Ж. Дьедонне

ОСНОВЫ СОВРЕМЕННОГО АНАЛИЗА

ИЗДАТЕЛЬСТВО МИР

FOUNDATIONS
OF
MODERN ANALYSIS

J. DIEUDONNÉ
Institut des Hautes Études Scientifiques, Paris

ACADEMIC PRESS · NEW YORK AND LONDON
1960

Ж. Дьедонне

ОСНОВЫ СОВРЕМЕННОГО АНАЛИЗА

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО
И. А. ВАЙНШТЕЙНА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва 1964

Автор этой книги — Жан Дьедонне — выдающийся французский аналитик, один из вдохновителей и активных членов известной группы Бурбаки.

Формально от читателя требуется лишь знание „первых правил математической логики“ и элементарной линейной алгебры. На самом же деле книга рассчитана на тех, кто уже знаком с основами математического анализа и хочет взглянуть на известные факты с новой точки зрения.

Характерной чертой книги является строгий аксиоматический подход и систематическое использование понятия векторного пространства. Автор умышленно не пользуется чертежами, однако его изложение в высшей степени геометрично.

Стремясь сделать книгу цельной и доступной для изучения в пределах одного академического года, Дьедонне очень строго отобрал материал. При этом его подход отличается от принятого у нас. Так, он не включил понятие меры и интеграла Лебега, но зато изложил общие факты теории функций одного и нескольких комплексных переменных. В книге со вкусом подобраны разнообразные и интересные задачи.

Эту оригинальную книгу с интересом прочтут не только студенты старших курсов университетов и аспиранты (которым она непосредственно предназначена), но и все лица, желающие углубить свои познания в современном математическом анализе.

Редакция литературы по математическим наукам

ПРЕДИСЛОВИЕ

Этот том возник на основе курса, предназначенного для студентов старших курсов или для особо подготовленных студентов младших курсов[1]). Цель этого курса (прочитанного в Северо-западном университете в 1956—1957 гг.) была двоякой: во-первых, дать запас необходимых элементарных сведений из всех областей современной математики, связанных с „анализом" (фактически из всех, за исключением, быть может, логики и чистой алгебры); во-вторых, натренировать слушателей в употреблении наиболее фундаментального математического орудия нашего времени — аксиоматического метода (с которым за время первых студенческих лет они если и сталкиваются, то очень мало).

Читателю будет совершенно очевидно, что особое ударение мы всюду делаем на идейном аспекте каждого понятия, а не на его вычислительном аспекте, которым главным образом интересовался классический анализ (см. [26]). Это верно не только по отношению к тексту, но и по отношению к большинству задач. Мы включили в книгу значительное число задач, чтобы дополнить текст и указать дальнейшие интересные направления. Эти задачи одновременно дадут возможность проверить, насколько хорошо усвоен изложенный материал.

Хотя этот том включает в себя много материала, по большей части излагаемого в более элементарных курсах (в том числе в так называемых „дополнительных главах анализа"), точка зрения, с которой рассматривается этот материал, полностью отлична от обычно принимаемой в этих курсах. Основные понятия теории функций и дифференциального исчисления излагаются в рамках теории, достаточно общей для того, чтобы показать размах, силу и истинную природу этих понятий гораздо лучше, чем это возможно при обычных ограничениях „классического анализа". Нет необходимости подчеркивать хорошо известную „экономию мысли", являющуюся результатом такого общего подхода, но можно указать, что существует и

---

[1]) Ввиду различий в системах университетского образования у нас и в США нам пришлось перевести термин „undergraduate student" как „студент младших курсов", а „graduate student" как „студент старших курсов" (имея в последнем случае в виду студента, выбравшего кафедру, на которой он будет работать). — *Прим. перев.*

соответствующая „экономия обозначений“, истребляющая рои индексов, подобно тому как векторная алгебра упрощает классическую аналитическую геометрию. Однако такой подход вызывает необходимость строгого соблюдения аксиоматических методов без всякой ссылки на „геометрическую интуицию“, по крайней мере в формальных доказательствах — необходимость, которую мы подчеркиваем, умышленно воздерживаясь от введения в книгу каких бы то ни было рисунков. Я считаю, что учащийся, если он собирается когда-нибудь понять то, что общепринято в математических исследованиях, должен как можно скорее получить основательную тренировку в абстрактном и аксиоматическом способе мышления. Этот том имеет целью помочь учащемуся выработать „интуицию абстрактного“, которая так существенна для современного математика.

Ясно, что студенты, прежде чем приступить к этому курсу, должны обладать хорошими рабочими знаниями классического анализа. Однако со строго логической точки зрения изложение не опирается ни на какие предварительные сведения, за исключением:

1. Первых правил математической логики, математической индукции и основных свойств целых (положительных и отрицательных) чисел.

2. Элементарной линейной алгебры (над полем), с которой читатель может познакомиться у Халмоша [14], Джекобсона [16] или Бурбаки [4]; эти книги, впрочем, содержат намного больше материала, чем нам действительно нужно (например, мы не будем пользоваться теорией двойственности, и читателю достаточно знать понятия векторного подпространства, гиперплоскости, прямой суммы, линейного отображения, линейной формы, размерности и коразмерности).

В доказательстве каждого утверждения мы опираемся исключительно на аксиомы и на теоремы, уже доказанные в тексте, с двумя только что упомянутыми исключениями. Эта строгая последовательность логических шагов несколько нарушается в примерах и задачах, где мы часто пользуемся определениями или результатами, которые еще не были (или даже вообще не будут) доказаны в тексте.

Имеются различные мнения о том, какие части анализа студент должен изучить на первом году специализированного обучения. Поскольку мы хотели сохранить содержание этой книги в пределах того, что может быть реально продумано в течение одного академического года, некоторые разделы пришлось исключить. Одни из них были опущены потому, что они слишком специальны, другие — потому, что могут потребовать большей математической зрелости, чем обычно можно ожидать, третьи — потому, что их материал, несомненно, вошел в курсы дополнительных глав анализа. Если бы мы должны были предложить общую программу для специализирующихся студентов — математиков, мы рекомендовали бы каждому из них ознакомиться с содержанием этой книги, какова бы ни была сфера его будущей деятельности.

Я хочу выразить благодарность математикам, которые помогли мне подготовить эти лекции, особенно А. Картану и Н. Бурбаки; они открыли мне доступ к неопубликованным записям лекций и рукописям, оказавшим большое влияние на окончательную форму этой книги. Я очень признателен также моим коллегам по математическому отделению Северо-западного университета, которые предоставили мне возможность прочитать этот курс в тех направлениях, в каких я его планировал, и очень поддержали меня своей конструктивной критикой.

Ж. Дьедонне

Апрель 1960 г.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

В нижеследующих определениях первая цифра указывает номер главы, в которой появляется обозначение, а вторая — параграф в этой главе.

$=$	равно, совпадает; 1.1
$\neq$	отлично от; 1.1
$\in$	является элементом, принадлежит; 1.1
$\notin$	не является элементом; 1.1
$\subset$	является подмножеством, содержится в; 1.1
$\supset$	содержит; 1.1
$\not\subset$	не содержится в; 1.1
$\{x \in X \mid P(x)\}$	множество элементов, принадлежащих X и обладающих свойством P; 1.1
$\varnothing$	пустое множество; 1.1
$\{a\}$	множество, имеющее a своим единственным элементом; 1.1
$\mathfrak{P}(X)$	множество подмножеств множества X; 1.1
$X \setminus Y$, $\complement_X Y$, $\complement Y$	разность между множествами X и Y, дополнение множества Y в X; 1.2
$\cup$	объединение; 1.2
$\cap$	пересечение; 1.2
$\{x, y\}$	объединение множеств $\{x\}$ и $\{y\}$; 1.2
(a, b)	упорядоченная пара; 1.3
$\mathrm{pr}_1 c$, $\mathrm{pr}_2 c$	первая и вторая проекции пары c; 1.3
$X \times Y$	произведение двух множеств; 1.3
$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$	произведение n множеств; 1.3
$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$	элемент произведения n множеств; 1.3
$\mathrm{pr}_i z$	i-я проекция; 1.3
X^n	произведение n множеств, равных X; 1.3
$F(x)$	значение отображения F на элементе x; 1.4
Y^X, $\mathfrak{F}(X, Y)$	множество отображений X в Y; 1.4
$x \to T(x)$	отображение; 1.4
$F(A)$	образ; 1.5
$F^{-1}(A')$	прообраз; 1.5
$F^{-1}(y)$	прообраз множества $\{y\}$; 1.5
j_A	естественное вложение; 1.6

F^{-1}	отображение, обратное к биективному; 1.6
$G \circ F$	композиция отображений; 1.7
$(x_\lambda)_{\lambda \in L}$	семейство; 1.8
$\mathbf{N}$	множество целых чисел $\geqslant 0$; 1.8
$\{x_1, \ldots, x_n\}$	множество элементов конечной последовательности; 1.8
$\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$, $\bigcup_\lambda A_\lambda$	объединение семейства множеств; 1.8
$\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda$, $\bigcap_\lambda A_\lambda$	пересечение семейства множеств; 1.8
$\mathbf{R}$	множество действительных чисел, действительная прямая; 2.1, 3.2
$x + y$, xy	сумма и произведение действительных чисел; 2.1
0	нуль — элемент множества $\mathbf{R}$; 2.1
$-x$	противоположное число в $\mathbf{R}$; 2.1
1	единица — элемент множества $\mathbf{R}$; 2.1
x^{-1}, $1/x$	обратное число в $\mathbf{R}$; 2.1
$x \leqslant y$, $y \geqslant x$, $x < y$, $y > x$	отношение порядка в $\mathbf{R}$; 2.1
$]a, b[$, $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$	промежутки в $\mathbf{R}$; 2.1
$\mathbf{R}_+$, $\mathbf{R}_+^*$	множество действительных чисел $\geqslant 0$ (соответственно > 0); 2,2
$\lvert x \rvert$, x^+, x^-	абсолютная величина, положительная и отрицательная части действительного числа x; 2.2
$\mathbf{Q}$	множество рациональных чисел; 2.2
$\mathbf{Z}$	множество целых чисел; 2.2
$\sup X$	верхняя грань множества X; 2.3
$\inf X$	нижняя грань множества X; 2.3
$\sup_{x \in A} f(x)$, $\inf_{x \in A} f(x)$	верхняя и нижняя грани функции f на множестве A; 2.3
$d(x, y)$	расстояние между элементами x и y; 3.1
$\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$	действительная плоскость, эвклидово пространство; 3.2
$\mathscr{B}(A)$	множество ограниченных отображений множества A в $\mathbf{R}$; 3.2
$\overline{\mathbf{R}}$	расширенная действительная прямая; 3.3
$+\infty$, $-\infty$	бесконечные точки в $\overline{\mathbf{R}}$; 3.3
$d(A, B)$	расстояние между двумя множествами; 3.4
$\mathrm{B}(a; r)$, $\mathrm{B}'(a; r)$, $\mathrm{S}(a; r)$	открытый шар, замкнутый шар, сфера с центром a и радиусом r; 3.4
$\delta(A)$	диаметр множества A; 3.4
$\mathring{A}$	внутренность множества A; 3.7
$\overline{A}$	замыкание множества A; 3.8

$\mathrm{Fr}(A)$	граница множества A; 3.8
$\lim\limits_{x\to a,\ x\in A} f(x)$	предел функции; 3.13
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$	предел последовательности; 3.13
$\Omega(a;\ f)$	колебание функции; 3.14
$\log_a x$	логарифм действительного числа; 4.3
$\mathbf{I}$	множество иррациональных чисел; 3.14, задача 4
$\prod\limits_{n=1}^{\infty} E_n$	бесконечное произведение; 3.20, задача 7
K	канторово множество; 4.2, задача 2
a^x	показательная функция (экспонента); 4.3
x^a	степенная функция; 4.3
$\mathbf{C}$	множество комплексных чисел; 4.4
$z+z',\ zz'$	сумма и произведение комплексных чисел; 4.4
$0,\ 1,\ i$	элементы множества $\mathbf{C}$; 4.4
$\Re z,\ \Im z$	действительная и мнимая части комплексного числа z; 4.4
$\bar{z}$	сопряженное комплексное число; 4.4
$\lvert z\rvert$	модуль комплексного числа; 4.4
$x+y,\ \lambda x,\ x\lambda$	сумма и произведение на скаляр в векторном пространстве; 5.1
0	элемент векторного пространства; 5.1
$\lVert x\rVert$	норма; 5.1
$\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(I)$	множество всех действительных непрерывных на I функций; 5.1
$A+B$	сумма множеств в векторном пространстве, прямая сумма; 5.1, задача 2, 5.4
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$	сумма ряда; 5.2
$\sum\limits_{\alpha\in A} x_\alpha$	сумма абсолютно суммируемого семейства; 5.3
(c_0)	пространство последовательностей, сходящихся к нулю; 5.3, задача 5
$\mathscr{L}(E;\ F)$	пространство линейных непрерывных отображений; 5.7
$\lVert u\rVert$	норма линейного непрерывного отображения; 5.7
$\mathscr{L}(E_1,\ \ldots,\ E_n;\ F)$	пространство полилинейных непрерывных отображений; 5.7
l^1	пространство абсолютно сходящихся рядов; 5.7, задача 1

l^∞	пространство ограниченных последовательностей; 5.7, задача 1
$[x \cdot y]$	билинейное отображение; 6.1
$(x \mid y)$	скалярное произведение; 6.2
P_F	ортогональная проекция; 6.3
l^2, l^2_{R}, l^2_{C}	гильбертовы пространства последовательностей; 6.5
$\mathscr{C}_{\mathrm{C}}(I)$	множество всех комплексных непрерывных на I функций; 6.5
$\mathscr{B}_F(A)$, $\mathscr{B}_{\mathrm{R}}(A)$, $\mathscr{B}_{\mathrm{C}}(A)$	пространства ограниченных отображений; 7.1
$\mathscr{C}_F(E)$	пространство непрерывных отображений; 7.2
$\mathscr{C}_F^\infty(E)$	пространство ограниченных непрерывных отображений; 7.2
$f(x_+)$, $f(x_-)$	пределы справа, слева; 7.6
$\operatorname{sign} x$	функция; 7.6, задача 2
$f'(x_0)$, $\mathrm{D}f(x_0)$	(полная) производная в точке x_0; 8.1
f', $\mathrm{D}f$	производная (как функция); 8.1
$f'_d(\alpha)$, $\mathrm{D}_+f(\alpha)$	правая производная; 8.4
$f'_g(\beta)$, $\mathrm{D}_-f(\beta)$	левая производная; 8.4
$u \cdot t$	элемент $\mathscr{L}(E; F)$; 8.1
$\int\limits_\alpha^\beta f(\xi)\,d\xi$	интеграл; 8.7
e	число; 8.8
$\exp(x)$, $\ln x$	функции действительного переменного; 8.8
$\mathrm{D}_1f(a_1, a_2)$, $\mathrm{D}_2f(a_1, a_2)$	частные производные; 8.9
$f'_{\xi_i}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\partial/\partial\xi_i f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$	частные производные; 8.10
$\dfrac{\mathrm{D}(f_1, \ldots, f_n)}{\mathrm{D}(\xi_1, \ldots, \xi_n)}$, $\dfrac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(\xi_1, \ldots, \xi_n)}$	якобиан; 8.10
$f''(x_0)$, $D^2f(x_0)$, $f^{(p)}(x_0)$, $D^pf(x_0)$	производные высшего порядка; 8.12
$f * \rho$	регуляризация; 8.12, задача 2
$\mathscr{D}_F^{(p)}(A)$	пространство p раз непрерывно дифференцируемых отображений A в F со всеми ограниченными производными; 8.12, задача 8

$\mathscr{E}_F^{(p)}(A)$	пространство p раз непрерывно дифференцируемых отображений; 8.13
$\lvert\alpha\rvert$, M_α, D^α, D_{M_α}	символы, где α — составной индекс; 8.13
$\ln z$, e^z, $\exp(z)$, $\sin z$, $\cos z$,	
$\binom{t}{n}$, $(1+z)^t$	функции комплексного переменного; 9.5
π	число; 9.5
$\mathbf{U}$	единичная окружность в $\mathbf{C}$; 9.5 $\arg z$ аргумент комплексного числа; 9.5, задача 8
$\mathbf{R}_-$	отрицательная действительная полупрямая; 9.5, задача 8
γ°	дуга, противоположная дуге; 9.6
$\gamma_1 \vee \gamma_2$	соединение дуг; 9.6
$\int\limits_\gamma f(z)\,dz$	интеграл вдоль (конечного или бесконечного) пути γ; 9.6, 9.12, задача 2
$j(a;\gamma)$	индекс точки a относительно контура γ; 9.8
$E(z, p)$	первичный множитель; 9.12, задача 1
$\Gamma(z)$	гамма-функция; 9.12, задача 2
γ	постоянная Эйлера; 9.12, задача 2
$\omega(a; f)$, $\omega(a)$	порядок функции в точке; 9.15
$C(t, s)$	резольвента линейного дифференциального уравнения; 10.8
$\mathscr{L}(E)$	алгебра операторов в пространстве E; 11.1
uv	композиция операторов; 11.1
1	тождественный оператор; 11.1
$S(u)$	спектр оператора u; 11.1
$E(\zeta)$, $E(\zeta, u)$	собственное пространство оператора u, соответствующее собственному значению ζ; 11.1
$\tilde{u}$	непрерывное продолжение; 11.1, задача 5
$N(\lambda)$, $N(\lambda; u)$, $F(\lambda)$; $F(\lambda; u)$	подпространства, соответствующие собственному значению λ вполне непрерывного оператора u; 11.4
$k(\lambda)$, $k(\lambda; u)$	кратность собственного значения; 11.4
u^*	сопряженный оператор; 11.5

Глава 1

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Мы не будем пытаться установить теорию множеств на аксиоматическое основание. Читателя, интересующегося полным аксиоматическим описанием, мы отсылаем к книгам Келли [18] и Бурбаки [3]. Утверждения, встречающиеся в этой главе и не сопровождаемые доказательством или определением, могут рассматриваться просто как аксиомы, связывающие те термины, которые не были до этого строго определены.

Глава начинается с нескольких элементарных определений и формул, касающихся множеств, подмножеств и произведения множеств (1.1—1.3). Центральная часть главы посвящена фундаментальному понятию *отображения*, являющемуся современным обобщением классического понятия (числовой) *функции* одной или нескольких числовых „переменных". В связи с этим понятием заслуживают внимания два момента.

a) Принципиально важным (и характеристическим) свойством отображения является то, что любому „значению" переменной оно ставит в соответствие единственный элемент; иными словами, такого понятия, как „многозначная" функция, не существует (хотя во многих книгах этим понятием оперируют). Вполне правомерно, конечно, определить отображение, значениями которого являются подмножества некоторого данного множества, состоящие более чем из одного элемента; но такое определение (по крайней мере в элементарном анализе) практически бесполезно, потому что не удается разумным образом определить алгебраические операции над „значениями" таких функций. Мы вернемся к этому вопросу в гл. 9.

b) Как можно скорее следует освоиться с идеей, что функция f есть единый объект, который сам может „изменяться" и вообще может мыслиться как „точка" особого „функционального пространства". В самом деле, можно сказать, что одно из главных различий между классическими и современными понятиями анализа состоит в следующем. Если в классической математике пишут $f(x)$, то f рассматривается как нечто „фиксированное", а x как „переменное". В наше же время в качестве „переменных" рассматривают *и* f *и* x (и иногда фиксируется именно x, а f становится „переменным" объектом).

В последнем параграфе (1.9) приводятся элементарные свойства счетных множеств. Это — начало обширной теории „кардинальных чисел", развитой Кантором и его последователями, с которой интересующийся читатель может познакомиться по книге Бурбаки ([3], гл. III) или (детальнее) по

книге Бахмана ([2])[1]). Оказывается, однако, что, если не считать важного отрицательного результата — теоремы о несчетности множества действительных чисел [см. (2.2.17)], в приложениях теории множеств к анализу крайне редко используется что-либо, кроме этих элементарных свойств.

1. Элементы и множества

Мы будем иметь дело с различными объектами. Объекты могут обладать некоторыми *свойствами* или находиться в определенных *отношениях* между собой. Объекты обозначаются *символами* (главным образом, буквами); свойства или отношения — комбинациями символов тех объектов, к которым они относятся, и некоторых других символов, характеристических для рассматриваемого свойства или отношения. Отношение $x = y$ означает, что объекты, обозначаемые символами x и y, совпадают; его отрицание записывается так: $x \neq y$.

Некоторые из объектов называются *множествами*.

Если X — множество, то отношение $x \in X$ означает, что x есть *элемент* множества X, или что x *принадлежит* X. Отрицание этого отношения записывается так: $x \notin X$, или $x \bar{\in} X$.

Если X и Y — два множества, то отношение $X \subset Y$ означает, что каждый элемент множества X является элементом множества Y (иначе говоря, оно эквивалентно отношению $(\forall x)(x \in X \Rightarrow x \in Y)$). Мы имеем $X \subset X$, а из отношений $X \subset Y$ и $Y \subset Z$ следует отношение $X \subset Z$. Если $X \subset Y$ и $Y \subset X$, то $X = Y$; иными словами, два множества равны в том и только в том случае, если они состоят из одних и тех же элементов. Если $X \subset Y$, то говорят, что X *содержится* в Y, или что Y *содержит* X, или что X является *подмножеством* Y; пишут также $Y \supset X$. Отрицание отношения $X \subset Y$ записывается так: $X \not\subset Y$.

Если даны множество X и свойство P, то существует единственное подмножество X, состоящее из всех тех элементов $x \in X$, для которых истинно $P(x)$; это подмножество обозначается символом $\{x \in X \mid P(x)\}$. Например, мы имеем: $X = \{x \in X \mid x = x\}$ и $X = \{x \in X \mid x \in X\}$. Отношение $\{x \in X \mid P(x)\} \subset \{x \in X \mid Q(x)\}$ эквивалентно отношению $(\forall x \in X)(P(x) \Rightarrow Q(x))$. Отношение $\{x \in X \mid P(x)\} = \{x \in X \mid Q(x)\}$ эквивалентно отношению $(\forall x \in X)(P(x) \Longleftrightarrow Q(x))$.

Множество $\varnothing_X = \{x \in X \mid x \neq x\}$ называется *пустым подмножеством* множества X; оно не содержит элементов. Если P — произвольное свойство, то отношение $x \in \varnothing_X \Rightarrow P(x)$ истинно для каждого x, так как для каждого x истинно отрицание отношения $x \in \varnothing_X$ (напомним, что $Q \Rightarrow P$ означает „не Q или P“). Таким образом, если X и

---

[1]) См. также Ф. Хаусдорф, Теория множеств, М., 1937. — *Прим. перев.*

Y — множества, то из $x \in \varnothing_X$ следует $x \in \varnothing_Y$, иначе говоря, $\varnothing_X \subset \varnothing_Y$ и точно так же $\varnothing_Y \subset \varnothing_X$; значит, $\varnothing_X = \varnothing_Y$; все пустые множества равны. Поэтому они обозначаются символом $\varnothing$.

Если a — некоторый объект, то множество, имеющее a своим единственным элементом, записывается так: $\{a\}$.

Если X — множество, то существует (единственное) множество, элементами которого являются все подмножества X; оно обозначается символом $\mathfrak{P}(X)$. Имеем: $\varnothing \in \mathfrak{P}(X)$, $X \in \mathfrak{P}(X)$; отношения $x \in X$ и $\{x\} \in \mathfrak{P}(X)$ эквивалентны; отношения $Y \subset X$ и $Y \in \mathfrak{P}(X)$ эквивалентны.

Задача

Покажите, что множество всех подмножеств конечного множества, состоящего из n элементов ($n \geqslant 0$), есть конечное множество, состоящее из 2^n элементов.

2. Булевская алгебра

Если X и Y — такие два множества, что $Y \subset X$, то множество $\{x \in X \mid x \notin Y\}$, являющееся подмножеством X, называется *разностью* между X и Y, или *дополнением* Y в X, и обозначается символом $X \setminus Y$, или $\complement_X Y$ (или $\complement Y$, когда это не может привести к путанице).

Пусть X и Y — два множества. Существует множество, состоящее из элементов, принадлежащих и X и Y, — именно множество $\{x \in X \mid x \in Y\}$; оно называется *пересечением* X и Y и обозначается символом $X \cap Y$. Существует также множество, состоящее из элементов, принадлежащих по крайней мере одному из двух множеств X и Y; оно называется *объединением* X и Y и обозначается символом $X \cup Y$.

Из определений сразу вытекают следующие предложения:

(1.2.1) $$X \setminus X = \varnothing, \qquad X \setminus \varnothing = X.$$

(1.2.2) $$X \cup X = X, \qquad X \cap X = X.$$

(1.2.3) $$X \cup Y = Y \cup X, \quad X \cap Y = Y \cap X.$$

(1.2.4) *Отношения* $X \subset Y$, $X \cup Y = Y$, $X \cap Y = X$ *эквивалентны*

(1.2.5) $$X \subset X \cup Y, \quad X \cap Y \subset X.$$

(1.2.6) *Отношение „*$X \subset Z$ *и* $Y \subset Z$*“ эквивалентно отношению* $X \cup Y \subset Z$; *отношение „*$Z \subset X$ *и* $Z \subset Y$*“ эквивалентно отношению* $Z \subset X \cap Y$.

(1.2.7) $$X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z,$$

это объединение обозначается символом $X \cup Y \cup Z$;

$$X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z,$$

это пересечение обозначается символом $X \cap Y \cap Z$.

(1.2.8) $$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z),$$

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \text{ (дистрибутивность).}$$

(1.2.9) *Для подмножеств X и Y множества E*

$$\complement(\complement X) = X;$$

$$\complement(X \cup Y) = (\complement X) \cap (\complement Y), \quad \complement(X \cap Y) = (\complement X) \cup (\complement Y)$$

(вместо $\complement_E$ мы пишем $\complement$). *Отношения $X \subset Y$, $\complement X \supset \complement Y$ эквивалентны. Отношения $X \cap Y = \varnothing$, $X \subset \complement Y$, $Y \subset \complement X$ эквивалентны. Отношения $X \cup Y = E$, $\complement X \subset Y$, $\complement Y \subset X$ эквивалентны.*

Объединение $\{x\} \cup \{y\}$ обозначается символом $\{x, y\}$; подобным же образом $\{x\} \cup \{y\} \cup \{z\}$ обозначается символом $\{x, y, z\}$ и т. д.

3. Произведение двух множеств

Любым двум объектам a, b соответствует новый объект — их *упорядоченная пара* (a, b); отношение $(a, b) = (a', b')$ эквивалентно отношению „$a = a'$ и $b = b'$“; в частности, $(a, b) = (b, a)$ в том и только в том случае, если $a = b$. Первый (соответственно второй) элемент упорядоченной пары $c = (a, b)$ называется *первой* (соответственно *второй*) *проекцией* пары c и обозначается символом $a = \mathrm{pr}_1 c$ (соответственно $b = \mathrm{pr}_2 c$).

Для любых двух множеств X и Y (различных или нет) существует (единственное) множество, состоящее из всех упорядоченных пар (x, y), где $x \in X$ и $y \in Y$. Оно обозначается символом $X \times Y$ и называется *декартовым произведением* (или просто *произведением*) X *и* Y.

Отношению $R(x, y)$ между $x \in X$ и $y \in Y$ соответствует свойство $R(\mathrm{pr}_1 z, \mathrm{pr}_2 z)$ элемента $z \in X \times Y$; подмножество произведения $X \times Y$, состоящее из элементов, для которых истинно это свойство, есть множество пар (x, y), для которых истинно $R(x, y)$. Это подмножество называется *графиком* отношения R. Любое подмножество G произведения $X \times Y$ есть график некоторого отношения, именно отношения $(x, y) \in G$. Если $X' \subset X$, $Y' \subset Y$, то график отношения „$x \in X'$ и $y \in Y'$“ есть $X' \times Y'$.

Следующие предложения сразу вытекают из определений:

(1.3.1) *Отношение $X \times Y = \varnothing$ эквивалентно отношению „$X = \varnothing$ или $Y = \varnothing$“.*

(1.3.2) *Если* $X \times Y \neq \varnothing$ (это означает, что и X и Y не пусты), *то отношение* $X' \times Y' \subset X \times Y$ *эквивалентно отношению*

$$„X' \subset X \text{ и } Y' \subset Y“.$$

(1.3.3) $$(X \times Y) \cup (X' \times Y) = (X \cup X') \times Y.$$

(1.3.4) $$(X \times Y) \cap (X' \times Y') = (X \cap X') \times (Y \cap Y').$$

Произведение трех множеств X, Y, Z по определению есть $X \times Y \times Z = (X \times Y) \times Z$, а произведение n множеств аналогично определяется по индукции $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = (X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_{n-1}) \times X_n$. Элемент z произведения $X_1 \times \ldots \times X_n$ обозначается $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вместо $((\ldots(x_1, x_2), x_3), \ldots, x_{n-1}), x_n)$; x_i есть i-я *проекция* элемента z; она обозначается символом $x_i = \mathrm{pr}_i z$, где $1 \leqslant i \leqslant n$. Если $X_1 = X_2 = \ldots = X_n = X$, то вместо $X \times X \times \ldots \times X$ (n раз) мы пишем X^n.

4. Отображения

Пусть X и Y — два множества, $R(x, y)$ — отношение между $x \in X$ и $y \in Y$. Говорят, что R *функционально по* y, если для каждого $x \in X$ существует один и только один такой элемент $y \in Y$, что $R(x, y)$ истинно. График F такого отношения называется *функциональным графиком* в $X \times Y$. Подмножество F произведения $X \times Y$ можно охарактеризовать, следовательно, таким образом: для каждого $x \in X$ существует один и только один такой элемент $y \in Y$, что $(x, y) \in F$; этот элемент y называется *значением* F *в* x и обозначается символом $F(x)$. Функциональный график в $X \times Y$ называется также *отображением* X *в* Y или *функцией, определенной в* X *и принимающей значения в* Y.

Обычно, особенно в разговоре, об отображении и функциональном графике говорят так, как будто они являются двумя различными видами объектов, находящимися во взаимно однозначном соответствии, и по этой причине пользуются выражением „график отображения“. Но это только психологическое различие (соответствующее тому, понимать ли F „геометрически“ или же „аналитически“). Во всяком случае, в современной математике важнейшую роль играет рассмотрение отображения (функции) как единого объекта (такого же, как точка или число) и проведение ясного различия между отображением F и любым из его значений $F(x)$; первое есть элемент множества $\mathfrak{P}(X \times Y)$, второе — элемент множества Y, причем $F = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = F(x)\}$.

Подмножества произведения $X \times Y$, которые могут быть функциональными графиками, образуют подмножество множества $\mathfrak{P}(X \times Y)$,

называемое *множеством отображений* X *в* Y и обозначаемое символом Y^X или $\mathfrak{F}(X, Y)$.

Примеры отображений. **(1.4.1)** Если b — элемент множества Y, то $X \times \{b\}$ есть функциональный график, называемый *постоянным отображением* X в Y со значением b; существенно отличать его от элемента b множества Y.

(1.4.2) При $Y = X$ отношение $y = x$ функционально по y. Его график является множеством всех пар (x, x) и называется *диагональю* произведения $X \times X$, или *тождественным отображением* множества X в себя.

Если для каждого $x \in X$ построить объект $T(x)$, являющийся элементом множества Y, то отношение $y = T(x)$ будет функционально по y; соответствующее отображение обозначается символом $x \to T(x)$. Это, конечно, обычное определение функции; оно в сущности совпадает с определением, данным выше, потому что если F — функциональный график, то он является отображением $x \to F(x)$. Примеры (1.4.1) и (1.4.2) записываются соответственно так: $x \to b$ и $x \to x$.

(1.4.3) Отображение $Z \to X \setminus Z$ множества $\mathfrak{P}(X)$ в себя.

(1.4.4) Отображения $z \to \mathrm{pr}_1 z$ произведения $X \times Y$ в X и $z \to \mathrm{pr}_2 z$ произведения $X \times Y$ в Y, называемые соответственно *первой* и *второй проекциями* в $X \times Y$: $\mathrm{pr}_1(X \times Y) = X$; $\mathrm{pr}_2(X \times Y) = Y$.

Из определения равенства множеств (1.1) следует, что отношение $F = G$ между двумя отображениями множества X в Y эквивалентно отношению „$F(x) = G(x)$ для каждого $x \in X$".

Если A — подмножество множества X и F — отображение X в Y, то множество $F \cap (A \times Y)$ является функциональным графиком в $A \times Y$, который как отображение называется *сужением отображения* F *на множестве* A. Когда F и G имеют одно и то же сужение на A [т. е. когда $F(x) = G(x)$ для каждого $x \in A$], говорят, что они *совпадают на* A. Отображение F множества X в Y, имеющее сужение F' на A, называется *продолжением отображения* F' *на* X; вообще говоря, существует много различных продолжений функции F'.

Мы будем рассматривать в качестве аксиомы (аксиомы выбора) следующее предложение:

(1.4.5) *Если дано такое отображение F множества X в $\mathfrak{P}(Y)$, что $F(x) \neq \varnothing$ для каждого $x \in X$, то существует такое отображение f множества X в Y, что $f(x) \in F(x)$ для каждого $x \in X$.*

Иногда удается показать, что теорему, доказанную с помощью этой аксиомы выбора, в действительности можно доказать, не пользуясь ею. Мы никогда не будем входить в обсуждение такого рода вопросов, по существу относящихся к курсу логики.

5. Образы и прообразы

Пусть F — отображение множества X в Y. Для любого подмножества $A \subset X$ подмножество множества Y, определяемое свойством: „существует такой элемент $x \in A$, что $y = F(x)$", называется *образом* множества A при отображении F и обозначается символом $F(A)$.

Имеем следующие утверждения:

(1.5.1) $$F(A) = \mathrm{pr}_2(F \cap (A \times Y)).$$

(1.5.2) *Отношение* $A \neq \varnothing$ *эквивалентно отношению* $F(A) \neq \varnothing$.

(1.5.3) $$F(\{x\}) = \{F(x)\} \text{ для каждого } x \in X.$$

(1.5.4) *Из* $A \subset B$ *следует* $F(A) \subset F(B)$.

(1.5.5) $$F(A \cap B) \subset F(A) \cap F(B).$$

(1.5.6) $$F(A \cup B) = F(A) \cup F(B).$$

В самом деле, в силу (1.5.4), $F(A) \subset F(A \cup B)$ и $F(B) \subset F(A \cup B)$. С другой стороны, если $y \in F(A \cup B)$, то существует такой элемент $x \in A \cup B$, что $y = F(x)$. Так как $x \in A$ или $x \in B$, то $y \in F(A)$ или $y \in F(B)$.

Легко привести примеры, когда $F(A \cap B) \neq F(A) \cap F(B)$ (в качестве F можно, например, взять первую проекцию произведения).

Для любого подмножества $A' \subset Y$ подмножество множества X, определяемое свойством $F(x) \in A'$, называется *прообразом* A' при отображении F и обозначается символом $F^{-1}(A')$.

Отметим такие утверждения:

(1.5.7) $$F^{-1}(A') = \mathrm{pr}_1(F \cap (X \times A')).$$

(1.5.8) $$F^{-1}(A') = F^{-1}(A' \cap F(X)),$$

потому что для каждого $x \in X$ имеем $F(x) \in F(X)$.

(1.5.9) $$F^{-1}(\varnothing) = \varnothing$$

[но равенство $F^{-1}(A')=\varnothing$ может иметь место и для непустых подмножеств $A'\subset Y$ — именно для тех, для которых $A'\cap F(X)=\varnothing$].

(1.5.10) *Из* $A'\subset B'$ *следует* $F^{-1}(A')\subset F^{-1}(B')$.

(1.5.11) $$F^{-1}(A'\cap B')=F^{-1}(A')\cap F^{-1}(B').$$

(1.5.12) $$F^{-1}(A'\cup B')=F^{-1}(A')\cup F^{-1}(B').$$

(1.5.13) $F^{-1}(A'\setminus B')=F^{-1}(A')\setminus F^{-1}(B')$, *если* $A'\supset B'$.

Отметим различие между (1.5.11) и (1.5.5). Если $B\subset A\subset X$, то в силу (1.5.6) $F(A)=F(B)\cup F(A\setminus B)$, поэтому $F(A\setminus B)\supset F(A)\setminus F(B)$; но между $F(X\setminus A)$ и $Y\setminus F(A)$ нет никакой связи[1]).

Множество $F^{-1}(\{y\})$ обозначают также символом $F^{-1}(y)$; таким образом, $F(x)=y$ эквивалентно $x\in F^{-1}(y)$.

Мы имеем:

(1.5.14) $$F(F^{-1}(A'))=A'\cap F(X) \text{ для } A'\subset Y.$$

(1.5.15) $$F^{-1}(F(A))\supset A \text{ для } A\subset X.$$

В заключение отметим специальные соотношения, имеющие место в произведении.

(1.5.16) $$\mathrm{pr}_1^{-1}(A)=A\times Y \text{ для любого } A\subset X;$$
$$\mathrm{pr}_2^{-1}(A')=X\times A' \text{ для любого } A'\subset Y.$$

(1.5.17) $$Z\subset \mathrm{pr}_1(Z)\times \mathrm{pr}_2(Z) \text{ для любого } Z\subset X\times Y.$$

Задачи

1. Приведите пример таких двух подмножеств $A\supset B$ множества X и отображения F, чтобы $F(A\setminus B)\neq F(A)\setminus F(B)$.

2. Приведите примеры отображений $F:X\to Y$ и подмножеств $A\subset X$, для которых:

a) $F(X\setminus A)\subset Y\setminus F(A)$;

b) $F(X\setminus A)\supset Y\setminus F(A)$;

c) ни одно из множеств $F(X\setminus A)$, $Y\setminus F(A)$ не содержится в другом (в качестве X и Y можно, например, взять конечные множества).

3. Для любого подмножества G произведения $X\times Y$, любого подмножества $A\subset X$ и любого подмножества $A'\subset Y$ положим $G(A)=\mathrm{pr}_2(G\cap(A\times Y))$ и $G^{-1}(A')=\mathrm{pr}_1(G\cap(X\times A'))$. Для $x\in X$ и $y\in Y$ вместо $G(\{x\})$ и

[1]) Очевидно, имеет место включение $Y\setminus F(A)\subset(Y\setminus F(X))\cup F(X\setminus A)$.— *Прим. перев.*

$G^{-1}(\{y\})$ будем соответственно писать $G(x)$ и $G^{-1}(y)$. Докажите, что эквивалентны следующие четыре свойства:

a) G есть график отображения некоторого подмножества X в Y;

b) $G(G^{-1}(A')) \subset A'$ для любого подмножества $A' \subset Y$;

c) $G^{-1}(A' \cap B') = G^{-1}(A') \cap G^{-1}(B')$ для любой пары A', B' подмножеств Y;

d) $G^{-1}(A') \cap G^{-1}(B') = \varnothing$ для любой пары A', B' подмножеств Y, для которой $A' \cap B' = \varnothing$.

[Совет: покажите, что когда не выполняется a), нарушаются b), c) и d).]

6. Сюръективные, инъективные и биективные отображения

Пусть F — отображение множества X в Y. Отображение F называется:

сюръективным (или отображением *на* или *накрытием*), если $F(X) = Y$, т. е. если для каждого $y \in Y$ существует (по крайней мере один) такой элемент $x \in X$, что $y = F(x)$;

инъективным (или *взаимно однозначным* или *вложением*), если из $F(x) = F(x')$ следует $x = x'$;

биективным (или *наложением*), если оно является одновременно и сюръективным и инъективным.

Любое сужение инъективного отображения инъективно.

Любое отображение F множества X в Y может также рассматриваться как отображение X в $F(X)$; в этом случае оно является сюръективным, а если (как отображение X в Y) оно было инъективно, то как отображение X на $F(X)$ оно является даже биективным.

Примеры. **(1.6.1)**. Если A — произвольное подмножество X, то сужение на A тождественного отображения $x \to x$ является инъективным отображением j_A, называемым *естественным вложением* подмножества A в X. Для любого подмножества $B \subset X$ имеем $j_A^{-1}(B) = B \cap A$.

(1.6.2) Если F — любое отображение X в Y, то отображение $x \to (x, F(x))$ множества X в $X \times Y$ инъективно.

(1.6.3) Проекции pr_1 и pr_2 являются сюръективными отображениями $X \times Y$ соответственно на X и Y.

(1.6.4) Тождественное отображение любого множества биективно.

(1.6.5) Отображение $Z \to X \setminus Z$ множества $\mathfrak{P}(X)$ в себя биективно.

(1.6.6) Если $Y = \{b\}$ состоит из одного элемента, то отображение $x \to (x, b)$ множества X в $X \times \{b\}$ биективно.

(1.6.7) Отображение $(x, y) \to (y, x)$ произведения $X \times Y$ в $Y \times X$ биективно.

Если F — инъективное отображение, то $F^{-1}(F(A)) = A$ для любого $A \subset X$. Если F — сюръективно, то $F(F^{-1}(A')) = A'$ для любого $A' \subset Y$.

Если F — биективное отображение, то в соответствии с определением отношение $y = F(x)$ функционально по x. Соответствующее отображение множества Y в X называется отображением, *обратным* отображению F, и обозначается символом F^{-1} (если же F не биективно, то это отображение не определено!). Таким образом, отношения $y = F(x)$ и $x = F^{-1}(y)$ эквивалентны, F^{-1} само биективно и $(F^{-1})^{-1} = F$. Для каждого подмножества $A' \subset Y$ образ A' при F^{-1} совпадает с прообразом A' при F, так что обозначения согласуются.

Задача

Пусть F — отображение $X \to Y$. Покажите, что эквивалентны следующие свойства:

a) F — вложение;

b) $F^{-1}(F(A)) = A$ для любого подмножества $A \subset X$;

c) $F(A \cap B) = F(A) \cap F(B)$ для любой пары A, B подмножеств X;

d) $F(A) \cap F(B) = \varnothing$ для любой пары A, B подмножеств X, для которой $A \cap B = \varnothing$;

e) $F(A \setminus B) = F(A) \setminus F(B)$ для любой пары A, B подмножеств X, для которой $B \subset A$.

7. Композиция отображений

Пусть X, Y и Z — три множества, F — отображение множества X в Y, G — отображение множества Y в Z. Тогда $x \to G(F(x))$ есть отображение множества X в Z, которое называется *композицией* отображений G и F (в этом порядке!) или *сложным* отображением и обозначается символом $H = G \circ F$.

Справедливы соотношения:

(1.7.1) $$H(A) = G(F(A)) \text{ для любого } A \subset X.$$

(1.7.2) $$H^{-1}(A'') = F^{-1}(G^{-1}(A'')) \text{ для любого } A'' \subset Z.$$

Если и F и G — инъективные (соответственно сюръективные, биективные) отображения, то и $H = G \circ F$ — инъективное (соответственно сюръективное, биективное) отображение; если F и G биективны, то $H^{-1} = F^{-1} \circ G^{-1}$. Если F биективно, то $F^{-1} \circ F$ — тождественное отображение множества X, а $F \circ F^{-1}$ — тождественное отображение множества Y.

Пусть X, Y, Z и T — множества, F_1 — отображение множества X в Y, F_2 — отображение Y в Z, F_3 — отображение Z в T. Тогда из определения следует, что $F_3 \circ (F_2 \circ F_1) = (F_3 \circ F_2) \circ F_1$. Это отображение множества X в T обозначается символом $F_3 \circ F_2 \circ F_1$. Точно таким же образом определяется композиция любого числа отображений.

Задачи

1. Пусть A, B, C, D — множества, f — отображение A в B, g — отображение B в C, h — отображение C в D. Покажите, что если $g \circ f$ и $h \circ g$ биективны, то и все отображения f, g, h будут биективными.

2. Пусть A, B, C — множества, f — отображение A в B, g — отображение B в C, h — отображение C в A. Покажите, что если среди отображений $h \circ g \circ f$, $g \circ f \circ h$, $f \circ h \circ g$ любые два являются сюръективными, а третье — инъективным или же два являются инъективными, а третье сюръективным, то все три отображения f, g, h биективны.

3. Пусть F — подмножество произведения $X \times Y$, G — подмножество произведения $Y \times X$. Предположим, что в обозначениях, введенных в задаче 3 § 1.5, $G(F(x)) = \{x\}$ для любого $x \in X$ и $F(G(y)) = \{y\}$ для любого $y \in Y$. Покажите, что F — график биективного отображения X на Y, а G — график отображения, обратного F.

4. Пусть X, Y — два множества, f — инъективное отображение X в Y, g — инъективное отображение Y в X. Покажите, что существуют такие два подмножества A, B множества X, $A \cup B = X$, и такие два подмножества A', B' множества Y, $A' \cup B' = Y$, что $A' = f(A)$ и $B = g(B')$.

[Пусть $R = X \setminus g(Y)$ и $h = g \circ f$; в качестве A возьмите пересечение всех подмножеств $M \subset X$, для которых $M \supset R \cup h(M)$.]

8. Семейства элементов. Объединение и пересечение семейств множеств

Пусть L и X — два множества. Отображение множества L в X иногда называется также *семейством элементов множества* X, имеющим L множеством *индексов*, и обозначается символом $\lambda \to x_\lambda$, или $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$, или, когда это не может привести к недоразумению, просто (x_λ). Наиболее важные примеры дают *последовательности* (конечные или бесконечные), соответствующие случаям, когда L — конечное или бесконечное подмножество множества $\mathbf{N}$ целых чисел $\geqslant 0$.

Следует отличать семейство $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$ элементов множества X от подмножества множества X, состоящего из элементов этого семейства; это подмножество служит образом множества L при отображении $\lambda \to x_\lambda$ и вполне может иметь только один элемент. Различные семейства могут, таким образом, иметь одно и то же множество элементов.

Для любого подмножества $M \subset L$ сужение на M отображения $\lambda \to x_\lambda$ называется *подсемейством* семейства $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$, имеющим множество индексов M, и обозначается символом $(x_\lambda)_{\lambda \in M}$.

Множество элементов конечной последовательности $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ записывается в виде $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$; аналогичные обозначения можно применять и для множества элементов бесконечной последовательности.

Если $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ — *семейство подмножеств* множества X [1]), то множество элементов $x \in X$, для которых существует такое $\lambda \in L$, что $x \in A_\lambda$, называется *объединением* семейства $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ и обозначается символом $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ или $\bigcup_\lambda A_\lambda$. Множество элементов $x \in X$, для которых $x \in A_\lambda$ при каждом $\lambda \in L$, называется *пересечением* семейства $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ и обозначается символом $\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda$ или $\bigcap_\lambda A_\lambda$. При $L = \{1, 2\}$ объединением и пересечением соответственно являются $A_1 \cup A_2$ и $A_1 \cap A_2$.

Легко проверяются следующие предложения:

(1.8.1) $$\complement\left(\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in L} (\complement A_\lambda).$$

(1.8.2) $$\left(\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda\right) \cap \left(\bigcup_{\mu \in M} B_\mu\right) = \bigcup_{(\lambda, \mu) \in L \times M} (A_\lambda \cap B_\mu).$$

(1.8.3) $$\left(\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda\right) \cup \left(\bigcap_{\mu \in M} B_\mu\right) = \bigcap_{(\lambda, \mu) \in L \times M} (A_\lambda \cup B_\mu).$$

(1.8.4) $$F\left(\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in L} F(A_\lambda),$$

если F — отображение X в Y и $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ — семейство подмножеств множества X.

(1.8.5) $$F^{-1}\left(\bigcup_{\lambda \in L} A'_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in L} F^{-1}(A'_\lambda),$$

(1.8.6) $$F^{-1}\left(\bigcap_{\lambda \in L} A'_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda \in L} F^{-1}(A'_\lambda),$$

если F — отображение X в Y и $(A'_\lambda)_{\lambda \in L}$ — семейство подмножеств множества Y.

---

[1]) То есть отображение множества L в множество $\mathfrak{P}(X)$. — *Прим. ред.*

Если B — подмножество X, то *покрытием* B называют такое семейство $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ подмножеств множества X, что $B \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$.

Задача

Пусть $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — конечное семейство множеств. Для любого подмножества H промежутка $[1, n]$ множества $\mathbf{N}$ положим: $P_H \triangleq \bigcup_{i \in H} X_i$ и $Q_H = \bigcap_{i \in H} X_i$. Пусть $\mathfrak{F}_k$ — множество всех подмножеств промежутка $[1, n]$, состоящих из k элементов. Покажите, что

$$\bigcup_{H \in \mathfrak{F}_k} Q_H \supset \bigcap_{H \in \mathfrak{F}_k} P_H, \quad \text{если} \quad 2k \leqslant n+1,$$

$$\bigcup_{H \in \mathfrak{F}_k} Q_H \subset \bigcap_{H \in \mathfrak{F}_k} P_H, \quad \text{если} \quad 2k \geqslant n+1.$$

9. Счетные множества

Множество X называется *равномощным* множеству Y, если существует биективное отображение X на Y. Ясно, что X равномощно X; если X равномощно Y, то Y равномощно X; если X и Y равномощны Z, то X равномощно Y. Множество называется *счетным*, если оно равномощно множеству $\mathbf{N}$ целых чисел $\geqslant 0$.

(1.9.1) *Любое подмножество множества* $\mathbf{N}$ *целых чисел* $\geqslant 0$ *конечно или счетно.*

В самом деле, допустим, что $A \subset \mathbf{N}$ бесконечно. Определим отображение $n \to x_n$ множества $\mathbf{N}$ в A с помощью следующего индуктивного процесса: x_0 есть наименьший элемент множества A, x_n — наименьший элемент множества $A \setminus \{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$, которое, по предположению, не пусто. Прежде всего отсюда следует, что $x_i \neq x_n$ при $i < n$ и поэтому отображение $n \to x_n$ инъективно. Докажем вдобавок, что $x_i < x_n$ при $i < n$. Воспользуемся индукцией по i при фиксированном n. По определению x_n мы имеем $x_0 < x_n$, и если неравенство $x_j < x_n$ доказано при $j < i$, то по определению x_i имеем $x_i \leqslant x_n$ и, следовательно, $x_i < x_n$, так как $x_i \neq x_n$. Далее, из неравенства $x_i < x_n$ при $i < n$ с помощью индукции по n сразу следует, что $n \leqslant x_n$ для каждого n; поэтому, если $a \in A$, то мы имеем $a \leqslant x_a$. Пусть теперь $a > x_0$ и m — наибольшее целое число $< a$, для которого $x_m < a$. Если бы нашлось такое число $b \in A$, что $x_m < b < a$, то мы по определению имели бы $x_{m+1} \leqslant b < a$, что противоречит определению числа m. Таким образом, a — наименьший элемент множества $A \setminus \{x_0, \ldots, x_m\}$; иными

словами, $a = x_{m+1}$ и отображение $n \to x_n$ является сюръективным, ч. т. д.

Из (1.9.1) следует, что любое подмножество счетного множества конечно или счетно; такое множество называется также *не более чем счетным*.

(1.9.2) *Пусть A — счетное множество и f — отображение A на множество B. Тогда B не более чем счетно.*

Пусть $n \to a_n$ — биективное отображение $\mathbf{N}$ на A. Тогда $n \to f(a_n)$ — отображение $\mathbf{N}$ на B, и, следовательно, мы можем считать, что $A = \mathbf{N}$. Для каждого $b \in B$, по предположению, множество $f^{-1}(b)$ не пусто; пусть $m(b)$ — его наименьший элемент. Тогда $f(m(b)) = b$, а потому m — инъективное отображение множества B в $\mathbf{N}$. Можно рассматривать m как биективное отображение B на $m(B) \subset \mathbf{N}$, и в силу (1.9.1) $m(B)$ не более чем счетно, ч. т. д.

Заметим, что если множество A не более чем счетно, то всегда существует сюръективное отображение $\mathbf{N}$ на A. Это очевидно, если A бесконечно; в противном же случае существует биективное отображение f промежутка $0 \leqslant i \leqslant m$ на A, и, полагая $g(n) = f(m)$ при $n > m$, можно продолжить f до сюръективного отображения всего $\mathbf{N}$.

(1.9.3) *Множество $\mathbf{N} \times \mathbf{N} = \mathbf{N}^2$ счетно.*

Полагая

$$f(x, y) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + y,$$

определим инъективное отображение f множества $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ в $\mathbf{N}$ („диагональная нумерация"; отображение f оказывается даже биективным, но этот результат нам не потребуется). В самом деле, $(a+1) \times (a+2)/2 = a + 1 + a(a+1)/2$; поэтому если $x + y = a$ и $x + y < x' + y'$, то, так как $y \leqslant a$, имеем $f(x, y) \leqslant a + a(a+1)/2 < f(x', y')$, а если $x + y = x' + y'$ и $y' < y$, то $f(x, y) - f(x', y') = y - y'$. Таким образом, из $(x, y) \neq (x', y')$ следует $f(x, y) \neq f(x', y')$. Затем применяем (1.9.1).

Будем говорить, что семейство $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$ *счетно* (соответственно *не более чем счетно*), если счетно (соответственно не более чем счетно) множество индексов L.

(1.9.4) *Объединение счетного семейства счетных множеств счетно.*

Пусть $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ — счетное семейство счетных множеств. Существует биективное отображение $n \to \lambda_n$ множества $\mathbf{N}$ на L и (для каждого $\lambda \in L$) биективное отображение $n \to f_\lambda(n)$ множества $\mathbf{N}$ на A_λ. Поло-

жим $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ и рассмотрим отображение $(m, n) \to f_{\lambda_n}(m)$ произведения $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ в A. Это отображение сюръективно. В самом деле, если $x \in A_\mu$, то существует такое n, что $\mu = \lambda_n$, и такое m, что $x = f_\mu(m) = f_{\lambda_n}(m)$. Так как A бесконечно, нужный результат следует теперь из (1.9.3) и (1.9.2).

Предложение (1.9.4) останется справедливым, если слово *„счетное“* всюду заменить словами *„не более чем счетное“*. Нужно только, пользуясь замечанием, сделанным после (1.9.2), заменить в доказательстве биективные отображения сюръективными.

Наконец, будем рассматривать в качестве аксиомы следующий результат:

(1.9.5) *Каждое бесконечное множество содержит счетное подмножество.*

Задачи

1. Покажите, что множество $\mathfrak{F}(\mathbf{N})$ всех конечных подмножеств множества $\mathbf{N}$ счетно.

[Запишите его как объединение счетного множества счетных множеств.]

2. Покажите, что множество всех конечных последовательностей элементов множества $\mathbf{N}$ счетно.

[Воспользуйтесь задачей 1; обратите внимание на различие между последовательностью и множеством элементов этой последовательности!]

3. Докажите утверждение задачи 4 § 1.7 следующим методом: положите $u = g \circ f$, $v = f \circ g$ и по индукции определите u_n и v_n условиями: $u_n = u_{n-1} \circ u$, $v_n = v_{n-1} \circ v$; затем рассмотрите в X (соответственно в Y) возрастающую последовательность множеств $u_n(X)$ [соответственно $v_n(Y)$] и их образы при f (соответственно при g) в Y (соответственно в X).

4. Покажите, что для того чтобы множество X было бесконечно, необходимо и достаточно следующее условие: для каждого отображения f множества X в себя существует такое непустое подмножество $A \subset X$, что $A \neq X$ и $f(A) \subset A$.

[Покажите сначала, что если бы f не обладало этим свойством и X было бесконечным, то X было бы счетным и можно было бы считать, что $X = \mathbf{N}$ и $f(n) > n$ при $n \geqslant 0$; покажите, что это приводит к противоречию.]

5. Пусть E — бесконечное множество, D — не более чем счетное подмножество E, причем $E \setminus D$ бесконечно. Покажите, что $E \setminus D$ равномощно множеству E.

[С помощью (1.9.4) и (1.9.5) определите биективное отображение E на $E \setminus D$.]

Глава 2

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Материал этой главы является вполне классическим. Главное отличие от большинства изложений теории действительных чисел состоит в том, что здесь их свойства выводятся из небольшого числа утверждений, взятых в качестве аксиом, тогда как на самом деле эти утверждения могут быть доказаны как следствия из аксиом теории множеств (или же аксиом натуральных чисел вместе с некоторыми аксиомами теории множеств, позволяющими провести классические конструкции „дедекиндовых сечений" или „канторовых фундаментальных последовательностей"). Эти доказательства представляют большой логический интерес, и исторически они очень помогли выяснению классического (и несколько туманного) понятия „континуума". Но они не имеют к анализу никакого отношения. Интересующийся читатель найдет их практически в любой книге по анализу; особенно ясное и четкое изложение см. в книге Ландау [19].

1. Аксиомы действительных чисел

Поле действительных чисел есть множество $\mathbf{R}$, для которого определены:

1°) два отображения $(x, y) \to x+y$ и $(x, y) \to xy$ произведения $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$;

2°) отношение $x \leqslant y$ (записываемое также в виде $y \geqslant x$) между элементами множества $\mathbf{R}$,

удовлетворяющие следующим четырем группам аксиом:

(I) Множество $\mathbf{R}$ есть *поле*, иными словами:

(I.1) $x+(y+z)=(x+y)+z$;

(I.2) $x+y=y+x$;

(I. 3) существует такой элемент $0 \in \mathbf{R}$, что $0+x=x$ для каждого $x \in \mathbf{R}$;

(I.4) для каждого элемента $x \in \mathbf{R}$ существует такой элемент $-x \in \mathbf{R}$, что $x+(-x)=0$;

(I.5) $x(yz)=(xy)z$;

(I.6) $xy=yx$;

(I.7) в $\mathbf{R}$ существует такой элемент $1\neq 0$, что $1\cdot x=x$ для каждого $x\in\mathbf{R}$;

(I.8) для каждого элемента $x\neq 0$ в $\mathbf{R}$ существует такой элемент $x^{-1}\in\mathbf{R}$ (обозначаемый также символом $1/x$), что $xx^{-1}=1$;

(I.9) $x(y+z)=xy+xz$.

Мы предполагаем, что элементарные следствия из этих аксиом (общая теория полей) известны [1]).

(II) Множество $\mathbf{R}$ есть *упорядоченное поле*. Это означает, что выполняются следующие аксиомы:

(II.1) из $x\leqslant y$ и $y\leqslant z$ следует $x\leqslant z$;

(II.2) отношение „$x\leqslant y$ и $y\leqslant x$" эквивалентно отношению $x=y$;

(II.3) для любых двух элементов x, y множества $\mathbf{R}$ или $x\leqslant y$ или $y\leqslant x$;

(II.4) из $x\leqslant y$ следует $x+z\leqslant y+z$;

(II.5) из $0\leqslant x$ и $0\leqslant y$ следует $0\leqslant xy$.

Отношение „$x\leqslant y$ и $x\neq y$" записывается в виде $x<y$ или $y>x$.

Для любой пары элементов a и b множества $\mathbf{R}$, такой, что $a<b$, множество действительных чисел x, удовлетворяющих условию $a<x<b$, называется *открытым промежутком с началом a и концом b* и обозначается символом $]a, b[$; множество действительных чисел x, удовлетворяющих условию $a\leqslant x\leqslant b$, называется *замкнутым промежутком с началом a и концом b* и обозначается символом $[a, b]$ (при $a=b$ символ $[a, a]$ обозначает одноточечное множество $\{a\}$); множество действительных чисел x, удовлетворяющих условию $a<x\leqslant b$ (соответственно $a\leqslant x<b$), называется *полуоткрытым промежутком с началом a и концом b*, открытым в a (соответственно в b) и замкнутым в b (соответственно в a) и обозначается символом $]a, b]$ (соответственно $[a, b[$). Начало и конец промежутка называются также „концами" этого промежутка.

(III) Множество $\mathbf{R}$ есть *архимедово упорядоченное поле*. Это означает, что оно удовлетворяет аксиоме Архимеда: для любой

---

[1]) См. Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, Физматгиз, 1962. — *Прим. ред.*

пары x, y действительных чисел, такой, что $0 < x$, $0 \leqslant y$, существует такое натуральное число n, что $y \leqslant nx$.

(IV) Множество $\mathbf{R}$ удовлетворяет аксиоме о вложенных промежутках: если $([a_n, b_n])$ — последовательность таких замкнутых промежутков, что $a_n \leqslant a_{n+1}$ и $b_{n+1} \leqslant b_n$ при каждом n, то пересечение этой последовательности не пусто.

2. Порядковые свойства действительных чисел

Отношение $x \leqslant y$ эквивалентно отношению „$x < y$ или $x = y$".

(2.2.1) *Для любой пары действительных чисел x, y выполняется одно и только одно из трех отношений: $x < y$, $x = y$, $x > y$.*

Это следует из (II. 3) и (II. 2), так как если $x \neq y$, то невозможно, чтобы одновременно выполнялись оба неравенства $x < y$ и $x > y$.

(2.2.2) *Из каждого из отношений „$x \leqslant y$ и $y < z$" и „$x < y$ и $y \leqslant z$" следует отношение $x < z$.*

В самом деле, в силу (II. 1) из них следует неравенство $x \leqslant z$, и если бы мы имели $x = z$, то мы имели бы одновременно $x \leqslant y$ и $y < x$ (или же $x < y$ и $y \leqslant x$), что абсурдно.

(2.2.3) *Любое конечное подмножество A множества $\mathbf{R}$ имеет наибольший элемент b и наименьший элемент a (т. е. для каждого $x \in A$ имеем: $a \leqslant x \leqslant b$).*

Проведем индукцию по числу n элементов множества A. При $n = 1$ свойство очевидно. Пусть c — произвольный элемент множества A и $B = A \setminus \{c\}$. Так как B имеет $n - 1$ элемент, то существует в этом множестве наименьший элемент a' и наибольший элемент b'. Если $a' \leqslant c \leqslant b'$, то a' — наименьший, а b' — наибольший элемент множества A. Если $b' \leqslant c$, то c — наибольший, а a' — наименьший элемент множества A. Если $c \leqslant a'$, то c — наименьший, а b' — наибольший элемент множества A.

(2.2.4) *Если A — конечное подмножество $\mathbf{R}$, состоящее из n элементов, то существует единственное такое биективное отображение f множества I_n натуральных чисел i, удовлетворяющих условию $1 \leqslant i \leqslant n$, на A, что $f(i) < f(j)$ при $i < j$.*

Отображение f называется *естественным упорядочением* множества A.

Проведем индукцию по n. При $n = 1$ результат очевиден. Пусть b — наибольший элемент множества A (2.2.3) и $B = A \setminus \{b\}$. Пусть

g — естественное упорядочение множества B. Любое отображение f множества I_n на A, обладающее указанными выше свойствами, должно быть таким, что $f(n)=b$, и, следовательно, $f(I_{n-1})=B$. Поэтому f на I_{n-1} должно совпадать с естественным упорядочением g множества B, откуда следует, что f единственно. Наоборот, определяя f как отображение, равное g на I_{n-1} и такое, что $f(n)=b$, сразу видим, что f обладает требуемыми свойствами.

(2.2.5) *Если (x_i) и (y_i) — две такие конечные последовательности, состоящие из n действительных чисел $(1 \leqslant i \leqslant n)$, что $x_i \leqslant y_i$ для каждого i, то*

$$x_1+x_2+\ldots+x_n \leqslant y_1+y_2+\ldots+y_n.$$

Если, кроме того, по крайней мере для одного индекса i имеем $x_i < y_i$, то

$$x_1+x_2+\ldots+x_n < y_1+y_2+\ldots+y_n.$$

При $n=2$ из предположений с помощью (II. 4) последовательно получаем

$$x_1+x_2 \leqslant y_1+x_2 \leqslant y_1+y_2$$

и, таким образом, первое заключение в этом случае верно. Кроме того, из равенства $x_1+x_2=y_1+y_2$ следует $x_1+x_2=x_1+y_2=$ $=y_1+y_2$, поэтому $x_2=y_2$ и $x_1=y_1$, откуда вытекает наше второе утверждение. Доказательство завершается индукцией по n, причем применяется результат, только что установленный для $n=2$.

(2.2.6) *Отношение $x \leqslant y$ эквивалентно отношению $x+z \leqslant y+z$; тот же результат останется справедливым, если знак $\leqslant$ заменить на $<$.*

Нам уже известно (II. 4), что из $x \leqslant y$ следует $x+z \leqslant y+z$. Наоборот, из $x+z \leqslant y+z$ следует $x+z+(-z) \leqslant y+z+(-z)$, т. е. $x \leqslant y$. С другой стороны, $x+z=y+z$ эквивалентно $x=y$.

(2.2.7) *Отношения $x \leqslant y$, $0 \leqslant y-x$, $x-y \leqslant 0$, $-y \leqslant -x$, эквивалентны; тот же результат останется справедливым, если знак $\leqslant$ заменить на $<$.*

Это следует из (2.2.6), если последовательно положить $z=-x$, $z=-y$ и $z=-x-y$.

Действительные числа, удовлетворяющие условию $x \geqslant 0$ (соответственно $x>0$), называются *положительными* (соответственно *строго положительными*), а числа, удовлетворяющие условию $x \leqslant 0$ (соответственно $x<0$), называются *отрицательными* (соответственно *строго отрицательными*)[1]). Множество положительных

[1]) В переводе сохранена терминология автора, отличающаяся от общепринятой. — *Прим. перев.*

(соответственно строго положительных) чисел обозначается символом $\mathbf{R}_+$ (соответственно $\mathbf{R}_+^*$).

(2.2.8) *Если числа $x_1, \ldots, x_n$ положительны, то и сумма $x_1+x_2+\ldots+x_n$ положительна; если, кроме того, не имеют места равенства $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$, то $x_1+x_2+\ldots+x_n>0$.*

Это — частный случай (2.2.5). В силу этого утверждения отношение $x\geqslant 0$ (соответственно $x>0$) эквивалентно отношению $nx\geqslant 0$ (соответственно $nx>0$) для любого целого $n>0$.

Положительное число $b-a$ называется *длиной* промежутка с началом a и концом b.

(2.2.9) *Пусть $J_1, \ldots, J_n$ — n открытых промежутков, никакие два из которых не имеют общих точек, и пусть I — промежуток, содержащий $\bigcup_{k=1}^{n} J_k$. Тогда если l_k — длина промежутка J_k $(1\leqslant k\leqslant n)$ и l — длина I, то $l_1+l_2+\ldots+l_n\leqslant l$.*

Пусть $I=]a, b[$, $J_k=]c_k, d_k[$. Для каждого $k\neq 1$ мы имеем или $c_k<d_k\leqslant c_1$ или $d_1\leqslant c_k<d_k$, так как в противном случае пересечение $J_1\cap J_k$ было бы непусто. При $n=1$ утверждение проверяется непосредственно; поскольку $a\leqslant c_1<d_1\leqslant b$, то $-c_1\leqslant -a$ и $d_1-c_1\leqslant b-a$. Проведем индукцию по n. Пусть $J_{i_1}, \ldots, J_{i_p}$ — промежутки, содержащиеся в $]a, c_1[$, и $J_{j_1}, \ldots, J_{j_{n-1-p}}$ — промежутки, содержащиеся в $]d_1, b[$; тогда по индукции $\sum_{h=1}^{p} l_{i_h}\leqslant c_1-a$, $\sum_{k=1}^{n-1-p} l_{j_k}\leqslant b-d_1$ и

$$l_1+l_2+\ldots+l_n=l_1+\sum_{h}^{p} l_{i_h}+\sum_{k=1}^{n-1-p} l_{j_k}\leqslant$$
$$\leqslant d_1-c_1+c_1-a+b-d_1=b-a.$$

Для любого действительного числа x определим *абсолютную величину* числа x как число, равное x, если $x\geqslant 0$, и $-x$, если $x\leqslant 0$. Таким образом, $|-x|=|x|$; отношение $|x|=0$ эквивалентно отношению $x=0$. Обозначим $x^+=\frac{(x+|x|)}{2}$ (*положительная часть* числа x) и $x^-=\frac{(|x|-x)}{2}$ (*отрицательная часть* числа x). Очевидно, что

$$x^+=\begin{cases} x, & \text{если } x\geqslant 0,\\ 0, & \text{если } x\leqslant 0;\end{cases}\qquad x^-=\begin{cases} 0, & \text{если } x\geqslant 0,\\ -x, & \text{если } x\leqslant 0;\end{cases}$$
$$x=x^+-x^-;\qquad |x|=x^++x^-.$$

(2.2.10) *Если $a > 0$, то отношение $|x| \leqslant a$ эквивалентно отношению $-a \leqslant x \leqslant a$, а отношение $|x| < a$ эквивалентно отношению $-a < x < a$.*

В самом деле, если $x \geqslant 0$, то неравенство $x > -a$ выполняется всегда и отношение $|x| \leqslant a$ (соответственно $|x| < a$) эквивалентно отношению $x \leqslant a$ (соответственно $x < a$). Если же $x \leqslant 0$, то всегда выполняется неравенство $x < a$ и отношение $|x| \leqslant a$ (соответственно $|x| < a$) эквивалентно отношению $-x \leqslant a$ (соответственно $-x < a$).

(2.2.11) *Для любой пары действительных чисел x, y*

$$|x+y| \leqslant |x| + |y| \quad \text{и} \quad ||x| - |y|| \leqslant |x-y|.$$

Если оба числа x, y положительны или отрицательны, то первое неравенство вытекает из определения (2.2.8). Если же, например, $x \leqslant 0 \leqslant y$, то $x+y \leqslant y \leqslant y + |x| = |y| + |x|$ и $x+y \geqslant x \geqslant x - |y| = -|x| - |y|$. Из первого неравенства следует: $|x| = |y+(x-y)| \leqslant |y| + |x-y|$ и $|y| = |x+(y-x)| \leqslant |x| + |y-x|$, поэтому $-|x-y| \leqslant |x| - |y| \leqslant |x-y|$.

Из (2.2.11) по индукции следует, что

$$|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \leqslant |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|.$$

(2.2.12) *Если $z \geqslant 0$, то из $x \leqslant y$ следует $xz \leqslant yz$.*

В самом деле, в силу (2.2.7) из $x \leqslant y$ следует $0 \leqslant y - x$, и, значит, в силу (II. 5) $0 \leqslant z(y-x) = zy - zx$.

(2.2.13) *Из $x \leqslant 0$ и $y \geqslant 0$ следует $xy \leqslant 0$; из $x \leqslant 0$ и $y \leqslant 0$ следует $xy \geqslant 0$. Те же результаты останутся справедливыми, если знак $\leqslant$ заменить на $<$. В частности, для любого действительного числа $x^2 \geqslant 0$, а если $x \neq 0$, то $x^2 > 0$.*

Первое утверждение следует из (II. 5) и из того, что $(-x)y = -(xy)$, $(-x)(-y) = xy$; с другой стороны, из $xy = 0$ следует $x = 0$ или $y = 0$.

Из (2.2.13) вытекает, что для любой пары действительных чисел x, y

$$|xy| = |x| \cdot |y|.$$

Из (2.2.13) и (I. 7) следует, что $1 = 1^2 > 0$; поэтому в силу (2.2.8) действительное число $n \cdot 1$ (1 складывается n раз) при $n > 0$ будет > 0; это показывает, что отображение $n \to n \cdot 1$ множества натуральных чисел[1]) в $\mathbf{R}$ инъективно и сохраняет отношение порядка, сложение и умножение. Поэтому натуральные числа с помощью

[1]) См. примечание на стр. 31; автор причисляет к натуральным числам и 0. — *Прим. перев.*

этого отображения отождествляются с соответствующими действительными числами.

(2.2.14) *Если* $x > 0$, *то* $x^{-1} > 0$. *При* $z > 0$ *отношение* $x \leqslant y$ *эквивалентно отношению* $xz \leqslant yz$. *Отношение* $0 < x < y$ *эквивалентно отношению* $0 < y^{-1} < x^{-1}$.

Первое утверждение следует из того факта, что $xx^{-1} = 1 > 0$, поэтому в силу (2.2.13) $x^{-1} > 0$. Второе утверждение следует из первого и из (2.2.12), так как $x = (xz)z^{-1}$. Третье утверждение является очевидным следствием второго.

Действительные числа вида $\pm r/s$, где r и s—натуральные числа, $s \neq 0$, называются ***рациональными числами***. Рациональные числа, у которых $s = 1$, называются ***целыми числами*** (положительными или отрицательными).

Множество всех целых чисел обозначается буквой **Z**, а множество рациональных чисел — буквой **Q**.

(2.2.15) *Множество* **Q** *рациональных чисел счетно.*

Поскольку **Q** является объединением множеств $\mathbf{Q} \cap \mathbf{R}_+$ и $\mathbf{Q} \cap (-\mathbf{R}_+)$, достаточно доказать, что счетно пересечение $\mathbf{Q} \cap \mathbf{R}_+$. Но существует сюръективное отображение $(m, n) \to m/n$ подмножества произведения $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, состоящего из всех пар, у которых $n \neq 0$, на $\mathbf{Q} \cap \mathbf{R}_+$, и, таким образом, требуемый результат следует из (1.9.2), (1.9.3) и (1.9.4).

(2.2.16). *Каждый открытый промежуток в* **R** *содержит бесконечное множество рациональных чисел.*

Достаточно доказать, что $]a, b[$ содержит одно рациональное число c, потому что тогда и промежуток $]a, c[$ содержит рациональное число, и индукция докажет окончательный результат. Пусть $x = b - a > 0$; в силу (III) существует целое число $n > 1/x$, поэтому в силу (2.2.14) $1/n < x$. Мы можем считать, что $b > 0$ (в противном случае мы рассмотрели бы промежуток $]-b, -a[$, где $-a > 0$). Ввиду (III) существует такое целое $k > 0$, что $b \leqslant k/n$. Пусть h — наименьшее целое число, для которого $b \leqslant h/n$. Тогда $(h-1)/n < b$. Покажем, что $(h-1)/n > a$. Если бы это было не так, то в силу (2.2.9) мы имели бы $b - a = x \leqslant 1/n$ в противоречии с определением n.

(2.2.17). *Множество действительных чисел несчетно.*

Проведем рассуждение от противного. Допустим, что имеется биективное отображение $n \to x_n$ множества **N** на **R**. Определим по индукции последовательность $n \to p(n)$ целых чисел. Положим $p(0) = 0$; и пусть $p(1)$ — наименьшее значение n, для которого $x_n > x_0$. Допустим, что $p(n)$ уже определено для $n \leqslant 2m - 1$ и что $x_{p(2m-2)} < x_{p(2m-1)}$. Тогда множество $]x_{p(2m-2)}, x_{p(2m-1)}[$ в силу (2.2.16) бесконечно. В качестве $p(2m)$ возьмем наименьшее

целое число $k > p(2m-1)$, для которого $x_{p(2m-2)} < x_k < x_{p(2m-1)}$, затем определим $p(2m+1)$ как наименьшее целое число $k > p(2m)$, для которого $x_{p(2m)} < x_k < x_{p(2m-1)}$. Сразу видно, что последовательность $(p(n))$ является строго возрастающей, поэтому $p(n) \geqslant n$ для всех n. С другой стороны, из построения следует, что замкнутый промежуток $[x_{p(2m)}, x_{p(2m+1)}]$ содержится в открытом промежутке $]x_{p(2m-2)}, x_{p(2m-1)}[$.

В силу (IV) существует действительное число y, принадлежащее всем замкнутым промежуткам $[x_{p(2m)}, x_{p(2m+1)}]$, и оно не может совпадать ни с одним из концов этого промежутка, так как концы любого такого промежутка не принадлежат следующему. Пусть q — целое число, для которого $y = x_q$, и пусть n — наибольшее целое число, такое, что $p(n) \leqslant q$, и, значит, $q < p(n+1)$. Предположим сначала, что $n = 2m$; тогда неравенства $x_{p(2m)} < x_q < x_{p(2m+1)} < x_{p(2m-1)}$ противоречат определению числа $p(2m+1)$. Если, напротив, $n = 2m-1$, то неравенства $x_{p(2m-2)} < x_{p(2m)} < x_q < x_{p(2m-1)}$ противоречат определению числа $p(2m)$. Теорема доказана.

Задачи

1. Пусть A — счетное подмножество $\mathbf{R}$, обладающее следующими свойствами: для каждой пары элементов x, y множества A, для которой $x < y$, существуют такие элементы u, v, w множества A, что $u < x < v < y < w$. Покажите, что существует такое биективное отображение f множества A на множество рациональных чисел $\mathbf{Q}$, что из $x < y$ следует $f(x) < f(y)$.

[Пусть $n \to a_n$ и $n \to b_n$ — биективные отображения множества $\mathbf{N}$ на A и $\mathbf{Q}$. Индукцией по n покажите, что существуют конечные подмножества $A_n \subset A$, $B_n \subset \mathbf{Q}$ и биективное отображение f_n множества A_n на B_n, обладающие следующими свойствами:

1°) элемент a_i при $i \leqslant n$ принадлежит A_n;

2°) элемент b_i при $i \leqslant n$ принадлежит B_n;

3°) из $x < y$ в A_n следует $f_n(x) < f_n(y)$;

4°) $A_n \subset A_{n+1}$ и f_n есть сужение биективного отображения f_{n+1} на A_n.]

2. Покажите, что множество I всех иррациональных чисел равномощно множеству $\mathbf{R}$.

[См. задачу 5 § 1.9.]

3. Верхняя и нижняя грани

Действительное число b называется *мажорантой* (соответственно *минорантой*) некоторого множества X действительных чисел, если $x \leqslant b$ (соответственно $b \leqslant x$) для каждого $x \in X$. Множество $X \subset \mathbf{R}$ называется *мажорируемым* или *ограниченным сверху* (соответственно *минорируемым* или *ограниченным снизу*), если множество мажорант (соответственно минорант) множества X не пусто. Если X мажорируемо, то $-X$ (множество чисел $-x$, где $x \in X$) мино-

рируемо, и для каждой мажоранты b множества X число $-b$ является минорантой множества $-X$ и наоборот. Множество, ограниченное и сверху и снизу, называется *ограниченным*.

(2.3.1) *Для того чтобы множество $X \subset \mathbf{R}$ было ограничено, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое целое число n, что $|x| \leqslant n$ для всех $x \in X$.*

В самом деле, из (III) следует, что если a — миноранта и b — мажоранта множества X, то существуют такие целые числа p, q, что $-p < a$ и $b < q$; возьмем $n = p + q$. Обратное очевидно.

(2.3.2) *Если непустое множество $X \subset \mathbf{R}$ мажорируемо, то множество M его мажорант имеет наименьший элемент.*

Пусть $a \in X$, $b \in M$; в силу (III) для каждого натурального числа n существует такое целое число m, что $b \leqslant a + m2^{-n}$. С другой стороны, если c — мажоранта множества X, то мажорантой будет и каждое число $y \geqslant c$ и, таким образом, существует наименьшее целое число p_n, для которого $a + p_n 2^{-n}$ будет мажорантой множества X. Отсюда следует, что если $I_n = [a + (p_n - 1)2^{-n}, a + p_n 2^{-n}]$, то $I_n \cap X$ не пусто. Поскольку $p_n 2^{-n} = 2p_n 2^{-n-1}$ и число $(2p_n - 2)2^{-n-1}$ не является мажорантой, мы необходимо имеем $p_{n+1} = 2p_n$ или $p_{n+1} = 2p_n - 1$, иными словами $I_{n+1} \subset I_n$. Из (IV) следует, что промежутки I_n имеют непустое пересечение J. Если бы J содержало хотя бы два различных элемента $\alpha < \beta$, то промежуток $[\alpha, \beta]$ содержался бы в каждом I_n, и, следовательно, в силу (2.2.9) мы имели бы $2^{-n} \leqslant \beta - \alpha$ или $1 \geqslant 2^n(\beta - \alpha)$ для каждого n, а это противоречит аксиоме (III) (напомним, что $2^n \geqslant n$, что очевидным образом доказывается по индукции). Следовательно, $J = \{\gamma\}$.

Покажем прежде всего, что γ является мажорантой множества X. Если бы это было не так, то существовал бы такой элемент $x \in X$, что $x > \gamma$, но тогда нашлось бы такое n, что $2^{-n} < x - \gamma$, и, так как $\gamma \in I_n$, мы имели бы $a + p_n 2^{-n} < x$ вопреки определению p_n. С другой стороны, каждый элемент $y \in M$ удовлетворяет условию $y \geqslant \gamma$. В противном случае нашлось бы такое n, что $2^{-n} < \gamma - y$, и, так как $\gamma \in I_n$, мы имели бы $a_n + (p_n - 1)2^{-n} > y$ и число $a + (p_n - 1)2^{-n}$ не было бы мажорантой множества X; это снова противоречит определению p_n.

Таким образом, число γ является наименьшим элементом множества M; оно называется *верхней гранью* множества X и обозначается символом $\sup X$.

(2.3.3) *Если непустое множество $X \subset \mathbf{R}$ минорируемо, то множество M' его минорант имеет наибольший элемент.*

Нужно (2.3.2) применить к множеству $-X$.

Наибольший элемент множества M' называется *нижней гранью* множества X и обозначается символом $\inf X$. Для непустого ограниченнного множества X существуют и $\inf X$ и $\sup X$, и при этом $\inf X \leqslant \sup X$.

(2.3.4) *Верхняя грань мажорируемого множества X есть действительное число γ, характеризующееся следующими двумя свойствами:*

1°) *γ является мажорантой множества X;*

2°) *для каждого целого числа $n > 0$ существует такой элемент $x \in X$, что $\gamma - 1/n < x \leqslant \gamma$.*

Из определения следует, что $\gamma = \sup X$ обладает обоими свойствами, так как второе из них выражает тот факт, что число $\gamma - 1/n$ не является мажорантой множества X. Если, наоборот, число γ обладает этими свойствами, то мы не могли бы иметь $\sup X = \beta < \gamma$, потому что в этом случае существовало бы такое n, что $1/n < \gamma - \beta$, поэтому $\beta < \gamma - 1/n$ и число $\gamma - 1/n$ было бы мажорантой множества X вопреки свойству 2°.

Аналогичным образом, применяя (2.3.4) к множеству $-X$ и пользуясь тем, что $\inf X = -\sup(-X)$, можно охарактеризовать $\inf X$.

Если множество $X \subset \mathbf{R}$ имеет наибольший элемент b (соответственно наименьший элемент a), то $b = \sup X$ (соответственно $a = \inf X$) и вместо $\sup X$ (соответственно $\inf X$) мы пишем $\max X$ (соответственно $\min X$). В силу (2.2.3) это, в частности, относится к конечным множествам. Но нижняя и верхняя грани ограниченного бесконечного множества X не обязаны принадлежать X. Например, если X — множество всех чисел вида $1/n$, где n — целые строго положительные числа, то нижней гранью X является 0, а $\min X$ не существует.

(2.3.5) *Если $A \subset \mathbf{R}$ мажорируемо и $B \subset A$, то B мажорируемо и $\sup B \leqslant \sup A$.*

Это следует из определений.

(2.3.6) *Пусть $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ — семейство непустых мажорируемых множеств в $\mathbf{R}$; пусть $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ и B — множество чисел $\sup A_\lambda$. Для того чтобы A было мажорируемо, необходимо и достаточно, чтобы было мажорируемо B, и в этом случае $\sup A = \sup B$.*

Из определения сразу следует, что любая мажоранта множества A является мажорантой и множества B и наоборот, откуда и вытекает требуемый результат.

Пусть f — отображение множества A в множество $\mathbf{R}$ действительных чисел; это отображение f называется *мажорируемым*

(соответственно *минорируемым*, *ограниченным*) *в* A, если множество $f(A)\subset\mathbf{R}$ мажорируемо (соответственно, минорируемо, ограничено). Введем обозначения

$$\sup f(A)=\sup_{x\in A} f(x), \qquad \inf f(A)=\inf_{x\in A} f(x)$$

(*верхняя* и *нижняя* грани отображения f *на множестве* A), когда эти числа определены. Если f мажорируемо, то $-f$ минорируемо и

$$\inf_{x\in A}(-f(x))=-\sup_{x\in A} f(x).$$

(2.3.7) *Пусть f — отображение произведения $A_1\times A_2$ в* $\mathbf{R}$. *Если f мажорируемо, то*

$$\sup_{(x_1,\,x_2)\in A_1\times A_2} f(x_1,\,x_2)=\sup_{x_1\in A_1}\left(\sup_{x_2\in A_2} f(x_1,\,x_2)\right).$$

В самом деле, $f(A_1\times A_2)$ мы можем записать как объединение множеств $f(\{x_1\}\times A_2)$, где x_1 пробегает множество A_1, а затем применить (2.3.6).

(2.3.8) *Пусть f, g — такие два отображения множества A в* $\mathbf{R}$, *что $f(x)\leqslant g(x)$ для каждого $x\in A$. Тогда если g мажорируемо, то и f мажорируемо и* $\sup\limits_{x\in A} f(x)\leqslant\sup\limits_{x\in A} g(x)$.

Это сразу следует из определений.

(2.3.9) *Пусть f и g — два отображения множества A в* $\mathbf{R}$. *Если и f и g мажорируемы, то мажорируемо и $f+g$ [т. е. отображение $x\to f(x)+g(x)$] и* $\sup\limits_{x\in A}(f(x)+g(x))\leqslant\sup\limits_{x\in A} f(x)+\sup\limits_{x\in A} g(x)$. *Если g, кроме того, и минорируемо, то*

$$\sup_{x\in A} f(x)+\inf_{x\in A} g(x)\leqslant\sup_{x\in A}(f(x)+g(x)).$$

Пусть $a=\sup\limits_{x\in A} f(x)$, $b=\sup\limits_{x\in A} g(x)$. Тогда для каждого $x\in A$ имеем $f(x)\leqslant a$ и $g(x)\leqslant b$, поэтому $f(x)+g(x)\leqslant a+b$, откуда следует первое неравенство. Пусть $c=\inf\limits_{x\in A} g(x)$. Тогда для каждого $x\in A$ имеем: $f(x)+c\leqslant f(x)+g(x)\leqslant d=\sup\limits_{x\in A}(f(x)+g(x))$. Но это дает $f(x)\leqslant d-c$ для каждого $x\in A$, значит, $a\leqslant d-c$, или $a+c\leqslant d$, и мы получили второе неравенство.

(2.3.10) *Пусть f — мажорируемое отображение множества A в* $\mathbf{R}$. *Тогда для каждого действительного числа c имеем* $\sup\limits_{x\in A}(f(x)+c)=c+\sup\limits_{x\in A} f(x)$.

В (2.3.9) в качестве g нужно взять постоянную функцию, равную c.

(2.3.11) *Пусть f_1 (соответственно f_2) — мажорируемое отображение множества A_1 (соответственно A_2) в* $\mathbf{R}$. *Тогда отображение $(x_1, x_2) \to f_1(x_1) + f_2(x_2)$ мажорируемо и*

$$\sup_{(x_1, x_2) \in A_1 \times A_2} (f_1(x_1) + f_2(x_2)) = \sup_{x_1 \in A_1} f_1(x_1) + \sup_{x_2 \in A_2} f_2(x_2).$$

Это вытекает из (2.3.7) и (2.3.10).

Мы предоставляем читателю сформулировать аналогичные свойства для inf (всюду нужно изменить знаки).

Задача

Пусть $x \to I(x)$ — отображение множества $\mathbf{R}$ в множество открытых промежутков в $\mathbf{R}$, где $I(x)$ — открытый промежуток с центром x и длины $\leqslant c$ (c — некоторое данное положительное число). Покажите, что для каждого замкнутого промежутка $[a, b]$ в $\mathbf{R}$ существует конечное число точек $x_i \in [a, b]$, обладающих следующими свойствами:

1°) промежутки $I(x_i)$ образуют покрытие промежутка $[a, b]$;

2°) сумма длин промежутков $I(x_i)$ не превосходит $c + 2(b - a)$. Приведите пример, подтверждающий, что это — наилучшая возможная оценка.

[Докажите, что если теорема верна для любого промежутка $[a, x]$, где $a \leqslant x < u < b$, то существует такое v, что $u < v < b$ и что теорема все еще верна для любого промежутка $[a, y]$, где $a \leqslant y < v$. Затем рассмотрите верхнюю грань всех таких чисел $u < b$, что теорема верна для любого промежутка $[a, x]$, где $a \leqslant x < u$.]

Глава 3

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Эта глава вместе с гл. 5 составляет сердцевину книги: в ней развивается геометрический язык, на котором теперь выражаются результаты анализа. Этот язык позволяет придать им полную общность и вместе с тем дать наиболее простые и наиболее отражающие суть дела доказательства. Бо̀льшая часть понятий, вводимых в этой главе, в применении к „обычному" трехмерному пространству очень наглядна. После того как читатель, решив ряд задач и прочитав следующие главы, приобретет некоторый опыт в обращении с этими понятиями, он убедится, что с должными предосторожностями геометрическая интуиция и в общей ситуации является исключительно надежным руководителем и что было бы жалко ограничить ее использование лишь классическими областями.

В этой главе почти нет настоящих теорем; большинство результатов непосредственно следует из определений, а те из них, которые требуют несколько большего труда, никогда не лежат очень глубоко. Параграфы 3.1—3.13 по существу посвящены установлению терминологии. Неподготовленному читателю может показаться, что есть очень много терминов, особенно в 3.5—3.8, которые на самом деле позволяют лишь различными способами снова и снова говорить одно и то же. Причину этой очевидной перегруженности языка следует искать в приложениях: отказ от нее (теоретически возможный) привел бы к очень неуклюжим и громоздким выражениям, а на практике доказано, что для достижения большей ясности стоит обременить память несколькими дополнительными терминами.

Наиболее важными понятиями, изучаемыми в этой главе, являются понятия *полноты* (3.14), *компактности* (3.16—3.18) и *связности* (3.19). Прежде чем идти дальше, читатель должен попытаться овладеть ими как можно лучше, так как они будут неоднократно и широко использоваться.

Метрические пространства составляют только один из частных видов „топологических пространств", и эта глава может, таким образом, рассматриваться как введение в изучение „общей топологии", излагаемой, например, у Келли [18] и Бурбаки [5]. Путь к этому обобщению указывается в (3.12), где становится ясным, что в большинстве вопросов расстояние, определяющее метрическое пространство, играет лишь вспомогательную роль и что, существенно не нарушая изучаемых явлений, его можно заменять „эквивалентными" расстояниями.

1. Расстояния и метрические пространства

Пусть E — некоторое множество. *Расстояние в E* есть отображение d произведения $E \times E$ в множество $\mathbf{R}$ действительных чисел, обладающее следующими свойствами:

(I) $d(x, y) \geqslant 0$ для любой пары элементов x, y множества E.

(II) Отношение $d(x, y) = 0$ эквивалентно отношению $x = y$.

(III) $d(y, x) = d(x, y)$ для любой пары элементов x, y множества E.

(IV) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ для любых трех элементов x, y, z множества E (*неравенство треугольника*).

Из (IV) по индукции следует для любого $n > 2$

$$d(x_1, x_n) \leqslant d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \ldots + d(x_{n-1}, x_n).$$

(3.1.1) *Если d — расстояние в E, то*

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leqslant d(x, y)$$

для любых трех элементов x, y и z множества E.

В самом деле, из (III) и (IV) следует, что

$$d(x, z) \leqslant d(y, z) + d(x, y)$$

и

$$d(y, z) \leqslant d(y, x) + d(x, z) = d(x, y) + d(x, z),$$

поэтому

$$-d(x, y) \leqslant d(x, z) - d(y, z) \leqslant d(x, y).$$

Множество E вместе с заданным в E расстоянием называют *метрическим пространством.*

2. Примеры расстояний

(3.2.1) Функция $d(x, y) = |x - y|$ есть расстояние в множестве $\mathbf{R}$ действительных чисел, как это сразу следует из (2.2.11). Соответствующее метрическое пространство называется *действительной прямой.* Если $\mathbf{R}$ рассматривается как метрическое пространство, причем в явной форме не оговорено, при каком расстоянии, то всегда подразумевается, что речь идет о только что введенном расстоянии.

(3.2.2) В обычном трехмерном пространстве $\mathbf{R}^3 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ для обычного *эвклидова расстояния*, определяемого формулой

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2},$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$ и $y = (y_1, y_2, y_3)$ — два элемента, аксиомы (I), (II) и (III) тривиальны; аксиома (IV) проверяется прямым вычислением.

(3.2.3) На *действительной плоскости* $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ для любых двух элементов $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ положим

$$d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|;$$

аксиомы (I), (II) и (III) снова проверяются тривиально, а (IV) следует из (2.2.11).

(3.2.4) Пусть A — произвольное множество, $E = \mathscr{B}(A)$ — *множество ограниченных отображений* A *в* $\mathbf{R}$ (см. 2.3). Тогда для любых двух функций f и g, принадлежащих E, разность $f - g$ также принадлежит E и определено число

$$d(f, g) = \sup_{t \in A} |f(t) - g(t)|.$$

Отображение $(f, g) \to d(f, g)$ является расстоянием в E. В самом деле, (I) и (III) тривиальны, а (IV) сразу следует из (2.3.9) и (2.3.8). Далее, если $d(f, g) = 0$, то $f(t) - g(t) = 0$ для всех $t \in A$; но это означает, что $f = g$ (см. 1.4), откуда следует (II).

(3.2.5) Пусть E — произвольное множество; положим $d(x, y) = 1$, если $x \neq y$ и $d(x, x) = 0$. Тогда аксиомы (I), (II) и (III) выполняются. Аксиома (IV) очевидна, если два из трех элементов x, y, z равны; если же это не так, то $d(x, z) = 1$, $d(x, y) + d(y, z) = 2$, и, таким образом, аксиома (IV) справедлива во всех случаях. Соответствующее метрическое пространство, определяемое на E этим расстоянием, называется *дискретным* метрическим пространством.

(3.2.6) Пусть p — простое число. Для любого целого $n > 0$ определим $v_p(n)$ — показатель степени числа p в разложении числа n на простые множители. Из определения сразу следует, что

(3.2.6.1) $$v_p(nn') = v_p(n) + v_p(n')$$

для любой пары целых чисел > 0. Пусть, далее, $x = \pm r/s$ — рациональное число $\neq 0$, где r и s — целые числа > 0. Положим $v_p(x) = v_p(r) - v_p(s)$. Из (3.2.6.1) сразу следует, что это число не зависит от способа представления числа x в виде дроби. То же соотношение показывает также, что

(3.2.6.2) $$v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$$

для любой пары рациональных чисел $\neq 0$.

Для любой пары рациональных чисел x, y положим теперь

$$d(x, y) = p^{-v_p(x-y)}, \quad \text{если} \quad x \neq y,$$
$$d(x, x) = 0.$$

Докажем, что это — расстояние (так называемое *p-адическое расстояние*) на множестве $\mathbf{Q}$ рациональных чисел. Аксиомы (I), (II) и (III)

сразу следуют из определения. Кроме того, мы докажем следующую усиленную форму аксиомы (IV):

(3.2.6.3) $$d(x, z) \leqslant \max(d(x, y), d(y, z)).$$

Так как в случае, когда два из трех элементов x, y, z равны, это неравенство очевидно, то мы можем считать, что все они различны, и тогда нам нужно доказать, что для любой пары рациональных чисел x, y, для которой $x \neq 0$, $y \neq 0$ и $x - y \neq 0$, мы имеем

(3.2.6.4) $$v_p(x - y) \geqslant \min(v_p(x), v_p(y)).$$

Можно считать, что $v_p(x) \geqslant v_p(y)$; если учесть (3.2.6.2), то неравенство, которое нужно доказать, сведется к неравенству

(3.2.6.5) $$v_p(z - 1) \geqslant 0$$

для любого рационального числа z, такого, что $z \neq 0$, $z \neq 1$ и $v_p(z) \geqslant 0$. Но в этом случае, по определению, $z = \pm p^h r/s$, где $h \geqslant 0$, а r и s не делятся на p. Так как знаменатель числа не делится на p, неравенство (3.2.6.5) следует из определения v_p.

Другие примеры будут подробно изучаться в гл. 5, 6 и 7.

3. Изометрия

Пусть E, E' — два метрических пространства, d, d' — расстояния в E и E'. Биективное отображение f пространства E на E' называется *изометрией*, если

(3.3.1) $$d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$$

для любой пары элементов пространства E; обратное отображение f^{-1} является тогда изометрией пространства E' на E. Два метрических пространства E и E' *изометричны*, если существует изометрия E на E'. Любая теорема, доказанная в E, в которой участвуют только расстояния между элементами пространства E, немедленно дает соответствующую теорему в любом изометричном пространстве E' относительно расстояний между образами при отображении f элементов пространства E, о которых шла речь в исходной теореме.

Пусть теперь E — метрическое пространство, d — расстояние в E и f — биективное отображение E на множество E' (в E' до этого расстояние могло быть и не определено). Мы можем тогда определить в E' расстояние d' с помощью формулы (3.3.1), и в таком случае f будет изометрией пространства E на E'. Говорят, что расстояние d' было *перенесено* с E на E' отображением f.

(3.3.2) Пример: *расширенная действительная прямая* $\overline{\mathbf{R}}$. Функция f, определенная на $\mathbf{R}$ условием $f(x) = x/(1 + |x|)$, является

биективным отображением $\mathbf{R}$ на открытый промежуток $I =]-1, +1[$. Обратное отображение g определяется формулой $g(x) = x/(1-|x|)$ при $|x| < 1$. Пусть J — замкнутый промежуток $[-1, +1]$ и пусть $\bar{\mathbf{R}}$ — множество, являющееся объединением $\mathbf{R}$ и двух новых элементов, обозначаемых символами $+\infty$ и $-\infty$ (*бесконечные точки*).

Продолжим f до биективного отображения множества $\bar{\mathbf{R}}$ на J, полагая $f(+\infty) = +1$, $f(-\infty) = -1$, и будем вновь буквой g обозначать обратное отображение. Так как J — метрическое пространство с расстоянием $|x-y|$, мы можем применить описанный выше процесс и, положив $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$, превратить $\bar{\mathbf{R}}$ в метрическое пространство. С этим расстоянием [которое, когда оно рассматривается для элементов пространства $\mathbf{R}$, отличается от расстояния, определенного в (3.2.1)] метрическое пространство $\bar{\mathbf{R}}$ называется *расширенной действительной прямой*. Отметим, что $d(+\infty, x) = 1/(1+|x|)$ при $x \geqslant 0$ и $d(-\infty, x) = 1/(1+|x|)$ при $x \leqslant 0$.

Введем в $\bar{\mathbf{R}}$ *отношение порядка*, по определению считая неравенство $x \leqslant y$ эквивалентным неравенству $f(x) \leqslant f(y)$. Легко проверить, что когда x и y принадлежат $\mathbf{R}$, это отношение порядка эквивалентно отношению порядка, уже определенному в $\mathbf{R}$, и что, кроме того, для любого $x \in \mathbf{R}$ мы имеем $-\infty < x < +\infty$. Действительные числа называются также *конечными* элементами пространства $\bar{\mathbf{R}}$. Все свойства и определения, рассмотренные в гл. 2 и связанные только с отношением порядка (исключая все то, в чем участвуют алгебраические операции), можно немедленно „перенести" на $\bar{\mathbf{R}}$ отображением g.

Непустое подмножество A пространства $\bar{\mathbf{R}}$ при рассматриваемом отношении порядка всегда ограничено, и, следовательно, $\sup A$ и $\inf A$ определены, но могут оказаться как действительными числами, так и $+\infty$ или $-\infty$. Верхняя и нижняя грани $\sup\limits_{x \in A} u(x)$ и $\inf\limits_{x \in A} u(x)$ (любого отображения u множества A в $\bar{\mathbf{R}}$) определяются точно так же, и, в частности, без изменений сохраняются свойства (2.3.5), (2.3.6), (2.3.7) и (2.3.8).

4. Шары, сферы, диаметр

В теории метрических пространств чрезвычайно удобно пользоваться геометрическим языком, на который наталкивает классическая геометрия. Элементы метрического пространства обычно будут называться *точками*. Если даны метрическое пространство E с расстоянием d, точка $a \in E$ и действительное число $r > 0$, то *открытый шар* (соответственно *замкнутый шар*, *сфера*) *с центром* a *и радиусом* r есть множество $\mathrm{B}(a; r) = \{x \in E \mid d(a, x) < r\}$ (соот-

ветственно $B'(a; r)=\{x \in E \mid d(a, x) \leqslant r\}$, $S(a; r)=\{x \in E \mid d(a, x)=r\}$). Открытые и замкнутые шары с центром a всегда содержат точку a, но сфера с центром a может оказаться пустой (примеры „странных" свойств, которыми могут обладать шары в общем метрическом пространстве, см. в задаче 4 § 3.8).

Примеры. На действительной прямой открытый (соответственно замкнутый) шар с центром a и радиусом r есть промежуток $]a-r, a+r[$ (соответственно $[a-r, a+r]$); сфера с центром a и радиусом r состоит из двух точек: $a-r$ и $a+r$.

На расширенной прямой $\overline{\mathbf{R}}$ открытый шар с центром $+\infty$ и радиусом $r<1$ есть промежуток $](1-r)/r, +\infty]$.

В дискретном пространстве E шар (открытый или замкнутый) с центром a и радиусом $r<1$ сводится к a, а соответствующая сфера пуста. Если, напротив, $r \geqslant 1$, то $B(a; r)=B'(a; r)=E$, а $S(a; r)=\varnothing$ при $r>1$ и $S(a; r)=E \setminus \{a\}$ при $r=1$.

Пусть A, B — два непустых подмножества пространства E. *Расстояние* от A до B, по определению, есть положительное число

$$d(A, B)=\inf_{x \in A, y \in B} d(x, y).$$

Если A состоит из одной точки x, то вместо $d(A, B)$ пишут также $d(x, B)$. В силу (2.3.7) имеем $d(A, B)=\inf\limits_{x \in A} d(x, B)$. Если $A \cap B \neq \varnothing$, то $d(A, B)=0$, но обратное может и не иметь места. Вообще если $d(A, B)=a$, то не обязательно существуют такие две точки $x \in A$, $y \in B$, для которых $d(x, y)=a$. Пусть, например, на действительной прямой A — множество всех целых чисел $\geqslant 1$, а B — множество всех чисел вида $n-1/n$ для всех целых чисел $n \geqslant 2$. Хотя A и B не имеют общих точек, но расстояние $d(n, n-1/n)=1/n$ сколь угодно мало; поэтому $d(A, B)=0$ (см. задачу 2 § 3.17)

(3.4.1) *Если точка x не принадлежит шару $B(a; r)$ [соответственно $B'(a; r)$], то $d(x, B(a; r)) \geqslant d(a, x)-r$ [соответственно $d(x, B'(a; r)) \geqslant d(a, x)-r$].*

В самом деле, из предположения следует, что $d(a, x) \geqslant r$. Для любой точки $y \in B(a; r)$ [соответственно $y \in B'(a; r)$] в силу неравенства треугольника $d(x, y) \geqslant d(a, x)-d(a, y) \geqslant d(a, x)-r$.

(3.4.2) *Если A — непустое множество в пространстве E и x, y — две точки E, то*

$$|d(x, A)-d(y, A)| \leqslant d(x, y).$$

Для каждой точки $z \in A$ имеем $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$, поэтому

$$d(x, A) = \inf_{z \in A} d(x, z) \leqslant \inf_{z \in A} (d(x, y) + d(y, z)) = \\ = d(x, y) + \inf_{z \in A} d(y, z) = d(x, y) + d(y, A)$$

в силу (2.3.8) и (2.3.10). Точно так же $d(y, A) \leqslant d(x, y) + d(x, A)$.

Диаметр произвольного непустого множества $A \subset E$, по определению, есть $\delta(A) = \sup\limits_{x \in A,\, y \in A} d(x, y)$; он может быть положительным действительным числом или $+\infty$. Из $A \subset B$ следует $\delta(A) \leqslant \delta(B)$. Равенство $\delta(A) = 0$ имеет место в том и только в том случае, если A — одноточечное множество.

(3.4.3) *Для любого шара* $\delta(B'(a; r)) \leqslant 2r$.

В самом деле, если $d(a, x) \leqslant r$ и $d(a, y) \leqslant r$, то в силу неравенства треугольника $d(x, y) \leqslant 2r$.

Ограниченным множеством в E называется непустое множество, диаметр которого конечен. Ограниченным может быть и все пространство E, как показывает пример расширенной действительной прямой $\overline{\mathbf{R}}$. Непустое подмножество ограниченного множества ограничено.

(3.4.4) *Объединение двух ограниченных множеств A и B ограничено.*

В самом деле, если $a \in A$, $b \in B$ и x, y — две любые точки объединения $A \cup B$, то либо и x и y принадлежат A, и тогда $d(x, y) \leqslant \delta(A)$, либо обе они принадлежат B и $d(x, y) \leqslant \delta(B)$, либо же, например, $x \in A$ и $y \in B$, и тогда в силу неравенства треугольника $d(x, y) \leqslant d(x, a) + d(a, b) + d(b, y)$, поэтому

$$\delta(A \cup B) \leqslant d(a, b) + \delta(A) + \delta(B).$$

Поскольку это верно для любых $a \in A$, $b \in B$, имеем

$$\delta(A \cup B) \leqslant d(A, B) + \delta(A) + \delta(B)$$

по определению $d(A, B)$.

Из доказанного следует, что если A ограничено, то, какова бы ни была точка $x_0 \in E$, множество A содержится в замкнутом шаре с центром x_0 и с радиусом $d(x_0, A) + \delta(A)$.

5. Открытые множества

Открытым множеством в метрическом пространстве E с расстоянием d называется подмножество $A \subset E$, обладающее следующим свойством: для любой точки $x \in A$ существует такое $r > 0$, что

$B(x; r) \subset A$. Пустое множество открыто (см. 1.1); все пространство E открыто.

(3.5.1) *Любой открытый шар является открытым множеством.*

В самом деле, если $x \in B(a; r)$, то, по определению, $d(a, x) < r$; поэтому из неравенства $d(x, y) < r - d(a, x)$ следует неравенство $d(a, y) \leqslant d(a, x) + d(x, y) < r$, которое доказывает включение

$$B(x; r - d(a, x)) \subset B(a; r).$$

(3.5.2) *Объединение любого семейства $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ открытых множеств открыто.*

В самом деле, если $x \in A_\mu$ для некоторого $\mu \in L$, то существует такое $r > 0$, что $B(x; r) \subset A_\mu \subset A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$.

Например, на действительной прямой $\mathbf{R}$ любой промежуток $]a, +\infty[$ открыт как объединение открытых множеств $]a, x[$ для всех $x > a$. Точно так же открыт и промежуток $]-\infty, a[$.

(3.5.3) *Пересечение конечного числа открытых множеств открыто.*

Достаточно доказать, что открыто пересечение двух открытых множеств A_1, A_2, а затем провести индукцию. Если $x \in A_1 \cap A_2$, то существуют такие $r_1 > 0$ и $r_2 > 0$, что $B(x; r_1) \subset A_1$ и $B(x; r_2) \subset A_2$; очевидно, $B(x; r) \subset A_1 \cap A_2$, где $r = \min(r_1, r_2)$.

Пересечение бесконечного семейства открытых множеств, вообще говоря, не будет открытым. Например, пересечение промежутков $]-1/n, 1/n[$ в $\mathbf{R}$ — одноточечное множество $\{0\}$, которое в силу (2.2.16) не открыто.

(3.5.4) *В дискретном пространстве любое множество открыто.*

На основании (3.5.2) достаточно доказать, что открыто одноточечное множество $\{a\}$. Но по определению $\{a\} = B(a; 1/2)$, и утверждение следует из (3.5.1).

6. Окрестности

Если A — непустое множество в метрическом пространстве E, то *открытой окрестностью* множества A называется любое открытое множество, содержащее A, а *окрестностью* множества A — любое множество, содержащее открытую окрестность A. В случае когда $A = \{x\}$, мы говорим об окрестностях точки x (а не множества $\{x\}$).

(3.6.1) *Для любого непустого множества $A \subset E$ и любого $r > 0$ множество $V_r(A) = \{x \in E \mid d(x, A) < r\}$ является открытой окрестностью A.*

В самом деле, если $d(x, A) < r$ и $d(x, y) < r - d(x, A)$, то из (3.4.2) следует, что $d(y, A) < d(x, A) + r - d(x, A) = r$; поэтому $V_r(A)$ открыто и, очевидно, содержит A.

В случае когда $A = \{a\}$, множество $V_r(A)$ есть открытый шар $B(a; r)$.

Фундаментальная система окрестностей множества A есть семейство (U_λ) окрестностей A, обладающее тем свойством, что любая окрестность A содержит хотя бы одно из множеств U_λ. Для произвольного множества A множества $V_r(A)$ $(r > 0)$, вообще говоря, не образуют фундаментальную систему окрестностей A [см., однако, (3.17.11)]. Из определений следует, что

(3.6.2) *Шары* $B(a; 1/n)$ *(n — целые числа > 0) образуют фундаментальную систему окрестностей точки a.*

(3.6.3) *Пересечение конечного числа окрестностей множества A является окрестностью множества A.*

Это следует из (3.5.3).

(3.6.4) *Для того чтобы множество A было окрестностью каждой из своих точек, необходимо и достаточно, чтобы A было открыто.*

Условие, очевидно, достаточно. Если, напротив, A — окрестность каждой точки $x \in A$, то для каждой точки $x \in A$ существует открытое множество $U_x \subset A$, содержащее x. Из того, что $x \in U_x \subset A$, заключаем, что $A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup_{x \in A} U_x \subset A$. Поэтому на основании (3.5.2) $A = \bigcup_{x \in A} U_x$ является открытым множеством.

Задача

Покажите, что на действительной прямой множество $\mathbf{N}$ всех целых чисел $\geqslant 0$ не имеет счетной фундаментальной системы окрестностей.

[Допустите противное и воспользуйтесь следующим замечанием: если (a_{mn}) — двойная последовательность чисел > 0, то последовательность (b_n), где $b_n = a_{nn}/2$, обладает тем свойством, что ни для какого номера m неравенство $b_n \geqslant a_{mn}$ не может выполняться сразу для всех номеров n.]

7. Внутренность множества

Точка x называется *внутренней точкой* множества A, если A является окрестностью точки x. Множество всех внутренних точек множества A называется *внутренностью* множества A и обозначается символом $\mathring{A}$.

Например, внутренность любого промежутка с началом a и концом b $(a < b)$ на действительной прямой $\mathbf{R}$ есть открытый промежуток $]a, b[$, так как ни a ни b не могут быть внутренними точками промежутков $[a, b]$, $[a, b[$ и $]a, b]$: никакой промежуток с центром a или b не может содержаться в этих трех промежутках.

(3.7.1) *Для любого множества A внутренность $\mathring{A}$ есть наибольшее открытое множество, содержащееся в A.*

В самом деле, если $x \in \mathring{A}$, то существует открытое множество $U_x \subset A$, содержащее x. Для всякой точки $y \in U_x$, по определению, A есть окрестность y, поэтому $y \in \mathring{A}$ и, значит, $U_x \subset \mathring{A}$, откуда в силу (3.6.4) следует, что $\mathring{A}$ открыто. Если, наоборот, множество $B \subset A$ открыто, то из определения ясно, что $B \subset \mathring{A}$. Таким образом, открытые множества характеризуются условием $A = \mathring{A}$.

(3.7.2) *Если $A \subset B$, то $\mathring{A} \subset \mathring{B}$.*

Это сразу следует из (3.7.1).

(3.7.3) *Для любой пары множеств A и B имеем $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.*

Включение $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} \subset \mathring{A} \cap \mathring{B}$ следует из (3.7.2). С другой стороны, в силу (3.5.3) пересечение $\mathring{A} \cap \mathring{B}$ открыто и содержится в $A \cap B$. Поэтому ввиду (3.7.1) $\mathring{A} \cap \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}$.

Внутренность непустого множества может быть пуста. Это, например, имеет место для одноточечных множеств в $\mathbf{R}$.

Внутренняя точка множества $E \setminus A$ называется *внешней точкой* для A, а внутренность множества $E \setminus A$ — *множеством внешних точек* множества A.

(3.7.4) *Для того чтобы точка $x \in E$ была внешней для A, необходимо и достаточно условие $d(x, A) > 0$.*

В самом деле, из этого условия следует, что $\mathrm{B}(x; d(x, A)) \subset E \setminus A$, поэтому x является внутренней точкой множества $E \setminus A$. Наоборот, если x — точка, внешняя для A, то существует шар $\mathrm{B}(x; r)$, где $r > 0$, содержащийся в $E \setminus A$. Для любой точки $y \in A$ мы, таким образом, имеем $d(x, y) > r$, и, значит, $d(x, A) \geqslant r$.

8. Замкнутые множества, точки прикосновения, замыкание множества

По определению *замкнутое множество* в метрическом пространстве E есть дополнение открытого множества. Пустое множество замкнуто, замкнуто и все пространство E. Промежутки

$[a, +\infty[$ и $]-\infty, a]$ и множество $\mathbf{Z}$ целых чисел — замкнутые множества на действительной прямой. Промежутки $[a, b[$ и $]a, b]$ не являются ни открытыми, ни замкнутыми множествами.

(3.8.1) *Замкнутый шар есть замкнутое множество; сфера есть замкнутое множество.*

В самом деле, в силу (3.4.1) если $x \notin \mathrm{B}'(a; r)$, то $d(x, \mathrm{B}'(a; r)) \geqslant d(a, x) - r > 0$. Поэтому открытый шар с центром x и радиусом $d(a, x) - r$ содержится в дополнении шара $\mathrm{B}'(a; r)$; тем самым доказано, что это дополнение открыто. Дополнение сферы $\mathrm{S}(a; r)$ является объединением шара $\mathrm{B}(a; r)$ и дополнения шара $\mathrm{B}'(a; r)$, и ввиду (3.5.2) оно открыто.

(3.8.2) *Пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто.*

(3.8.3) *Объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.*

Утверждения следуют соответственно из (3.5.2) и (3.5.3), если перейти к дополнениям [см. формулы (1.2.9) и (1.8.1)].

В частности, одноточечное множество $\{x\}$ замкнуто.

(3.8.4) *В дискретном пространстве любое множество замкнуто.*

Это сразу вытекает из (3.5.4).

Точкой прикосновения множества A называется такая точка $x \in E$, каждая окрестность которой имеет с A непустое пересечение. Множество всех точек прикосновения множества A называется *замыканием* A и обозначается символом $\bar{A}$.

Таким образом, сказать, что x не является точкой прикосновения множества A, значит сказать, что она является внутренней точкой дополнения $E \setminus A$.

(3.8.5) *Замыкание множества A есть дополнение множества внешних точек A.*

Замыкание открытого шара $\mathrm{B}(a; r)$ содержится в замкнутом шаре $\mathrm{B}'(a; r)$, но может не совпадать с ним. Если подмножество A действительной прямой ограничено сверху (соответственно снизу), то, как это следует из (2.3.4), его верхняя грань $\sup A$ (соответственно нижняя грань $\inf A$) является точкой прикосновения A.

Ввиду (3.8.5) свойства внутренних точек и внутренности множества, доказанные в 3.7, с помощью формул булевской алгебры можно переформулировать как следующие свойства точек прикосновения и замыкания.

(3.8.6) *Для любого множества A замыкание $\bar{A}$ есть наименьшее замкнутое множество, содержащее A.*