичная матрица. Мы пришли к теореме

Теорема 3. *Произвольный регулярный пучок $A + \lambda B$ может быть приведен к (строго эквивалентному) каноническому квазидиагональному виду*

$$\{N^{(u_1)}, N^{(u_2)}, \ldots, N^{(u_s)}, J + \lambda E\}$$
$$(N^{(u)} = E^{(u)} + \lambda H^{(u)}), \tag{6}$$

---

[1]) Единичные матрицы E в диагональных блоках правой части (4) имеют соответственно те же порядки, что J_0 и J_1.

[2]) То есть $J_0^l = 0$ при некотором целом $l > 0$.

[3]) Из $J_0^l = 0$ следует: $[(E - cJ_0)^{-1} J_0]^l = 0$.

[4]) Здесь $E^{(u)}$ — единичная матрица порядка u, а $H^{(u)}$ — матрица порядка u, у которой элементы первой наддиагонали равны единице, а остальные элементы равны нулю.

[5]) Поскольку здесь матрицу J можно заменить любой матрицей, ей подобной, то можно считать, что J имеет любую нормальную форму [например, естественную первого рода или второго рода или жорданову (см. гл. VI, § 6)].

где первые s диагональных блоков соответствуют бесконечным элементарным делителям $\mu^{u_1}, \mu^{u_2}, \ldots, \mu^{u_s}$ пучка $A+\lambda B$, а нормальная форма последнего диагонального блока $J+\lambda E$ однозначно определяется конечными элементарными делителями данного пучка.

§ 3. Сингулярные пучки. Теорема о приведении

Переходим к рассмотрению сингулярного пучка матриц $A+\lambda B$ с размерами $m \times n$. Обозначим через r *ранг пучка*, т. е. наибольший из порядков миноров, не равных тождественно нулю. Из сингулярности пучка следует, что всегда имеет место по крайней мере одно из неравенств $r<n$ или $r<m$. Пусть $r<n$. Тогда столбцы λ-матрицы $A+\lambda B$ линейно зависимы, т. е. уравнение

$$(A+\lambda B)\,x=0, \tag{7}$$

где x — искомый столбец, имеет ненулевое решение. Каждое ненулевое решение этого уравнения определяет некоторую линейную зависимость между столбцами λ-матрицы $A+\lambda B$. Мы ограничимся только теми решениями $x(\lambda)$ уравнения (7), которые являются многочленами относительно λ [1]), и среди этих решений возьмем решение наименьшей степени ε

$$x(\lambda)=x_0-\lambda x_1+\lambda^2 x_2-\ldots+(-1)^{\varepsilon}\lambda^{\varepsilon}x_{\varepsilon} \qquad (x_{\varepsilon}\neq 0). \tag{8}$$

Подставляя это решение в (7) и приравнивая нулю коэффициенты при степенях λ, получим:

$$Ax_0=0,\ Bx_0-Ax_1=0,\ Bx_1-Ax_2=0,\ \ldots,\ Bx_{\varepsilon-1}-Ax_{\varepsilon}=0,\ Bx_{\varepsilon}=0. \tag{9}$$

Рассматривая эту систему равенств как систему линейных однородных уравнений относительно элементов столбцов $x_0,\ -x_1,\ +x_2,\ \ldots,\ (-1)^{\varepsilon}x_{\varepsilon}$, заключаем, что матрица коэффициентов этой системы

$$M_{\varepsilon}=M_{\varepsilon}[A+\lambda B]=\left\|\begin{matrix} \overbrace{A & 0 & \ldots & 0}^{\varepsilon+1} \\ B & A & & \cdot \\ 0 & B & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & A \\ 0 & 0 & \ldots & B \end{matrix}\right\| \tag{10}$$

имеет ранг $\varrho_{\varepsilon}<(\varepsilon+1)n$. В то же время в силу минимального свойства числа ε для рангов $\varrho_1, \ldots, \varrho_{\varepsilon-1}$ матриц

$$M_0=\left\|\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}\right\|,\quad M_1=\left\|\begin{matrix} A & 0 \\ B & A \\ 0 & B \end{matrix}\right\|,\ \ldots,\ M_{\varepsilon-1}=\left\|\begin{matrix} \overbrace{A & 0 & \ldots & 0}^{\varepsilon} \\ B & A & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & A \\ 0 & \ldots & & B \end{matrix}\right\| \tag{10'}$$

имеют место равенства $\varrho_0=n,\ \varrho_1=2n,\ \ldots,\ \varrho_{\varepsilon-1}=\varepsilon n$.

[1]) Для определения элементов столбца x, удовлетворяющего уравнению (7), приходится решать систему линейных однородных уравнений, у которых коэффициенты при неизвестных линейно зависят от λ. Базисные линейно независимые решения x всегда могут быть выбраны так, чтобы их элементами были многочлены от λ.

Таким образом, *число* ε *есть наименьшее значение индекса* k, *при котором в соотношении* $\varrho_k \leqslant (k+1)n$ *имеет место знак* $<$.

Теперь мы сформулируем и докажем следующую фундаментальную теорему:

Теорема 4. *Если уравнение* (7) *имеет решение минимальной степени* ε *и* $\varepsilon > 0$, *то данный пучок* $A+\lambda B$ *строго эквивалентен пучку вида*

$$\begin{Vmatrix} L_\varepsilon & 0 \\ 0 & \widehat{A}+\lambda\widehat{B} \end{Vmatrix}, \tag{11}$$

где

$$L_\varepsilon = \begin{Vmatrix} \overbrace{\lambda \quad 1 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \quad 0}^{\varepsilon+1} \\ 0 \quad \lambda \quad 1 \quad \quad \quad . \quad . \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ 0 \quad 0 \quad \ldots \quad \lambda \quad 1 \end{Vmatrix} \Bigg\} \varepsilon, \tag{12}$$

а $\widehat{A}+\lambda\widehat{B}$ — *пучок матриц, для которого уравнение, аналогичное* (7), *не имеет решений степени* $< \varepsilon$.

Доказательство теоремы разобьем на три этапа. Сначала докажем, что данный пучок $A+\lambda B$ строго эквивалентен пучку вида

$$\begin{Vmatrix} L_\varepsilon & D+\lambda F \\ 0 & \widehat{A}+\lambda\widehat{B} \end{Vmatrix}, \tag{13}$$

где D, F, $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ — постоянные прямоугольные матрицы соответственных размеров. Затем установим, что уравнение $(\widehat{A}+\lambda\widehat{B})\widehat{x}=0$ не имеет решений $\widehat{x}(\lambda)$ степени $< \varepsilon$. После этого мы покажем, что дальнейшими преобразованиями пучок (13) может быть приведен к квазидиагональному виду (11).

1. Первую часть доказательства облечем в геометрическую форму. Вместо пучка матриц $A+\lambda B$ рассмотрим пучок операторов $\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$, отображающих $\boldsymbol{R}_n$ в $\boldsymbol{R}_m$, и покажем, что при надлежащем выборе базисов в этих пространствах матрица, соответствующая оператору $\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$, будет иметь форму (13).

Вместо уравнения (7) возьмем векторное уравнение

$$(\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=0 \tag{14}$$

с векторным решением

$$\boldsymbol{x}(\lambda)=\boldsymbol{x}_0-\lambda\boldsymbol{x}_1+\lambda^2\boldsymbol{x}_2-\ldots+(-1)^\varepsilon\lambda^\varepsilon\boldsymbol{x}_\varepsilon; \tag{15}$$

равенства (9) заменятся векторными равенствами

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0=0, \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_0, \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_1, \ \ldots, \ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_\varepsilon=\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_{\varepsilon-1}, \quad \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_\varepsilon=0. \tag{16}$$

Ниже мы докажем, что векторы

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1, \ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2, \ \ldots, \ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_\varepsilon \tag{17}$$

линейно независимы. Отсюда легко будет следовать линейная независимость векторов

$$x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_\varepsilon. \tag{18}$$

Действительно, поскольку $Ax_0=0$, из $\alpha_0x_0+\alpha_1x_1+\ldots+\alpha_\varepsilon x_\varepsilon=0$ находим: $\alpha_1Ax_1+\ldots+\alpha_\varepsilon Ax_\varepsilon=0$, откуда в силу линейной независимости векторов (17) $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_\varepsilon=0$. Но $x_0\neq 0$, поскольку в противном случае $\frac{1}{\lambda}x(\lambda)$ было бы решением уравнения (14) степени $\varepsilon-1$, что невозможно. Поэтому и $\alpha_0=0$.

Если теперь принять векторы (17) и (18) в качестве первых базисных векторов для новых базисов соответственно в R_m и R_n, то в новых базисах операторам A и B в силу (16) будут соответствовать матрицы

$$\widetilde{A}=\left\|\begin{array}{cccccccc} \overbrace{0 & 1 & \ldots & 0}^{\varepsilon+1} & * & \ldots & * \\ 0 & 0 & 1\ \ldots & 0 & * & \ldots & * \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & * & \ldots & * \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & * & \ldots & * \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & * & \ldots & * \end{array}\right\|,\quad \widetilde{B}=\left\|\begin{array}{cccccccc} \overbrace{1 & 0\ \ldots & 0 & 0}^{\varepsilon+1} & * & \ldots & * \\ 0 & 1\ \ldots & 0 & 0 & * & \ldots & * \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & & \\ 0 & 0\ \ldots & 1 & 0 & * & \ldots & * \\ 0 & 0\ \ldots & 0 & 0 & * & \ldots & * \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0\ \ldots & 0 & 0 & * & \ldots & * \end{array}\right\|;$$

тогда λ-матрица $\widetilde{A}+\lambda\widetilde{B}$ будет иметь вид (13). Все предыдущие рассуждения будут обоснованными, если мы докажем, что векторы (17) линейно независимы. Допустим противное, и пусть $Ax_h\ (h\geqslant 1)$ — первый в ряду (17) вектор, линейно зависящий от предыдущих векторов:

$$Ax_h=\alpha_1Ax_{h-1}+\alpha_2Ax_{h-2}+\ldots+\alpha_{h-1}Ax_1.$$

В силу (16) это равенство может быть переписано так:

$$Bx_{h-1}=\alpha_1Bx_{h-2}+\alpha_2Bx_{h-3}+\ldots+\alpha_{h-1}Bx_0,$$

т. е.

$$Bx^*_{h-1}=0,$$

где

$$x^*_{h-1}=x_{h-1}-\alpha_1x_{h-2}-\alpha_2x_{h-3}-\ldots-\alpha_{h-1}x_0.$$

Далее, опять в силу (16)

$$Ax^*_{h-1}=B(x_{h-2}-\alpha_1x_{h-3}-\ldots-\alpha_{h-2}x_0)=Bx^*_{h-2},$$

где

$$x^*_{h-2}=x_{h-2}-\alpha_1x_{h-3}-\ldots-\alpha_{h-2}x_0.$$

Продолжая этот процесс далее и вводя еще векторы

$$x^*_{h-3}=x_{h-3}-\alpha_1x_{h-4}-\ldots-\alpha_{h-3}x_0,\ \ldots,\ x^*_1=x_1-\alpha_1x_0,\ x^*_0=x_0,$$

мы получим цепочку равенств

$$Bx^*_{h-1}=0,\quad Ax^*_{h-1}=Bx^*_{h-2},\ \ldots,\ Ax^*_1=Bx^*_0,\quad Ax^*_0=0. \tag{19}$$

Из (19) следует, что

$$x^*(\lambda)=x^*_0-\lambda x^*_1+\ldots+(-1)^{h-1}x^*_{h-1}\qquad (x^*_0=x_0\neq 0)$$

есть ненулевое решение уравнения (14) степени $\leqslant h-1<\varepsilon$, что невозможно. Таким образом, векторы (17) линейно независимы.

2. Докажем теперь, что уравнение $(\widehat{A}+\lambda\widehat{B})\widehat{x}=0$ не имеет решений степени $<\varepsilon$. Сначала обратим внимание на то, что уравнение $L_\varepsilon y=0$, как и уравнение (7), имеет ненулевое решение наименьшей степени ε. В этом можно убедиться непосредственно, если матричное уравнение $L_\varepsilon y=0$ заменить системой обыкновенных уравнений

$$\lambda y_1+y_2=0,\quad \lambda y_2+y_3=0,\ \ldots,\ \lambda y_\varepsilon+y_{\varepsilon+1}=0,$$

$[y=(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_{\varepsilon+1})]$, откуда $y_k=(-1)^{k-1}y_1\lambda^{k-1}\qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ \varepsilon+1)$.

С другой стороны, если пучок имеет «треугольный» вид (13), то соответствующие этому пучку матрицы $M_k\,(k=0,\ 1,\ \ldots,\ \varepsilon)$ [см. (10) и (10′) на стр. 335] после надлежащей перестановки строк и столбцов также могут быть приведены к треугольному виду

$$\begin{Vmatrix} M_k[L_\varepsilon] & M_k[D+\lambda F] \\ 0 & M_k[\widehat{A}+\lambda\widehat{B}] \end{Vmatrix}. \tag{20}$$

При $k=\varepsilon-1$ все столбцы этой матрицы, а значит, и столбцы матрицы $M_{\varepsilon-1}[L_\varepsilon]$, линейно независимы[1]). Но $M_{\varepsilon-1}[L_\varepsilon]$ — квадратная матрица порядка $\varepsilon(\varepsilon+1)$. Поэтому и в матрице $M_{\varepsilon-1}[\widehat{A}+\lambda\widehat{B}]$ все столбцы линейно независимы, а это, как было выяснено в начале параграфа, означает, что уравнение $(\widehat{A}+\lambda\widehat{B})\widehat{x}=0$ не имеет решений степени $\leqslant\varepsilon-1$, что и требовалось доказать.

3. Заменим пучок (13) строго эквивалентным ему пучком

$$\begin{Vmatrix} E_1 & Y \\ 0 & E_2 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} L_\varepsilon & D+\lambda F \\ 0 & \widehat{A}+\lambda\widehat{B} \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} E_3 & -X \\ 0 & E_4 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} L_\varepsilon & D+\lambda F+Y(\widehat{A}+\lambda\widehat{B})-L_\varepsilon X \\ 0 & \widehat{A}+\lambda\widehat{B} \end{Vmatrix}, \tag{21}$$

где E_1, E_2, E_3, E_4 — квадратные единичные матрицы соответственно порядков ε, $m-\varepsilon$, $\varepsilon+1$ и $n-\varepsilon-1$, а X, Y — произвольные постоянные прямоугольные матрицы соответствующих размеров. Наша теорема будет полностью доказана, если мы покажем, что матрицы X и Y могут быть выбраны так, чтобы имело место матричное равенство

$$L_\varepsilon X=D+\lambda F+Y(\widehat{A}+\lambda\widehat{B}). \tag{22}$$

---

[1]) Это следует из того, что ранг матрицы (20) при $k=\varepsilon-1$ равен εn; аналогичное равенство имеет место для ранга матрицы $M_{\varepsilon-1}[L_\varepsilon]$.

Введем обозначения для элементов матриц D, F, X, а также для строк матрицы Y и для столбцов матриц $\widehat{A}$, $\widehat{B}$:

$$D=\|d_{ik}\|,\quad F=\|f_{ik}\|,\quad X=\|x_{jk}\|$$

$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ \varepsilon;\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-\varepsilon-1;\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ \varepsilon+1),$$

$$Y=\left\|\begin{matrix} y_1\\ y_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ y_\varepsilon\end{matrix}\right\|,\quad \widehat{A}=(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-\varepsilon-1}),\quad \widehat{B}=(b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_{n-\varepsilon-1}).$$

Тогда матричное уравнение (22) можно заменить системой скалярных уравнений, записывая, что элементы k-го столбца в левой и правой частях равенства (22) соответственно равны друг другу ($k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-\varepsilon-1$):

$$\left.\begin{aligned} x_{2k}+\lambda x_{1k}&=d_{1k}+\lambda f_{1k}+y_1a_k+\lambda y_1b_k,\\ x_{3k}+\lambda x_{2k}&=d_{2k}+\lambda f_{2k}+y_2a_k+\lambda y_2b_k,\\ x_{4k}+\lambda x_{3k}&=d_{3k}+\lambda f_{3k}+y_3a_k+\lambda y_3b_k,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_{\varepsilon+1,\,k}+\lambda x_{\varepsilon k}&=d_{\varepsilon k}+\lambda f_{\varepsilon k}+y_\varepsilon a_k+\lambda y_\varepsilon b_k\\ &(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-\varepsilon-1). \end{aligned}\right\}\tag{23}$$

В левых частях этих равенств стоят линейные двучлены относительно λ. Свободный член каждого из первых $\varepsilon-1$ этих двучленов равен коэффициенту при λ в следующем двучлене. Но тогда и правые части должны удовлетворять этому условию. Поэтому

$$\begin{aligned} y_1a_k-y_2b_k&=f_{2k}-d_{1k},\\ y_2a_k-y_3b_k&=f_{3k}-d_{2k},\\ &\cdots\cdots\cdots\\ y_{\varepsilon-1}a_k-y_\varepsilon b_k&=f_{\varepsilon k}-d_{\varepsilon-1,\,k}\\ &(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-\varepsilon-1). \end{aligned}\tag{24}$$

Если равенства (24) имеют место, то, очевидно, из (23) можно определить искомые элементы матрицы X.

Теперь осталось показать, что система уравнений (24) относительно элементов матрицы Y всегда имеет решение при любых d_{ik} и f_{ik} ($i=1,\ 2,\ \ldots,\ \varepsilon$; $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-\varepsilon-1$). Действительно, матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных элементах строк y_1, $-y_2$, $+y_3$, $-y_4$, $\ldots$, может быть записана после транспонирования в виде

$$\left\|\overbrace{\begin{matrix} \widehat{A} & 0 & \ldots & 0\\ \widehat{B} & \widehat{A} & \cdot & \cdot\\ 0 & \widehat{B} & \cdot & \cdot\\ \cdot & & \cdot & \cdot\\ \cdot & & \cdot & \widehat{A}\\ 0 & 0 & \ldots & \widehat{B}\end{matrix}}^{\varepsilon-1}\right\|$$

Но эта матрица является матрицей $M_{\varepsilon-2}$ для пучка прямоугольных матриц $\widehat{A}+\lambda\widehat{B}$ [см. (10′) на стр. 335]. Ранг же этой матрицы равен $(\varepsilon-1)(n-\varepsilon-1)$, поскольку по доказанному уравнение $(\widehat{A}+\lambda\widehat{B})\widehat{x}=0$ не имеет решений степени $<\varepsilon$. Таким образом, ранг системы уравнений (24) равен числу уравнений, а такая система при любых свободных членах является совместной (непротиворечивой).

Теорема доказана полностью.

§ 4. Каноническая форма сингулярного пучка матриц

Пусть дан произвольный сингулярный пучок матриц $A+\lambda B$ размеров $m\times n$. Допустим сначала, что как между столбцами, так и между строками этого пучка нет линейной зависимости с постоянными коэффициентами.

Пусть $r<n$, где r — ранг пучка, т. е. столбцы пучка $A+\lambda B$ линейно зависимы между собой. В этом случае уравнение $(A+\lambda B)x=0$ имеет ненулевое решение минимальной степени ε_1. Из принятого в начале этого параграфа ограничения следует, что $\varepsilon_1>0$. Поэтому согласно теореме 4 данный пучок можно преобразовать к виду

$$\begin{pmatrix} L_{\varepsilon_1} & 0 \\ 0 & A_1+\lambda B_1 \end{pmatrix},$$

где уравнение $(A_1+\lambda B_1)x^{(1)}=0$ не имеет решений $x^{(1)}$ степени $<\varepsilon_1$.

Если это уравнение имеет ненулевое решение минимальной степени ε_2 (при этом непременно $\varepsilon_2\geqslant\varepsilon_1$), то, применяя к пучку $A_1+\lambda B_1$ теорему 4, мы данный пучок преобразуем к виду

$$\begin{pmatrix} I_{\varepsilon_1} & 0 & 0 \\ 0 & L_{\varepsilon_2} & 0 \\ 0 & 0 & A_2+\lambda B_2 \end{pmatrix}.$$

Продолжая этот процесс далее, мы приведем данный пучок к квазидиагональному виду

$$\left\| \begin{matrix} L_{\varepsilon_1} & & & & & 0 \\ & L_{\varepsilon_2} & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & L_{\varepsilon_p} & \\ 0 & & & & & A_p+\lambda B_p \end{matrix} \right\|, \tag{25}$$

где $0<\varepsilon_1\leqslant\varepsilon_2\leqslant\ldots\leqslant\varepsilon_p$, а уравнение $(A_p+\lambda B_p)x^{(p)}=0$ не имеет ненулевых решений, т. е. столбцы матрицы $A_p+\lambda B_p$ линейно независимы[1]).

Если строки пучка $A_p+\lambda B_p$ линейно зависимы, то транспонированный пучок $A'_p=\lambda B'_p$ может быть приведен к виду (25), где вместо чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p$

[1]) Очевидно, что $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_p\leqslant m$, $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_p+p\leqslant n$. Эти соотношения могут стать равенствами лишь одновременно. В этом случае блок $A_p+\lambda B_p$ будет отсутствовать.

будут фигурировать числа $(0<)\,\eta_1\leqslant\eta_2\leqslant\ldots\leqslant\eta_q$[1]). Но тогда данный пучок $A+\lambda B$ окажется преобразованным к квазидиагональному виду

$$\left\|\begin{matrix} L_{\varepsilon_1} & & & & & & & & & 0 \\ & L_{\varepsilon_2} & & & & & & & & \\ & & \cdot & & & & & & & \\ & & & \cdot & & & & & & \\ & & & & \cdot & & & & & \\ & & & & & L_{\varepsilon_p} & & & & \\ & & & & & & L'_{\eta_1} & & & \\ & & & & & & & L'_{\eta_2} & & \\ & & & & & & & & \cdot & \\ & & & & & & & & & \cdot \\ & & & & & & & & & & \cdot \\ & & & & & & & & & & L'_{\eta_q} \\ 0 & & & & & & & & & & & A_0+\lambda B_0 \end{matrix}\right\|, \tag{26}$$

$$(0<\varepsilon_1\leqslant\varepsilon_2\leqslant\ldots\leqslant\varepsilon_p,\quad 0<\eta_1\leqslant\eta_2\leqslant\ldots\leqslant\eta_q),$$

где у пучка $A_0+\lambda B_0$ как столбцы, так и строки линейно независимы, т. е. $A_0+\lambda B_0$ — регулярный пучок[2]).

Рассмотрим теперь общий случай, когда строки и столбцы данного пучка могут быть связаны линейными зависимостями с постоянными коэффициентами. Обозначим максимальное число постоянных независимых решений уравнений

$$(A+\lambda B)\,x=0 \quad \text{и} \quad (A'+\lambda B')\,y=0$$

соответственно через g и h. Вместо первого из этих уравнений, подобно тому как мы это делали при доказательстве теоремы 4, рассмотрим соответствующее векторное уравнение $(\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B})\,\boldsymbol{x}=0$ ($\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ — операторы, отображающие $\boldsymbol{R}_n$ в $\boldsymbol{R}_m$). Линейно независимые постоянные решения этого уравнения обозначим через $e_1, e_2, \ldots, e_g$ и примем за первые базисные векторы в $\boldsymbol{R}_n$. Тогда в соответствующей матрице $\widetilde{A}+\lambda\widetilde{B}$ первые g столбцов будут состоять из нулей

$$\widetilde{A}+\lambda\widetilde{B}=(\overbrace{0,}^{g}\ \widetilde{A}_1+\lambda\widetilde{B}_1). \tag{27}$$

Совершенно так же в пучке $\widetilde{A}_1+\lambda\widetilde{B}_1$ первые h строк можно сделать нулевыми. Тогда данный пучок примет вид

$$\left\|\begin{matrix} h\,[\overbrace{0,}^{g} & 0 \\ 0, & A^0+\lambda B^0 \end{matrix}\right\|, \tag{28}$$

где строки и столбцы пучка $A^0+\lambda B^0$ уже не связаны линейными зависимостями с постоянными коэффициентами. К пучку $A^0+\lambda B^0$ применимо представление типа (26). Таким образом, в самом общем случае пучок

---

[1]) Так как между строками пучка $A+\lambda B$, а следовательно, и пучка $A_p+\lambda B_p$ нет линейной зависимости с постоянными коэффициентами, то $\eta_1>0$.

[2]) Если в данном пучке $r=n$, т. е. столбцы пучка линейно независимы, то в (26) будут отсутствовать первые p диагональных блоков вида L_ε $(p=0)$. Точно так же, если $r=m$, т. е. в $A+\lambda B$ строки линейно независимы, то в (26) будут отсутствовать диагональные блоки вида L'_η $(q=0)$.

$A+\lambda B$ всегда может быть приведен к каноническому квазидиагональному виду

$$\{h[\overset{g}{\overline{0}},\ L_{\varepsilon_{g+1}},\ \ldots,\ L_{\varepsilon_p},\ L'_{\eta_{h+1}},\ \ldots,\ L'_{\eta_g},\ A_0+\lambda B_0\}. \tag{29}$$

Выбор индексов при ε и η связан с тем, что нам удобно здесь считать $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\ldots=\varepsilon_g=0$ и $\eta_1=\eta_2=\ldots=\eta_h=0$.

Заменяя фигурирующий в (29) регулярный пучок $A_0+\lambda B_0$ его канонической формой (6) (см. § 2, стр. 334), получим окончательно следующую квазидиагональную матрицу:

$$\{h[\overset{g}{\overline{0}};\ L_{\varepsilon_{g+1}},\ \ldots,\ L_{\varepsilon_p};\ L'_{\eta_{h+1}},\ \ldots,\ L'_{\eta_g};\ N^{(u_1)},\ \ldots,\ N^{(u_s)};\ J+\lambda E\}, \tag{30}$$

где матрица J имеет жорданову или естественную нормальную форму, а $N^{(u)}=E^{(u)}+\lambda H^{(u)}$.

Матрица (30) *представляет собой каноническую форму пучка* $A+\lambda B$ *в самом общем случае.*

Для того чтобы по данному пучку непосредственно определить его каноническую форму (30), не осуществляя последовательно процесс приведения, мы, следуя Кронекеру, в следующем параграфе введем понятие о минимальных индексах пучка.

§ 5. Минимальные индексы пучка. Критерий строгой эквивалентности пучков

Пусть дан произвольный сингулярный пучок прямоугольных матриц $A+\lambda B$. Тогда k многочленных столбцов $x_1(\lambda),\ x_2(\lambda),\ \ldots,\ x_k(\lambda)$, являющихся решениями уравнения

$$(A+\lambda B)\,x=0, \tag{31}$$

будут линейно зависимыми, если ранг многочленной матрицы, составленной из этих столбцов, $X=[x_1(\lambda),\ x_2(\lambda),\ \ldots,\ x_k(\lambda)]$ меньше k. В этом случае существует k многочленов $p_1(\lambda),\ p_2(\lambda),\ \ldots,\ p_k(\lambda)$, не равных одновременно тождественно нулю, таких, что

$$p_1(\lambda)\,x_1(\lambda)+p_2(\lambda)\,x_2(\lambda)+\ldots+p_k(\lambda)\,x_k(\lambda)\equiv 0.$$

Если же ранг матрицы X равен k, то подобной зависимости не существует, и решения $x_1(\lambda),\ x_2(\lambda),\ \ldots,\ x_k(\lambda)$ линейно независимы.

Среди всех решений уравнения (31) возьмем ненулевое решение $x_1(\lambda)$ наименьшей степени ε_1. Среди всех решений того же уравнения, линейно независимых от $x_1(\lambda)$, выберем решение $x_2(\lambda)$ наименьшей степени ε_2. Очевидно, что $\varepsilon_1\leqslant\varepsilon_2$. Этот процесс продолжим, выбирая среди решений, линейно независимых от $x_1(\lambda)$ и $x_k(\lambda)$, решение $x_3(\lambda)$ минимальной степени ε_3 и т. д. Так как число линейно независимых решений уравнения (31) всегда $\leqslant n$, то этот процесс должен закончиться. Мы получим *фундаментальный ряд решений* уравнения (31)

$$x_1(\lambda),\ x_2(\lambda),\ \ldots,\ x_p(\lambda) \tag{32}$$

со степенями

$$\varepsilon_1\leqslant\varepsilon_2\leqslant\ldots\leqslant\varepsilon_p. \tag{33}$$

В общем случае фундаментальный ряд решений не определяется однозначно (с точностью до скалярных множителей) заданием пучка $A+\lambda B$.

Однако *два различных фундаментальных ряда решений имеют всегда один и тот же ряд степеней* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p$. Действительно, рассмотрим наряду с (32) второй фундаментальный ряд решений $\tilde{x}_1(\lambda), \tilde{x}_2(\lambda), \ldots$ со степенями $\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2, \ldots$ Пусть среди степеней (33)

$$\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_{n_1} < \varepsilon_{n_1+1} = \ldots = \varepsilon_{n_2} < \ldots$$

и аналогично в ряду $\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2, \ldots$

$$\tilde{\varepsilon}_1 = \ldots = \tilde{\varepsilon}_{\tilde{n}_1} < \tilde{\varepsilon}_{\tilde{n}_1+1} = \ldots = \tilde{\varepsilon}_{\tilde{n}_2} < \ldots$$

Очевидно, что $\varepsilon_1 = \tilde{\varepsilon}_1$. Любой столбец $\tilde{x}_i(\lambda)$ $(i = 1, 2, \ldots, \tilde{n}_1)$ есть линейная комбинация столбцов $x_1(\lambda), x_2(\lambda), \ldots, x_{n_1}(\lambda)$, так как в противном случае в ряду (32) можно было бы решение $x_{n_1+1}(\lambda)$ заменить решением $\tilde{x}_i(\lambda)$ с меньшей степенью. Очевидно, что и наоборот, любой столбец $x_i(\lambda)$ $(i = 1, 2, \ldots, n_1)$ является линейной комбинацией столбцов $\tilde{x}_1(\lambda), \tilde{x}_2(\lambda), \ldots, \tilde{x}_{\tilde{n}_1+1}(\lambda)$. Поэтому $n_1 = \tilde{n}_1$ и $\varepsilon_{n_1+1} = \tilde{\varepsilon}_{\tilde{n}_1+1}$. Теперь аналогичными рассуждениями убеждаемся в том, что $n_2 = \tilde{n}_2$ и $\varepsilon_{n_2+1} = \tilde{\varepsilon}_{\tilde{n}_2+1}$ и т. д.

Каждое решение $x_k(\lambda)$ фундаментального ряда (32) дает линейную зависимость степени ε_k между столбцами матрицы $A + \lambda B$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$. Поэтому числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p$ называются *минимальными индексами для столбцов* пучка $A + \lambda B$.

Аналогично вводятся *минимальные индексы* $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_q$ *для строк* пучка $A + \lambda B$. При этом уравнение $(A + \lambda B)x = 0$ заменяется уравнением $(A' + \lambda B')y = 0$ и числа $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_q$ определяются как минимальные индексы для столбцов транспонированного пучка $A' + \lambda B'$.

Строго эквивалентные пучки имеют одни и те же минимальные индексы. Действительно, пусть даны два таких пучка: $A + \lambda B$ и $P(A + \lambda B)Q$ (P и Q — квадратные неособенные матрицы). Тогда уравнение (30) для первого пучка после почленного умножения слева на P может быть записано так:

$$P(A + \lambda B)Q \cdot Q^{-1}x = 0.$$

Отсюда видно, что все решения уравнения (30) после умножения слева на Q^{-1} дают полную систему решений уравнения

$$P(A + \lambda B)Qz = 0.$$

Поэтому пучки $A + \lambda B$ и $P(A + \lambda B)Q$ имеют одни и те же минимальные индексы для столбцов. Совпадение минимальных индексов для строк устанавливается переходом к транспонированным пучкам.

Вычислим минимальные индексы для канонической квазидиагональной матрицы

$$\{\overset{g}{\overline{h[0,}}\ L_{\varepsilon_{g+1}}, \ldots, L_{\varepsilon_p};\ L'_{\eta_{h+1}}, \ldots, L'_{\eta_q},\ A_0 + \lambda B_0\} \tag{34}$$

[$A_0 + \lambda B_0$ — регулярный пучок, имеющий нормальную форму (6)].

Заметим предварительно, что *полная система минимальных индексов для столбцов* (строк) *квазидиагональной матрицы получается соединением из соответствующих систем минимальных индексов отдельных диагональных блоков.* Матрица L_ε имеет только один индекс ε для столбцов, а строки этой матрицы линейно независимы. Точно так же матрица L'_η имеет только один индекс η для строк, а столбцы этой матрицы линейно независимы. Регулярный пучок $A_0 + \lambda B_0$ совсем не имеет минимальных индексов.

Поэтому матрица (34) имеет минимальные индексы для столбцов

$$\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_g = 0, \quad \varepsilon_{g+1}, \ \ldots, \ \varepsilon_p,$$

а для строк

$$\eta_1 = \ldots = \eta_h = 0, \quad \eta_{h+1}, \ \ldots, \ \eta_q.$$

Заметим еще, что матрица L_ε не имеет элементарных делителей, так как среди ее миноров максимального порядка ε имеется минор, равный единице, и минор, равный λ^ε. Это же положение, разумеется, верно и для транспонированной матрицы L'_ε. Так как элементарные делители квазидиагональной матрицы получаются путем соединения элементарных делителей отдельных диагональных блоков (см. гл. VI, стр. 146), то *элементарные делители λ-матрицы* (34) *совпадают с элементарными делителями ее регулярного «ядра»* $A_0 + \lambda B_0$.

Каноническая форма пучка (34) *вполне определяется заданием минимальных индексов* $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p, \eta_1, \ldots, \eta_q$ *и элементарных делителей этого пучка или (что то же) строго эквивалентного ему пучка* $A + \lambda B$. Так как два пучка, имеющих одну и ту же каноническую форму, строго эквивалентны между собой, то мы доказали следующую теорему:

Теорема 5 (Кронекера). *Для того чтобы два произвольных пучка прямоугольных матриц* $A + \lambda B$ *и* $A_1 + \lambda B_1$ *одних и тех же размеров* $m \times n$ *были строго эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы эти пучки имели одни и те же минимальные индексы и одни и те же («конечные» и «бесконечные») элементарные делители.*

В заключение для наглядности выпишем каноническую форму пучка $A + \lambda B$, имеющего минимальные индексы $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_3 = 2$, $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 0$, $\eta_3 = 2$ и элементарные делители λ^2, $(\lambda + 2)^2$, μ^3:

$$\left\|\begin{array}{cccccccccccc}
0 & & & & & & & & & & & \\
0 & & & & & & & & & & & \\
 & \lambda & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & \lambda & 1 & 0 & & & & & & \\
 & & & 0 & \lambda & 1 & & & & & & \\
 & & & & & & \lambda & 0 & & & & \\
 & & & & & & 1 & \lambda & & & & \\
 & & & & & & 0 & 1 & & & & \\
 & & & & & & & & 1 & \lambda & 0 & \\
 & & & & & & & & 0 & 1 & \lambda & \\
 & & & & & & & & 0 & 0 & 1 & \\
 & & & & & & & & & & \lambda & 1 \\
 & & & & & & & & & & 0 & \lambda \\
 & & & & & & & & & & & \lambda+2 \quad 1 \\
 & & & & & & & & & & & 0 \quad \lambda+2
\end{array}\right\|^{1)} \qquad (35)$$

[1]) Все неотмеченные элементы этой матрицы равны нулю.

§ 6. Сингулярные пучки квадратичных форм

Пусть даны две комплексные квадратичные формы:

$$A(x, x) = \sum_{i, k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k, \qquad B(x, x) = \sum_{i, k=1}^{n} b_{ik} x_i x_k; \tag{36}$$

они порождают пучок квадратичных форм $A(x, x) + \lambda B(x, x)$. Этому пучку форм соответствует пучок симметричных матриц $A + \lambda B$ $(A' = A,\ B' = B)$. Если мы в пучке форм $A(x, x) + \lambda B(x, x)$ переменные подвергнем неособенному линейному преобразованию $x = Tz$ $(|T| \neq 0)$, то преобразованному пучку форм $\widetilde{A}(z, z) + \lambda \widetilde{B}(z, z)$ будет соответствовать пучок матриц

$$\widetilde{A} + \lambda \widetilde{B} = T'(A + \lambda B) T; \tag{37}$$

здесь T — постоянная (т. е. не зависящая от λ) неособенная квадратная матрица n-го порядка.

Два пучка матриц $A + \lambda B$ и $\widetilde{A} + \lambda \widetilde{B}$, связанные тождеством (37), называются *конгруэнтными* (ср. с определением 1 гл. X, стр. 269).

Очевидно, что конгруэнтность представляет собой специальный частный случай строгой эквивалентности пучков матриц. Однако в тех случаях, когда рассматривается конгруэнтность двух пучков симметрических (или кососимметрических) матриц, понятие конгруэнтности совпадает с понятием строгой эквивалентности. Это утверждает

Теорема 6. *Два строго эквивалентных пучка комплексных симметрических (или кососимметрических) матриц всегда конгруэнтны между собой.*

Доказательство. Пусть даны два строго эквивалентных пучка симметрических (кососимметрических) матриц $\Lambda \equiv A + \lambda B$ и $\widetilde{\Lambda} \equiv \widetilde{A} + \lambda \widetilde{B}$:

$$\widetilde{\Lambda} = P \Lambda Q \ (\Lambda' = \pm \Lambda,\ \widetilde{\Lambda}' = \pm \widetilde{\Lambda};\ |P| \neq 0,\ |Q| \neq 0). \tag{38}$$

Переходя к транспонированным матрицам, получаем:

$$\widetilde{\Lambda} = Q' \Lambda P'. \tag{39}$$

Из (38) и (39) найдем:

$$\Lambda Q P'^{-1} = P^{-1} Q' \Lambda. \tag{40}$$

Полагая

$$U = Q P'^{-1}, \tag{41}$$

равенство (40) перепишем так:

$$\Lambda U = U' \Lambda. \tag{42}$$

Из (42) легко следует:

$$\Lambda U^k = U'^k \Lambda \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

и вообще

$$\Lambda S = S' \Lambda, \tag{43}$$

где

$$S = f(U), \tag{44}$$

а $f(\lambda)$ — произвольный многочлен относительно λ. Допустим, что этот многочлен так выбран, что $|S| \neq 0$. Тогда из (43) найдем:

$$\Lambda = S' \Lambda S^{-1}. \tag{45}$$

Подставляя полученное выражение для Λ в (38), будем иметь:

$$\widetilde{\Lambda} = PS'\Lambda S^{-1}Q. \tag{46}$$

Для того чтобы это соотношение было преобразованием конгруэнтности, нужно, чтобы выполнялось равенство

$$(PS')' = S^{-1}Q,$$

которое может быть переписано так:

$$S^2 = QP'^{-1} = U.$$

Но матрица $S = f(U)$ удовлетворит этому уравнению, если в качестве $f(\lambda)$ взять интерполяционный многочлен $\sqrt{\lambda}$ на спектре матрицы U. Это возможно сделать, поскольку многозначная функция $\sqrt{\lambda}$ имеет однозначную ветвь, определенную на спектре матрицы U, так как $|U| \neq 0$.

После этого равенство (46) станет условием конгруэнтности

$$\widetilde{\Lambda} = T'\Lambda T \quad (T = SQ = \sqrt{QP'^{-1}Q}). \tag{47}$$

Из доказанной теоремы и из теоремы 5 вытекает

Следствие. *Два пучка квадратичных форм*

$$A(x, x) + \lambda B(x, x) \text{ и } \widetilde{A}(z, z) + \lambda \widetilde{B}(z, z)$$

могут быть переведены друг в друга преобразованием $x = Tz$ ($|T| \neq 0$) *тогда и только тогда, когда пучки симметрических матриц* $A + \lambda B$ *и* $\widetilde{A} + \lambda \widetilde{B}$ *имеют одни и те же элементарные делители* («*конечные*» *и* «*бесконечные*») *и одни и те же минимальные индексы.*

Примечание. Для пучка симметрических матриц строки и столбцы имеют одни и те же минимальные индексы:

$$p = q; \quad \varepsilon_1 = \eta_1, \ \ldots, \ \varepsilon_p = \eta_p. \tag{48}$$

Поставим следующий вопрос. *Даны две произвольные комплексные квадратичные формы*

$$A(x, x) = \sum_{i, k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k, \quad B(x, x) = \sum_{i, k=1}^{n} b_{ik}x_ix_k.$$

При каких условиях неособенным преобразованием переменных $x = Tz$ ($|T| \neq 0$) *можно одновременно привести эти формы к суммам квадратов*

$$\sum_{i=1}^{n} a_iz_i^2 \text{ и } \sum_{i=1}^{n} b_iz_i^2? \tag{49}$$

Аналогичный вопрос возникает для двух эрмитовых форм $A(x, x)$ и $B(x, x)$, но в этом случае вместо (49) следует писать:

$$\sum_{i=1}^{n} a_iz_i\overline{z}_i \text{ и } \sum_{i=1}^{n} b_iz_i\overline{z}_i, \tag{50}$$

причем здесь a_i и b_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) — вещественные числа.

Допустим, что квадратичные формы $A(x, x)$ и $B(x, x)$ обладают указанным свойством. Тогда пучок матриц $A + \lambda B$ будет конгруэнтен пучку диагональных матриц

$$\{a_1 + \lambda b_1, a_2 + \lambda b_2, \ldots, a_n + \lambda b_n\}. \tag{51}$$

Пусть среди диагональных двучленов $a_i+\lambda b_i$ имеется ровно $r\,(r\leqslant n)$ не равных тождественно нулю. Не нарушая общности, можем считать, что

$$a_1=b_1=0,\ \ldots,\ a_{n-r}=b_{n-r}=0,\quad a_i+\lambda b_i\not\equiv 0\qquad (i=n-r+1,\ \ldots,\ n).$$

Полагая

$$A_0+\lambda B_0=\{a_{n-r+1}+\lambda b_{n-r+1},\ \ldots,\ a_n+\lambda b_n\},$$

мы матрицу (51) представим в виде

$$\{\overset{n-r}{\overline{0}},\ A_0+\lambda B_0\}. \tag{52}$$

Сопоставляя (52) с (34) (стр. 343), мы видим, что в данном случае все минимальные индексы равны нулю. Кроме того, все элементарные делители имеют первую степень. Мы пришли к теореме

Теорема 7. *Две квадратичные формы $A(x, x)$ и $B(x, x)$ одновременным преобразованием переменных могут быть приведены к суммам квадратов* [(49) *или* (50)] *в том и только в том случае, когда у пучка матриц $A+\lambda B$ все элементарные делители (конечные и бесконечные) первой степени, а все минимальные индексы равны нулю.*

Для того чтобы в общем случае одновременно привести две квадратичные формы $A(x, x)$ и $B(x, x)$ к некоторому каноническому виду, нужно заменить пучок матриц $A+\lambda B$ строго эквивалентным ему «каноническим» пучком симметрических матриц.

Пусть пучок симметрических матриц $A+\lambda B$ имеет минимальные индексы $\varepsilon_1=\ldots=\varepsilon_g=0$, $\varepsilon_{g+1}\neq 0$, $\ldots$, $\varepsilon_p\neq 0$ и элементарные делители бесконечные μ^{u_1}, μ^{u_2}, $\ldots$, μ^{u_s} и конечные $(\lambda+\lambda_1)^{c_1}$, $(\lambda+\lambda_2)^{c_2}$, $\ldots$ $(\lambda+\lambda_t)^{c_t}$. Тогда в канонической форме (30) $g=h$, $p=q$ и $\varepsilon_{g+1}=\eta_{g+1}$, $\ldots$, $\varepsilon_p=\eta_p$. Заменим в (30) каждые два диагональных блока вида L_ε и L'_ε одним диагональным блоком $\begin{pmatrix}0 & L'_\varepsilon\\ L_\varepsilon & 0\end{pmatrix}$, а каждый блок вида $N^{(u)}=E^{(u)}+\lambda H^{(u)}$ заменим строго эквивалентным симметрическим блоком

$$\widetilde{N}^{(u)}=V^{(u)}N^{(u)}=\begin{Vmatrix}0 & 0 & \ldots & 0 & 1\\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \lambda\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 1 & \lambda & \ldots & 0 & 0\end{Vmatrix}\left(V^{(u)}=\begin{Vmatrix}0 & 0 & \ldots & 0 & 1\\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0\\ & & & \cdot & \cdot\\ \cdot & & \cdot & & \cdot\\ \cdot & \cdot & & & \cdot\\ \cdot & 1 & & & \cdot\\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0\end{Vmatrix}\right). \tag{53}$$

Кроме того, вместо регулярного диагонального блока $J+\lambda E$ в (30) (J — жорданова матрица)

$$J+\lambda E=\{(\lambda+\lambda_1)E^{(c_1)}+H^{(c_1)},\ \ldots,\ (\lambda+\lambda_t)E^{(c_t)}+H^{(c_t)}\} \tag{54}$$

возьмем строго эквивалентный ему пучок

$$\{Z_{\lambda_1}^{(c_1)},\ \ldots,\ Z_{\lambda_t}^{(c_t)}\}, \tag{55}$$

где

$$Z_{\lambda_i}^{(c_i)} = V^{(c_i)}[(\lambda+\lambda_i)E^{(c_i)}+H^{(c_i)}] =$$

$$= \begin{Vmatrix} 0 & \dots & 0 & \lambda+\lambda_i \\ 0 & \dots & \lambda+\lambda_i & 1 \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda+\lambda_i & 1 & \dots & 0 \end{Vmatrix} \qquad (i=1, 2, \dots, t). \tag{56}$$

Пучок $A+\lambda B$ строго эквивалентен симметрическому пучку

$$\widetilde{A}+\lambda\widetilde{B} =$$

$$= \left\{0, \begin{Vmatrix} 0 & L'_{\varepsilon_{g+1}} \\ L_{\varepsilon_{g+1}} & 0 \end{Vmatrix}, \dots, \begin{Vmatrix} 0 & L'_{\varepsilon_p} \\ L_{\varepsilon_p} & 0 \end{Vmatrix}; \widetilde{N}^{(u_1)}, \dots, \widetilde{N}^{(u_s)}; Z_{\lambda_1}^{(c_1)}, \dots, Z_{\lambda_t}^{(c_t)}\right\}. \tag{57}$$

Две квадратичные формы с комплексными коэффициентами $A(x, x)$ и $B(x, x)$ преобразованием переменных $x=Tz$ ($|T|\neq 0$) могут быть одновременно приведены к каноническому виду $\widetilde{A}(z, z)$ и $\widetilde{B}(z, z)$, определяемому равенством (57).

§ 7. Приложения к дифференциальным уравнениям

Рассмотрим приложения полученных результатов к интегрированию системы m линейных дифференциальных уравнений первого порядка с n неизвестными функциями с постоянными коэффициентами[1])

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\frac{dx_k}{dt} = f_i(t) \qquad (i=1, 2, \dots, m) \tag{58}$$

или в матричной записи:

$$Ax + B\frac{dx}{dt} = f(t); \tag{59}$$

здесь

$$A = \|a_{ik}\|, \quad B = \|b_{ik}\| \qquad (i=1, 2, \dots, m;\ k=1, 2, \dots, n),$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad f = (f_1, f_2, \dots, f_m)\ ^{2)}.$$

Введем новые неизвестные функции $z_1, z_2, \dots, z_n$, связанные со старыми $x_1, x_2, \dots, x_n$ линейным неособенным преобразованием с

[1]) Частный случай, когда $m=n$ и система (58) разрешена относительно производных, был подробно исследован в гл. V, § 5.

Как известно, система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами любого s-го порядка может быть приведена к виду (58), если все производные от неизвестных функций до $(s-1)$-го порядка включительно дополнительно ввести в качестве новых неизвестных функций.

[2]) Напоминаем, что круглыми скобками обозначается столбцевая матрица. Так, $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — столбец с элементами $x_1, x_2, \dots, x_n$.

постоянными коэффициентами:

$$x = Qz \qquad [z = (z_1, z_2, \ldots, z_n);\ |Q| \neq 0]. \tag{60}$$

Кроме того, вместо уравнений (58) можно взять любые m независимых линейных комбинаций их, что равносильно умножению матриц A, B, f слева на квадратную неособенную матрицу m-го порядка P. Подставляя Qz вместо x в (59) и умножая (59) почленно слева на P, получим:

$$\widetilde{A}z + \widetilde{B}\frac{dz}{dt} = \widetilde{f}(t), \tag{61}$$

где

$$\widetilde{A} = PAQ, \quad \widetilde{B} = PBQ, \quad \widetilde{f} = Pf = (\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2, \ldots, \widetilde{f}_n). \tag{62}$$

При этом пучки матриц $A + \lambda B$ и $\widetilde{A} + \lambda\widetilde{B}$ строго эквивалентны друг другу:

$$\widetilde{A} + \lambda\widetilde{B} = P(A + \lambda B)Q. \tag{63}$$

Выберем матрицы P и Q так, чтобы пучок $\widetilde{A} + \lambda\widetilde{B}$ имел каноническую квазидиагональную форму

$$\widetilde{A} + \lambda\widetilde{B} = \{0, L_{\varepsilon_{g+1}}, \ldots, L_{\varepsilon_p}, L'_{\eta_{h+1}}, \ldots, L'_{\eta_q}, N^{(u_1)}, \ldots, N^{(u_s)}, J + \lambda E\}. \tag{64}$$

В соответствии с диагональными блоками в (64) система дифференциальных уравнений распадается на $\nu = p - g + q - h + s + 2$ отдельных систем вида

$$0 \cdot \overset{1}{z} = \overset{1}{\widetilde{f}}, \tag{65}$$

$$L_{\varepsilon_{g+i}}\left(\frac{d}{dt}\right)^{1+i} \overset{1+i}{z} = \overset{1+i}{\widetilde{f}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p - g), \tag{66}$$

$$L'_{\eta_{h+j}}\left(\frac{d}{dt}\right)^{p-g+1+j} \overset{p-g+1+j}{z} = \overset{p-g+1+j}{\widetilde{f}} \qquad (j = 1, 2, \ldots, q - h), \tag{67}$$

$$N^{(u_k)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{p-g+q-h+1+k} \overset{p-g+q-h+1+k}{z} = \overset{p-g+q-h+1+k}{\widetilde{f}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, s), \tag{68}$$

$$\left(J + \frac{d}{dt}\right)^{\nu} \overset{\nu}{z} = \overset{\nu}{\widetilde{f}}, \tag{69}$$

где

$$z = \left\| \begin{matrix} \overset{1}{z} \\ \overset{2}{z} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \overset{\nu}{z} \end{matrix} \right\|, \quad \widetilde{f} = \left\| \begin{matrix} \overset{1}{\widetilde{f}} \\ \overset{2}{\widetilde{f}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \overset{\nu}{\widetilde{f}} \end{matrix} \right\|, \tag{70}$$

$$\overset{1}{z} = (z_1, \ldots, z_g), \quad \overset{1}{\widetilde{f}} = (\widetilde{f}_1, \ldots, \widetilde{f}_h), \quad \overset{2}{z} = (z_{g+1}, \ldots), \quad \overset{2}{\widetilde{f}} = (\widetilde{f}_{h+1}, \ldots) \text{ и т. д.}, \tag{71}$$

$$\Lambda\left(\frac{d}{dt}\right) = A + B\frac{d}{dt}, \quad \text{если} \quad \Lambda(\lambda) \equiv A + \lambda B. \tag{72}$$

Таким образом, интегрирование системы (59) в самом общем случае сведено к интегрированию частных систем (65)—(69) такого же типа. В этих системах пучок матриц $A+\lambda B$ имеет соответственно вид 0, L_ε, L'_η, $N^{(u)}$, $J+\lambda E$.

1) Для того чтобы система (65) не была противоречивой, необходимо и достаточно, чтобы

$$\overset{1}{\tilde{f}} \equiv 0,$$

т. е.

$$\tilde{f}_1 \equiv 0, \ \ldots, \ \tilde{f}_h \equiv 0. \tag{73}$$

В этом случае в качестве неизвестных функций $z_1, z_2, \ldots, z_g$, составляющих столбец $\overset{1}{z}$, могут быть взяты произвольные функции от t.

2) Система (66) представляет собой систему вида

$$L_\varepsilon\left(\frac{d}{dt}\right)z=\tilde{f} \tag{74}$$

или в подробной записи

$$\frac{dz_1}{dt}+z_2=\tilde{f}_1(t), \ \frac{dz_2}{dt}+z_3=\tilde{f}_2(t), \ \ldots, \ \frac{dz_\varepsilon}{dt}+z_{\varepsilon+1}=\tilde{f}_\varepsilon(t)\,^{1)}. \tag{75}$$

Такая система всегда совместна. Если в качестве $z_{\varepsilon+1}(t)$ взять произвольную функцию от t, то последовательными квадратурами из (75) определятся все остальные неизвестные функции $z_\varepsilon, z_{\varepsilon-1}, \ldots, z_1$.

3) Система (67) представляет собой систему вида

$$L'_\eta\left(\frac{d}{dt}\right)z=\tilde{f} \tag{76}$$

или в подробной записи

$$\frac{dz_1}{dt}=\tilde{f}_1(t), \ \frac{dz_2}{dt}+z_1=\tilde{f}_2(t), \ \ldots, \ \frac{dz_\eta}{dt}+z_{\eta-1}=\tilde{f}_\eta(t), \ \tilde{z}_\eta=\tilde{f}_{\eta+1}(t)\,^{2)}. \tag{77}$$

Из всех уравнений (77), кроме первого, мы однозначно определяем z_η, $z_{\eta-1}, \ldots, z_1$:

$$z_\eta=\tilde{f}_{\eta+1}, \ z_{\eta-1}=\tilde{f}_\eta-\frac{d\tilde{f}_{\eta+1}}{dt}, \ \ldots, \ z_1=$$
$$=\tilde{f}_2-\frac{d\tilde{f}_3}{dt}+\ldots+(-1)^{\eta-1}\frac{d^{\eta-1}\tilde{f}_{\eta+1}}{dt^{\eta-1}}. \tag{78}$$

Подставляя полученное выражение для z_1 в первое уравнение, получаем условие совместности:

$$\tilde{f}_1-\frac{d\tilde{f}_2}{dt}+\frac{d^2\tilde{f}_3}{dt^2}-\ldots+(-1)^\eta\frac{d^\eta\tilde{f}_{\eta+1}}{dt^\eta}=0. \tag{79}$$

---

[1]) Мы изменили индексы при z и $\tilde{f}$ для упрощения обозначений. Для того чтобы от системы (75) вернуться к системе (66), нужно ε заменить на ε_i и к каждому индексу при z прибавить $g+\varepsilon_{g+1}+\ldots+\varepsilon_{g+i-1}+i-1$, а к каждому индексу при $\tilde{f}$ следует прибавить $h+\varepsilon_{g+1}+\ldots+\varepsilon_{g+i-1}$.

[2]) Здесь, как и в предыдущем случае, мы изменили обозначения. См. предыдущую сноску.