2. Связь между билинейными формами в пространстве R и линейными функциями в $R \otimes R$. Покажем теперь, как по билинейной форме на R можно построить линейную функцию на тензорном произведении $R \otimes R$. Пусть задана билинейная форма $f(x, y)$ на R. Сопоставим ей линейную функцию $F(X)$ на $R \otimes R$. Для элементов $X = x \otimes y$ положим

$$F(x \otimes y) = f(x, y);$$

для произвольного $X = x_1 \otimes y_1 + \ldots + x_k \otimes y_k$ полагаем

$$F(X) = f(x_1, y_1) + \ldots + f(x_k, y_k).$$

Чтобы определение $F(X)$ было корректным, нужно, чтобы на равных выражениях функция F принимала одинаковые значения. Убедимся, что это так. Для этого достаточно показать, что $F(X) = 0$ на выражениях вида 1), 2), 3) (стр. 249). Проверим, например, что

$$F((x_1 + x_2) \otimes y - x_1 \otimes y - x_2 \otimes y) = 0.$$

В самом деле, имеем:

$$\begin{aligned} F((x_1 + x_2) \otimes y - x_1 \otimes y - x_2 \otimes y) &= \\ = f(x_1 + x_2, y) + f(-x_1, y) + f(-x_2, y) &= \\ = f(x_1, y) + f(x_2, y) - f(x_1, y) - f(x_2, y) &= 0. \end{aligned}$$

Очевидно, что построенная по $f(x, y)$ функция $F(X)$ на $R \otimes R$ линейна, т. е. $F(X+Y) = F(X) + F(Y)$ и $F(\lambda X) = \lambda F(X)$. Обратно, если $F(X)$ — линейная функция на $R \otimes R$, то ей соответствует билинейная форма на R:

$$f(x, y) = F(x \otimes y).$$

Итак, мы установили естественное взаимно однозначное соответствие между билинейными формами на R и линейными функциями на $R \otimes R$.

Заметим, что это соответствие линейно; именно, если билинейным формам f_1, f_2 отвечают линейные функции F_1 и F_2, то их линейной комбинации $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ отвечает функция $\lambda_1 F_1 + \lambda F_2$. Таким образом, построенное соответствие является изоморфизмом между пространством $B(R)$ билинейных форм на R и пространством $(R \otimes R)'$ линейных функций на $R \otimes R$.

3. Размерность тензорного произведения $R \otimes R$. Докажем, что *$R \otimes R$ — конечномерное пространство размерности n^2, где n — размерность R.*

Зададим базис $e_1, \ldots, e_n$ в пространстве R. Пусть x, y — произвольные векторы из R; разложим их по векторам базиса:

$$x = \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_n e_n, \quad y = \eta_1 e_1 + \ldots + \eta_n e_n.$$

Тогда

$$x \otimes y = \sum_{i,\, j=1}^{n} \xi_i \eta_j (e_i \otimes e_j).$$

Таким образом, $x \otimes y$, а значит, и любой другой вектор из $R \otimes R$ является линейной комбинацией n^2 векторов $e_i \otimes e_j$.

Убедимся, что векторы $e_i \otimes e_j$ линейно независимы. Для этого воспользуемся следующей простой леммой, доказательство которой предоставляется читателю.

Лемма. *Пусть L — линейное пространство и $X_\alpha (\alpha = 1, \ldots, N)$ — векторы из L. Если для каждого $\alpha = 1, \ldots, N$ существует линейная функция $F_\alpha(X)$ на L такая, что $F_\alpha(X_\alpha) = 1$ и $F_\alpha(X_\beta) = 0$ при $\beta \neq \alpha$, то векторы X_α линейно независимы.*

Зададим для каждого $i = 1, \ldots, n$ линейную функцию $f_i(x)$ на R такую, что $f_i(e_i) = 1$ и $f_i(e_j) = 0$ при $j \neq i$. Так как векторы $e_1, \ldots, e_n$ образуют базис в R, то такая функция существует и единственна. Положим

$$f_{ij}(x, y) = f_i(x) f_j(y), \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Функция $f_{ij}(x, y)$ является билинейной формой на R; значит, согласно п. 2 ей соответствует линейная функция $F_{ij}(X)$ на $R \otimes R$ такая, что

$$F_{ij}(x \otimes y) = f_i(x) f_j(y).$$

Убедимся, что эта линейная функция $F_{ij}(X)$ равна 1 на $e_i \otimes e_j$ и равна 0 на остальных векторах $e_{i'} \otimes e_{j'}$. В самом деле, $F_{ij}(e_{i'} \otimes e_{j'}) = f_i(e_{i'}) f_j(e_{j'})$, и наше утверждение сразу следует из определения функций $f_i(x)$ и $f_j(x)$.

В силу леммы этим доказано, что векторы $e_i \otimes e_j$ линейно независимы. Так как, с другой стороны, по ним

раскладывается любой вектор в $R \otimes R$, то векторы $e_i \otimes e_j$ образуют базис в $R \otimes R$. Таким образом, размерность $R \otimes R$ равна числу векторов $e_i \otimes e_j$, т. е. равна n^2.

4. Тензорное произведение $R_1 \otimes \ldots \otimes R_m$. Определяя тензорное произведение $R \otimes R$, мы фактически нигде не пользовались тем, что векторы x и y в произведении $x \otimes y$ берутся из одного и того же пространства. Поэтому, повторяя дословно определения п. 1, можно определить также тензорное произведение $R_1 \otimes R_2$ двух различных пространств R_1 и R_2.

Если $e_1, \ldots, e_m$—базис в R_1, а $f_1, \ldots, f_n$—базис в R_2, то базисом в $R_1 \otimes R_2$ служат mn векторов $e_i \otimes f_j$ $(i=1, \ldots, m;\ j=1, \ldots, n)$.

Отметим, что пространства $R_1 \otimes R_2$ и $R_2 \otimes R_1$ различны по определению.

Аналогично определяется тензорное произведение любого числа линейных пространств. Так, например, элементами тензорного произведения $R_1 \otimes R_2 \otimes R_3$ являются формальные суммы

$$x_1 \otimes y_1 \otimes z_1 + \ldots + x_k \otimes y_k \otimes z_k, \tag{4}$$

где x_i—элементы из R_1, y_i—элементы из R_2 и z_i—элементы из R_3. Операции сложения и умножения на число определяются так же, как и в случае двух сомножителей. Читателю предлагается установить, какие выражения вида (4) при этом следует считать равными.

Тензорное произведение m линейных пространств $R_1, \ldots, R_m$ часто обозначают так: $\bigotimes_{i=1}^{m} R_i$. В случае, когда все сомножители R_i совпадают с одним и тем же пространством R, их тензорное произведение называется m-й тензорной степенью R и обозначается так: $\overset{m}{\otimes} R$.

5. Связь между тензорами и элементами тензорных произведений. Мы покажем, что любой тензор в пространстве R можно рассматривать как элемент некоторого тензорного произведения. Сначала убедимся в этом для тензоров ранга 2, дважды ковариантных.

Согласно § 24, п. 3, тензор ранга 2, дважды ковариантный, задается билинейной формой на R. Но мы

уже знаем, что между билинейными формами на R и линейными функциями на $R \otimes R$ имеется естественное взаимно однозначное линейное соответствие. Значит, в силу этого соответствия любой тензор ранга 2, дважды ковариантный, можно рассматривать как линейную функцию на $R \otimes R$, т. е. как элемент сопряженного пространства $(R \otimes R)'$.

С другой стороны, мы установим сейчас естественный изоморфизм $(R \otimes R)' \cong R' \otimes R'$. В силу этого изоморфизма любой тензор ранга 2, дважды ковариантный, можно рассматривать как элемент из тензорного произведения $R' \otimes R'$.

Построим изоморфизм $(R \otimes R)' \cong R' \otimes R'$. Пусть $F \in R' \otimes R'$, т. е.

$$F = f^1 \otimes g^1 + \ldots + f^l \otimes g^l,$$

где f^i, g^i — линейные функции на R. Мы должны сопоставить F элемент из $(R \otimes R)'$, т. е. линейную функцию $F(X)$ на $R \otimes R$. Определим эту функцию по формулам

$$F(x \otimes y) = f^1(x)\, g^1(y) + \ldots + f^l(x)\, g^l(x),$$
$$F(x_1 \otimes y_1 + \ldots + x_k \otimes y_k) = F(x_1 \otimes y_1) + \ldots + F(x_k \otimes y_k).$$

Читателю предлагается убедиться, что эти формулы действительно определяют линейную функцию на $R \otimes R$ и что построенное соответствие — изоморфизм.

Рассмотрим теперь тензоры ранга 2, дважды контравариантные. Каждый из них задается билинейной формой на R'. Но между билинейными формами на R' и линейными функциями на $R' \otimes R'$ имеется естественное взаимно однозначное линейное соответствие. Значит, тензоры ранга 2, дважды контравариантные, можно рассматривать как элементы пространства $(R' \otimes R')' \cong R \otimes R$.

Перейдем к общему случаю. Рассмотрим тензоры ранга $p+q$, p раз ковариантные и q раз контравариантные. Из § 23, п. 3, мы знаем, что им однозначно отвечают полилинейные функции $l(x, y, \ldots, f, g, \ldots)$ от p векторов $x, y, \ldots$ из R и q векторов $f, g, \ldots$ из R'.

Подобно тому, как это делалось в п. 2 для билинейных форм, можно установить естественное взаимно однозначное линейное соответствие между такими полилиней-

ными функциями $l(x, y, \ldots, f, g, \ldots)$ и линейными функциями на тензорном произведении $\underbrace{R\otimes\ldots\otimes R}_{p\text{ раз}}\otimes$ $\otimes\underbrace{R'\otimes\ldots\otimes R'}_{q\text{ раз}}$.

Именно, если $F(X)$ — линейная функция на тензорном произведении $\underbrace{R\otimes\ldots\otimes R}_{p\text{ раз}}\otimes\underbrace{R'\otimes\ldots\otimes R'}_{q\text{ раз}}$, то ей отвечает полилинейная функция $l(x, y, \ldots; f, g, \ldots)$ от p векторов из R и q векторов из R':

$$l(x, y, \ldots; f, g, \ldots)=F(x\otimes y\otimes\ldots\otimes f\otimes g\otimes\ldots). \qquad (5)$$

Обратно, если задана полилинейная функция $l(x, y, \ldots; f, g, \ldots)$, то существует (и притом единственная) линейная функция на тензорном произведении $\underbrace{R\otimes\ldots\otimes R}_{p\text{ раз}}\otimes\underbrace{R'\otimes\ldots\otimes R'}_{q\text{ раз}}$, удовлетворяющая соотношению (5). (Доказать.)

Значит, тензоры ранга $p+q$, p раз ковариантные и q раз контравариантные, можно рассматривать как линейные функции на $\underbrace{R\otimes\ldots\otimes R}_{p\text{ раз}}\otimes\underbrace{R'\otimes\ldots\otimes R'}_{q\text{ раз}}$, т. е. как элементы из сопряженного пространства

$$(\underbrace{R\otimes\ldots\otimes R}_{p\text{ раз}}\otimes\underbrace{R'\otimes\ldots\otimes R'}_{q\text{ раз}})'\cong$$

$$\cong\underbrace{R'\otimes\ldots\otimes R'}_{p\text{ раз}}\otimes\underbrace{R\otimes\ldots\otimes R}_{q\text{ раз}}.$$

6. Тензорное произведение линейных преобразований. Мы научились по каждой паре линейных пространств R_1, R_2 строить новое линейное пространство — их тензорное произведение $R_1\otimes R_2$. Однако этим задача не заканчивается. Можно еще по линейным преобразованиям в каждом из пространств R_1, R_2 построить линейное преобразование в их тензорном произведении.

Итак, пусть заданы линейное преобразование A пространства R_1 в R_1 и линейное преобразование B пространства R_2 в R_2 *). Мы построим по ним линейное пре-

*) Иногда это записывают так: A: $R_1\longrightarrow R_1$ и B: $R_2\longrightarrow R_2$.

образование пространства $R_1 \otimes R_2$ в $R_1 \otimes R_2$, которое будем называть тензорным произведением преобразований A и B и обозначать через $A \otimes B$.

Рассмотрим тензорное произведение $R_1 \otimes R_2$ пространств R_1 и R_2. Напомним, что элементами $R_1 \otimes R_2$ являются формальные суммы

$$x_1 \otimes y_1 + \ldots + x_k \otimes y_k,$$

где $x_i \in R_1$, $y_i \in R_2$, $i = 1, \ldots, k$.

Тензорным произведением $A \otimes B$ линейного преобразования A пространства R_1 в R_1 и линейного преобразования B пространства R_2 в R_2 называется линейное преобразование C пространства $R_1 \otimes R_2$ в $R_1 \otimes R_2$, определяемое следующим образом:

$$C(x_1 \otimes y_1 + \ldots + x_k \otimes y_k) = \\ = (Ax_1) \otimes (By_1) + \ldots + (Ax_k) \otimes (By_k) \text{ *)}.$$

Более общо, если имеются два линейных пространства R_1, S_1, два других линейных пространства R_2, S_2 и линейные преобразования A: $R_1 \to S_1$ и B: $R_2 \to S_2$, то можно аналогично определить линейное преобразование

$$A \otimes B\colon\ R_1 \otimes R_2 \to S_1 \otimes S_2.$$

Отметим, что каждому линейному преобразованию A пространства R_1 естественным образом отвечает линейное преобразование пространства $R_1 \otimes R_2$, а именно $A \otimes 1$, где 1 — единичное преобразование; аналогично каждому линейному преобразованию B пространства R_2 можно поставить в соответствие линейное преобразование $1 \otimes B$ пространства $R_1 \otimes R_2$.

Установим, как выражается матрица линейного преобразования $C = A \otimes B$ через матрицы преобразований A и B. Зададим базис $e_1, \ldots, e_m$ в пространстве R_1 и базис $f_1, \ldots, f_n$ в пространстве R_2. Тогда векторы $e_i \otimes f_j$ образуют базис в тензорном произведении $R_1 \otimes R_2$.

---

*) Легко проверить, что определение корректно, т. е. равные выражения преобразуются в равные.

Пусть $\boldsymbol{A}=\|a_{ij}\|$ — матрица преобразования A в базисе $e_1, \ldots, e_m$; $\boldsymbol{B}$ — матрица преобразования B в базисе $f_1, \ldots, f_n$, т. е.

$$Ae_k=\sum_{i=1}^{m} a_{ik}e_i, \quad Bf_l=\sum_{j=1}^{n} b_{jl}f_j.$$

Тогда $C=A\otimes B$ преобразует базисные векторы $e_k\otimes f_l$ по следующей формуле:

$$C(e_k\otimes f_l)=(Ae_k)\otimes(Bf_l)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ik}b_{jl}(e_i\otimes f_j).$$

Таким образом, матрица линейного преобразования C есть матрица $\boldsymbol{C}=\|c_{ij,kl}\|$ порядка mn, строки и столбцы которой занумерованы парами индексов (i, j), $i=1, \ldots, m$; $j=1, \ldots, n$. При этом $c_{ij,kl}=a_{ik}b_{jl}$. Такая матрица $\boldsymbol{C}$ называется *кронекеровским произведением* матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$.

Упражнение. Доказать, что определитель кронекеровского произведения матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ равен произведению определителей матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$.

7. Понятие функтора. В этой главе мы рассмотрели несколько типов операций над линейными пространствами, как, например, операции перехода к сопряженному пространству или тензорное умножение. Дадим общее определение таких операций.

Мы говорим, что задан ковариантный функтор (или, более подробно, *ковариантный функтор в категории линейных пространств* *), *если задано правило, сопоставляющее каждому линейному пространству R некоторое линейное пространство $F(R)$ и каждому линейному преобразованию A: $R_1\longrightarrow R_2$ некоторое линейное преобразование $F(A)$ пространства $F(R_1)$ в $F(R_2)$* (в наших обозначениях, $F(A)$: $F(R_1)\longrightarrow F(R_2)$). *При этом предполагаются выполненными следующие условия:*

1) *если 1 — единичное преобразование в R, то $F(1)$ — единичное преобразование в пространстве $F(R)$;*

2) *если A: $R_1\longrightarrow R_2$ и B: $R_2\longrightarrow R_3$ — два линейных преобразования, то*

$$F(BA)=F(B)F(A).$$

Примером ковариантного функтора является тензорное умножение. Именно пусть S — фиксированное пространство. Отнесем

---

*) Понятие функтора можно ввести для произвольной категории. Общие определения категории и функтора см., например, в книге: С. Ленг, Алгебра, «Мир», 1968.

каждому линейному пространству R пространство $F(R)=R\otimes S$ и каждому линейному преобразованию A: $R_1\longrightarrow R_2$ линейное преобразование $F(A)=A\otimes 1$ пространства $R_1\otimes S$ в $R_2\otimes S$. Нетрудно проверить, что при этом свойства 1) и 2) выполняются; таким образом, F — ковариантный функтор.

Аналогично определяется контравариантный функтор. *Мы говорим, что задан контравариантный функтор F, если задано правило, сопоставляющее каждому линейному пространству R некоторое линейное пространство $F(R)$ и каждому линейному преобразованию A: $R_1\longrightarrow R_2$ некоторое линейное преобразование $F(A)$: $F(R_2)\longrightarrow F(R_1)$. При этом предполагаются выполненными условие* 1) *и условие*

2′) *если A: $R_1\longrightarrow R_2$ и B: $R_2\longrightarrow R_3$ — два линейных преобразования, то*

$$F(BA)=F(A)\,F(B).$$

Примером контравариантного функтора является операция перехода к сопряженным пространствам. Именно отнесем каждому линейному пространству R сопряженное ему пространство $F(R)=R'$ и каждому линейному преобразованию A: $R_1\longrightarrow R_2$ сопряженное преобразование $F(A)=A'$. Нетрудно проверить (см. п. 2 § 23), что при этом свойства 1) и 2′) выполняются; таким образом, F — контравариантный функтор.

Задача. Пусть S — фиксированное линейное пространство. Обозначим через $\mathrm{Hom}(R, S)$ пространство всех линейных преобразований A: $R\longrightarrow S$. Для любого линейного пространства R положим $F(R)=\mathrm{Hom}(R, S)$. Мы определили, таким образом, операцию F на множестве линейных пространств. Требуется определить F также на множестве линейных преобразований таким образом, чтобы F стало контравариантным функтором.

8. Симметрическая и внешняя степени. Наряду с тензорным произведением $R\otimes R$ полезно также рассматривать симметрическую степень и внешнюю степень пространства R; особенно важным понятием является внешняя степень. Эти пространства строятся аналогично тензорному произведению.

Начнем с определения симметрического квадрата $S^2(R)$. Напомним, что элементами пространства $R\otimes R$ являются выражения

$$x_1\otimes y_1+\ldots+x_k\otimes y_k, \tag{6}$$

где x_i, y_i — элементы из R. При этом предполагается, что

1) $(x_1+x_2)\otimes y-x_1\otimes y-x_2\otimes y=0;$

2) $x\otimes(y_1+y_2)-x\otimes y_1-x\otimes y_2=0;$

3) $(\lambda x)\otimes y-x\otimes(\lambda y)=0.$

Элементы $x \otimes y$ и $y \otimes x$ в $R \otimes R$ являются при $y \neq x$, по определению, различными.

Однако иногда удобно ввести пространство, в котором $x \otimes y = y \otimes x$.

Для этого дополним условия 1)—3) следующим:

4) $x \otimes y - y \otimes x = 0$.

Приравняем также нулю и все линейные комбинации выражений 1), 2), 3) и 4). Два выражения X и X' вида (6) будем теперь считать равными, если для них существуют такие выражения $Z=0$ и $Z'=0$, что $X+Z$ и $X'+Z'$ совпадают.

В результате мы получим линейное пространство, элементы которого — классы равных между собой выражений вида (6), а операции сложения и умножения на число определены, как и для тензорного произведения $R \otimes R$, по формулам (2) и (3). (Читателю предлагается убедиться в корректности определений этих операций и в том, что все аксиомы линейного пространства здесь выполнены.) Это пространство называется *симметрическим квадратом пространства* R и обозначается через $S^2(R)$.

Упражнение. Доказать, что размерность $S^2(R)$ равна $\frac{n(n+1)}{2}$, где n — размерность R.

Другим важным понятием является внешний квадрат R. Чтобы это пространство построить, дополним условия 1), 2) и 3) следующим условием:

4′) $x \otimes x = 0$.

После этого мы определим равенство двух выражений вида (6) подобно тому, как это уже делалось для тензорного произведения $R \otimes R$ и для симметрического квадрата $S^2(R)$. Получаемое линейное пространство, элементы которого — классы равных между собой выражений вида (6), называется *внешним квадратом пространства* R и обозначается через $R \wedge R$ (по-другому, $\overset{2}{\wedge} R$).

Лемма. *В пространстве* $R \wedge R$ *имеет место равенство*

$$x \otimes y + y \otimes x = 0. \tag{7}$$

В самом деле, имеем:

$$x \otimes y + y \otimes x = (x+y) \otimes (x+y) - x \otimes x - y \otimes y.$$

Таким образом, выражение $x \otimes y + y \otimes x$ является линейной комбинацией выражений вида 4'), и, значит, оно равно нулю.

Выражение $x \otimes y$, рассматриваемое как элемент из $R \wedge R$, называют *внешним произведением векторов* x *и* y и обозначают так: $x \wedge y$. Равенство (7) означает, что внешнее произведение векторов антисимметрично: $x \wedge y = -y \wedge x$.

Покажем, что $S^2(R)$ и $R \wedge R$ можно определить и как подпространства в $R \otimes R$; точнее, в $R \otimes R$ имеются подпространства, естественным образом изоморфные $S^2(R)$ и $R \wedge R$.

Для этого зададим в пространстве $R \otimes R$ линейное преобразование σ, определяемое по формуле

$$\sigma(x_1 \otimes y_1 + \ldots + x_k \otimes y_k) = y_1 \otimes x_1 + \ldots + y_k \otimes x_k.$$

Очевидно, что его квадрат есть единичное преобразование: $\sigma^2 = 1$.

Рассмотрим два подпространства в $R \otimes R$ — подпространство H_1 элементов X, для которых $\sigma X = X$, и подпространство H_2 элементов X, для которых $\sigma X = -X$. Эти подпространства имеют нулевое пересечение, так как из условий $\sigma X = X$ и $\sigma X = -X$ следует, что $X = 0$. Покажем, что их прямая сумма есть все пространство $R \otimes R$. В самом деле, представим любой элемент X из $R \otimes R$ в виде суммы $X = X_1 + X_2$, где $X_1 = \frac{1}{2}(X + \sigma X)$ и $X_2 = \frac{1}{2}(X - \sigma X)$. Очевидно, что $\sigma X_1 = X_1$, т. е. $X_1 \in H_1$, и $\sigma X_2 = -X_2$, т. е. $X_2 \in H_2$.

Покажем теперь, что при естественном отображении $R \otimes R$ на $S^2(R)$ в нуль переходят все элементы из H_2, и притом только они. В самом деле, пусть $X \in R \otimes R$ переходит при этом отображении в нуль; тогда X равно линейной комбинации выражений вида 4), т. е. выражений $x \otimes y - y \otimes x$; следовательно, $\sigma X = -X$, т. е. $X \in H_2$. Обратно, пусть $X \in H_2$, т. е. $\sigma X = -X$; тогда $X = \frac{1}{2}(X - \sigma X)$; следовательно, X равно линейной комбинации выражений вида 4) и, значит, переходит в нуль при отображении $R \otimes R$ на $S^2(R)$.

Поскольку $R \otimes R$ является прямой суммой H_1 и H_2, то этим доказано, что при отображении $R \otimes R$ на $S^2(R)$ подпространство H_1 изоморфно отображается на $S^2(R)$.

Итак, мы установили изоморфизм между $S^2(R)$ и подпространством $H_1 \subset R \otimes R$ элементов X, для которых $\sigma X = X$.

Аналогично устанавливается изоморфизм между $R \wedge R$ и подпространством $H_2 \subset R \otimes R$ элементов X, для которых $\sigma X = -X$.

Упражнение. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в R. Доказать, что элементы $e_i \wedge e_j$, где $i < j$, образуют базис в $R \wedge R$.

9. Внешняя степень $\overset{m}{\wedge} R$. Теперь дадим определение внешней степени $\overset{m}{\wedge} R$ пространства R для произвольного m. Рассмотрим m-ю тензорную степень $\overset{m}{\otimes} R$. Напомним, что элементами пространства $\overset{m}{\otimes} R$ являются формальные суммы выражений вида

$$x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_m, \tag{8}$$

где $x_i \in R$, причем некоторые из таких сумм считаются равными между собой. Приравняем дополнительно нулю все выражения вида (8), у которых совпадают хотя бы два сомножителя, а также любые их линейные комбинации. То линейное пространство, которое при этом получается, называется *внешней m-й степенью пространства R* и обозначается через $\overset{m}{\wedge} R$.

Выражение $x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_m$, рассматриваемое как элемент из $\overset{m}{\wedge} R$, называется *внешним произведением векторов* $x_1, \ldots, x_m$ и обозначается $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_m$. Нетрудно убедиться (подобно тому, как это уже делалось для случая двух сомножителей), что *внешнее произведение векторов антисимметрично*, т. е. оно меняет знак при перестановке любых двух сомножителей.

Среди внешних степеней пространства R имеется лишь конечное число отличных от нуля. Именно покажем, что $\overset{m}{\wedge} R = 0$ при $m > n$, где n — размерность R. Для этого зададим базис $e_1, \ldots, e_n$ в пространстве R. Разлагая векторы из R по элементам базиса, мы убеждаемся, что любое внешнее произведение $x_1 \wedge \ldots \wedge x_m$, а значит, и любой элемент из $\overset{m}{\wedge} R$, является линейной комбинацией выражений $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_m}$. Но если $m > n$, то в каждом выражении $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_m}$ совпадают хотя бы два сомножителя; значит, всегда $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_m} = 0$. Итак, $\overset{m}{\wedge} R = 0$ при $m > n$.

Покажем также, что *пространство $\overset{n}{\wedge} R$, где n — размерность R, является одномерным пространством.* В самом

деле, среди элементов $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}$ отличны от нуля только те, у которых индексы $i_1, \ldots, i_n$ попарно различны и, значит, являются перестановками индексов $1, \ldots, n$. Так как внешнее произведение векторов антисимметрично, то такие отличные от нуля элементы совпадают, с точностью до знака, с элементом $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$. Поскольку любой элемент из $\overset{n}{\wedge} R$ является линейной комбинацией векторов $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}$, то тем самым он кратен вектору $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$.

Упражнения. 1. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в R и $e_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j$ — любые n векторов из R. Доказать, что $e_1' \wedge \ldots \wedge e_n' = a e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$, где a — определитель матрицы $\| a_{ij} \|$.

2. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в R. Доказать, что выражения $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_m}$, где $i_1 < i_2 < \ldots < i_m$, образуют базис в $\overset{m}{\wedge} R$. На основании этого вычислить размерность пространства $\overset{m}{\wedge} R$.

Задача. Дать (по аналогии со случаем $m=2$) определение m-й симметрической степени $S^m(R)$ пространства R для любого m.

10. Тензорное произведение евклидовых пространств. Пусть R_1 — евклидово пространство со скалярным произведением $(x, x')_1$, R_2 — другое евклидово пространство со скалярным произведением $(y, y')_2$. Тогда в их тензорном произведении $R_1 \otimes R_2$ можно естественным образом ввести скалярное произведение.

Сначала определим его для пары векторов $x \otimes y$ и $x' \otimes y'$, полагая

$$(x \otimes y, x' \otimes y') = (x, x')_1 \cdot (y, y')_2.$$

Если теперь

$$X = x_1 \otimes y_1 + \ldots + x_k \otimes y_k,$$

$$X' = x_1' \otimes y_1' + \ldots + x_l' \otimes y_l'$$

— произвольные векторы из $R_1 \otimes R_2$, то положим:

$$(X, X') = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} (x_i \otimes y_i, x_j' \otimes y_j'). \tag{9}$$

Читателю предлагается убедиться, что выражение (9) действительно задает скалярное произведение на $R_1 \otimes R_2$. Именно, оно имеет смысл на $R_1 \otimes R_2$ (т. е. сохраняется при замене выражений X и X' на равные) и удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения.

Пространство $R_1 \otimes R_2$ с введенным в нем так скалярным произведением называется *тензорным произведением евклидовых пространств* R_1 и R_2.

Заметим, что если $e_1, \ldots, e_m$ — ортонормированный базис в R_1, а $f_1, \ldots, f_n$ — ортонормированный базис в R_2, то векторы $e_i \otimes f_j$ образуют ортонормированный базис в тензорном произведении $R_1 \otimes R_2$. В самом деле,

$$(e_i \otimes f_j,\ e_{i'} \otimes f_{j'}) = (e_i,\ e_{i'})_1 (f_j,\ f_{j'})_2.$$

Значит, это выражение равно 1 при $i = i'$, $j = j'$ и равно нулю во всех остальных случаях.

ДОБАВЛЕНИЕ

ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Точное вычисление собственных значений и собственных векторов самосопряженного линейного преобразования часто наталкивается на значительные вычислительные трудности. Одним из распространенных методов приближенного вычисления собственных значений в квантовой механике и во многих задачах теории колебаний является так называемый метод возмущений. Этот метод, применимый к линейным преобразованиям как в вещественном, так и в комплексном пространстве, грубо говоря, состоит в следующем: пусть известны собственные значения и собственные векторы некоторого самосопряженного линейного преобразования A. Рассмотрим преобразование $A+\varepsilon B$, где B — произвольное самосопряженное преобразование. Тогда собственные значения $A+\varepsilon B$ суть функции от ε. Можно показать, что при $\varepsilon \longrightarrow 0$ собственные значения и векторы $A+\varepsilon B$ стремятся к собственным значениям и векторам A. Задача состоит в нахождении «поправок» к собственным значениям и векторам при замене преобразования A на $A+\varepsilon B$.

§ 1. Случай некратных собственных значений

Пусть A имеет различные собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ и пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — соответствующие им нормированные собственные векторы. Пусть, далее, B — какое-либо другое самосопряженное линейное преобразование. Собственные значения преобразования $A+\varepsilon B$ обозначим через $\lambda_1(\varepsilon), \lambda_2(\varepsilon), \ldots, \lambda_n(\varepsilon)$, а соответствующие собственные векторы — через $e_1(\varepsilon), e_2(\varepsilon), \ldots, e_n(\varepsilon)$. Можно доказать, что $\lambda_k(\varepsilon)$ и $e_k(\varepsilon)$ являются непрерывными

и дифференцируемыми функциями от ε, причем $\lambda_k(0)=\lambda_k$, а $e_k(0)=e_k$. Представим эти функции в виде

$$\lambda_k(\varepsilon)=\lambda_k+\varepsilon\lambda_k^{(1)}+\ldots$$

и

$$e_k(\varepsilon)=e_k+\varepsilon e_k^{(1)}+\ldots{}^{*)}$$

и будем сначала искать $\lambda_k^{(1)}$ и $e_k^{(1)}$, т. е. «главную часть» поправки к $e_k=e_k(0)$ и $\lambda_k=\lambda_k(0)$. Мы имеем

$$(A+\varepsilon B)\,e_k(\varepsilon)=\lambda_k(\varepsilon)\,e_k(\varepsilon),$$

т. е.

$$(A+\varepsilon B)\,(e_k+\varepsilon e_k^{(1)}+\ldots)=$$
$$=(\lambda_k+\varepsilon\lambda_k^{(1)}+\ldots)\,(e_k+\varepsilon e_k^{(1)}+\ldots).$$

Сравним члены первой степени относительно ε в обеих частях равенства. Мы получим

$$Ae_k^{(1)}+Be_k=\lambda_k e_k^{(1)}+\lambda_k^{(1)}e_k. \tag{1}$$

Умножим обе части (1) скалярно на e_k:

$$(Ae_k^{(1)},\ e_k)+(Be_k,\ e_k)=\lambda_k(e_k^{(1)},\ e_k)+\lambda_k^{(1)}(e_k,\ e_k).$$

Так как, в силу самосопряженности преобразования A,

$$(Ae_k^{(1)},\ e_k)=(e_k^{(1)},\ Ae_k)=\lambda_k(e_k^{(1)},\ e_k),$$

то

$$(Be_k,\ e_k)=\lambda_k^{(1)}(e_k,\ e_k)=\lambda_k^{(1)}.$$

Отсюда

$$\lambda_k^{(1)}=(Be_k,\ e_k), \tag{2}$$

и первая половина нашей задачи таким образом решена.

Вычислим теперь главный член поправки к собственному вектору $e_k(\varepsilon)$, т. е. $e_k^{(1)}$. Для этого умножим скалярно обе части равенства (1) на e_i, где $i\neq k$. Так как векторы e_k и e_i ортогональны, т. е. $(e_k,\ e_i)=0$ при $i\neq k$, то мы получим

$$(Ae_k^{(1)},\ e_i)+(Be_k,\ e_i)=\lambda_k(e_k^{(1)},\ e_i).$$

---

*) Многоточие здесь и в дальнейшем означает, что отброшено слагаемое порядка выше первого по сравнению с ε. Мы не пишем вместо многоточия $o(\varepsilon)$, чтобы не загромождать изложения.

Но, аналогично предыдущему, мы имеем

$$(Ae_k^{(1)},\ e_i) = (e_k^{(1)},\ Ae_i) = \lambda_i (e_k^{(1)},\ e_i),$$

поэтому

$$(e_k^{(1)},\ e_i) = \frac{(Be_k,\ e_i)}{\lambda_k - \lambda_i}, \qquad i \neq k. \tag{3}$$

Совокупность этих равенств и определяет вектор $e_k^{(1)}$.

Запишем формулы (2) и (3) в координатной форме. Для этого удобнее всего выбрать в качестве базиса собственные векторы $e_1, \ldots, e_k$ «невозмущенного» преобразования A. Матрицу преобразования B в этом базисе обозначим через b_{ij}, т. е. $Be_j = \sum b_{jk} e_k$ и, следовательно,

$$(Be_j,\ e_i) = b_{ij}.$$

Координаты вектора $e_k^{(1)}$ — главного члена «поправки» — обозначим через $\xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots, \xi_n$, т. е.

$$e_k^{(1)} = \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_n e_n \tag{4}$$

и, значит,

$$\xi_i = (e_k^{(1)},\ e_i).$$

Формулы (2) и (3) приобретут вид

$$\lambda_k^{(1)} = b_{kk}, \tag{2'}$$

$$\xi_i = \frac{b_{ik}}{\lambda_k - \lambda_i}. \tag{3'}$$

Сам вектор $e_k^{(1)}$ определяется числами $\xi_i = (e_k^{(1)},\ e_i)$ по формуле (4). У нас осталась неопределенной k-я координата ξ_k. Она определяется из условия нормировки собственного вектора, т. е. из условия, чтобы длина вектора $e_k + \varepsilon e_k^{(1)} + \ldots$ была равна единице. Мы имеем

$$(e_k + \varepsilon e_k^{(1)} + \ldots,\ e_k + \varepsilon e_k^{(1)} + \ldots) = 1,$$

т. е.

$$(e_k,\ e_k) + \varepsilon[(e_k^{(1)},\ e_k) + (e_k,\ e_k^{(1)})] + \ldots = 1.$$

Сравнивая члены при первых степенях ε, имеем $(e_k^{(1)}, e_k) + (e_k, e_k^{(1)}) = 0$. Этому условию можно удовлетворить, полагая *)

$$\xi_k = (e_k^{(1)}, e_k) = 0. \tag{5}$$

Окончательно имеем

$$\lambda_k^{(1)} = b_{kk}, \tag{I}$$

$$e_k^{(1)} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{b_{ik}}{\lambda_k - \lambda_i} e_i, \tag{II}$$

где $b_{ik} = (Be_k, e_i)$, а λ_k — собственные значения «невозмущенного» преобразования A.

Для получения формул (I) и (II) мы выбрали базис, состоящий из собственных векторов преобразования A. При произвольном базисе формулы (2) и (3) также определяют $\lambda_k^{(1)}$ и $e_k^{(1)}$. Чтобы получить формулы, аналогичные (I) и (II) в произвольном ортогональном базисе, надо знать только координаты векторов e_k и матрицу преобразования B в этом базисе. Пусть матрица B есть $\|\beta_{\mu\nu}\|$, а $e_k^{(1)} = \{c_1^{(k)}, \ldots, c_n^{(k)}\}$. Тогда из (2) получаем

$$\lambda_k = \sum_{\mu, \nu=1}^{n} \beta_{\mu\nu} c_\mu^{(k)} c_\nu^{(k)},$$

а из (3) получаем систему уравнений для определения координат $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ вектора $e_k^{(1)}$:

$$\zeta_1 c_1^{(i)} + \zeta_2 c_2^{(i)} + \ldots + \zeta_n c_n^{(i)} = \frac{\sum\limits_{\mu, \nu} \beta_{\mu\nu} c_\mu^{(i)} c_\nu^{(k)}}{\lambda_k - \lambda_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n).$$

Недостающее уравнение снова получаем из условия (5) нормировки вектора $e_k(\varepsilon)$:

$$\zeta_1 c_1^{(k)} + \zeta_2 c_2^{(k)} + \ldots + \zeta_n c_n^{(k)} = 0.$$

---

*) В комплексном случае $(e_k^{(1)}, e_k) + (e_k, e_k^{(1)}) = 2Re\,(e_k^{(1)}, e_k)$, и мы могли бы считать $(e_k^{(1)}, e_k)$ не только нулем, но и произвольным чисто мнимым числом. Это связано с тем, что нормировка собственного вектора определяет его в комплексном случае с точностью до множителя, по модулю равного единице.

Так как векторы $e_1, \ldots, e_n$ линейно независимы, то определитель этой системы отличен от нуля, и числа $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ определяются из нее однозначно.

Найдем теперь собственные значения во втором приближении, т. е. с точностью до членов порядка ε^2.

Мы видели, что, для того чтобы найти собственное значение в первом приближении [формула (2)], достаточно было знать собственный вектор в нулевом приближении. Аналогично, для того чтобы найти второе приближение к собственному значению, нам достаточно будет знать собственные векторы в первом приближении. Мы имеем

$$(A+\varepsilon B)\, e_k(\varepsilon) = \lambda_k(\varepsilon)\, e_k(\varepsilon).$$

Подставим в это равенство:

$$e_k(\varepsilon) = e_k + \varepsilon e_k^{(1)} + \varepsilon^2 e_k^{(2)} + \ldots,$$
$$\lambda_k(\varepsilon) = \lambda_k + \varepsilon\lambda_k^{(1)} + \varepsilon^2\lambda_k^{(2)} + \ldots$$

и сравним члены при ε^2. Получим

$$Be_k^{(1)} + Ae_k^{(2)} = \lambda_k^{(2)} e_k + \lambda_k^{(1)} e_k^{(1)} + \lambda_k e_k^{(2)}. \tag{6}$$

Для того чтобы найти $\lambda_k^{(2)}$, умножим скалярно обе части этого равенства на e_k. Учитывая, что $(Ae_k^{(2)}, e_k) = (e_k^{(2)}, Ae_k) = \lambda_k (e_k^{(2)}, e_k)$, мы получим

$$(Be_k^{(1)}, e_k) = \lambda_k^{(2)} + \lambda_k^{(1)} (e_k^{(1)}, e_k).$$

Так как, в силу (5), $(e_k^{(1)}, e_k) = 0$, то

$$\lambda_k^{(2)} = (Be_k^{(1)}, e_k).$$

Но $e_k^{(1)} = \sum \xi_i e_i$. Подставляя, получаем в силу формулы (3) для первого приближения

$$\lambda_k^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i (Be_i, e_k) = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \frac{(Be_k, e_i)\,(Be_i, e_k)}{\lambda_k - \lambda_i},$$

а так как $(Be_k, e_i) = \overline{(Be_i, e_k)}$, то окончательно имеем

$$\lambda_k^{(2)} = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \frac{|(Be_k, e_i)|^2}{\lambda_k - \lambda_i},$$

где e_k — собственные векторы, а λ_k — собственные значения преобразования A, или

$$\lambda_k^{(2)} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{|b_{ik}|^2}{\lambda_k - \lambda_i}.$$

Задача. Найти поправки для собственного вектора во втором приближении, умножая скалярно обе части равенства (6) на e_i.

Ответ.

$$e_k^{(2)} = \sum_{i \neq k} \sum_{j \neq k} \frac{b_{ij} b_{jk}}{(\lambda_i - \lambda_k)(\lambda_j - \lambda_k)} e_i - \\ - \sum_{i \neq k} \frac{b_{kk} b_{ik}}{(\lambda_i - \lambda_k)^2} e_i - \sum_{i \neq k} \frac{|b_{ik}|^2}{(\lambda_i - \lambda_k)^2} \frac{e_k}{2}.$$

Кроме указанных уравнений надо воспользоваться также условием нормировки, т. е. равенством

$$(e_k + \varepsilon e_k^{(1)} + \varepsilon^2 e_k^{(2)} + \ldots,\ e_k + \varepsilon e_k^{(1)} + \varepsilon^2 e_k^{(2)} + \ldots) = 1.$$

§ 2. Случай кратных собственных значений

Рассмотрим теперь случай, когда λ есть r-кратное собственное значение преобразования A. Обозначим через

$$f_1, f_2, \ldots, f_r \tag{1}$$

какие-либо r попарно ортогональных собственных векторов преобразования A, отвечающих этому собственному значению λ. Заметим, что, так как e_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ отвечают одному и тому же собственному значению λ, то линейная комбинация этих векторов также будет собственным вектором, отвечающим этому собственному значению. Этими линейными комбинациями исчерпываются все собственные значения преобразования A, отвечающие собственному значению λ.

При замене преобразования A на $A + \varepsilon B$ собственное значение перестанет, вообще говоря, быть кратным, и вместо λ мы получим r различных собственных значений $\lambda_1(\varepsilon), \lambda_2(\varepsilon), \ldots, \lambda_r(\varepsilon)$. Соответствующие нормированные собственные векторы обозначим через $e_1(\varepsilon), \ldots, e_r(\varepsilon)$.

Например, если A — единичное преобразование, т. е. $A=E$, в n-мерном пространстве, а B — произвольное самосопряженное преобразование с попарно различными собственными значениями $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, то $A=E$ имеет n-кратное собственное значение 1, а $A+\varepsilon B=E+\varepsilon B$ имеет n различных собственных значений $1+\lambda_1\varepsilon, 1+\lambda_2\varepsilon, \ldots, 1+\lambda_n\varepsilon$.

Аналогично случаю простых собственных значений $\lambda_i(\varepsilon)$ и $e_i(\varepsilon)$ являются непрерывными и дифференцируемыми функциями от ε. При $\varepsilon \to 0$ $\lambda_i(\varepsilon)$ стремятся к собственному значению A, т. е. к λ_i. Мы имеем

$$\lambda_i(\varepsilon)=\lambda_i+\varepsilon\lambda_i^{(1)}+\varepsilon^2\lambda_i^{(2)}+\ldots \tag{2}$$

Для собственных векторов $e_i(\varepsilon)$ преобразования $A+\varepsilon B$ мы имеем аналогичное равенство

$$e_i(\varepsilon)=e_i+\varepsilon e_i^{(1)}+\varepsilon^2 e_i^{(2)}+\ldots, \tag{3}$$

$e_i=\lim\limits_{\varepsilon\to 0} e_i(\varepsilon)$, и значит, e_i есть собственный вектор преобразования A, отвечающий собственному значению λ. Следовательно, e_i есть какая-то, заранее нам неизвестная, линейная комбинация векторов (1). Таким образом, в отличие от случая некратных собственных значений, сами e_i также подлежат определению. Подставим в равенство $(A+\varepsilon B)\,e_i(\varepsilon)=\lambda_i(\varepsilon)\,e_i(\varepsilon)$ выражения (2) и (3). Сравнивая, как и в предыдущем случае, коэффициенты при ε, получаем

$$Be_i+Ae_i^{(1)}=\lambda e_i^{(1)}+\lambda_i^{(1)}e_i, \qquad i=1,\ldots,r. \tag{4}$$

Здесь вектор e_i является, как было указано, линейной комбинацией собственных векторов $f_1, \ldots, f_r$:

$$e_i=\eta_1 f_1+\eta_2 f_2+\ldots+\eta_r f_r.$$

Наша цель — найти число $\lambda_i^{(1)}$ и вектор e_i, т. е. числа $\eta_1, \ldots, \eta_r$.

Умножая обе части (4) скалярно на f_k, получим

$$(Be_i, f_k)+(Ae_i^{(1)}, f_k)=(\lambda e_i^{(1)}, f_k)+\lambda_i^{(1)}(e_i, f_k),$$

или, так как $(Ae_i^{(1)}, f_k)=(e_i^{(1)}, Af_k)=\lambda(e_i^{(1)}, f_k)$,

$$(Be_i, f_k)=\lambda_i^{(1)}(e_i, f_k).$$

Подставляя в левую часть этого равенства вместо e_i его выражение и замечая, что $(e_i, f_k)=\eta_k$, получим

$$\sum_{p=1}^{r}(Bf_p, f_k)\,\eta_p=\lambda_i^{(1)}\eta_k, \tag{5}$$

или

$$\sum_{p=1}^{r} b_{kp}\eta_p = \lambda_i^{(1)}\eta_k, \tag{I}$$

где

$$(Bf_p,\ f_k) = b_{kp}.$$

Итак, числа $\lambda_i^{(1)}$ являются собственными значениями матрицы $\|b_{kp}\|$, $k,\ p = 1,\ 2, \ldots, r$, т. е. определяются из уравнения

$$\operatorname{Det} \|b_{ik} - \lambda\sigma_{ik}\| = 0,$$

а вектор e_i определяется формулой

$$e_i = \eta_1 f_1 + \ldots + \eta_r f_r,$$

где числа η_i находятся из уравнений (I).

Аналогично можно было бы найти поправки к собственным векторам, т. е. $e_k^{(1)}$, $e_k^{(2)}$, и следующие поправки к собственным значениям, т. е. $\lambda_k^{(2)}$.