

И. М. ГЕЛЬФАНД

ЛЕКЦИИ  
ПО  
ЛИНЕЙНОЙ  
АЛГЕБРЕ



И. М. ГЕЛЬФАНД

ЛЕКЦИИ  
по  
ЛИНЕЙНОЙ  
АЛГЕБРЕ

ИЗДАНИЕ ЧЕТВЕРТОЕ,  
ДОПОЛНЕННОЕ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1971

**517.1**

**Г 32**

**УДК 512.8**

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к четвертому изданию . . . . .	5
Предисловие к третьему изданию . . . . .	5
Предисловие ко второму изданию . . . . .	5
Предисловие к первому изданию . . . . .	6

### Глава I

<b><i>n</i>-мерное пространство. Линейные и билинейные формы . . . . .</b>	7
§ 1. Линейное (аффинное) <i>n</i> -мерное пространство . . . . .	7
§ 2. Евклидово пространство . . . . .	30
§ 3. Ортогональный базис. Изоморфизм евклидовых пространств	38
§ 4. Билинейные и квадратичные формы . . . . .	55
§ 5. Приведение квадратичной формы к сумме квадратов . . . . .	64
§ 6. Приведение квадратичной формы к сумме квадратов треугольным преобразованием . . . . .	69
§ 7. Закон инерции . . . . .	79
§ 8. Комплексное <i>n</i> -мерное пространство . . . . .	84

### Глава II

<b>Линейные преобразования . . . . .</b>	95
§ 9. Линейные преобразования и операции над ними . . . . .	95
§ 10. Инвариантные подпространства, собственные векторы и собственные значения линейного преобразования . . . . .	112
§ 11. Линейное преобразование, сопряженное к данному . . . . .	124
§ 12. Самосопряженные (эрмитовы) преобразования. Одновременное приведение пары квадратичных форм к сумме квадратов . . . . .	132
§ 13. Унитарные преобразования . . . . .	138
§ 14. Перестановочные линейные преобразования. Нормальные преобразования . . . . .	144
§ 15. Разложение линейного преобразования в произведение унитарного и эрмитова . . . . .	148
§ 16. Линейные преобразования в вещественном евклидовом пространстве . . . . .	152
§ 17. Экстремальные свойства собственных значений . . . . .	165

## Г л а в а III

<b>Канонический вид произвольных линейных преобразований . . . . .</b>	171
§ 18. Нормальная форма линейного преобразования . . . . .	171
§ 19. Приведение произвольного преобразования к нормальной форме . . . . .	178
§ 20. Другое доказательство теоремы о приведении к нормальной форме . . . . .	190
§ 21. Инвариантные множители . . . . .	196
§ 22. $\lambda$ -матрицы . . . . .	204

## Г л а в а IV

<b>Понятие о тензорах . . . . .</b>	221
§ 23. Сопряженное (двойственное) пространство . . . . .	221
§ 24. Тензоры . . . . .	231
§ 25. Тензорное произведение . . . . .	248

## Д о б а в л е н и е

<b>Теория возмущений . . . . .</b>	264
§ 1. Случай некратных собственных значений . . . . .	264
§ 2. Случай кратных собственных значений . . . . .	269

## **ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ**

В настояще четьертое издание добавлен новы параграф «Тензорное произведение» (§ 25), написанный совместно с М. И. Граевым. Добавлены также п. 6 в § 9 и текст, напечатанный мелким шрифтом, в конце п. 2 § 23.

Автор благодарит читателей А. Г. Карновского (г. Каунас) и Ю. Г. Шмелакова (г. Москва) за замечания, позволившие исправить ряд опечаток и погрешностей.

*И. Гельфанд*

Декабрь 1970 г.

## **ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ**

Настоящее третье издание отличается от второго рядом переделок и добавлений в различных местах книги.

Наиболее существенное добавление — новое доказательство теоремы о приведении матрицы к жордановой нормальной форме (§ 19).

За помощь в переработке книги я благодарю В. Пономарева и З. Я. Шапиро.

Благодарю также редактора книги Н. Я. Виленкина за ряд ценных советов.

*И. Гельфанд*

Декабрь 1965 г.

## **ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ**

Второе издание отличается от первого рядом существенных изменений и дополнений. Наиболее крупными из них являются следующие: включены два добавления, помещенные в конце книги: о вычислительных методах линейной алгебры и о теории возмущений, добавлен пара-

граф, посвященный экстремальным свойствам собственных значений, и параграф о  $\lambda$ -матрицах (§§ 17 и 21), заново написана глава о жордановой нормальной форме линейного преобразования, переработана четвертая глава. Кроме того, сделано многое более мелких добавлений и изменений. Новый текст написан мной совместно с З. Я. Шапиро.

Выражаю благодарность А. Г. Курошу, предоставившему в мое распоряжение записи своих лекций по тензорной алгебре. За ряд ценных замечаний благодарю С. В. Фомина.

Благодарю также М. Л. Цетлина за помощь при оформлении рукописи и ряд советов.

*И. Гельфанд*

Сентябрь 1950 г.

## ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

В основу настоящей книги положен курс линейной алгебры, читанный автором на механико-математическом факультете Московского государственного университета и в Белорусском государственном университете.

В написании этой книги принял значительное участие Сергей Васильевич Фомин. Его помощь была настолько существенна, что без нее эта книга вряд ли могла быть написана.

Автор выражает благодарность доценту БГУ А. Е. Тураевскому, предоставившему в его распоряжение обработанные записи лекций, читанных автором в 1945 г., а также Д. А. Райкову, внимательно прочитавшему рукопись и сделавшему ряд ценных замечаний.

Некоторые места в тексте напечатаны мелким шрифтом. Эти разделы не используются в основном тексте и при первом поверхностном чтении могут быть пропущены.

*И. Гельфанд*

Январь 1948 г.

## ГЛАВА I

### ***n*-МЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО. ЛИНЕЙНЫЕ И БИЛИНЕЙНЫЕ ФОРМЫ**

#### **§ 1. Линейное (аффинное) *n*-мерное пространство**

**1. Определение линейного пространства.** Часто приходится встречаться с объектами, над которыми производятся операции сложения и умножения на числа. Приведем несколько примеров.

1. В геометрии объектами такого рода являются векторы в трехмерном пространстве, т. е. направленные отрезки. При этом, если два направленных отрезка можно совместить параллельным переносом, то считается, что они определяют один и тот же вектор. Поэтому удобно все эти отрезки откладывать от одной какой-либо точки, которую мы будем называть началом координат. Операция сложения векторов, как известно, определяется следующим образом: суммой векторов  $x$  и  $y$  мы считаем диагональ параллелограмма со сторонами  $x$  и  $y$ . Известным образом вводится также умножение на числа.

2. В алгебре мы встречаемся с системами  $n$  чисел  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  (например, строки матрицы, совокупность коэффициентов линейной формы и т. д.). Для таких систем операции сложения и умножения на числа обычно определяются так: суммой систем  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  и  $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$  называется система  $x + y = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \dots, \xi_n + \eta_n)$ . Произведением системы  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  на число  $\lambda$  мы считаем систему  $\lambda x = (\lambda \xi_1, \lambda \xi_2, \dots, \lambda \xi_n)$ .

3. В анализе определяются операции сложения функций и умножения их на числа. В дальнейшем мы

для определенности будем рассматривать совокупность всех непрерывных функций, заданных на сегменте  $[a, b]$ .

В приведенных примерах одни и те же операции сложения и умножения на числа производятся над совершенно разными объектами. Для того чтобы изучить все такие примеры с единой точки зрения, мы введем понятие линейного, или аффинного, пространства.

**Определение 1.** Множество  $R$  элементов  $x, y, z, \dots$  называется линейным (аффинным) пространством, если:

а) каждым двум элементам  $x$  и  $y$  поставлен в соответствие элемент  $z$ , называемый суммой элементов  $x$  и  $y$ ; сумма элементов  $x$  и  $y$  обозначается через  $x + y$ ,

б) каждому элементу  $x$  и каждому числу  $\lambda$  из некоторого поля поставлен в соответствие элемент  $\lambda x$ , называемый произведением числа  $\lambda$  на элемент  $x$ .

Эти операции должны удовлетворять следующим требованиям (аксиомам):

$$\text{I. } 1^\circ x + y = y + x \quad (\text{коммутативность}),$$

$$2^\circ (x + y) + z = x + (y + z) \quad (\text{ассоциативность}).$$

3° Существует элемент 0 такой, что  $x + 0 = x$  для любого  $x$ . Элемент 0 называется нулевым элементом.

4° Для каждого  $x$  существует элемент, обозначаемый через  $-x$ , такой, что  $x + (-x) = 0$ .

$$\text{II. } 1^\circ 1 \cdot x = x,$$

$$2^\circ \alpha(\beta x) = \alpha\beta(x).$$

$$\text{III. } 1^\circ (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x,$$

$$2^\circ \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y.$$

Мы не случайно не сказали, как именно определяются операции сложения и умножения на числа. От этих операций требуется только, чтобы были выполнены сформулированные выше аксиомы. Поэтому всякий раз, когда мы встречаемся с операциями, удовлетворяющими перечисленным выше условиям, мы вправе считать их операциями сложения и умножения на числа, а совокупность элементов, для которых эти операции установлены, — линейным пространством.

Представляем читателю проверить, что в приведенных примерах 1—3 эти аксиомы выполнены. Поэтому 1—3 являются примерами линейных пространств.

Рассмотрим еще несколько примеров.

4. Совокупность всех многочленов степени, не превышающей натурального числа  $n$ , с обычными операциями сложения многочленов и умножения их на числа образует линейное пространство.

Заметим, что множество многочленов степени  $n$  не образует линейного пространства, так как сумма двух многочленов степени  $n$  может оказаться многочленом более низкой степени: например

$$(t^n + t) + (-t^n + t) = 2t.$$

5. Элементами пространства  $R$  являются матрицы порядка  $n$ . Суммой матриц  $\|a_{ik}\|$  и  $\|b_{ik}\|$  называется матрица  $\|a_{ik} + b_{ik}\|$ , произведением матрицы  $\|a_{ik}\|$  на число  $\lambda$  — матрица  $\|\lambda a_{ik}\|$ . Нулевым элементом при этом будет матрица, состоящая из одних нулей. Можно проверить, что все аксиомы линейного пространства здесь выполнены.

6. Совокупность всех многочленов степени, не превышающей натурального числа  $n$ , и имеющих положительные коэффициенты, не образует линейного пространства: если многочлен  $P(x)$  входит в эту совокупность, то  $-P(x)$  в нее не входит.

7. Не образует линейного пространства и совокупность непрерывных функций на сегменте  $[a, b]$  таких, что  $|f(x)| \leq 1$ : из того, что  $|f_1(x)| \leq 1$  и  $|f_2(x)| \leq 1$ , не следует  $|f_1(x) + f_2(x)| \leq 1$ .

Элементы линейного пространства мы будем называть *векторами*. То обстоятельство, что это слово часто употребляется в более узком смысле (так, как в примере 1), не должно нас смущать. Геометрические представления, связанные с этим словом, помогут нам уяснить, а иногда и предвидеть, ряд результатов.

Если числа  $\lambda, \mu, \dots$ , участвующие в определении линейного пространства, вещественны, то пространство называется *вещественным линейным пространством*. Если же эти числа  $\lambda, \mu, \dots$  берутся из поля комплексных чисел, то  $R$  называется *комплексным линейным пространством*.

Более общо, мы можем предполагать, что  $\lambda, \mu, \dots$  — элементы произвольного поля  $K$ . Тогда  $R$  называется *линейным пространством над полем  $K$* . Многие понятия и теоремы, излагаемые ниже,

в частности, все содержание этого параграфа, автоматически переносится на линейные пространства над любым полем. Однако в главе I мы будем обычно предполагать, что  $R$ —вещественное линейное пространство.

**2. Число измерений (размерность) пространства.** Важную роль в дальнейшем будет играть понятие линейной зависимости и линейной независимости векторов.

**Определение 2.** Пусть  $R$ —линейное пространство. Векторы  $x, y, z, \dots, v$  называются линейно зависимыми, если существуют такие числа  $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \theta$ , из которых хотя бы одно отлично от нуля, что

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \dots + \theta v = 0. \quad (1)$$

Векторы, не являющиеся линейно зависимыми, называются линейно независимыми. Другими словами,

векторы  $x, y, z, \dots, v$  называются линейно независимыми, если равенство

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \dots + \theta v = 0$$

возможно только при  $\alpha = \beta = \gamma = \dots = \theta = 0$ .

Пусть векторы  $x, y, z, \dots, v$  линейно зависимы, т. е. пусть они связаны соотношением вида (1), в котором хотя бы один из коэффициентов, например  $\alpha$ , отличен от нуля. Тогда

$$\alpha x = -\beta y - \gamma z - \dots - \theta v$$

и, разделив на  $\alpha$  и положив

$$-\frac{\beta}{\alpha} = \lambda, \quad -\frac{\gamma}{\alpha} = \mu, \quad \dots, \quad -\frac{\theta}{\alpha} = \zeta,$$

получим:

$$x = \lambda y + \mu z + \dots + \zeta v. \quad (2)$$

Если вектор  $x$  выражается через векторы  $y, z, \dots, v$  в виде (2), то мы будем говорить, что  $x$  есть линейная комбинация векторов  $y, z, \dots, v$ .

Таким образом, если векторы  $x, y, z, \dots, v$  линейно зависимы, то хотя бы один из них является линейной комбинацией остальных. Мы предоставляем читателю проверить, что верно и обратное, т. е. что векторы, один из которых есть линейная комбинация остальных, линейно зависимы.

**Упражнения.** 1. Проверить, что если среди векторов  $x, y, z, \dots, v$  имеется нулевой вектор, то эти векторы обязательно линейно зависимы.

2. Показать, что если к линейно зависимым векторам  $x, y, z, \dots$  добавить еще произвольные векторы  $u, v, \dots$ , то все эти векторы вместе также будут линейно зависимы.

3. Доказать, что если векторы  $y, z, \dots, v$  линейно независимы и вектор  $x$  есть их линейная комбинация

$$x = \alpha y + \beta z + \dots + \delta v, \quad (3)$$

то представление (3) единственno.

**Указание.** Предположить, что есть другое представление:

$$x = \alpha_1 y + \beta_1 z + \dots + \delta_1 v, \quad (4)$$

и вычесть равенство (4) из равенства (3).

Перейдем теперь к определению понятия *числа измерений (размерности)* пространства.

В совокупности векторов на прямой всякие два вектора пропорциональны, т. е. линейно зависимы. На плоскости можно найти два линейно независимых вектора, но уже всякие три вектора линейно зависимы. Если  $R$  — совокупность векторов трехмерного пространства, то три линейно независимых вектора в  $R$  найти можно, но всякие четыре вектора линейно зависимы.

Мы видим, что максимальное число линейно независимых векторов на прямой, плоскости, в трехмерном пространстве совпадает с тем, что в геометрии принято называть числом измерений прямой, плоскости, пространства. Естественно поэтому следующее общее

**Определение 3.** *Линейное пространство  $R$  называется  $n$ -мерным, если в нем существует  $n$  линейно независимых векторов и нет большего числа линейно независимых векторов.*

Если в пространстве  $R$  можно найти любое число линейно независимых векторов, то  $R$  называется бесконечно-мерным.

Бесконечномерные пространства составляют предмет специального изучения. Мы будем в этой книге заниматься в основном пространствами конечного числа измерений.

Найдем в каждом из рассмотренных выше примеров 1—5 размерность соответствующего пространства.

1. Как мы уже указали, в пространстве  $R$  примера 1 имеется три линейно независимых вектора, а всякие четыре вектора линейно зависимы. Поэтому  $R$  трехмерно.

2.  $R$  — пространство, векторами которого являются системы  $n$  действительных чисел.

В этом пространстве можно указать  $n$  линейно независимых векторов, например

$$\begin{aligned}x_1 &= (1, 0, \dots, 0), \\x_2 &= (0, 1, \dots, 0), \\&\quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\x_n &= (0, 0, \dots, 1)\end{aligned}$$

(мы предоставляем читателю доказать, что эти векторы действительно линейно независимы).

**Упражнение.** Показать, что векторы

$$\begin{aligned}x_1 &= (\eta_{11}, \eta_{12}, \dots, \eta_{1n}), \\x_2 &= (0, \eta_{22}, \dots, \eta_{2n}), \\x_3 &= (0, 0, \dots, \eta_{3n}), \\&\quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\x_n &= (0, 0, \dots, \eta_{nn})\end{aligned}$$

в пространстве  $R$  также линейно независимы ( $\eta_{11}, \eta_{22}, \dots, \eta_{nn} \neq 0$ ).

3.  $R$  — пространство непрерывных функций. Пусть  $N$  — произвольное целое число. Тогда функции  $f_1(t) \equiv 1$ ,  $f_2(t) = t, \dots, f_N(t) = t^{N-1}$  образуют совокупность  $N$  линейно независимых векторов (доказательство предоставляем читателю). Мы видим, что в этом пространстве имеется произвольное число линейно независимых функций, т. е.  $R$  бесконечномерно.

4.  $R$  — пространство многочленов степени  $\leq n-1$ . В нем  $n$  многочленов  $1, t, \dots, t^{n-1}$  линейно независимы.

5. В пространстве квадратных матриц  $\|a_{ik}\|$  порядка  $n$  все матрицы, у которых на одном каком-либо месте стоит единица, а на остальных местах нули, линейно независимы.

В примерах 1, 2, 4 и 5 мы нашли систему таких линейно независимых векторов  $f_1, \dots, f_n$ , что каждый вектор  $g$  есть их линейная комбинация. Чтобы установить, что размерность каждого из этих пространств равна числу векторов  $f_1, \dots, f_n$ , нам остается доказать, что в этих пространствах нельзя найти другой системы линейно независимых векторов  $g_1, \dots, g_l$  в количестве, превосходящем  $n$ . Этот факт можно вывести из следующей полез-

ной леммы, которой мы неоднократно будем пользоваться и в дальнейшем.

**Лемма.** *Пусть в линейном пространстве задана система из векторов*

$$f_1, \dots, f_k.$$

*Пусть, далее, каждый из векторов*

$$g_1, \dots, g_l$$

*есть линейная комбинация векторов  $f_1, \dots, f_k$ . Тогда, если векторы  $g_1, \dots, g_l$  линейно независимы, то  $l \leq k$ .*

Другими словами, среди линейных комбинаций  $k$  векторов  $f_1, \dots, f_k$  не может быть больше чем  $k$  линейно независимых.

Доказательство леммы проведем по индукции. При  $k=1$  она очевидна. Предположим, что лемма верна для  $k-1$  векторов  $f_1, \dots, f_{k-1}$ , и докажем при этом, что она верна для  $k$  векторов.

Итак, пусть среди линейных комбинаций векторов

$$f_1, \dots, f_k$$

есть линейно независимые векторы  $g_1, \dots, g_l$ :

$$\begin{aligned} g_1 &= \alpha_{11}f_1 + \dots + \alpha_{1k}f_k, \\ g_2 &= \alpha_{21}f_1 + \dots + \alpha_{2k}f_k, \\ &\vdots \\ g_l &= \alpha_{l1}f_1 + \dots + \alpha_{lk}f_k. \end{aligned} \tag{5}$$

Нам надо показать, что  $l \leq k$ . Если все коэффициенты при  $f_k$  равны нулю, лемма доказана, так как в этом случае, по предположению индукции, имеет место равенство  $l \leq k-1$ , а значит, и подавно,  $l \leq k$ . Пусть хотя бы один из коэффициентов при  $f_k$ , например  $\alpha_{lk}$ , не равен нулю. Чтобы провести индукцию, мы построим  $l-1$  новых линейно независимых векторов, которые будут линейными комбинациями векторов  $f_1, \dots, f_{k-1}$ . Для этого из последнего равенства выразим  $f_k$ :

$$f_k = \frac{1}{\alpha_{lk}}g_l - \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{lk}}f_1 - \dots - \frac{\alpha_{l-1,k}}{\alpha_{lk}}f_{k-1}.$$

Это выражение для  $f_k$  подставим теперь в каждое из первых  $l-1$  равенств (5) и соберем подобные члены. Мы

получим равенства следующего вида:

$$\begin{aligned} g_1 - \frac{\alpha_{1k}}{\alpha_{lk}} g_l &= \beta_{11} f_1 + \dots + \beta_{1, k-1} f_{k-1}, \\ g_2 - \frac{\alpha_{2k}}{\alpha_{lk}} g_l &= \beta_{21} f_1 + \dots + \beta_{2, k-1} f_{k-1}, \\ &\dots \\ g_{l-1} - \frac{\alpha_{l-1, k}}{\alpha_{lk}} g_l &= \beta_{l-1, 1} f_1 + \dots + \beta_{l-1, k-1} f_{k-1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Эти равенства означают, что каждый из  $l-1$  векторов

$$g'_1 = g_1 - \frac{\alpha_{1k}}{\alpha_{lk}} g_l, \dots, g'_{l-1} = g_{l-1} - \frac{\alpha_{l-1, k}}{\alpha_{lk}} g_l$$

есть линейная комбинация векторов  $f_1, \dots, f_{k-1}$ . Если мы докажем, что они линейно независимы, то, по предположению индукции, отсюда будет следовать, что  $l-1 \leq k-1$ , т. е.  $l \leq k$ .

Таким образом, нам осталось показать, что векторы  $g'_1, \dots, g'_{l-1}$  линейно независимы. Но это почти очевидно. Действительно, предположим, что  $\lambda_1, \dots, \lambda_{l-1}$  — такие числа, что

$$\lambda_1 g'_1 + \dots + \lambda_{l-1} g'_{l-1} = 0,$$

т. е. что

$$\lambda_1 \left( g_1 - \frac{\alpha_{1k}}{\alpha_{lk}} g_l \right) + \dots + \lambda_{l-1} \left( g_{l-1} - \frac{\alpha_{l-1, k}}{\alpha_{lk}} g_l \right) = 0.$$

Раскрывая скобки, получаем:

$$\begin{aligned} \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \dots + \lambda_{l-1} g_{l-1} - \\ - \left( \lambda_1 \frac{\alpha_{1k}}{\alpha_{lk}} + \dots + \lambda_{l-1} \frac{\alpha_{l-1, k}}{\alpha_{lk}} \right) g_l = 0. \end{aligned}$$

Так как векторы  $g_1, \dots, g_l$  линейно независимы, то все коэффициенты в последнем равенстве равны нулю. В частности,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{l-1} = 0$ , а это означает, что векторы  $g'_1, \dots, g'_{l-1}$  линейно независимы. Лемма полностью доказана.

Из доказанной леммы вытекает следующий, часто оказывающийся полезным результат: если в пространстве  $R$  существуют  $k$  линейно независимых векторов  $f_1, \dots, f_k$

таких, что каждый вектор из  $R$  есть их линейная комбинация, то пространство  $R$   $k$ -мерно.

Доказательство этого факта ввиду его простоты мы оставляем читателю.

В каждом из примеров 2, 4 и 5 такая система была выбрана. Таким образом показано, что в примерах 2 и 4 размерность пространства равна  $n$ , а в примере 5 размерность пространства равна  $n^2$ .

**Упражнение.** Показать, что если векторы  $f_1, \dots, f_k$ , входящие в условие леммы, линейно зависимы, то  $l < k$  (а не только  $l \leq k$ ).

### 3. Базис и координаты в $n$ -мерном пространстве.

**Определение 4.** Совокупность  $n$  линейно независимых векторов  $e_1, e_2, \dots, e_n$   $n$ -мерного пространства  $R$  называется базисом в  $R$ .

Например, в пространстве  $R$ , рассмотренном в примере 1 (трехмерном пространстве), базис образуют любые три вектора, не лежащие в одной плоскости.

По определению  $n$ -мерного пространства в нем существует  $n$  линейно независимых векторов, т. е. существует базис.

Покажем, что произвольную систему из  $k$  линейно независимых векторов  $f_1, \dots, f_k$ , где  $k < n$ , можно дополнить до базиса в  $n$ -мерном пространстве  $R$ .

Пусть  $e_1, \dots, e_n$  — какой-либо базис в  $R$ . Если бы каждый из векторов  $e_1, \dots, e_n$  был линейной комбинацией векторов  $f_i$ , то, согласно лемме, мы имели бы, что  $n \leq k$ , в то время как, по предположению,  $k < n$ . Значит, среди векторов  $e_1, \dots, e_n$  есть хотя бы один, например  $e_{p_1}$ , не являющийся линейной комбинацией векторов  $f_1, \dots, f_k$ . Добавив вектор  $e_{p_1}$  к  $f_1, \dots, f_k$ , мы получим систему из  $k+1$  векторов, которые по-прежнему линейно независимы (почему?).

Если  $k+1 < n$ , то среди векторов  $e_1, \dots, e_n$  снова есть вектор  $e_{p_2}$ , не являющийся линейной комбинацией векторов  $f_1, \dots, f_k, e_{p_1}$ . Добавим и этот вектор к системе. Этот процесс можно продолжить до тех пор, пока мы дойдем до  $n$  линейно независимых векторов, т. е. до базиса. Этот базис содержит  $f_1, \dots, f_k$ , и тем самым наше утверждение доказано.

**Теорема 1.** Каждый вектор  $x$  из  $n$ -мерного пространства  $R$  можно представить, и притом единственным образом, как линейную комбинацию векторов базиса.

**Доказательство.** Пусть векторы  $e_1, e_2, \dots, e_n$  образуют базис в  $R$ . Присоединим к ним произвольный вектор  $x$  из  $R$ . Векторов  $x, e_1, e_2, \dots, e_n$  уже  $n+1$ . Поэтому по определению  $n$ -мерного пространства они должны быть линейно зависимы, т. е.

$$\alpha_0x + \alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 + \dots + \alpha_ne_n = 0, \quad (7)$$

где не все  $\alpha_i$  равны нулю. Число  $\alpha_0$  заведомо отлично от нуля, так как иначе из формулы (7) следовала бы линейная зависимость векторов  $e_1, e_2, \dots, e_n$ .

Выразим из (7) вектор  $x$ :

$$x = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0}e_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_0}e_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_0}e_n.$$

Мы доказали, что каждый вектор  $x \in R$  \*) есть линейная комбинация векторов  $e_1, e_2, \dots, e_n$ .

Докажем теперь единственность полученного разложения. Предположим, что существуют два разложения:

$$x = \xi_1e_1 + \xi_2e_2 + \dots + \xi_ne_n$$

и

$$x = \xi'_1e_1 + \xi'_2e_2 + \dots + \xi'_ne_n.$$

Вычитая, получим:

$$0 = (\xi_1 - \xi'_1)e_1 + (\xi_2 - \xi'_2)e_2 + \dots + (\xi_n - \xi'_n)e_n.$$

Так как  $e_1, e_2, \dots, e_n$  линейно независимы, то это возможно лишь, если

$$\xi_1 - \xi'_1 = \xi_2 - \xi'_2 = \dots = \xi_n - \xi'_n = 0,$$

т. е.

$$\xi_1 = \xi'_1, \xi_2 = \xi'_2, \dots, \xi_n = \xi'_n.$$

Единственность разложения доказана.

**Определение 5.** Если  $e_1, e_2, \dots, e_n$  есть базис в  $n$ -мерном пространстве и

$$x = \xi_1e_1 + \xi_2e_2 + \dots + \xi_ne_n, \quad (8)$$

то числа  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  называются координатами вектора  $x$  в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$ .

\*) Запись  $x \in R$  означает, что  $x$  принадлежит  $R$ .

Теорема 1 означает, что при заданном базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  каждый вектор имеет координаты и притом однозначно определенные.

Если вектор  $x$  имеет в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  координаты  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ , а вектор  $y$  — координаты  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ , т. е. если

$$\begin{aligned}x &= \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n, \\y &= \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \dots + \eta_n e_n,\end{aligned}$$

то

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1) e_1 + (\xi_2 + \eta_2) e_2 + \dots + (\xi_n + \eta_n) e_n,$$

т. е. вектор  $x + y$  имеет координаты  $\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \dots, \xi_n + \eta_n$ . Вектор  $\lambda x$  имеет координаты  $\lambda \xi_1, \lambda \xi_2, \dots, \lambda \xi_n$ .

Таким образом, при сложении векторов  $x$  и  $y$  их координаты складываются. При умножении вектора  $x$  на число  $\lambda$  его координаты умножаются на это число.

Ясно также, что нулевой вектор, и только он, имеет все координаты равными нулю.

Примеры. 1. Для случая трехмерного пространства наше определение координат вектора совпадает с имеющимся в аналитической геометрии определением координат вектора в некоторой (вообще говоря, не прямоугольной) системе координат.

2. Пусть  $R$  — пространство, векторами которого являются системы  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  из  $n$  чисел. Возьмем базис (см. упражнение на стр. 12)

$$\begin{aligned}e_1 &= (1, 1, 1, \dots, 1), \\e_2 &= (0, 1, 1, \dots, 1), \\&\vdots \\e_n &= (0, 0, 0, \dots, 1).\end{aligned}$$

Найдем координаты  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  вектора  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  в этом базисе. По определению

$$x = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \dots + \eta_n e_n,$$

т. е.

$$\begin{aligned}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) &= \eta_1 (1, 1, 1, \dots, 1) + \eta_2 (0, 1, 1, \dots, 1) + \\&\quad \dots + \eta_n (0, 0, 0, \dots, 1) = (\eta_1, \eta_1 + \eta_2, \dots, \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n).\end{aligned}$$

Таким образом, числа  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  находятся из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned}\eta_1 &= \xi_1, \\ \eta_1 + \eta_2 &= \xi_2, \\ &\vdots \\ \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n &= \xi_n,\end{aligned}$$

откуда

$$\eta_1 = \xi_1, \eta_2 = \xi_2 - \xi_1, \dots, \eta_n = \xi_n - \xi_{n-1}.$$

Рассмотрим теперь в  $R$  базис, в котором связь между координатами вектора  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  и числами  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ , определяющими этот вектор, наиболее проста. Пусть

$$\begin{aligned}e_1 &= (1, 0, \dots, 0), \\ e_2 &= (0, 1, \dots, 0), \\ &\vdots \\ e_n &= (0, 0, \dots, 1).\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}x &= (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \\ &= \xi_1(1, 0, \dots, 0) + \xi_2(0, 1, \dots, 0) + \dots + \xi_n(0, 0, \dots, 1) = \\ &= \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n.\end{aligned}$$

Таким образом, в пространстве  $R$ , где каждый вектор определяется как система  $n$  чисел  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ , эти числа можно трактовать как координаты вектора  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  в базисе  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $e_n = (0, 0, \dots, 1)$ .

Упражнение. Доказать, что в любом базисе

$$\begin{aligned}e_1 &= (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), \\ e_2 &= (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \\ &\vdots \\ e_n &= (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn})\end{aligned}$$

координаты  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  вектора  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  суть линейные комбинации чисел  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ .

3.  $R$  — пространство, векторами которого являются многочлены степени  $\leq n-1$ . Простейшим базисом является совокупность векторов  $e_1 = 1, e_2 = t, \dots, e_n = t^{n-1}$ . Координатами многочлена  $P(t) = a_0 t^{n-1} + a_1 t^{n-2} + \dots + a_{n-1}$  в этом базисе являются, как легко видеть, его коэффициенты  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ .

Выберем теперь другой базис:

$$e'_1 = 1, \quad e'_2 = t - a, \quad e'_3 = (t - a)^2, \quad \dots, \quad e'_n = (t - a)^{n-1}.$$

Каждый многочлен  $P(t)$  может быть по формуле Тейлора представлен в виде:

$$P(t) = P(a) + P'(a)(t - a) + \dots + \frac{P^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(t - a)^{n-1}.$$

Таким образом, в этом базисе  $P(t)$  имеет координаты

$$P(a), \quad P'(a), \quad \dots, \quad \frac{P^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}.$$

**4. Изоморфизм  $n$ -мерных пространств.** В разобранных выше примерах некоторые пространства с точки зрения рассматриваемых здесь свойств не отличаются друг от друга. Таковы, например, обычное трехмерное пространство  $R$  примера 1 и пространство  $R'$ , в котором векторы определяются как тройки действительных чисел. В самом деле, выбрав в  $R$  определенную систему координат, мы можем каждому вектору из  $R$  поставить в соответствие совокупность трех его координат, т. е. вектор пространства  $R'$ . При сложении векторов координаты их складываются, а при умножении на число все координаты вектора умножаются на это число. Поэтому геометрические факты, вытекающие из определения линейного пространства, которые имеют место в  $R$ , мы можем параллельно изложить как в  $R$ , так и в пространстве  $R'$  троек чисел.

Поскольку единственными операциями, которые введены в линейных пространствах, являются операции сложения векторов и умножения вектора на число, то естественно ввести следующее

*Определение 6. Линейные пространства  $R$  и  $R'$  называются изоморфными, если между векторами  $x \in R$  и векторами  $x' \in R'$  можно установить взаимно однозначное соответствие \*)  $x \leftrightarrow x'$  так, что если вектору  $x$*

\*) Соответствие, установленное между элементами двух множеств  $R$  и  $R'$ , называется взаимно однозначным, если:

1° каждому элементу из  $R$  соответствует один и только один элемент из  $R'$ ,

2° каждый элемент из  $R'$  соответствует при этом одному и только одному элементу из  $R$ .

соответствует вектор  $x'$ , а вектору  $y$  соответствует вектор  $y'$ , то

1° вектору  $x+y$  соответствует вектор  $x'+y'$ ,

2° вектору  $\lambda x$  соответствует вектор  $\lambda x'$ .

Из определения изоморфизма следует, что если  $x, y, \dots$  — векторы из  $R$ , а  $x', y', \dots$  — соответствующие им векторы из  $R'$ , то равенство  $\lambda x + \mu y + \dots = 0$  равносильно равенству  $\lambda x' + \mu y' + \dots = 0$ . Следовательно, линейно независимым векторам из  $R$  соответствуют линейно независимые векторы из  $R'$ , и обратно.

Возникает вопрос, какие пространства изоморфны между собой и какие нет.

*Два пространства различной размерности заведомо не изоморфны друг другу.*

В самом деле, пусть  $R$  и  $R'$  изоморфны. Из сделанного выше замечания следует, что максимальное число линейно независимых векторов в  $R$  и  $R'$  одно и то же, т. е. размерности пространств  $R$  и  $R'$  равны. Следовательно, пространства различной размерности не могут быть между собой изоморфны.

*Теорема 2. Все пространства, имеющие одну и ту же размерность  $n$ , изоморфны друг другу.*

*Доказательство.* Пусть  $R$  и  $R'$  — два  $n$ -мерных пространства. Выберем в  $R$  базис  $e_1, e_2, \dots, e_n$  и в  $R'$  какой-либо базис  $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ . Поставим в соответствие вектору

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n \quad (9)$$

вектор

$$x' = \xi'_1 e'_1 + \xi'_2 e'_2 + \dots + \xi'_n e'_n,$$

т. е. линейную комбинацию векторов  $e'_i$  с теми же коэффициентами, что и в (9).

Это соответствие взаимно однозначно. В самом деле, каждый вектор  $x$  может быть однозначно представлен в виде (9). Поэтому числа  $\xi_i$ , а значит, и вектор  $x'$ , определяются по вектору  $x$  однозначно. Ввиду равноправности, в нашем построении, пространств  $R$  и  $R'$ , каждому  $x'$  отвечает элемент из  $R$  и притом только один.

Из установленного закона соответствия сразу следует, что если  $x \leftrightarrow x'$  и  $y \leftrightarrow y'$ , то  $x+y \leftrightarrow x'+y'$  и  $\lambda x \leftrightarrow \lambda x'$ . Изоморфизм пространств  $R$  и  $R'$ , таким образом, доказан.

Итак, единственной существенной характеристикой конечномерного линейного пространства является его размерность.

В § 3 мы еще вернемся к понятию изоморфизма по другому поводу.

### 5. Подпространства линейного пространства.

**Определение 7.** Подпространством  $R'$  пространства  $R$  называется совокупность элементов из  $R$  таких, что они сами образуют линейное пространство относительно уже введенных в  $R$  операций сложения и умножения на числа.

Иначе говоря, совокупность  $R'$  элементов  $x, y, \dots$  из  $R$  образует линейное подпространство пространства  $R$ , если из  $x \in R', y \in R'$  следует  $x + y \in R', \lambda x \in R'$ .

Примеры. 1. Нулевое подпространство, т. е. подпространство, состоящее из единственного элемента — нуля.

### 2. Все пространство $R$ .

Нулевое подпространство и все пространство называются обычно *несобственными* подпространствами. Приведем несколько более содержательных примеров подпространств.

3.  $R$  — трехмерное пространство. Рассмотрим какую-либо плоскость в  $R$ , проходящую через начало координат. Совокупность  $R'$  всех векторов, лежащих в этой плоскости, есть подпространство.

4. В пространстве, векторами которого являются системы  $n$  чисел  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ , совокупность всех тех векторов  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ , для которых  $\xi_1 = 0$ , образует подпространство. Более общо: совокупность векторов  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ , удовлетворяющих условию

$$a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \dots + a_n\xi_n = 0,$$

где  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — какие-то фиксированные числа, образует подпространство.

5. В пространстве всех непрерывных функций совокупность многочленов степени  $\leq n$  является подпространством.

Очевидно, что во всяком подпространстве  $R'$  какого-либо пространства  $R$  содержится нулевой элемент пространства  $R$ .

Поскольку любое подпространство само по себе является линейным пространством, то все такие понятия, как

базис, число измерений пространства и т. д., которые мы ввели выше, применимы и к подпространствам. Так как в подпространстве не может быть больше линейно независимых векторов, чем во всем пространстве, то *размерность любого подпространства не превосходит размерности всего пространства*.

**Упражнение.** 1. Доказать, что если подпространство  $R'$  пространства  $R$  имеет ту же размерность, что и все пространство  $R$ , то оно совпадает с  $R$ .

2. Доказать, что если  $R_1$  и  $R_2$  — подпространства пространства  $R$ , и если  $R_1 \subset R_2$  и размерности  $R_1$  и  $R_2$  совпадают, то  $R_1 = R_2$ .

В каждом пространстве  $R$  можно строить подпространства следующим общим приемом: возьмем в  $R$  произвольное (конечное или бесконечное) множество векторов  $e, f, g, \dots$ ; тогда *совокупность  $R'$  всех линейных комбинаций выбранных векторов  $e, f, g, \dots$  есть подпространство пространства  $R$* . Действительно, складывая между собой и умножая на числа линейные комбинации векторов  $e, f, g, \dots$ , мы снова получим линейные комбинации векторов  $e, f, g, \dots$ , т. е. элементы из  $R'$ . Полученное таким образом подпространство  $R'$  называется *подпространством, порожденным векторами  $e, f, g, \dots$* . Оно является наименьшим линейным подпространством, содержащим данные векторы  $e, f, g, \dots$ .

*Подпространство  $R'$ , порожденное линейно независимыми векторами  $e_1, e_2, \dots, e_k$ , является  $k$ -мерным и векторы  $e_1, e_2, \dots, e_k$  образуют в нем базис.* Действительно, в  $R'$  имеется система  $k$  линейно независимых векторов, именно, сами векторы  $e_1, e_2, \dots, e_k$ . С другой стороны, если  $x_1, x_2, \dots, x_l$  — произвольные линейно независимые векторы из  $R'$ , то так как они являются линейными комбинациями векторов  $e_1, \dots, e_k$ , то, согласно лемме п. 2,  $l \leq k$ . Следовательно,  $R'$   $k$ -мерно и набор векторов  $e_1, \dots, e_k$  есть один из возможных базисов в  $R'$ .

**Упражнение.** Показать, что в  $n$ -мерном пространстве существуют подпространства всех меньших разностей.

Если исключить из рассмотрения не представляющее интереса нулевое подпространство, то самыми простыми являются одномерные подпространства. Базис всякого такого подпространства состоит из одного вектора  $e_1$ .

Таким образом, одномерное подпространство состоит из векторов вида  $\alpha e_1$ , где  $\alpha$  — произвольное число.

Прибавим к каждому из векторов  $\alpha e_1$  один и тот же вектор  $x_0$ . Мы получим совокупность векторов вида  $x = x_0 + \alpha e_1$ , где  $\alpha$  пробегает все числа, а  $e_1$  и  $x_0$  — фиксированные векторы. Эту совокупность векторов естественно, по аналогии с трехмерным пространством, назвать *прямой* в линейном пространстве  $R$ .

Аналогично, векторы вида  $\alpha e_1 + \beta e_2$ , где  $e_1$  и  $e_2$  — фиксированные линейно независимые векторы, а  $\alpha$  и  $\beta$  — произвольные числа, образуют двумерное подпространство. Совокупность векторов

$$x = x_0 + \alpha e_1 + \beta e_2,$$

где  $x_0$  — фиксированный вектор, мы назовем *плоскостью* (двумерной).

**Упражнения.** 1. Показать, что в пространстве, где векторами являются системы  $n$  действительных чисел  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ , совокупность векторов, удовлетворяющих соотношению

$$a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \dots + a_n \xi_n = 0$$

( $a_1, a_2, \dots, a_n$  — фиксированные числа, не все равные нулю), образует подпространство размерности  $n-1$ .

2. Показать, что если два подпространства  $R_1$  и  $R_2$  пространства  $R$  имеют общим лишь нулевой вектор, то сумма их размерностей не превосходит размерности  $R$ .

3. Показать, что размерность подпространства, порожденного векторами  $e, f, g, \dots$ , равна максимальному числу линейно независимых векторов среди них.

**6. Разложение пространства  $R$  в прямую сумму подпространств. Сумма и пересечение подпространств.** Пусть заданы два подпространства  $n$ -мерного пространства  $R$ . Обозначим их  $R_1$  и  $R_2$ .

**Определение 8.** Если каждый вектор  $x$  пространства  $R$  можно, и при том единственным образом, представить как сумму двух векторов

$$x = x_1 + x_2,$$

где  $x_1 \in R_1$ , а  $x_2 \in R_2$ , то говорят, что пространство  $R$  разложено в прямую сумму подпространств  $R_1$  и  $R_2$ .

Это обычно записывают так:

$$R = R_1 + R_2.$$

**Теорема 3.** Для того чтобы пространство  $R$  разлагалось в прямую сумму подпространств  $R_1$  и  $R_2$ , достаточно, чтобы:

1. Подпространства  $R_1$  и  $R_2$  имели только один общий вектор  $x = 0$  (нулевой вектор).

2. Сумма размерностей этих подпространств была равна размерности пространства  $R$ .

**Доказательство.** Выберем некоторый базис  $e_1, \dots, e_k$  в подпространстве  $R_1$  и базис  $f_1, \dots, f_l$  в подпространстве  $R_2$ . Поскольку сумма размерностей  $R_1$  и  $R_2$  есть  $n$ , то общее число этих векторов  $k+l=n$ .

Покажем, что векторы

$$e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_l$$

линейно независимы, т. е. образуют базис пространства  $R$ . Действительно, пусть

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k + \mu_1 f_1 + \dots + \mu_l f_l = 0;$$

отсюда

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k = -\mu_1 f_1 - \dots - \mu_l f_l.$$

Левая часть этого равенства есть вектор из  $R_1$ , а правая из  $R_2$ . Так как, по условию, единственный общий вектор  $R_1$  и  $R_2$  есть нулевой вектор, то

$$\begin{aligned} \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k &= 0, \\ \mu_1 f_1 + \dots + \mu_l f_l &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Но каждый из наборов  $e_1, \dots, e_k$  и  $f_1, \dots, f_l$  состоит из линейно независимых векторов, так как это базисы в  $R_1$  и  $R_2$ . Поэтому из первого равенства (10) следует, что

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0,$$

а из второго следует, что

$$\mu_1 = \dots = \mu_l = 0.$$

Следовательно, система  $e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_l$  состоит из  $n$  линейно независимых векторов, т. е. это есть базис в пространстве  $R$ .

Мы доказали, что при выполнении условий теоремы существует базис, первые  $k$  векторов которого образуют базис в  $R_1$ , а последние  $l$  — базис в  $R_2$ .

Произвольный вектор  $x$  из  $R$  можно разложить по векторам этого базиса

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k + \beta_1 f_1 + \dots + \beta_l f_l.$$

При этом

$$x_1 = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k \in R_1$$

и

$$x_2 = \beta_1 f_1 + \dots + \beta_l f_l \in R_2.$$

Таким образом,

$$x = x_1 + x_2,$$

где  $x_1 \in R_1$  и  $x_2 \in R_2$ . Покажем, что это разложение единственно. Предположим, что существуют два разложения:

$$x = x_1 + x_2, \quad \text{где } x_1 \in R_1, \quad x_2 \in R_2,$$

и

$$x = x'_1 + x'_2, \quad \text{где } x'_1 \in R_1, \quad x'_2 \in R_2.$$

Вычитая второе равенство из первого, получаем:

$$0 = x_1 - x'_1 + x_2 - x'_2,$$

откуда

$$x_1 - x'_1 = x'_2 - x_2.$$

Так как вектор, стоящий в левой части равенства, принадлежит  $R_1$ , а вектор, стоящий в правой части, принадлежит  $R_2$ , то каждый из этих векторов равен нулю, т. е.

$$x'_1 = x_1,$$

$$x'_2 = x_2.$$

Единственность разложения доказана.

Допустим, что нам задано два произвольных подпространства  $R_1$  и  $R_2$  линейного пространства  $R$ .

Легко проверить, что совокупность векторов, принадлежащих обоим этим подпространствам, также есть подпространство  $R_0$  пространства  $R$ .

Это подпространство называется *пересечением*  $R_1$  и  $R_2$  и обозначается

$$R_0 = R_1 \cap R_2.$$

Например, если  $R_1$  и  $R_2$  — два двумерных подпространства трехмерного пространства (две плоскости,

проходящие через начало координат), то  $R_1 \cap R_2$  есть одномерное подпространство (прямая, по которой пересекаются эти плоскости).

По двум подпространствам  $R_1$  и  $R_2$  можно построить еще одно подпространство, которое называется их *суммой*. Оно определяется следующим образом.

Векторами этого подпространства являются всевозможные суммы вида

$$x = x_1 + x_2, \quad (11)$$

где  $x_1 \in R_1$ ,  $x_2 \in R_2$ .

Легко проверить, что элементы вида (11) образуют подпространство. Это подпространство  $\tilde{R}$  называется суммой подпространств  $R_1$  и  $R_2$  и обозначается

$$\tilde{R} = R_1 + R_2.$$

Заметим, что, в отличие от прямой суммы двух подпространств, запись элемента из  $\tilde{R}$  в виде (11) может быть неоднозначной.

**Упражнение.** Показать, что сумма двух различных двумерных подпространств трехмерного пространства  $R$  есть все это пространство.

Имеет место следующая теорема:

**Теорема 4.** Пусть заданы два подпространства  $R_1$  и  $R_2$  пространства  $R$ . Тогда сумма размерностей  $R_1$  и  $R_2$  равна размерности их суммы плюс размерность пересечения.

**Доказательство.** Выберем в пересечении  $R_0 = R_1 \cap R_2$  базис

$$e_1, \dots, e_k. \quad (12)$$

Дополним этот базис с одной стороны до базиса в  $R_1$ :

$$e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_l \quad (13)$$

■ с другой стороны до базиса в  $R_2$ :

$$e_1, \dots, e_k, g_1, \dots, g_m. \quad (14)$$

Покажем, что векторы

$$f_1, \dots, f_l, e_1, \dots, e_k, g_1, \dots, g_m \quad (15)$$

образуют базис в сумме  $\tilde{R} = R_1 + R_2$ .

Сначала покажем, что эти векторы линейно независимы. Действительно, пусть

$$\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_l f_l + \mu_1 e_1 + \dots + \mu_k e_k + v_1 g_1 + \dots + v_m g_m = 0.$$

Тогда

$$\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_l f_l + \mu_1 e_1 + \dots + \mu_k e_k = -v_1 g_1 - \dots - v_m g_m.$$

Левая часть этого равенства есть вектор из  $R_1$ , правая — из  $R_2$ . Таким образом, эта правая часть есть одновременно вектор из  $R_1$  и из  $R_2$ , т. е. принадлежит  $R_0$  и, значит, выражается как линейная комбинация базиса  $e_1, \dots, e_k$  подпространства  $R_0$ :

$$-v_1 g_1 - \dots - v_m g_m = c_1 e_1 + \dots + c_k e_k.$$

В силу линейной независимости векторов (14) это возможно только, когда все коэффициенты — нули. В частности,  $v_1 = \dots = v_m = 0$ , т. е.

$$\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_l f_l + \mu_1 e_1 + \dots + \mu_k e_k = 0.$$

Из линейной независимости векторов (13) получаем, что и все коэффициенты  $\lambda_1, \dots, \lambda_l, \mu_1, \dots, \mu_k$  равны нулю. Таким образом, линейная независимость системы (15) доказана.

Покажем теперь, что всякий вектор  $x \in \tilde{R}$  выражается как линейная комбинация векторов этой системы. По определению  $\tilde{R}$  вектор  $x$  можно представить в виде:

$$x = x_1 + x_2,$$

где  $x_1 \in R_1$ ,  $x_2 \in R_2$ . Так как  $x_1 \in R_1$ , то его можно представить как линейную комбинацию векторов (13). Аналогично  $x_2 \in R_2$  и  $x_2$  можно представить как линейную комбинацию векторов (14). Складывая, получим, что вектор  $x$  представим как линейная комбинация системы (15).

Итак, мы получили, что векторы

$$f_1, \dots, f_l, e_1, \dots, e_k, g_1, \dots, g_m,$$

с одной стороны, линейно независимы и, с другой стороны, всякий вектор из  $\tilde{R}$  есть их линейная комбинация.

В силу замечания на стр. 14 отсюда следует, что эти векторы образуют базис в  $\tilde{R}$ . Итак, мы имеем  $k$  векторов (12), образующих базис в  $R_0$ ,  $k+l$  векторов (13), образующих базис в  $R_1$ ,  $k+m$  векторов (14), образующих базис в  $R_2$ , и  $k+l+m$  векторов (15), образующих базис в  $\tilde{R} = R_1 + R_2$ . Утверждение теоремы обращается, таким образом, в тождество

$$(k+l)+(k+m)=(k+l+m)+k.$$

Теорема доказана.

**Упражнение.** Проверить теорему для случая, когда  $R_1$  и  $R_2$ —двумерные подпространства трехмерного пространства.

Из доказанной теоремы следует, например, что двум 15-мерным подпространствам «тесно» в 28-мерном пространстве—они пересекаются по крайней мере по двумерному подпространству (плоскости). Действительно, сумма их размерностей равна 30, а размерность суммы не может, конечно, превосходить размерности всего пространства, т. е. 28.

**Упражнения.** 1. Каково наименьшее число измерений пространства, в котором две плоскости могут пересечься в точке?

2. Доказать, что если  $R_1 \cap R_2$  есть нулевое подпространство, то  $\tilde{R} = R_1 + R_2$  есть прямая сумма  $R_1$  и  $R_2$ , т. е.  $\tilde{R} = R_1 \dot{+} R_2$ .

Из результата этого упражнения видно, что теорема 3 этого пункта есть частный случай теоремы 4.

**Упражнение.** Показать, что если имеется разложение  $R$  в прямую сумму

$$R = R_1 \dot{+} R_2,$$

то пересечение  $R_1$  и  $R_2$  равно нулю и, следовательно, сумма размерностей этих подпространств равна  $n$ .

**7. Преобразование координат при изменении базиса.** Пусть  $e_1, e_2, \dots, e_n$  и  $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ —два базиса  $n$ -мерного пространства. Пусть, далее, каждый вектор  $e'_i$  выражается через векторы первого базиса формулами

$$\left. \begin{aligned} e'_1 &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n, \\ e'_2 &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{n2}e_n, \\ &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ e'_n &= a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Тогда переход от первого базиса ко второму задается матрицей  $A = \{a_{ik}\}$ , определитель которой отличен от нуля \*).

Обозначим через  $\xi_i$  координаты вектора  $x$  в первом базисе, а через  $\xi'_i$  — его координаты во втором базисе. Найдем, как выражаются координаты  $\xi'_i$  через  $\xi_i$ .

Мы имеем:

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n = \xi'_1 e'_1 + \xi'_2 e'_2 + \dots + \xi'_n e'_n.$$

Подставив в это равенство вместо  $e'_i$  их выражения через  $e_i$ , получим:

Так как  $e_i$  линейно независимы, то коэффициенты при них в правой и левой частях равенства одинаковы. Получаем:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= a_{11}\xi'_1 + a_{12}\xi'_2 + \dots + a_{1n}\xi'_n, \\ \xi_2 &= a_{21}\xi'_1 + a_{22}\xi'_2 + \dots + a_{2n}\xi'_n, \\ &\vdots \\ \xi_n &= a_{n1}\xi'_1 + a_{n2}\xi'_2 + \dots + a_{nn}\xi'_n. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Сравним формулы (16) и (17). Между ними есть два существенных отличия: во-первых, поменялись местами штрихованные и нештрихованные буквы и, во-вторых, в формулах (16) при суммировании меняется первый индекс, а в формулах (17) второй.

Таким образом, координаты  $\xi_i$  вектора  $x$  в первом базисе выражаются через координаты того же вектора  $x$  во втором базисе с помощью матрицы  $A'$ , транспонированной к  $A$ .

\*) Если бы определитель матрицы  $A$  был равен нулю, то векторы  $e_1, e_2, \dots, e_n$  были бы линейно зависимы.

Этот результат можно представить и в другой форме. Решим уравнения (17) относительно  $\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n$ . Получим:

$$\begin{aligned}\xi'_1 &= b_{11}\xi_1 + b_{12}\xi_2 + \dots + b_{1n}\xi_n, \\ \xi'_2 &= b_{21}\xi_1 + b_{22}\xi_2 + \dots + b_{2n}\xi_n, \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \xi'_n &= b_{n1}\xi_1 + b_{n2}\xi_2 + \dots + b_{nn}\xi_n,\end{aligned}$$

где  $b_{ik}$  являются элементами матрицы, обратной к матрице  $A'$ . Таким образом, мы видим, что координаты вектора преобразуются с помощью матрицы  $B = \|b_{ik}\|$ , являющейся обратной к  $A'$ , где  $A'$  — матрица, транспонированная к матрице  $A$ , задающей преобразование базиса.

## § 2. Евклидово пространство

**1. Определение евклидова пространства.** В предыдущем параграфе линейное (аффинное) пространство было определено как множество элементов (векторов) с заданными в нем операциями умножения на числа и сложения.

С помощью этих операций можно сформулировать, что такое прямая, плоскость, число измерений пространства, что такое параллельные прямые и т. д.

Однако этих понятий недостаточно, чтобы охватить все многообразие фактов, составляющих содержание так называемой евклидовой геометрии. Например, в одних терминах сложения и умножения на число мы не сможем дать определение длины вектора, угла между векторами, скалярного произведения векторов и т. д. Ввести эти понятия можно проще всего следующим образом.

Выберем в качестве основного понятие скалярного произведения, которое определим аксиоматически.

В терминах сложения векторов, умножения их на числа и скалярного произведения векторов мы сможем развить всю евклидову геометрию.

**Определение 1.** Будем говорить, что в вещественном пространстве  $R$  определено скалярное произведение, если каждой паре векторов  $x, y \in R$  поставлено в соответствие действительное число, которое обозначим через

$(x, y)$ , причем это соответствие обладает следующими свойствами (удовлетворяет следующим аксиомам):

1°  $(x, y) = (y, x)$ , т. е. скалярное произведение симметрично.

2°  $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ , где  $\lambda$  — действительное число.

3°  $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$  (дистрибутивность скалярного произведения).

4° Скалярное произведение вектора с самим собой неотрицательно:  $(x, x) \geq 0$ , и обращается в нуль, лишь если  $x = 0$ .

Аффинное пространство, в котором определено скалярное произведение, удовлетворяющее условиям 1°—4°, мы называем евклидовым.

Примеры. 1. Под векторами пространства  $R$  мы будем понимать векторы изучаемого в элементарной геометрии трехмерного пространства (пример 1 § 1). Скалярное произведение векторов определим как произведение их длин на косинус угла между ними. Можно проверить, что аксиомы 1°—4° действительно выполнены. Мы представляем эту проверку читателю.

2. Векторами пространства  $R$  мы назовем всякую систему  $n$  действительных чисел  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ . Сложение векторов и умножение их на число определим так (пример 2 § 1):

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \dots, \xi_n + \eta_n),$$

$$\lambda x = (\lambda \xi_1, \lambda \xi_2, \dots, \lambda \xi_n),$$

где

$$x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \quad y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n).$$

Скалярное произведение векторов  $x$  и  $y$  определим формулой

$$(x, y) = \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \dots + \xi_n \eta_n.$$

Легко проверить, что аксиомы 1°—3° действительно выполнены. Аксиома 4° также справедлива, так как  $(x, x) = \sum \xi_i^2 \geq 0$  и  $(x, x) = \sum \xi_i^2 = 0$  только при  $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_n = 0$ .

3. Рассмотрим пример более общий, чем пример 2.

Вектор по-прежнему определим как совокупность  $n$  действительных чисел. Сложение векторов и умножение их на числа определим так же, как в примере 2.

Зададимся некоторой матрицей  $\|a_{ik}\|$ . Скалярное произведение векторов  $x$  и  $y$  определим формулой

Посмотрим, какие условия нужно наложить на матрицу  $\|a_{ik}\|$ , чтобы выражение, определяемое формулой (1), действительно удовлетворяло всем аксиомам скалярного произведения.

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что аксиомы 2° и 3° выполнены для всякой матрицы  $\|a_{ik}\|$ . Для того чтобы была выполнена аксиома 1°, т. е. чтобы выражение  $(x, y)$  было симметричным относительно  $x$  и  $y$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$a_{ik} = a_{ki}, \quad (2)$$

т. е. чтобы матрица  $\|a_{ik}\|$  была симметричной.

Аксиома 4° требует, чтобы выражение

$$(x, x) = \sum_{i, k=1}^n a_{ik} \xi_i \xi_k \quad (3)$$

было неотрицательно для любых  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  и обращалось в нуль, лишь если  $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_n = 0$ .

Однородный многочлен («квадратичная форма»), определяемый формулой (3), называется *положительно определенным*, если он принимает лишь неотрицательные значения и обращается в нуль, лишь когда все  $\xi_i$  равны нулю. Аксиома 4° требует, следовательно, чтобы квадратичная форма (3) была положительно определенной.

Итак, всякая матрица  $\|a_{ik}\|$  задает скалярное произведение, определяемое формулой (1), если только эта матрица симметрична [условие (2)] и соответствующая ей квадратичная форма — положительно определенная.

Если в качестве матрицы  $\|a_{ik}\|$  взять единичную матрицу, т. е. положить  $a_{ii}=1$  и  $a_{ik}=0 (i \neq k)$ , то скалярное произведение  $(x, y)$  примет вид

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i,$$

и мы получим евклидово пространство, определенное в примере 2.

**Упражнение.** Показать, что матрица  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  непригодна для построения скалярного произведения (соответствующая ей квадратичная форма не является положительно определенной), а матрица  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  определяет скалярное произведение, удовлетворяющее аксиомам  $1^\circ - 4^\circ$ .

В дальнейшем (§ 6) будут указаны простые условия, дающие возможность проверить, будет ли данная квадратичная форма положительно определенной.

4. Векторами пространства  $R$  мы будем называть непрерывные функции, заданные на интервале  $(a, b)$ ; скалярное произведение таких функций определим как интеграл их произведения

$$\int_a^b f(t) g(t) dt.$$

Можно проверить, что при таком определении скалярного произведения аксиомы  $1^\circ - 4^\circ$  выполнены.

5. Будем считать векторами многочлены от  $t$  степени не выше  $n-1$ . Скалярное произведение двух многочленов определим как и в предыдущем примере:

$$(P, Q) = \int_a^b P(t) Q(t) dt.$$

Аксиомы  $1^\circ - 4^\circ$  проверяются как и в примере 4.

**2. Длина вектора. Угол между векторами.** Определим с помощью введенного понятия скалярного произведения длину вектора и угол между векторами.

**Определение 2.** Длиной вектора  $x$  в евклидовом пространстве называется число

$$\sqrt{(x, x)}. \quad (4)$$

Длину вектора  $x$  будем обозначать через  $|x|$ .

Естественно пожелать, чтобы угол между векторами, длина вектора и скалярное произведение были связаны обычным соотношением: скалярное произведение векторов

равно произведению их длин на косинус угла между ними. Так как в этой фразе смысл всех слов, кроме слов «угол между векторами», нам уже известен, то этим предписывается следующее

*Определение 3.* Углом между векторами  $x$  и  $y$  мы назовем число

$$\varphi = \arccos \frac{(x, y)}{|x| |y|},$$

т. е. положим

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{|x| |y|}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi. \quad (5)$$

Векторы  $x$  и  $y$  называются ортогональными, если угол между ними равен  $\frac{\pi}{2}$ , т. е. если

$$(x, y) = 0.$$

С помощью введенных понятий можно перенести на евклидовы пространства ряд теорем элементарной геометрии \*).

Рассмотрим один пример. Если  $x$  и  $y$ —ортогональные векторы, то  $x + y$  естественно считать диагональю прямоугольника со сторонами  $x$  и  $y$ . Докажем, что

$$|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2,$$

т. е. квадрат длины диагонали прямоугольника равен сумме квадратов длин двух его непараллельных сторон (теорема Пифагора).

*Доказательство.* По определению квадрата длины вектора

$$|x + y|^2 = (x + y, x + y).$$

В силу дистрибутивности скалярного произведения (аксиома 3°)

$$(x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y).$$

В силу ортогональности векторов  $x$  и  $y$

$$(x, y) = (y, x) = 0.$$

---

\*.) Можно было бы, конечно, определить евклидово пространство иначе, чем в п. 1, введя аксиоматически понятия длины вектора и угла между векторами (а не скалярное произведение). Однако соответствующая система аксиом была бы более сложной.

Следовательно,

$$|x+y|^2 = (x, x) + (y, y) = |x|^2 + |y|^2,$$

что и требовалось доказать.

Эту теорему можно обобщить: если векторы  $x, y, z, \dots$  попарно ортогональны, то

$$|x+y+z+\dots|^2 = |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 + \dots$$

**3. Неравенство Коши—Буняковского.** В предыдущем пункте у нас остался пробел. Мы определили угол  $\phi$  между векторами  $x$  и  $y$  формулой

$$\cos \phi = \frac{(x, y)}{|x| |y|}.$$

Для того чтобы можно было определить  $\phi$  из этого равенства, нужно доказать, что

$$-1 \leq \frac{(x, y)}{|x| |y|} \leq 1$$

или, что то же самое, что

$$\frac{(x, y)^2}{|x|^2 |y|^2} \leq 1,$$

т. е.

$$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y). \quad (6)$$

Это неравенство называется *неравенством Коши—Буняковского*.

Итак, для того чтобы иметь право определить угол между двумя векторами формулой (5), мы должны доказать неравенство Коши—Буняковского \*).

Чтобы доказать его, рассмотрим вектор  $x - ty$ , где  $t$ —произвольное действительное число. Согласно аксиоме 4° скалярного произведения

$$(x - ty, x - ty) \geq 0,$$

\* ) В примере 1 п. 1 этого параграфа нет надобности доказывать это неравенство. Действительно, там в силу принятого в векторном исчислении определения скалярного произведения величина  $\frac{(x, y)}{|x| |y|}$  есть косинус некоторого уже заранее определенного угла между векторами и поэтому она по абсолютной величине не превосходит 1.

т. е. для любого  $t$

$$t^2(y, y) - 2t(x, y) + (x, x) \geq 0.$$

Мы видим, что стоящий слева квадратный относительно  $t$  трехчлен принимает лишь неотрицательные значения. Следовательно, дискриминант уравнения

$$t^2(y, y) - 2t(x, y) + (x, x) = 0$$

не может быть положительным, т. е.

$$(x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leq 0,$$

что и требовалось доказать.

**Упражнение.** Доказать, что знак равенства в (6) имеет место тогда и только тогда, когда векторы  $x$  и  $y$  линейно зависимы.

**Примеры.** Мы доказали неравенство (6) для аксиоматически заданного евклидового пространства. Разберем, как выглядит это неравенство в приведенных выше (п. 1) примерах евклидовых пространств.

1. В примере 1 неравенство (6) не означает ничего нового (см. сноску на стр. 35).

2. Так как в примере 2 скалярное произведение задается формулой

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i,$$

то

$$(x, x) = \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad (y, y) = \sum_{i=1}^n \eta_i^2;$$

поэтому неравенство (6) имеет здесь вид:

$$\left( \sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \right).$$

8. В примере 3 скалярное произведение имеет вид:

$$(x, y) = \sum_{i, k=1}^n a_{ik} \xi_i \eta_k,$$

где

$$a_{ik} = a_{ki} \tag{2}$$

и

$$\sum_{i, k=1}^n a_{ik} \xi_i \xi_k \geq 0 \tag{3}$$

для любых  $\xi_i$ . Поэтому равенство (6) означает:

Если числа  $a_{ik}$  удовлетворяют условиям (2) и (3), то имеет место неравенство

$$\left( \sum_{i, k=1}^n a_{ik} \xi_i \eta_k \right)^2 \leq \left( \sum_{i, k=1}^n a_{ik} \xi_i \xi_k \right) \left( \sum_{i, k=1}^n a_{ik} \eta_i \eta_k \right).$$

**Упражнение.** Показать, что если числа  $a_{ik}$  удовлетворяют условиям (2) и (3), то  $a_{ik}^2 \leq a_{ii} a_{kk}$ . (Указание. Выбрать в только что выведенном неравенстве специальным образом числа  $\xi_1, \dots, \xi_n$  и  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ .)

4. В примере 4 скалярное произведение задается интегралом  $\int_a^b f(t) g(t) dt$ , поэтому неравенство (6) имеет вид:

$$\left( \int_a^b f(t) g(t) dt \right)^2 \leq \int_a^b f^2(t) dt \cdot \int_a^b g^2(t) dt.$$

Это неравенство играет важную роль в разных вопросах анализа.

Приведем пример неравенства, являющегося следствием неравенства Коши—Буняковского.

Для любых векторов  $x$  и  $y$  в евклидовом пространстве  $R$  имеет место неравенство

$$|x+y| \leq |x| + |y|. \quad (7)$$

**Доказательство.**

$$|x+y|^2 = (x+y, x+y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y);$$

так как (в силу неравенства Коши—Буняковского)  $2(x, y) \leq 2|x||y|$ , то

$$\begin{aligned} |x+y|^2 &= (x+y, x+y) \leq (x, x) + 2|x||y| + (y, y) = \\ &= (|x| + |y|)^2, \end{aligned}$$

т. е.  $|x+y| \leq |x| + |y|$ , что и требовалось доказать. (См. также § 3, стр. 54.)

**Упражнение.** Написать неравенство (7) в каждом из примеров евклидовых пространств, разобранных в начале этого параграфа.

В геометрии расстояние между двумя точками  $x$  и  $y$ <sup>\*)</sup> определяется как длина вектора  $x - y$ . В общем случае  $n$ -мерного евклидова пространства определим расстояние между  $x$  и  $y$  формулой

$$d = |x - y|.$$

### § 3. Ортогональный базис.

#### Изоморфизм евклидовых пространств

1. Ортогональный базис. В § 1 мы ввели понятие базиса (системы координат) аффинного пространства. В аффинном пространстве у нас нет оснований предпочтить одни базисы другим — там все базисы равноправны \*\*).

В евклидовом пространстве существуют наиболее удобные базисы, а именно ортогональные базисы. Они играют здесь ту же роль, что и прямоугольные системы координат в аналитической геометрии.

Определение 1. Будем говорить, что  $n$  векторов  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , ни один из которых не равен нулю, образуют ортогональный базис в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $R$ , если они попарно ортогональны. Векторы  $e_1, e_2, \dots, e_n$  образуют ортогональный нормированный базис, если они попарно ортогональны и имеют каждый единицу, т. е. если

$$(e_i, e_k) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k, \\ 0 & \text{при } i \neq k. \end{cases} \quad (1)$$

<sup>\*)</sup> Мы будем обозначать одной и той же буквой вектор и точку, являющуюся его концом (векторы мы проводим из начала координат, см. стр. 7).

<sup>\*\*) Точный смысл этого утверждения таков. Если внимательно просмотреть приведенное в § 1 доказательство изоморфизма аффинных пространств, то легко заметить, что там доказано несколько больше, чем сформулировано, а именно, доказано, что между двумя  $n$ -мерными пространствами можно установить изоморфное соответствие так, чтобы заданный базис одного пространства перешел в заданный базис другого пространства. В частности, если в  $R$  заданы два базиса  $e_1, e_2, \dots, e_n$  и  $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ , то существует изоморфное отображение пространства  $R$  на себя, при котором первый базис переходит во второй.</sup>

Для того чтобы данное нами определение ортогонального базиса было корректным, необходимо доказать, что входящие в определение векторы  $e_1, e_2, \dots, e_n$  действительно образуют базис, т. е. линейно независимы.

Докажем это, т. е. покажем, что равенство

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n = 0 \quad (2)$$

возможно лишь, если  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ . Умножим обе части равенства (2) скалярно на  $e_1$ . Получим:

$$\lambda_1 (e_1, e_1) + \lambda_2 (e_1, e_2) + \dots + \lambda_n (e_1, e_n) = 0.$$

Но по определению ортогонального базиса

$$(e_1, e_1) \neq 0, (e_1, e_k) = 0 \text{ при } k \neq 1.$$

Следовательно,  $\lambda_1 = 0$ . Аналогично, умножая (2) скалярно на  $e_2$ , получим, что  $\lambda_2 = 0$  и т. д. Мы доказали, таким образом, что  $e_1, e_2, \dots, e_n$  линейно независимы.

Чтобы доказать существование ортогональных базисов, воспользуемся так называемым *процессом ортогонализации*, который часто встречается в геометрии. Он состоит в том, что из данных линейно независимых векторов  $f_1, \dots, f_m$  строятся  $m$  попарно ортогональных векторов  $e_1, \dots, e_m$ .

Опишем этот процесс. Пусть даны  $m$  линейно независимых векторов  $f_1, \dots, f_m$ .

По этим векторам мы построим процессом ортогонализации  $m$  попарно ортогональных векторов.

Положим  $e_1 = f_1$ . Вектор  $e_2$  будем искать в виде:  $e_2 = f_2 + \alpha e_1$ . Число  $\alpha$  подберем так, чтобы  $(e_2, e_1) = 0$ , т. е.  $(f_2 + \alpha e_1, e_1) = 0$ . Отсюда

$$\alpha = -\frac{(f_2, e_1)}{(e_1, e_1)}.$$

Предположим, что попарно ортогональные и отличные от нуля векторы  $e_1, e_2, \dots, e_{k-1}$  уже построены. Вектор  $e_k$  ищем в виде:

$$e_k = f_k + \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{k-1} e_{k-1}, \quad (3)$$

т. е. вектор  $e_k$  мы получаем из вектора  $f_k$  «исправлением» его с помощью линейной комбинации уже построенных векторов  $e_1, e_2, \dots, e_{k-1}$ .

Коэффициенты  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1}$  находим из условия ортогональности вектора

$$e_k = f_k + \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{k-1} e_{k-1}$$

к векторам  $e_1, e_2, \dots, e_{k-1}$ :

$$(f_k + \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{k-1} e_{k-1}, e_1) = 0;$$

$$(f_k + \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{k-1} e_{k-1}, e_2) = 0;$$

• • • • • • • • • • • • • • •

$$(f_k + \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{k-1} e_{k-1}, e_{k-1}) = 0.$$

Так как векторы  $e_1, e_2, \dots, e_{k-1}$  попарно ортогональны, то эти равенства записываются в виде:

$$(f_k, e_1) + \lambda_1 (e_1, e_1) = 0;$$

$$(f_k, e_2) + \lambda_2 (e_2, e_2) = 0;$$

• • • • • • • • • • • • • • •

$$(f_k, e_{k-1}) + \lambda_{k-1} (e_{k-1}, e_{k-1}) = 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{(f_k, e_1)}{(e_1, e_1)}, & \lambda_2 &= -\frac{(f_k, e_2)}{(e_2, e_2)}, & \dots, \\ \lambda_{k-1} &= -\frac{(f_k, e_{k-1})}{(e_{k-1}, e_{k-1})}. \end{aligned} \quad (4)$$

До сих пор не было использовано то, что векторы  $f_1, f_2, \dots, f_n$  линейно независимы. Мы используем это при доказательстве того, что построенный вектор  $e_k$  отличен от нуля. Заметим предварительно, что вектор  $e_k$  есть линейная комбинация векторов  $e_1, e_2, \dots, e_{k-1}, f_k$ . Но вектор  $e_{k-1}$  можно заменить линейной комбинацией вектора  $f_{k-1}$  и векторов  $e_1, e_2, \dots, e_{k-2}$  и т. д. Окончательно мы получаем, что вектор  $e_k$  записывается в виде

$$e_k = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_{k-1} f_{k-1} + f_k. \quad (5)$$

Теперь ясно, что  $e_k \neq 0$ . Действительно, в противном случае правая часть равенства (5) была бы нулем, что противоречит линейной независимости векторов  $f_1, f_2, \dots, f_k$ , так как коэффициент при  $f_k$  равен 1. Итак, доказано, что  $e_k \neq 0$ .

Мы построили по векторам  $e_1, e_2, \dots, e_{k-1}$  и  $f_k$  вектор  $e_k$ . Таким же образом по  $e_1, e_2, \dots, e_k$  и  $f_{k+1}$  мы построим  $e_{k+1}$  и т. д.

Продолжая этот процесс до тех пор, пока не будут исчерпаны заданные векторы  $f_1, f_2, \dots, f_m$ , получаем  $m$  отличных от нуля и попарно ортогональных векторов  $e_1, e_2, \dots, e_m$ . Докажем теперь следующую теорему.

**Теорема.** Во всяком  $n$ -мерном пространстве существуют ортогональные базисы.

**Доказательство.** По определению  $n$ -мерного пространства (§ 1, п. 2) в нем существует какой-то базис  $f_1, \dots, f_n$ . С помощью процесса ортогонализации из него можно построить ортогональный базис  $e_1, \dots, e_n$ , что и доказывает теорему.

Если заменить векторы  $e_k$  векторами

$$e'_k = \frac{e_k}{\|e_k\|},$$

то это будут, как нетрудно видеть, попарно ортогональные векторы длины 1, т. е. мы получим ортогональный нормированный базис.

Нетрудно видеть, что таких базисов существует много. Действительно, уже из данного базиса  $f_1, \dots, f_n$  можно построить разные ортогональные базисы, если начинать построение с разных векторов  $f_k$ . Позднее, в гл. II, мы рассмотрим вопрос в том, как связаны между собой различные ортогональные базисы.

**Примеры ортогонализации.** 1. Пусть  $R$  — трехмерное пространство. Процесс ортогонализации в нем означает следующее: пусть даны три линейно независимых вектора  $f_1, f_2, f_3$ . Положим  $e_1 = f_1$ . Проводим затем плоскость через  $e_1 = f_1$  и  $f_2$  и в этой плоскости выбираем вектор  $e_2$ , ортогональный к  $e_1$ . Наконец, во всем пространстве находим вектор, ортогональный к  $e_1$  и к  $e_2$  (т. е. к построенной ранее плоскости).

2. Пусть  $R$  — трехмерное пространство, векторами в котором мы считаем многочлены степени не выше второй. Скалярное произведение зададим формулой

$$\int_{-1}^1 P(t) Q(t) dt.$$

Векторы 1,  $t$ ,  $t^2$  образуют базис в  $R$ . Применим к этому базису процесс ортогонализации:  $e_1 = 1$ ; вектор  $e_2$  ищем в виде:  $t + \alpha \cdot 1$ ; из условия ортогональности

$$0 = (t + \alpha \cdot 1, 1) = \int_{-1}^1 (t + \alpha) dt = 2\alpha$$

получаем  $\alpha=0$ . Значит,  $e_2=t$ . Вектор  $e_3$  ищем в виде:  $t^2+\beta t+\gamma \cdot 1$ . Из условий ортогональности получаем  $\beta=0$ ,  $\gamma=-\frac{1}{3}$ , т. е.  $e_3=t^2-\frac{1}{3}$ . Окончательно получаем ортогональный базис  $1, t, t^2-\frac{1}{3}$ .

Если разделить каждый вектор на его длину, то получим ортогональный нормированный базис.

3. Пусть  $R$ —пространство многочленов степени не выше чем  $n-1$ . Скалярное произведение определим так же, как в предыдущем примере.

Возьмем базис  $1, t, t^2, \dots, t^{n-1}$ . Процесс ортогонализации приводит нас, как и в примере 2, к последовательности многочленов

$$1, t, t^2-\frac{1}{3}, t^3-\frac{3}{5}t, \dots$$

Эти многочлены с точностью до множителей совпадают с многочленами

$$\frac{1}{2^k \cdot k!} \frac{d^k (t^2-1)^k}{dt^k},$$

которые называются многочленами Лежандра. Многочлены Лежандра образуют ортогональный, но не нормированный базис в  $R$ . Умножая каждый из этих многочленов на соответствующий множитель, мы можем построить ортогональный и нормированный базис; его элементы будем обозначать через  $P_k(t)$ .

Пусть  $e_1, e_2, \dots, e_n$ —ортогональный базис евклидова пространства  $R$ . Найдем, как выражается скалярное произведение двух векторов через их координаты в этом базисе. Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ —координаты вектора  $x$ , а  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ —координаты вектора  $y$  в этом базисе, т. е.

$$\begin{aligned} x &= \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n, \\ y &= \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \dots + \eta_n e_n. \end{aligned}$$

Тогда

$$(x, y) = (\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n, \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \dots + \eta_n e_n),$$

и так как

$$(e_i, e_k) = \begin{cases} 1 & \text{при } i=k, \\ 0 & \text{при } i \neq k, \end{cases}$$

то

$$(x, y) = \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \dots + \xi_n \eta_n, \quad (6)$$

т. е. в нормированном ортогональном базисе скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений их соответствующих координат (ср. пример 2 § 2).

**Упражнения.** 1. Показать, что в произвольном базисе  $f_1, f_2, \dots, f_n$  скалярное произведение задается формулой

$$(x, y) = \sum_{i, k=1}^n a_{ik} \xi_i \eta_k,$$

где  $a_{ik} = a_{ki}$ , а  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  и  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  — координаты векторов  $x$  и соответственно  $y$ .

2. Показать, что если в некотором базисе  $f_1, f_2, \dots, f_n$  скалярное произведение задается формулой

$$(x, y) = \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \dots + \xi_n \eta_n,$$

где  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  и  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  — координаты векторов  $x$  и  $y$ , то этот базис является ортогональным и нормированным.

Найдем координаты вектора  $x$  в нормированном ортогональном базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$ .

Пусть

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n.$$

Умножив обе части этого равенства скалярно на  $e_1$ , получим

$$(x, e_1) = \xi_1 (e_1, e_1) + \xi_2 (e_2, e_1) + \dots + \xi_n (e_n, e_1) = \xi_1$$

и, аналогично,

$$\xi_2 = (x, e_2), \dots, \xi_n = (x, e_n). \quad (7)$$

Итак: координаты вектора в ортогональном нормированном базисе суть скалярные произведения этого вектора на соответствующие базисные векторы.

Скалярное произведение вектора  $x$  на вектор  $e$  длины единицы естественно назвать *проекцией* вектора  $x$  на вектор  $e$ . Доказанное утверждение означает, что, как и в аналитической геометрии, координаты вектора в ортогональном нормированном базисе суть проекции этого вектора на базисные векторы (на оси координат).

**Примеры.** 1. Пусть  $P_0(t), P_1(t), \dots, P_n(t)$  — нормированные многочлены Лежандра нулевой, первой, ...,  $n$ -й степени. Пусть, далее,  $Q(t)$  — произвольный многочлен степени  $n$ . Представим  $Q(t)$  в виде линейной комбинации многочленов Лежандра. Совокупность многочленов степени  $\leq n$  образует  $n+1$ -мерное линейное пространство,  $P_0(t), P_1(t), \dots, P_n(t)$  образуют ортогональный базис в нем. Поэтому всякий многочлен степени  $\leq n$  представим в виде

$$Q(t) = c_0 P_0(t) + c_1 P_1(t) + \dots + c_n P_n(t).$$

Коэффициенты  $c_i$ , как это следует из (7), вычисляются по формулам

$$c_i = \int_{-1}^1 Q(t) P_i(t) dt.$$

2. Рассмотрим на интервале  $(0, 2\pi)$  систему функций

$$1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots, \cos nt, \sin nt. \quad (8)$$

Их линейная комбинация

$$P(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos 2t + \dots + b_n \sin nt$$

называется тригонометрическим многочленом  $n$ -го порядка. Совокупность тригонометрических многочленов  $n$ -го порядка образует  $(2n+1)$ -мерное пространство  $R_1$ . Определим в  $R_1$  скалярное произведение, как обычно, т. е. положим

$$(P, Q) = \int_0^{2\pi} P(t)Q(t) dt.$$

Легко проверить, что система (8) будет ортогональным базисом. Действительно,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos kt \cos lt dt &= 0, \text{ если } k \neq l, \\ \int_0^{2\pi} \sin kt \cos lt dt &= 0, \\ \int_0^{2\pi} \sin kt \sin lt dt &= 0, \text{ если } k \neq l. \end{aligned}$$

Так как

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 kt dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 kt dt = \pi, \text{ а } \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi,$$

то функции

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos t, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin t, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nt, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nt \quad (8')$$

образуют в  $R_1$  ортогональный нормированный базис.

**2. Перпендикуляр из точки на подпространство. Кратчайшее расстояние от точки до подпространства \*).**

Определение 2. Пусть  $R_1$  — подпространство евклидова пространства  $R$ . Мы будем говорить, что вектор  $h \in R$  ортогонален подпространству  $R_1$ , если он ортогонален любому вектору  $x$  из  $R_1$ .

Если вектор  $h$  ортогонален векторам  $e_1, e_2, \dots, e_m$ , то он ортогонален любой их линейной комбинации. Действительно, из равенств

$$(h, e_i) = 0$$

следует, что для любых чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$

$$(h, \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_m e_m) = 0.$$

Поэтому, для того чтобы вектор  $h$  был ортогонален  $m$ -мерному подпространству  $R_1$ , достаточно, чтобы он был ортогонален  $m$  линейно независимым векторам из  $R_1$  (базису в  $R_1$  \*\*)).

Упражнение. Показать, что совокупность всех векторов  $y \in R$ , ортогональных к подпространству  $R_1$ , также образует подпространство пространства  $R$ . Это подпространство называется *ортогональным дополнением* к подпространству  $R_1$  в пространстве  $R$ .

Рассмотрим в пространстве  $R$  некоторое  $m$ -мерное подпространство  $R_1$  \*\*\*)) и вектор  $f$ , не принадлежащий  $R_1$ . Поставим задачу: опустить перпендикуляр из точки  $f$  на  $R_1$ , т. е. найти вектор  $f_0$  из  $R_1$  такой, чтобы вектор  $h = f - f_0$  был ортогонален  $R_1$ . Вектор  $f_0$  называется при этом *ортогональной проекцией вектора  $f$  на подпространство  $R_1$* . Несколько позже мы увидим, что эта задача всегда имеет решение, притом единственное. Сейчас мы покажем, что, как и в элементарной геометрии, перпендикуляр есть кратчайшее расстояние от точки до подпространства. Другими словами, покажем, что если  $f_1$  есть отличный от  $f_0$  вектор из  $R_1$ , то

$$|f - f_1| > |f - f_0|.$$

\*.) Этот пункт можно при первом чтении пропустить.

\*\*) Для случая, когда  $R_1$  есть плоскость, эта теорема в элементарной геометрии называется теоремой о двух перпендикулярах.

\*\*\*) Размерность самого пространства  $R$  для нас несущественна. Оно может быть даже бесконечномерным.

Действительно, вектор  $f_0 - f_1$ , как разность двух векторов из  $R_1$ , принадлежит  $R_1$  и, следовательно, ортогонален вектору  $f - f_0 = f - f_1$ . По теореме Пифагора имеем:

$$|f - f_0|^2 + |f_0 - f_1|^2 = |f - f_0 + f_0 - f_1|^2 = |f - f_1|^2$$

и, значит,

$$|f - f_1| > |f - f_0|.$$

Покажем теперь, как фактически вычислить по  $f$  его ортогональную проекцию  $f_0$  на подпространство  $R_1$  (т. е. опустить перпендикуляр из  $f$  на  $R_1$ ). Пусть базис подпространства  $R_1$  состоит из векторов  $e_1, e_2, \dots, e_m$ . Будем искать вектор  $f_0$  в виде

$$f_0 = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_m e_m, \quad (9)$$

где коэффициенты  $c_k$  найдем из условия ортогональности  $f - f_0$  к  $R_1$ . Для того чтобы эта ортогональность имела место, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись  $m$  равенств  $(f - f_0, e_k) = 0$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ), т. е.

$$(f_0, e_k) = (f, e_k). \quad (10)$$

Подставляя сюда вместо  $f_0$  его выражение (9), получаем систему  $m$  уравнений

$$\begin{aligned} c_1 (e_1, e_k) + c_2 (e_2, e_k) + \dots + c_m (e_m, e_k) &= (f, e_k) \\ (k = 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (11)$$

относительно чисел  $c_i$ .

Рассмотрим сначала отдельно часто встречающийся случай, когда базис  $e_1, e_2, \dots, e_m$  — ортогональный и нормированный. В этом случае задача решается особенно просто. Действительно система (11) превращается в таком базисе в систему равенств

$$c_i = (f, e_i), \quad (12)$$

сразу определяющих нужные коэффициенты.

Так как в каждом  $m$ -мерном подпространстве можно выбрать ортогональный нормированный базис, то мы доказали, таким образом, что *у каждого вектора  $f$  существует, и притом только одна, ортогональная проекция  $f_0$  на подпространство  $R_1$* .

Вернемся теперь к случаю произвольного базиса. В этом случае система (11) также должна иметь единственное решение. Действительно, вектор  $f_0$ , по доказанному, существует и притом только один. В базисе  $e_1, e_2, \dots, e_m$  вектор  $f_0$  имеет вполне определенные координаты  $c_1, c_2, \dots, c_m$ . Так как эти числа удовлетворяют системе (11), то эта система имеет, следовательно, единственное решение. Система  $m$  уравнений с  $m$  неизвестными может иметь единственное решение, лишь если ее определитель отличен от нуля. Отсюда следует, что определитель системы (11)

$$\begin{vmatrix} (e_1, e_1) & (e_2, e_1) & \dots & (e_m, e_1) \\ (e_1, e_2) & (e_2, e_2) & \dots & (e_m, e_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (e_1, e_m) & (e_2, e_m) & \dots & (e_m, e_m) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Этот определитель называется *определителем Грама векторов*  $e_1, e_2, \dots, e_m$ .

Итак, пусть задано подпространство  $R_1$  с базисом  $e_1 \dots e_m$  и произвольный вектор  $f$  пространства  $R$ . Ортогональная проекция  $f_0$  вектора  $f$  на  $R_1$  имеет вид

$$f_0 = c_1 e_1 + \dots + c_m e_m.$$

При этом, если базис  $e_1, e_2, \dots, e_m$  ортогонален, то

$$c_i = (f, e_i).$$

Если же базис  $e_1, \dots, e_m$  произволен, то коэффициенты  $c_i$  определяются как решение системы (11).

Пример 1. Способ наименьших квадратов. Предположим, что величина  $y$  есть линейная функция величин  $x_1, \dots, x_m$ , т. е. что

$$y = c_1 x_1 + \dots + c_m x_m,$$

где  $c_1, \dots, c_m$  — постоянные, неизвестные нам коэффициенты. Часто коэффициенты  $c_1, \dots, c_m$  определяются экспериментально. Для этого производится ряд измерений величин  $x_1, \dots, x_m$  и  $y$ . Обозначим результаты  $k$ -го измерения через  $x_{1k}, \dots, x_{mk}$  и, соответственно,  $y_k$ .

Коэффициенты  $c_1, \dots, c_m$  можно было бы попытаться определить из системы уравнений

$$\left. \begin{array}{l} x_{11}c_1 + x_{21}c_2 + \dots + x_{m1}c_m = y_1, \\ x_{12}c_1 + x_{22}c_2 + \dots + x_{m2}c_m = y_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_{1n}c_1 + x_{2n}c_2 + \dots + x_{mn}c_m = y_n. \end{array} \right\} \quad (13)$$

Здесь число уравнений  $n$  равно числу произведенных измерений и обычно превосходит число неизвестных ( $n > m$ ). Так как измерение величин  $x_1, \dots, x_n, y$  неизбежно связано с погрешностями, то система (13), вообще говоря, противоречива и о ее точном решении говорить бессмысленно. Поэтому уравнениям (13) можно удовлетворить лишь приближенно. Таким образом, ставится задача разыскать такие значения неизвестных  $c_1, \dots, c_m$ , при которых левые части уравнения (13) были бы возможно более близки к соответствующим правым частям. В качестве «меры близости» берется так называемое *квадратичное уклонение* левых частей уравнений от свободных членов, т. е. величина

$$\sum_{k=1}^n (x_{1k}c_1 + x_{2k}c_2 + \dots + x_{mk}c_m - y_k)^2. \quad (14)$$

Нам нужно найти числа  $c_1, c_2, \dots, c_m$ , при которых квадратичное уклонение имеет наименьшее значение. Эту задачу на минимум можно решить непосредственно. Однако ее решение можно сразу получить из результатов, изложенных выше.

В самом деле, рассмотрим *n*-мерное евклидово пространство и векторы  $e_1 = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n})$ ,  $e_2 = (x_{21}, \dots, x_{2n})$ ,  $\dots$ ,  $e_m = (x_{m1}, \dots, x_{mn})$  и  $f = (y_1, \dots, y_n)$  в этом пространстве. Правые части уравнений системы (13) являются компонентами вектора  $f$ , левые части — вектора

$$c_1e_1 + c_2e_2 + \dots + c_me_m.$$

Выражение (14) есть, следовательно, квадрат расстояния вектора  $c_1e_1 + c_2e_2 + \dots + c_me_m$  от вектора  $f$ . Таким образом, условие, чтобы квадратичное уклонение было минимальным, равносильно следующей задаче: выбрать числа  $c_1, c_2, \dots, c_m$  так, чтобы расстояние вектора  $f$  до вектора  $f_0 = c_1e_1 + c_2e_2 + \dots + c_me_m$  было наименьшим. Если обо-

значить через  $R_1$  подпространство  $n$ -мерного пространства, состоящее из линейных комбинаций векторов  $e_1, e_2, \dots, e_m$  \*), то задача состоит в нахождении проекции вектора  $f$  на это подпространство. Как мы видели (формула (11)), числа  $c_1, c_2, \dots, c_m$ , решающие эту задачу, находятся из системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} (e_1, e_1) c_1 + (e_2, e_1) c_2 + \dots + (e_m, e_1) c_m &= (f, e_1), \\ (e_1, e_2) c_1 + (e_2, e_2) c_2 + \dots + (e_m, e_2) c_m &= (f, e_2), \\ \vdots &\quad \vdots \\ (e_1, e_m) c_1 + (e_2, e_m) c_2 + \dots + (e_m, e_m) c_m &= (f, e_m), \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где

$$(f, e_k) = \sum_{i=1}^n x_{kj} y_i, \quad (e_i, e_k) = \sum_{j=1}^n x_{ij} x_{kj}.$$

Система (15) называется в этом случае *системой нормальных уравнений*. Итак, приближенное решение системы (13) состоит в замене ее нормальной системой (15)  $m$  уравнений с  $m$  неизвестными. Изложенный метод называется *способом наименьших квадратов*.

**Упражнение.** Решить по способу наименьших квадратов систему уравнений

$$\begin{aligned} 2c &= 3, \\ 3c &= 4, \\ 4c &= 5. \end{aligned}$$

**Решение.**  $e_1 = (2, 3, 4)$ ,  $f = (3, 4, 5)$ . Нормальная система сводится в этом случае к одному уравнению:

$$(e_1, e_1) c = (e_1, f),$$

т. е.

$$29c = 40; \quad c = \frac{40}{29}.$$

Для случая, когда система (13) есть система  $n$  уравнений с одним неизвестным

$$\begin{aligned} x_1 c &= y_1, \\ x_2 c &= y_2, \\ \vdots &\quad \vdots \\ x_n c &= y_n, \end{aligned} \quad (13')$$

\*) Мы предполагаем, что ранг матрицы системы (13) равен  $m$  и, следовательно, векторы  $e_1, e_2, \dots, e_m$  линейно независимы.

решение запишется следующим образом:

$$c = \frac{(x, y)}{(x, x)} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k y_k}{\sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

Приближенное решение системы (13') может быть истолковано геометрически как проведение через начало координат прямой, проходящей «возможно более близко» от совокупности точек  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ . Число  $c$  представляет тогда угловой коэффициент такой прямой.

**Пример 2.** Приближение функций тригонометрическими многочленами. Пусть  $f(t)$  — некоторая непрерывная функция, заданная на интервале  $(0, 2\pi)$ . Часто бывает нужно подобрать тригонометрический многочлен  $P(t)$  данного порядка, возможно меньше отличающийся от  $f(t)$ . В качестве меры отклонения  $P(t)$  от  $f(t)$  мы возьмем квадратичное уклонение, которое задается формулой

$$\int_0^{2\pi} [f(t) - P(t)]^2 dt. \quad (16)$$

Итак, точная постановка рассматриваемой задачи такова: среди всех тригонометрических многочленов порядка  $n$

$$P(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + b_1 \sin t + \dots + a_n \cos nt + b_n \sin nt \quad (17)$$

найти тот, квадратичное уклонение которого от заданной функции  $f(t)$  минимально.

Введем в рассмотрение пространство  $R$  непрерывных функций на отрезке  $(0; 2\pi)$ . Скалярное произведение в этом пространстве зададим, как обычно, интегралом

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(t) g(t) dt.$$

Длина вектора выражается тогда формулой

$$|f| = \sqrt{\int_0^{2\pi} [f(t)]^2 dt},$$

и следовательно, квадратичное уклонение (16) есть в нашем пространстве просто квадрат расстояния от  $f(t)$  до  $P(t)$ . Тригонометрические многочлены вида (17) образуют в  $R$  подпространство  $R_1$ .