

В частности, замкнутые множества характеризуются условием $A = \bar{A}$.

(3.8.7) Если $A \subset B$, то $\bar{A} \subset \bar{B}$.

(3.8.8) Для любой пары множеств A и B имеем $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

(3.8.9) Для того чтобы точка x была точкой прикосновения множества A , необходимо и достаточно, чтобы $d(x, A) = 0$.

(3.8.10) Замыкание множества A есть пересечение открытых окрестностей $V_r(A)$ множества A .

Это просто другая формулировка утверждения (3.8.9).

(3.8.11) Любое замкнутое множество в метрическом пространстве E является пересечением убывающей последовательности открытых множеств; любое открытое множество является объединением возрастающей последовательности замкнутых множеств.

Первое утверждение доказываем, рассматривая открытые множества $V_{1/n}(A)$, а второе следует из первого, если перейти к дополнениям.

(3.8.12) Если точка прикосновения x множества A не принадлежит A , то пересечение $V \cap A$ множества A с любой окрестностью V точки x бесконечно.

Допустим противное, и пусть $V \cap A = \{y_1, \dots, y_n\}$. По предположению $r_k = d(x, y_k) > 0$. Выберем $r > 0$ так, чтобы $B(x; r) \subset V$ и $r < \min(r_1, \dots, r_n)$. Тогда пересечение A и $B(x; r)$ вопреки предположению пусто.

Точка $x \in E$ называется *граничной точкой* множества A , если она является точкой прикосновения как A , так и CA . Множество $\text{Fr}(A)$ всех граничных точек множества A называется *границей* A . Ясно, что $\text{Fr}(A) = \bar{A} \cap \bar{\text{CA}} = \text{Fr}(\text{CA})$. В силу (3.8.2) $\text{Fr}(A)$ — замкнутое множество, которое может быть и пустым [см. (3.19.9)].

Граничная точка x множества A характеризуется тем свойством, что в любой ее окрестности содержится по крайней мере одна точка множества A и по крайней мере одна точка множества CA . Все пространство E является объединением внутренности множества A , множества его внешних точек и его границы, потому что если окрестность точки x не содержит ни в A ни в CA , то она должна содержать точки обоих этих множеств. Любые два из этих трех множеств не имеют общих точек.

Граница любого промежутка с началом a и концом b в \mathbb{R} есть множество $\{a, b\}$; граница множества \mathbb{Q} в \mathbb{R} есть само \mathbb{R} .

Задачи

1. а) Пусть A — открытое множество в метрическом пространстве E . Покажите, что для любого множества $B \subset E$ справедливо включение $A \cap \bar{B} \subset \overline{A \cap B}$.

б) Приведите примеры таких открытых множеств A, B на действительной прямой, что все четыре множества $A \cap \bar{B}, B \cap \bar{A}, \bar{A} \cap \bar{B}$ и $\overline{A \cap B}$ различны.

с) Приведите пример двух промежутков A, B на действительной прямой, для которых $A \cap \bar{B}$ не содержится в $\overline{A \cap B}$.

2. Пусть A — произвольное множество в метрическом пространстве E .

Обозначим $\alpha(A) = \overset{\circ}{\bar{A}}$ и $\beta(A) = \overset{\circ}{A}$.

а) Покажите, что если A открыто, то $A \subset \alpha(A)$, а если A замкнуто, то $A \supset \beta(A)$.

б) Покажите, что $\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$ и $\beta(\beta(A)) = \beta(A)$ для любого A [воспользуйтесь а)].

в) Приведите пример такого множества A на действительной прямой, для которого все семь множеств $A, \overset{\circ}{A}, \bar{A}, \alpha(A), \beta(A), \alpha(\overset{\circ}{A})$ и $\beta(\bar{A})$ различны и не связаны никакими включениями, кроме следующих: $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \bar{A}$, $\overset{\circ}{A} \subset \alpha(\overset{\circ}{A}) \subset \beta(A) \subset \bar{A}$, $\overset{\circ}{A} \subset \alpha(A) \subset \beta(\bar{A}) \subset \bar{A}$.

3. Пусть E — метрическое пространство.

а) Покажите, что для каждого множества $A \subset E$ справедливо включение $\text{Fr}(\bar{A}) \subset \text{Fr}(A)$ и $\text{Fr}(\overset{\circ}{A}) \subset \text{Fr}(A)$, и приведите примеры, когда эти три множества (на действительной прямой) различны.

б) Пусть A, B — два множества в пространстве E . Покажите, что $\text{Fr}(A \cup B) \subset \text{Fr}(A) \cup \text{Fr}(B)$, и приведите пример, когда эти множества (на действительной прямой) различны. Покажите, что если $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$, то $\text{Fr}(A \cup B) = \text{Fr}(A) \cup \text{Fr}(B)$.

в) Покажите, что если A и B открыты, то

$$(A \cap \text{Fr}(B)) \cup (B \cap \text{Fr}(A)) \subset$$

$$\subset \text{Fr}(A \cap B) \subset (A \cap \text{Fr}(B)) \cup (B \cap \text{Fr}(A)) \cup (\text{Fr}(A) \cap \text{Fr}(B)),$$

и приведите пример, когда эти три множества (на действительной прямой) различны.

4. Пусть d — расстояние в множестве E , удовлетворяющее ультраметрическому неравенству

$$d(x, z) \leqslant \max(d(x, y), d(y, z)),$$

где $x, y, z \in E$ [см. пример (3.2.6)].

а) Покажите, что если $d(x, y) \neq d(y, z)$, то

$$d(x, z) = \max(d(x, y), d(y, z)).$$

б) Покажите, что в таком метрическом пространстве любой открытый шар $B(x; r)$ является одновременно и открытым и замкнутым множеством и что $B(y; r) = B(x; r)$ для любой точки $y \in B(x; r)$.

в) Покажите, что в таком метрическом пространстве любой замкнутый шар $B'(x; r)$ является одновременно и открытым и замкнутым множеством и что $B'(y; r) = B'(x; r)$ для любой точки $y \in B'(x; r)$.

d) Покажите, что если два шара в E имеют общую точку, то один из них содержится в другом.

e) Покажите, что расстояние между двумя различными открытыми шарами радиуса r , содержащимися в замкнутом шаре радиуса r , равно r .

9. Плотные подмножества; сепарабельные пространства

Множество A в метрическом пространстве E называется *плотным относительно множества B* , если любая точка множества B является точкой прикосновения множества A , иными словами, если $B \subset \bar{A}$ (или, что равносильно, если любая окрестность каждой точки $x \in B$ содержит точки множества A).

(3.9.1) Если A плотно относительно B и B плотно относительно C , то A плотно относительно C .

В самом деле, из включения $B \subset \bar{A}$ на основании (3.8.6) следует, что $\bar{B} \subset \bar{A}$, и так как по предположению $C \subset \bar{B}$, мы имеем $C \subset \bar{A}$.

Множество A , плотное относительно E , называется *всюду плотным* или просто *плотным в E* . Такие множества характеризуются тем, что $\bar{A} = E$, или, равносильно, что всякое непустое открытое множество содержит точку множества A .

Метрическое пространство E называется *сепарабельным*, если в E существует не более чем счетное плотное множество.

(3.9.2) Действительная прямая \mathbb{R} сепарабельна.

В самом деле, в силу (2.2.16) множество \mathbb{Q} рациональных чисел плотно в \mathbb{R} , а в силу (2.2.15) \mathbb{Q} счетно.

Семейство $(G_\lambda)_{\lambda \in L}$ непустых открытых множеств называется *базой открытых множеств метрического пространства E* , если каждое непустое открытое множество пространства E является объединением некоторого подсемейства семейства (G_λ) .

(3.9.3) Для того чтобы семейство $(G_\lambda)_{\lambda \in L}$ было базой, необходимо и достаточно, чтобы для каждой точки $x \in E$ и каждой ее окрестности V существовал такой индекс λ , что $x \in G_\lambda \subset V$.

Это условие необходимо, потому что по определению существует открытая окрестность $W \subset V$ точки x , и, поскольку W является объединением множеств G_λ , существует по крайней мере один такой индекс μ , что $x \in G_\mu$. Условие достаточно, ибо если оно выполняется и U — произвольное открытое множество, то в силу (1.4.5) для каждой точки $x \in U$ существует такой индекс $\mu(x)$, что $x \in G_{\mu(x)} \subset U$.

Следовательно, $U \subset \bigcup_{x \in U} G_{\mu(x)} \subset U$.

(3.9.4) Для того чтобы метрическое пространство E было сепарабельно, необходимо и достаточно, чтобы существовала не более чем счетная база открытых множеств пространства E .

Условие достаточно, потому что если (G_n) — база и a_n — точка, принадлежащая G_n , то каждое непустое открытое множество является объединением некоторых G_n и поэтому его пересечение с не более чем счетным множеством точек a_n не пусто. Допустим, напротив, что существует такая последовательность (a_n) точек пространства E , что множество точек этой последовательности всюду плотно. Тогда не более чем счетное [в силу (1.9.3) и (1.9.2)] семейство открытых шаров $B(a_n; 1/m)$ является базой открытых множеств пространства E . Действительно, для каждой точки $x \in E$ и каждого $r > 0$ существует такой индекс m , что $1/m < r/2$, и такой индекс n , что $a_n \in B(x; 1/m)$. Отсюда следует, что $x \in B(a_n; 1/m)$. С другой стороны, если $y \in B(a_n; 1/m)$, то $d(x, y) \leq d(x, a_n) + d(a_n, y) \leq 2/m < r$, так что $B(a_n; 1/m) \subset B(x; r)$, а потому на основании (3.9.3) доказательство закончено.

Задачи

1. Покажите, что объединение открытого множества и множества его внешних точек в метрическом пространстве E всюду плотно.

2. Пусть A — множество в метрическом пространстве E . Точка $x \in A$ называется изолированной, если существует такая окрестность V точки x в E , что $V \cap A$ состоит из одной лишь точки x .

а) Покажите, что множество всех изолированных точек сепарабельного метрического пространства E не более чем счетно.

б) Покажите, что любое семейство $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$ непустых открытых множеств сепарабельного метрического пространства E , обладающих тем свойством, что $U_\lambda \cap U_\mu = \emptyset$ при $\lambda \neq \mu$, не более чем счетно.

3. Пусть A — непустое множество на действительной прямой и B — множество точек $x \in \bar{A}$, для которых существует промежуток $[x, y]$ (где $y > x$), имеющий пустое пересечение с A . Покажите, что B не более чем счетно.

[Покажите, что B равнomoщно множеству открытых промежутков, попарно не имеющих общих точек.]

4. Пусть E — сепарабельное метрическое пространство. Точка $x \in E$ называется точкой конденсации множества $A \subset E$, если в любой окрестности точки x содержится несчетное множество точек из A . Докажите следующие утверждения.

а) Если A не имеет точек конденсации, то оно счетно.

[Рассмотрите пересечения A с множествами, входящими в базу открытых множеств пространства E .]

б) Если B — множество точек конденсации множества A , то каждая точка, принадлежащая B , является точкой конденсации множества B , а множество $A \cap (CB)$ не более чем счетно.

[Убедитесь, что B замкнуто, и примените а).]

5. Покажите, что из каждого открытого покрытия сепарабельного метрического пространства можно выделить счетное открытое покрытие.

6. Пусть E — сепарабельное метрическое пространство, f — произвольное отображение E в \mathbb{R} . Будем говорить, что в точке $x_0 \in E$ отображение f достигает *относительного максимума* (соответственно *строгого относительного максимума*), если существует такая окрестность V точки x_0 , что $f(x) \leq f(x_0)$ [соответственно $f(x) < f(x_0)$] для любой точки $x \in V$, отличной от x_0 . Покажите, что множество M точек $x \in E$, в которых f достигает строгого относительного максимума, не более чем счетно.

[Пусть (U_n) — база открытых множеств пространства E . Рассмотрите те значения n , для которых существует единственная такая точка $x \in U_n$, что $f(x)$ равно верхней грани отображения f в U_n .]

10. Подпространства метрического пространства

Пусть F — непустое подмножество метрического пространства E . Сужение на $F \times F$ отображения $(x, y) \rightarrow d(x, y)$, очевидно, является расстоянием в F , называемым расстоянием, *индивидуированным* в F расстоянием d пространства E . Метрическое пространство, определяемое этим индуцированным расстоянием, называется *подпространством* F метрического пространства E .

(3.10.1) Для того чтобы множество $B \subset F$ было открыто в подпространстве F , необходимо и достаточно, чтобы существовало такое множество A , открытое в E , что $B = A \cap F$.

Если $a \in F$, то пересечение $F \cap B(a; r)$ является открытым шаром с центром a и радиусом r в подпространстве F . Если A открыто в E и $x \in A \cap F$, то существует такое $r > 0$, что $B(x; r) \subset A$, следовательно, $x \in F \cap B(x; r) \subset A \cap F$ и потому $F \cap A$ открыто в F . Если, наоборот, B открыто в подпространстве F , то для каждой точки $x \in B$ существует такое число $r(x) > 0$, что $F \cap B(x; r(x)) \subset B$. Тогда $B = \bigcup_{x \in B} (F \cap B(x; r(x))) = F \cap A$, где $A = \bigcup_{x \in B} B(x; r(x))$, и в силу (3.5.1) и (3.5.2) A открыто в E .

(3.10.2) Для того чтобы каждое подмножество $B \subset F$, открытое в F , было открыто в E , необходимо и достаточно, чтобы F было открыто в E .

Полагая $B = F$, видим, что условие необходимо; ввиду (3.10.1) и (3.5.3) оно достаточно.

(3.10.3) Если $x \in F$, то, для того чтобы подмножество $W \subset F$ было окрестностью точки x в F , необходимо и достаточно, чтобы $W = V \cap F$, где V — окрестность точки x в E .

(3.10.4) Для того чтобы каждая окрестность в F точки $x \in F$ была окрестностью точки x в E , необходимо и достаточно, чтобы F было окрестностью точки x в E .

Эти свойства сразу следуют из (3.10.1) и определения окрестности.

(3.10.5) Для того чтобы множество $B \subset F$ было замкнуто в подпространстве F , необходимо и достаточно, чтобы существовало такое множество A , замкнутое в E , что $B = A \cap F$.

Сказать, что B замкнуто в F , значит сказать, что $F \setminus B$ открыто в F , а это в силу (3.10.1) равносильно существованию такого множества C , открытого в E , что $F \setminus B = C \cap F$. Но это равенство эквивалентно равенству $B = F \cap (E \setminus C)$, откуда и следует требуемый результат.

(3.10.6) Для того чтобы каждое подмножество $B \subset F$, замкнутое в F , было замкнуто в E , необходимо и достаточно, чтобы F было замкнуто в E .

Доказательство точно такое же, как для (3.10.2); нужно применить (3.10.5) и (3.8.2).

(3.10.7) Замыкание в F множества $B \subset F$ равно $\bar{B} \cap F$, где \bar{B} — замыкание множества B в E .

В самом деле, для всякой окрестности V точки $x \in F$ в E имеем $V \cap B = (V \cap F) \cap B$, и требуемый результат следует из (3.10.3) и определения точки прикосновения.

(3.10.8) Пусть F — множество, плотное в пространстве E . Для каждой точки $x \in F$ и каждой окрестности W точки x в E замыкание \bar{W} окрестности W в E является окрестностью точки x в E .

По определению существует такая открытая окрестность U точки x в E , что $U \cap F \subset W$. Достаточно доказать, что $U \subset \bar{W}$. Но если $y \in U$ и V — любая окрестность точки y в E , то $U \cap V$ является окрестностью точки y в E . Поэтому $F \cap (U \cap V)$ не пусто, а это означает, что $(F \cap U) \cap V$ не пусто, т. е. $y \in \bar{F} \cap \bar{U} \subset \bar{W}$.

(3.10.9) Любое подпространство сепарабельного метрического пространства сепарабельно.

В самом деле, если (G_n) — не более чем счетная база открытых множеств пространства E , то в силу (3.10.1) и (1.8.2) множества $G_n \cap F$ образуют счетную базу открытых множеств подпространства $F \subset E$. Отсюда на основании (3.9.4) следует требуемый результат.

Задачи

1. Пусть B и B' — два непустых множества в метрическом пространстве E и A — подмножество пересечения $B \cap B'$, открытое (соответственно замкнутое) и в B и в B' . Покажите, что A открыто (соответственно замкнуто) в $B \cup B'$.

2. Пусть (U_α) — покрытие метрического пространства E , состоящее из открытых множеств. Покажите, что для того, чтобы множество $A \subset E$ было замкнуто в E , необходимо и достаточно, чтобы каждое множество $A \cap U_\alpha$ было замкнуто в U_α .

3. Множество A в метрическом пространстве E называется *локально замкнутым*, если у каждой точки $x \in A$ существует такая окрестность V , что $A \cap V$ замкнуто в V . Покажите, что локально замкнутыми множествами в пространстве E являются множества вида $U \cap F$, где U открыто, а F замкнуто в E .

[Для доказательства того, что локально замкнутое множество имеет этот вид, воспользуйтесь задачей 2.]

4. Приведите пример такого подпространства A плоскости \mathbb{R}^2 , что в A существует открытый шар, являющийся замкнутым множеством, но не замкнутым шаром, и замкнутый шар, являющийся открытым множеством, но не открытым шаром.

[Возьмите в качестве A две точки $(0, 1)$ и $(0, -1)$ и подходящее подмножество оси x .]

5. Докажите утверждение (3.10.9), не пользуясь понятием базы (иными словами, укажите не более чем счетное подмножество, плотное в подпространстве).

§ 11. Непрерывные отображения

Пусть E и E' — два метрических пространства, d и d' — расстояния в них. Отображение f пространства E в E' называется *непрерывным в точке* $x_0 \in E$, если для каждой окрестности V' точки $f(x_0)$ в E' существует такая окрестность V точки x_0 в E , что $f(V) \subset V'$. Отображение f называется *непрерывным в E* (или просто непрерывным), если оно непрерывно в каждой точке пространства E .

Если принять, что математическое понятие окрестности соответствует интуитивной идеи „близости“, то предыдущее определение можно выразить еще нагляднее, сказав, что точка $f(x)$, где f — непрерывное отображение, сколь угодно близка к $f(x_0)$, как только точка x достаточно близка к x_0 .

(3.11.1) Для того чтобы отображение f было непрерывно в точке $x_0 \in E$, необходимо и достаточно, чтобы прообраз $f^{-1}(V')$ каждой окрестности V' точки $f(x_0)$ в E' был окрестностью точки x_0 в E .

(3.11.2) Для того чтобы отображение f было непрерывно в точке $x_0 \in E$, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\epsilon > 0$ существовало такое $\delta > 0$, что из $d(x_0, x) < \delta$ следует $d'(f(x_0), f(x)) < \epsilon$.

Это — только другие формулировки определения.

Естественное вложение $j_F : F \rightarrow E$ подпространства $F \subset E$ в E [см. (1.6.1)] непрерывно. Любое постоянное отображение непрерывно.

(3.11.3) Если $x_0 \in E$ — точка прикосновения множества $A \subset E$ и если отображение f непрерывно в точке x_0 , то $f(x_0)$ — точка прикосновения множества $f(A)$.

В самом деле, если V' — окрестность точки $f(x_0)$ в E' , то $f^{-1}(V')$ — окрестность точки x_0 в E . Поэтому существует точка $y \in A \cap f^{-1}(V')$, и, значит, $f(y) \in f(A) \cap V'$.

(3.11.4) Пусть f — отображение пространства E в E' . Следующие свойства эквивалентны:

- f непрерывно;
- прообраз $f^{-1}(A')$ каждого множества A' , открытого в E' , открыт в E ;
- прообраз $f^{-1}(A')$ каждого множества A' , замкнутого в E' , замкнут в E ;
- для каждого множества $A \subset E$ имеет место включение $f(\bar{A}) \subset \bar{f(A)}$.

Ввиду (3.11.3) имеем $a) \Rightarrow d)$. Далее, $d) \Rightarrow c)$, потому что если A' замкнуто и $A = f^{-1}(A')$, то $f(\bar{A}) \subset \bar{f(A')} = A'$; следовательно, $\bar{A} \subset f^{-1}(A') = A$, и так как $A \subset \bar{A}$, то A замкнуто. Доказательство $c) \Rightarrow b)$ проводится на основании определения замкнутого множества и формулы (1.5.13). Наконец, $b) \Rightarrow a)$, потому что если V' — окрестность точки $f(x_0)$, то существует открытая окрестность $W' \subset V'$ точки $f(x_0)$; прообраз $f^{-1}(W')$ является открытым множеством, содержащим x_0 и содержащимся в $f^{-1}(V')$, и, таким образом, в силу (3.11.1) отображение f непрерывно в каждой точке x_0 .

Следует заметить, что образ открытого (соответственно замкнутого) множества при непрерывном отображении, вообще говоря, не будет открытым (соответственно замкнутым) множеством. Например, отображение $x \rightarrow x^2$ непрерывно в \mathbb{R} , но образ $[0, 1]$ открытого множества $[-1, +1]$ не открыт; отображение $x \rightarrow 1/x$ непрерывно на подпространстве $A = [1, +\infty]$ пространства \mathbb{R} , но образ замкнутого множества A есть промежуток $(0, 1]$, не замкнутый в \mathbb{R} [см., однако, (3.17.9) и (3.20.13)].

(3.11.5) Пусть f — отображение метрического пространства E в метрическое пространство E' и g — отображение простран-

ства E' в метрическое пространство E'' . Если f непрерывно в точке x_0 и g непрерывно в точке $f(x_0)$, то $h = g \circ f$ непрерывно в точке x_0 . Если f непрерывно в E и g непрерывно в E' , то h непрерывно в E .

Второе утверждение, очевидно, следует из первого. Пусть W'' — окрестность точки $h(x_0) = g(f(x_0))$. Тогда из (3.11.1) и предположений следует, что $g^{-1}(W'')$ — окрестность точки $f(x_0)$ в E' и $f^{-1}(g^{-1}(W''))$ — окрестность точки x_0 в E . Но $f^{-1}(g^{-1}(W'')) = h^{-1}(W'')$. В частности,

(3.11.6) *Если f — отображение метрического пространства E в метрическое пространство E' , непрерывное в точке x_0 , и F — подпространство пространства E , содержащее x_0 , то сужение отображения f на F непрерывно в точке x_0 .*

В самом деле, это сужение является отображением $f \circ j_F$, где j_F — естественное вложение подпространства F в E .

Отметим, однако, что сужение отображения $f : E \rightarrow E'$ на подпространстве F может оказаться непрерывным и в случае, когда f не является непрерывным ни в одной точке $x \in E$. Примером служит отображение $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, равное нулю на множестве \mathbb{Q} рациональных чисел и единице на его дополнении (функция Дирихле); сужение отображения f на \mathbb{Q} постоянно и потому непрерывно.

Равномерно непрерывное отображение пространства E в E' есть отображение, обладающее тем свойством, что для каждого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из неравенства $d(x, y) < \delta$ следует $d'(f(x), f(y)) < \epsilon$. Из этого определения и (3.11.2) вытекает, что

(3.11.7) *Равномерно непрерывное отображение непрерывно.*

Обратное, вообще говоря, не верно. Например, функция $x \rightarrow x^2$ не равномерно непрерывна на \mathbb{R} , так как для данного $\alpha > 0$ разность $(x + \alpha)^2 - x^2 = \alpha(2x + \alpha)$ может принимать сколь угодно большие значения [см., однако, (3.16.5)].

В приведенных выше примерах (постоянное отображение; естественное вложение) отображения были равномерно непрерывны.

(3.11.8) *Для любого непустого множества $A \subset E$ отображение $x \rightarrow d(x, A)$ равномерно непрерывно.*

Это следует из определения и (3.4.2).

(3.11.9). *Если f — равномерно непрерывное отображение E в E' и g — равномерно непрерывное отображение E' в E'' , то $h = g \circ f$ равномерно непрерывно.*

В самом деле, для заданного $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из $d'(x', y') < \delta$ следует $d''(g(x'), g(y')) < \epsilon$; далее, существует такое $\eta > 0$, что из $d(x, y) < \eta$ следует $d'(f(x), f(y)) < \delta$. Таким образом, из $d(x, y) < \eta$ следует $d''(g(x), g(y)) < \epsilon$.

Задачи

1. Пусть f — отображение метрического пространства E в метрическое пространство E' . Покажите, что следующие свойства эквивалентны:

a) f непрерывно;

b) для каждого множества $A' \subset E'$ имеем $f^{-1}(\overset{\circ}{A'}) \subset (f^{-1}(A'))^\circ$;

c) для каждого множества $A' \subset E'$ имеем $\overline{f^{-1}(A')} \subset f^{-1}(\overline{A'})$. Приведите пример непрерывного отображения f и такого множества $A' \subset E'$, что $f^{-1}(\overline{A'})$ не является замыканием прообраза $f^{-1}(A')$.

2. Покажите, что для любого метрического пространства E любого числа $r > 0$ и любого множества $A \subset E$ множество $V_r(A)$ замкнуто.

($V_r(A)$ — множество таких точек $x \in E$, для которых $d(x, A) \leq r$.)

[Примените (3.11.8).]

3. Пусть A и B — два непустых множества в метрическом пространстве E , для которых $A \cap \bar{B} = \bar{A} \cap B = \emptyset$. Покажите, что существует такое открытое множество $U \supset A$ и такое открытое множество $V \supset B$, что $U \cap V = \emptyset$.

[Рассмотрите функцию $x \rightarrow d(x, A) - d(x, B)$.]

12. Гомеоморфизмы. Эквивалентные расстояния

Отображение f метрического пространства E в метрическое пространство E' называется *гомеоморфизмом*, если: 1°) оно биективно; 2°) и f и обратное отображение f^{-1} непрерывны. Такие отображения называются также *взаимно непрерывными*. Обратное отображение f^{-1} является в этом случае гомеоморфизмом пространства E' на E . Если f — гомеоморфизм пространства E на E' и g — гомеоморфизм пространства E' на E'' , то отображение $g \circ f$ в силу (3.11.5) является гомеоморфизмом пространства E на E'' . Гомеоморфизм может не быть равномерно непрерывным (например, гомеоморфизм $x \rightarrow x^3$ действительной прямой \mathbf{R} на себя).

Два метрических пространства E и E' *гомеоморфны*, если существует гомеоморфизм пространства E на E' . Два пространства, гомеоморфные третьему, гомеоморфны. Отступая от правильного словоупотребления, пространство, гомеоморфное дискретному метрическому пространству (3.2.5), называют *дискретным* пространством, даже если расстояние в нем определено не как в (3.2.5).

Изометрия в соответствии с определением всегда взаимно непрерывна и потому является гомеоморфизмом. Например, расширенная действительная прямая $\bar{\mathbf{R}}$, согласно определению, гомеоморфна подпространству $[-1, 1]$ пространства \mathbf{R} .

Пусть d_1 и d_2 — два расстояния в множестве E . Они определяют на E два метрических пространства, которые нужно рассматривать как различные (хотя они имеют одно и то же множество точек).

Пусть E_1 и E_2 — эти пространства. Если тождественное отображение $x \rightarrow x$ пространства E_1 на E_2 является гомеоморфизмом, то d_1 и d_2 называются *эквивалентными расстояниями* (или *топологически эквивалентными расстояниями*) в E . Из (3.11.4) видно, что в этом случае в E_1 и E_2 совпадают семейства открытых множеств. Семейство открытых множеств метрического пространства E часто называют *топологией* пространства E ; эквивалентные расстояния — это такие расстояния, которые порождают одну и ту же топологию.

Можно убедиться в том, что определения *окрестностей*, *замкнутых множеств*, *точек прикосновения*, *замыкания*, *внутренности множества*, *множества внешних точек*, *плотных множеств*, *границы*, *непрерывной функции* зависят только от топологии рассматриваемых пространств; они являются *топологическими понятиями*. С другой стороны, понятия *шаров*, *сфер*, *диаметра*, *ограниченного множества*, *равномерно непрерывной функции* не являются топологическими. Топологические свойства метрического пространства *инвариантны при гомеоморфизмах*.

Может случиться, что тождественное отображение $x \rightarrow x$ пространства E_1 на E_2 непрерывно, но не взаимно непрерывно. Возьмем, например, $E = \mathbb{R}$, $d_2(x, y) = |x - y|$, а $d_1(x, y)$ — расстояние, определенное в (3.2.5) и принимающее только значения 0 и 1. В таком случае расстояние d_1 (соответственно топология пространства E_1) называется *более сильным* (соответственно *сильной*), чем расстояние d_2 (соответственно топология пространства E_2).

Задачи

1. Пусть a — иррациональное число > 0 . Для каждого рационального числа $x > 0$ пусть $f_a(x)$ — такое (однозначно определенное) действительное число, что $0 < f_a(x) < a$ и что $x - f_a(x)$ является целочисленно кратным числа a . Покажите, что f_a — непрерывное инъективное отображение пространства \mathbb{Q}_+^* рациональных чисел > 0 в промежуток $]0, a[$ пространства \mathbb{R} и что $f_a(\mathbb{Q}_+^*)$ плотно в $]0, a[$. Выполните из этого результата и из задачи 1 § 2.2, что существует непрерывное биективное отображение пространства \mathbb{Q} на себя, не являющееся взаимно непрерывным [ср. с (4.2.2)].

2. Пусть f — непрерывное отображение метрического пространства E в метрическое пространство F .

а) Пусть (V_λ) — покрытие пространства F открытыми множествами. Покажите, что если для каждого λ сужение отображения f на подпространстве $f^{-1}(V_\lambda)$ есть гомеоморфизм этого подпространства на подпространство $V_\lambda \subset F$, то f — гомеоморфизм пространства E на пространство F .

б) Приведите пример такого отображения f , не являющегося инъективным, и такого покрытия (U_α) пространства E открытыми множествами, что сужение отображения f на каждом из U_α есть гомеоморфизм подпространства $U_\alpha \subset E$ на подпространство $f(U_\alpha) \subset F$.

[И E и F можно взять дискретными.]

3. Пусть E , F и G — три метрических пространства, f — непрерывное отображение пространства E в F и g — непрерывное отображение пространства F в G . Покажите, что если f сюръективно и $g \circ f$ — гомеоморфизм пространства E на G , то f — гомеоморфизм E на F и g — гомеоморфизм F на G .

13. Пределы

Пусть E — метрическое пространство, A — подмножество в нем, a — точка прикосновения множества A , f — отображение множества A в метрическое пространство E' . Предположим сначала, что a не принадлежит A . Мы будем говорить, что $f(x)$ имеет предел $a' \in E'$ при $x \in A$, стремящемся к a (или a' есть предел отображения f в точке $a \in \bar{A}$ по множеству A), если отображение g подпространства $A \cup \{a\}$ в E' , определяемое условиями: $g(x) = f(x)$ при $x \in A$ и $g(a) = a'$, непрерывно в точке a . В этом случае мы пишем

$$a' = \lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x).$$

Если $a \in A$, то мы пользуемся той же терминологией и теми же обозначениями в случае, когда отображение f непрерывно в точке a , причем $a' = f(a)$.

(3.13.1) Для того чтобы точка $a' \in E'$ была пределом отображения $f(x)$ при $x \in A$, стремящемся к a , необходимо и достаточно, чтобы для каждой окрестности V' точки a' в E' существовала такая окрестность V точки a в E , что $f(V \cap A) \subset V'$.

(3.13.2) Для того чтобы точка $a' \in E'$ была пределом отображения $f(x)$ при $x \in A$, стремящемся к a , необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\epsilon > 0$ существовало такое $\delta > 0$, что из $x \in A$ и $d(x, a) < \delta$ следует неравенство $d'(a', f(x)) < \epsilon$.

Эти критерии являются лишь перефразировкой определений.

(3.13.3) Отображение может иметь лишь один предел по множеству A в данной точке $a \in \bar{A}$.

В самом деле, если бы a' и b' были двумя пределами отображения f в точке a , то из (3.13.2) и неравенства треугольника следовало бы, что $d'(a', b') < 2\epsilon$ для любого $\epsilon > 0$, что невозможно, если $a' \neq b'$.

(3.13.4) Пусть f — отображение пространства E в E' . Для того чтобы f было непрерывно в точке $x_0 \in E$, являющейся

точкой приосновения множества $E \setminus \{x_0\}$, необходимо и достаточно, чтобы $f(x_0) = \lim_{x \in E \setminus \{x_0\}, x \rightarrow x_0} f(x)$.

Это лишь пересказ определений.

(3.13.5) Пусть $a' = \lim_{x \in A, x \rightarrow a} f(x)$. Тогда для каждого подмножества $B \subset A$, для которого $a \in \bar{B}$, точка a' является пределом отображения f в точке a и по B . Это, в частности, относится к случаю, когда $B = V \cap A$, где V — окрестность точки a .

Очевидное следствие определения и (3.11.6).

(3.13.6) Пусть f имеет предел a' в точке $a \in \bar{A}$ по множеству A . Если g — отображение пространства E' в E'' , непрерывное в точке a' , то $g(a') = \lim_{x \in A, x \rightarrow a} g(f(x))$.

Это сразу следует из (3.11.5).

(3.13.7) Если $a' = \lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x)$, то $a' \in \overline{f(A)}$.

В самом деле, в силу (3.13.1) для каждой окрестности V' точки a' пересечение $V' \cap f(A)$ содержит образ $f(V \cap A)$, который не пуст, поскольку $a \in \bar{A}$.

Важным является случай предела последовательности. Рассмотрим на расширенной действительной прямой точку $+\infty$, являющуюся точкой приосновения множества \mathbf{N} целых чисел ≥ 0 . Отображение множества \mathbf{N} в метрическое пространство E есть последовательность $n \rightarrow x_n$ точек этого пространства. Если $a \in E$ — предел этого отображения в точке $+\infty$ по множеству \mathbf{N} , то мы будем говорить, что a есть *предел последовательности* (x_n) [или что последовательность (x_n) *сходится* к a], и писать $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Критерии (3.13.1) и (3.13.2) в этом случае превращаются в следующие:

(3.13.8) Для того чтобы $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, необходимо и достаточно, чтобы для каждой окрестности V точки a существовал такой номер n_0 , что из неравенства $n \geq n_0$ следует $x_n \in V$.

Иными словами, V содержит x_n при всех индексах n , за исключением конечного числа индексов.

(3.13.9) Для того чтобы $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер n_0 , что из $n \geq n_0$ следует $d(a, x_n) < \varepsilon$.

Последний критерий можно также записать в виде $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a, x_n) = 0$.

Подпоследовательность последовательности (x_n) есть последовательность $k \rightarrow x_{n_k}$, где $k \rightarrow n_k$ — строго возрастающая бесконечная последовательность целых чисел ≥ 0 . Из (3.13.5) видно, что

(3.13.10) *Если $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, то $a = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$ для любой подпоследовательности последовательности (x_n) .*

Пусть (x_n) — последовательность точек в метрическом пространстве E . Точка $b \in E$ называется *пределной точкой* последовательности (x_n) , если существует такая подпоследовательность (x_{n_k}) , что $b = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$.

Пределная точка подпоследовательности последовательности (x_n) является предельной точкой и самой последовательности (x_n) . Если последовательность (x_n) имеет предел a , то, как следует из (3.13.10), a является единственной предельной точкой этой последовательности. Обратное, вообще говоря, не верно; например, последовательность (x_n) действительных чисел, где $x_{2n} = 1/n$ и $x_{2n+1} = n$ ($n \geq 1$), имеет нуль своей единственной предельной точкой, но не сходится к нулю [см., однако, (3.16.4)].

(3.13.11). Для того чтобы точка $b \in E$ была предельной точкой последовательности (x_n) , необходимо и достаточно, чтобы для любой окрестности V точки b и любого номера t существовал такой номер $n \geq t$, что $x_n \in V$.

Условие, очевидно, необходимо. Допустим, напротив, что оно выполняется, и определим подпоследовательность (x_{n_k}) следующим образом: n_k есть наименьший номер $> n_{k-1}$, для которого $d(b, x_{n_k}) < 1/k$. Так как $d(x_{n_k}, b) < 1/k$ при любом $k \geq h$, то подпоследовательность (x_{n_k}) сходится к b .

(3.13.12) *Если b — предельная точка последовательности (x_n) в E и если отображение g пространства E в E' непрерывно в b , то $g(b)$ — предельная точка последовательности $(g(x_n))$.*

Ясно из определения и (3.13.6).

Из (3.13.7) следует, что если b — предельная точка (и тем более предел) последовательности (x_n) точек, принадлежащих множеству $A \subset E$, то $b \in \bar{A}$. Наоборот:

(3.13.13) *Для любой точки $a \in \bar{A}$ существует такая последовательность (x_n) точек множества A , что $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.*

В самом деле, по предположению множество $A \cap B(a; 1/n)$ не пусто. Поэтому в силу (1.4.5) для каждого n существует точка

$x_n \in A \cap B(a; 1/n)$, и на основании (3.13.9) последовательность (x_n) сходится к a .

(3.13.14) Пусть f — отображение множества $A \subset E$ в метрическое пространство E' и $a \in A$. Для того чтобы f имело предел $a' \in E'$ в точке a по A , необходимо и достаточно, чтобы для каждой последовательности (x_n) точек множества A , сходящейся к a , последовательность $f(x_n)$ сходилась к a' .

Необходимость следует из определений и (3.13.6). Допустим, напротив, что условие выполняется и что a' не является пределом отображения f в точке a по множеству A . Тогда в силу (3.13.2) существует такое $\alpha > 0$, что для любого номера n существует точка $x_n \in A$, удовлетворяющая двум условиям: $d(a, x_n) < 1/n$ и $d(a', f(x_n)) \geq \alpha$. Это означает, что последовательность (x_n) сходится к a , но последовательность $(f(x_n))$ не сходится к a' , и мы пришли к противоречию.

Задачи

1. Пусть (u_n) — последовательность действительных чисел ≥ 0 , сходящаяся к нулю. Покажите, что существует бесконечно много таких номеров n , что $u_n \geq u_m$ при каждом $m \geq n$.

2. а) Пусть (x_n) — последовательность в метрическом пространстве E . Покажите, что если сходятся три подпоследовательности (x_{2n}) , (x_{2n+1}) и (x_{3n}) , то сходится и последовательность (x_n) .

б) Приведите пример последовательности (x_n) действительных чисел, которая не сходится, но обладает тем свойством, что для каждого $k \geq 2$ подпоследовательность (x_{kn}) сходится.

[Рассмотрите подпоследовательность (x_{p_k}) , где (p_k) — строго возрастающая последовательность простых чисел.]

3. Пусть E — сепарабельное метрическое пространство, f — произвольное отображение пространства E в R . Покажите, что множество тех точек $a \in E$, для которых предел $\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} f(x)$ существует и отличен от $f(a)$, не более чем счетно.

[Для каждой пары рациональных чисел p, q , удовлетворяющих условию $p < q$, рассмотрите множество точек $a \in E$, для которых

$$f(a) \leq p < q \leq \lim_{x \rightarrow a, x \neq a} f(x),$$

и, пользуясь задачей 2, а) § 3.9, покажите, что это множество не более чем счетно. Аналогично рассмотрите множество точек $a \in E$, для которых

$$\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} f(x) \leq p < q \leq f(a).]$$

14. Последовательности Коши. Полные пространства

Последовательность Коши в метрическом пространстве E есть последовательность (x_n) , удовлетворяющая следующему условию: для любого $\epsilon > 0$ существует такой номер n_0 , что из $p \geq n_0$ и $q \geq n_0$ следует $d(x_p, x_q) < \epsilon$.

(3.14.1) Любая сходящаяся последовательность является последовательностью Коши.

В самом деле, если $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, то для любого $\epsilon > 0$ существует такой номер n_0 , что из $n \geq n_0$ следует $d(a, x_n) < \epsilon/2$. В силу неравенства треугольника из $p \geq n_0$ и $q \geq n_0$ вытекает $d(x_p, x_q) < \epsilon$.

(3.14.2) Если (x_n) — последовательность Коши, то любая предельная точка этой последовательности является ее пределом.

Действительно, если задано $\epsilon > 0$, то существует такой номер n_0 , что из $p \geq n_0$ и $q \geq n_0$ следует $d(x_p, x_q) < \epsilon/2$, и если b — предельная точка последовательности (x_n) , то в силу (3.13.11) существует такой номер $p_0 \geq n_0$, что $d(b, x_{p_0}) < \epsilon/2$. Из неравенства треугольника тогда вытекает, что $d(b, x_n) \leq \epsilon$ для любого $n \geq n_0$.

Метрическое пространство E называется *полным*, если любая последовательность Коши в E сходится (разумеется, к точке пространства E).

(3.14.3) Действительная прямая R является полным метрическим пространством.

Пусть (x_n) — последовательность Коши действительных чисел. По индукции определим последовательность (n_k) целых чисел следующим образом: n_{k+1} есть наименьшее целое число $> n_k$, такое, что при $p \geq n_{k+1}$ и $q \geq n_{k+1}$ выполняется неравенство $|x_p - x_q| < 1/2^{k+2}$; возможность такого определения чисел n_k следует из того факта, что (x_n) — последовательность Коши. Пусть I_k — замкнутый промежуток $[x_{n_k} - 2^{-k}, x_{n_k} + 2^{-k}]$. Так как $|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}| < 2^{-k-1}$, мы имеем $I_{k+1} \subset I_k$. С другой стороны, при $m \geq n_k$ по определению $x_m \in I_k$. Теперь из аксиомы [2.1. (IV)] следует, что вложенные промежутки I_k имеют непустое пересечение. Пусть $a \in I_k$ при всех k . Тогда ясно, что $|a - x_m| \leq 2^{-k+1}$ при всех $m \geq n_k$, и поэтому $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

(3.14.4) Если подпространство F метрического пространства E является полным, то F замкнуто в E .

В самом деле, в силу (3.13.13) любая точка $a \in \bar{F}$ является пределом последовательности (x_n) точек множества F . Последовательность (x_n) в силу (3.14.1) является последовательностью Коши и

поэтому, по предположению, сходится к точке b , принадлежащей F . Но ввиду (3.13.3) $b = a$ и, следовательно, $a \in F$. Таким образом, $\bar{F} = F$, ч. т. д.

(3.14.5) В полном метрическом пространстве E любое замкнутое множество F является полным подпространством.

Действительно, последовательность Коши (x_n) точек множества F , по предположению, сходится к точке $a \in E$, и так как $x_n \in F$, то в силу (3.13.7) $a \in \bar{F} = F$.

Теоремы (3.14.4) и (3.14.5) позволяют (исходя из того факта, что действительная прямая является полным пространством) сразу же строить примеры и полных и неполных пространств.

Фундаментальная важность полных пространств основывается на том, что для доказательства сходимости некоторой последовательности в таком пространстве достаточно доказать, что она является последовательностью Коши (говорят также, что такая последовательность удовлетворяет критерию Коши). Главное различие между проверкой этого критерия и проверкой определения сходящейся последовательности состоит в том, что в критерии Коши не нужно заранее знать значение предела.

Мы уже упоминали, что два расстояния d_1 и d_2 в одном и том же множестве E могут быть топологически эквивалентны, но тождественное отображение пространства E_1 на E_2 (где E_1 и E_2 — соответствующие метрические пространства) может не быть равномерно непрерывным. Это, например, будет иметь место, если взять $E = \mathbb{R}$, $d_2(x, y) = |x - y|$, а $d_1(x, y)$ — расстояние на расширенной действительной прямой, рассматриваемое только на \mathbb{R} . Пространство E_2 будет тогда полным, но E_1 полным быть не может, так как оно не замкнуто в $\bar{\mathbb{R}}$.

Когда два расстояния d_1 и d_2 таковы, что тождественное отображение E_1 на E_2 и обратное к нему отображение равномерно непрерывны, d_1 и d_2 называются *равномерно эквивалентными*. Тогда последовательности Коши при том и другом расстоянии совпадают. Например, если существуют два таких действительных числа $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, что для любой пары точек x, y пространства E выполняются неравенства $\alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y)$, то d_1 и d_2 — равномерно эквивалентные расстояния.

Пусть E и E' — два метрических пространства, A — множество в E , f — отображение множества A в E' . Колебание отображения f на A есть, по определению, диаметр $\delta(f(A))$ (который может оказаться равным и $+\infty$). Пусть a — точка прикосновения множества A . Колебание отображения f в точке a по множеству A есть число $\Omega(a; f) = \inf_V \delta(f(V \cap A))$, где V — всевозможные окрест-

ности точки a (или же V принадлежат только фундаментальной системе окрестностей).

(3.14.6) Пусть E' — полное метрическое пространство. Для того чтобы существовал предел $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы колебание отображения f в точке a по множеству A было равно нулю.

В силу (3.13.2) условие необходимо. Допустим, напротив, что оно выполняется, и пусть (x_n) — последовательность точек множества A , сходящаяся к a . Тогда из предположения следует, что последовательность $(f(x_n))$ является в E' последовательностью Коши. В самом деле, если задано $\varepsilon > 0$, то существует такая окрестность V точки a , что для любых двух точек x, y , принадлежащих $V \cap A$, выполняется неравенство $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Но мы имеем $x_n \in V \cap A$ при всех n , за исключением конечного их числа. Поэтому последовательность $(f(x_n))$ имеет предел a' . Далее, какова бы ни была другая последовательность (y_n) точек множества A , сходящаяся к a , пределы последовательностей $(f(x_n))$ и $(f(y_n))$ совпадают. Действительно, как только и x_n и y_n попадут в $V \cap A$, мы будем иметь $d'(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$. Таким образом, из определения предела и (3.13.14) следует, что $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = a'$.

Задачи

1. а) Пусть E — ультраметрическое пространство (задача 4 § 3.8). Покажите, что для того, чтобы последовательность (x_n) была в E последовательностью Коши, необходимо и достаточно, чтобы $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$.

б) Пусть X — произвольное множество, E — множество всех бесконечных последовательностей $x = (x_n)$ элементов множества X . Для любых двух различных элементов $x = (x_n)$ и $y = (y_n)$ множества E пусть $k(x, y)$ — наименьший номер n , при котором $x_n \neq y_n$. Пусть $d(x, y) = 1/k(x, y)$, если $x \neq y$ и $d(x, x) = 0$. Докажите, что d — ультраметрическое расстояние в E и что метрическое пространство E , определяемое расстоянием d , является полным.

2. Пусть φ — возрастающая действительная функция, определенная на промежутке $0 \leq u < +\infty$ и такая, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi(u) > 0$ при $u > 0$ и $\varphi(u+v) \leq \varphi(u) + \varphi(v)$. Пусть $d(x, y)$ — расстояние в множестве E . Тогда $d_1(x, y) = \varphi(d(x, y))$ — другое расстояние в E .

а) Покажите, что если функция φ непрерывна в точке $u = 0$, то расстояния d и d_1 равномерно эквивалентны. Наоборот, если для расстояния d существует точка $x_0 \in E$, не изолированная в E (задача 2 § 3.9), и если d и d_1 топологически эквивалентны, то функция φ непрерывна в точке $u = 0$.

б) Докажите, что функции

$$u^r (0 < r \leq 1), \quad \ln(1+u), \quad u/(1+u), \quad \inf(1, u)$$

удовлетворяют указанным выше условиям. Рассматривая две последние функции, убедитесь, что для любого расстояния в E существует равномерно эквивалентное расстояние, являющееся ограниченным.

3. Пусть на действительной прямой $d(x, y) = |x - y|$ — обычное расстояние и $d'(x, y) = |x^3 - y^3|$. Покажите, что эти два расстояния топологически эквивалентны и что последовательности Коши при этих двух расстояниях совпадают, но что они не равномерно эквивалентны.

4. Пусть E — полное метрическое пространство, d — расстояние в E , A — пересечение некоторой последовательности (U_n) открытых множеств пространства E . Положим $F_n = E \setminus U_n$ и для каждой пары точек x, y множества A определим

$$f_n(x, y) = \left| \frac{1}{d(x, F_n)} - \frac{1}{d(y, F_n)} \right|,$$

$$d_n(x, y) = f_n(x, y)/(1 + f_n(x, y)) \quad \text{и} \quad d'(x, y) = d(x, y) + \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x, y)/2^n.$$

Покажите, что на подпространстве $A \subset E$ расстояние d' топологически эквивалентно расстоянию d и что с расстоянием d' подпространство A является полным метрическим пространством. Примените это к подпространству $I \subset \mathbb{R}$, состоящему из всех иррациональных чисел.

[Обратите внимание на то, что последовательность Коши при d' является последовательностью Коши и при d , но что ее предел в E не может принадлежать ни одному из F_n .]

15. Элементарные теоремы о продолжении

(3.15.1) Пусть f и g — два непрерывных отображения метрического пространства E в метрическое пространство E' . Множество A точек $x \in E$, в которых $f(x) = g(x)$, замкнуто в E .

Докажем равносильное утверждение, а именно что множество $E \setminus A$ открыто. Пусть $a \in E \setminus A$; тогда $f(a) \neq g(a)$. Пусть $d'(f(a), g(a)) = \alpha > 0$. Из непрерывности отображений f и g в точке a и из (3.6.3) следует, что существует такая окрестность V точки a в E , что при $x \in V$ имеем $d'(f(a), f(x)) < \alpha/2$ и $d'(g(a), g(x)) < \alpha/2$. Тогда при $x \in V$ будем иметь $f(x) \neq g(x)$, так как в противном случае из неравенства треугольника мы получили бы $d'(f(a), g(a)) < \alpha$.

(3.15.2) (Принцип продолжения тождеств) Пусть f и g — два непрерывных отображения метрического пространства E в метрическое пространство E' . Если $f(x) = g(x)$ во всех точках x множества A , плотного в E , то $f = g$.

В самом деле, множество точек x , в которых $f(x) = g(x)$, в силу (3.15.1) замкнуто и содержит A .

(3.15.3) Пусть f и g — два непрерывных отображения метрического пространства E в расширенную действительную пр-

мую \bar{R} . Множество P точек $x \in E$, в которых $f(x) \leq g(x)$, замкнуто в E .

Докажем, что множество $E \setminus P$ открыто. Допустим, что $f(a) > g(a)$, и пусть $\beta \in \bar{R}$ выбрано так, что $f(a) > \beta > g(a)$ [ср. (2.2.16)] и определение пространства \bar{R} в 3.3]. Прообраз V при f открытого промежутка $[\beta, +\infty]$ в силу (3.11.1) является окрестностью точки a ; окрестностью точки a является и прообраз W при g открытого промежутка $[-\infty, \beta]$. Следовательно, окрестностью точки a на основании (3.6.3) будет и $V \cap W$, а при $x \in V \cap W$ имеем $f(x) > \beta > g(x)$, ч. т. д.

(3.15.4) (Принцип продолжения неравенств) Пусть f и g — два непрерывных отображения метрического пространства E в расширенную действительную прямую \bar{R} . Если $f(x) \leq g(x)$ во всех точках x множества A , плотного в E , то $f(x) \leq g(x)$ при всех $x \in E$.

Доказательство следует из (3.15.3), так же как (3.15.2) было получено из (3.15.1).

(3.15.5) Пусть A — множество, плотное в метрическом пространстве E , и f — отображение множества A в метрическое пространство E' . Для того чтобы существовало непрерывное отображение \bar{f} пространства E в E' , совпадающее на A с f , необходимо и достаточно, чтобы для любой точки $x \in E$ в E' существовал предел $\lim_{y \rightarrow x, y \in A} f(y)$. Непрерывное отображение \bar{f} в этом случае единственно.

Поскольку любая точка $x \in E$ принадлежит \bar{A} , на основании (3.13.5) мы должны иметь $\bar{f}(x) = \lim_{y \rightarrow x, y \in A} \bar{f}(y)$ и, значит, $\bar{f}(x) = \lim_{y \rightarrow x, x \in A} f(y)$. Тем самым доказаны необходимость условия и тот факт, что если непрерывное отображение существует, то лишь одно [это следует также из (3.15.2)]. Допустим, напротив, что условие выполняется, и докажем, что отображение \bar{f} , определяемое равенством $\bar{f}(x) = \lim_{y \rightarrow x, y \in A} f(y)$, есть решение задачи о продолжении. Прежде всего если $x \notin A$, то из существования предела по определению следует $\bar{f}(x) = f(x)$, поэтому отображение \bar{f} продолжает f , и остается убедиться в том, что \bar{f} непрерывно. Пусть $x \in E$ и V' — окрестность точки $\bar{f}(x)$ в E' . Существует замкнутый шар B' с центром $\bar{f}(x)$, содержащийся в V' . По предположению, в силу (3.13.1) существует такая открытая окрестность V точки x в E , что $f(V \cap A) \subset B'$. Для любой точки $y \in V$ точка $\bar{f}(y)$ является пределом f в точке y по множеству A , значит ввиду (3.13.5) и по

множеству $V \cap A$. Поэтому из (3.13.7) следует, что $\bar{f}(y) \in \overline{f(V \cap A)}$, и, так как шар B' замкнут, $\bar{f}(y) \in B'$, ч. т. д.

(3.15.6) Пусть A — множество, плотное в метрическом пространстве E , и f — равномерно непрерывное отображение множества A в полное метрическое пространство E' . Тогда существует непрерывное отображение \bar{f} пространства E в E' , на A совпадающее с f . При этом отображение \bar{f} равномерно непрерывно.

Чтобы доказать, что отображение \bar{f} существует, в силу (3.15.5) и (3.14.6) нужно лишь убедиться в том, что колебание отображения f в любой точке $x \in E$ по множеству A равно нулю. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из $d(y, z) < \delta$ следует $d'(f(y), f(z)) < \varepsilon/3$ (y и z принадлежат A). Поэтому диаметр множества $f(A \cap B(x; \delta/2))$ не больше $\varepsilon/3$, и наше утверждение доказано. Рассмотрим теперь любые две точки s, t пространства E , для которых $d(s, t) < \delta/2$. Найдутся такая точка $y \in A$, что $d(s, y) < \delta/4$ и $d'(f(s), f(y)) < \varepsilon/3$, и такая точка $z \in A$, что $d(t, z) < \delta/4$ и $d'(\bar{f}(t), f(z)) < \varepsilon/3$. Из неравенства треугольника следует, что $d(y, z) < \delta$, и, поскольку y и z принадлежат A , $d'(f(y), f(z)) < \varepsilon/3$. Таким образом, в силу неравенства треугольника $d'(\bar{f}(s), \bar{f}(t)) < \varepsilon$. Это доказывает, что \bar{f} равномерно непрерывно.

Задача

Пусть $n \rightarrow r_n$ — биективное отображение множества N на множество A всех рациональных чисел x , удовлетворяющих неравенствам $0 \leq x \leq 1$ (2.2.15). Определим на $E = [0, 1]$ функцию f , полагая $f(x) = \sum_{r_n < x} 1/2^n$, где бесконечная сумма распространяется только на те n , для которых $r_n < x$. Покажите, что сужение отображения f на множестве B всех иррациональных чисел $x \in [0, 1]$ непрерывно, но оно не может быть продолжено до функции, непрерывной в E .

16. Компактные пространства

Метрическое пространство E называется *компактным*, если оно удовлетворяет следующему условию (аксиоме Бореля—Лебега): для каждого покрытия $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$ пространства E открытыми множествами (открытого покрытия) существует конечное подсемейство $(U_\lambda)_{\lambda \in H}$ ($H \subset L$ и конечно), являющееся покрытием пространства E .

Метрическое пространство E называется *вполне ограниченным*, если для любого $\epsilon > 0$ существует конечное покрытие пространства E множествами диаметра $< \epsilon$. Это условие, очевидно, эквивалентно следующему: для любого $\epsilon > 0$ существует такое конечное множество $F \subset E$, что $d(x, F) < \epsilon$ для всякой точки $x \in E$.

В теории метрических пространств эти понятия служат заменой понятия „*конечности*“ в чистой теории множеств: они выражают свойство метрического пространства быть, так сказать, „*приближенно конечным*“. Заметим, что (это следует из определения) компактность является топологическим понятием, но полная ограниченность топологическим понятием не является [см. замечание после (3.17.6)].

(3.16.1) Для метрического пространства E следующие три условия эквивалентны:

а) E компактно;

б) любая бесконечная последовательность в E имеет по крайней мере одну предельную точку;

с) E является полным и вполне ограниченным.

а) \Rightarrow б): Пусть (x_n) — последовательность в компактном пространстве E и пусть F_n — замыкание множества $\{x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+p}, \dots\}$. Докажем, что существует точка, принадлежащая всем F_n . Если бы это было не так, то открытые множества $U_n = E \setminus F_n$ составляли бы покрытие пространства E и поэтому нашлось бы конечное число U_{n_1}, \dots, U_{n_k} этих множеств, образующих покрытие E . Это означало бы, что $F_{n_1} \cap F_{n_2} \cap \dots \cap F_{n_k} = \emptyset$. Но это абсурдно, так как если n больше, чем $\max(n_1, \dots, n_k)$, то множество F_n (по определению не пустое) содержится во всех F_{n_i} ($1 \leq i \leq k$). Таким об-

разом, пересечение $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ содержит по крайней мере одну точку a .

В силу (3.13.11) и определения точки прикосновения a является предельной точкой последовательности (x_n) .

б) \Rightarrow с): Прежде всего любая последовательность Коши в E имеет предельную точку; поэтому в силу (3.14.2) она сходится и, следовательно, E является полным пространством. Допустим, что E не вполне ограничено, т. е. что существует такое число $\alpha > 0$, что E не имеет конечного покрытия шарами радиуса α . Тогда мы можем определить последовательность (x_n) по индукции следующим образом. Допустим, что при $i \neq j$, $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq j \leq n-1$ уже $d(x_i, x_j) \geq \alpha$. Объединение шаров с центром x_i ($1 \leq i \leq n-1$) и радиусом α не составляет всего пространства, и, значит, существует точка x_n , для которой $d(x_i, x_n) \geq \alpha$ при $i < n$. Последовательность (x_n) не может иметь предельной точки, потому что если бы a была такой точкой, то нашлась бы подпоследовательность (x_{n_k}) , сходящаяся к a , и тогда при $k \geq$ некоторого k_0 мы

имели бы $d(a, x_{n_k}) < \alpha/2$ и, следовательно, при $h \geq k_0$, $k \geq k_0$ и $h \neq k$ выполнялось бы неравенство $d(x_{n_h}, x_{n_k}) < \alpha$, что противоречит определению последовательности.

c) \Rightarrow a): Допустим, что $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$ — открытое покрытие пространства E , никакое конечное подсемейство которого не покрывает E . По индукции следующим образом определим последовательность (B_n) шаров. Предположим, что B_{n-1} имеет радиус $1/2^{n-1}$ и что не существует конечного подсемейства семейства $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$, покрывающего B_{n-1} . Тогда рассмотрим конечное покрытие $(V_k)_{1 \leq k \leq m}$ пространства E шарами радиуса $1/2^n$. Среди шаров V_k , имеющих непустое пересечение с B_{n-1} , найдется по крайней мере один такой шар B_n , который не покрывается никаким конечным подсемейством семейства (U_λ) . В самом деле, в противном случае, поскольку шары V_k образуют покрытие шара B_{n-1} , нашлось бы конечное подсемейство семейства (U_λ) , покрывающее B_{n-1} .

Пусть x_n — центр шара B_n . Так как B_{n-1} и B_n имеют общую точку, из неравенства треугольника следует, что

$$d(x_{n-1}, x_n) \leq 1/2^{n-1} + 1/2^n < 1/2^{n-2}.$$

Поэтому, если $n \leq p < q$, мы имеем

$$\begin{aligned} d(x_p, x_q) &\leq d(x_p, x_{p+1}) + \dots \\ &\dots + d(x_{q-1}, x_q) < \frac{1}{2^{p-1}} + \dots + \frac{1}{2^{q-2}} < \frac{1}{2^{n-2}}. \end{aligned}$$

Это доказывает, что (x_n) — последовательность Коши в E , и, следовательно, она сходится к некоторой точке a . Пусть λ_0 — индекс, при котором $a \in U_{\lambda_0}$. Существует такое $\alpha > 0$, что $B(a; \alpha) \subset U_{\lambda_0}$. Из определения точки a следует, что найдется такой номер n , что $d(a, x_n) < \alpha/2$ и $1/2^n < \alpha/2$. Неравенство треугольника тогда показывает, что $B_n \subset B(a; \alpha) \subset U_{\lambda_0}$. Но это — противоречие, так как предполагалось, что никакое конечное подсемейство семейства (U_λ) не может быть покрытием шара B_n .

(3.16.2) Любое вполне ограниченное пространство сепарабельно.

Если E вполне ограничено, то, по определению, для любого n существует такое конечное множество $A_n \subset E$, что для каждой точки $x \in E$ выполняется неравенство $d(x, A_n) < 1/n$. Пусть $A = \bigcup_n A_n$. Множество A не более чем счетно, и для каждой точки $x \in E$ при любом n мы имеем $d(x, A) \leq d(x, A_n) < 1/n$; следовательно, $d(x, A) = 0$ и $E = \bar{A}$.

(3.16.3) Пусть E — метрическое пространство. Из любых двух следующих свойств вытекает третью:

- a) E компактно;
- б) E дискретно (точнее, гомеоморфно дискретному пространству);
- с) E конечно.

Из а) и б) следует с), потому что всякое одноточечное множество $\{x\}$ в этом случае открыто и, значит, семейство множеств $\{x\}$ является открытым покрытием пространства E , а конечное подсемейство этого семейства может быть покрытием E только если E конечно. С другой стороны, из с) следуют и а) и б), потому что в этом случае, поскольку каждое одноточечное множество замкнуто, всякое подмножество пространства E замкнуто, как объединение конечного числа замкнутых множеств. Поэтому всякое подмножество пространства E открыто и, следовательно, E гомеоморфно дискретному пространству. Наконец, так как существует только конечное число открытых множеств, E компактно.

(3.16.4) Любая последовательность (x_n) в компактном метрическом пространстве E , имеющая только одну предельную точку a , сходится к a .

Допустим, что a не является пределом последовательности (x_n) . Тогда найдется такое число $\alpha > 0$, что существует бесконечная подпоследовательность (x_{n_k}) последовательности (x_n) , точки которой принадлежат множеству $E \setminus B(a; \alpha)$. По предположению эта подпоследовательность имеет предельную точку b , и так как множество $E \setminus B(a; \alpha)$ замкнуто, то в силу (3.13.7) $b \in E \setminus B(a; \alpha)$. Таким образом, последовательность (x_n) имеет две различные предельные точки, в противоречии с предположением.

(3.16.5) Любое непрерывное отображение f компактного метрического пространства E в метрическое пространство E' равномерно непрерывно.

Предположим противное. Тогда существует такое число $\alpha > 0$ и две последовательности (x_n) и (y_n) точек пространства E , что $d(x_n, y_n) < 1/n$ и $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \alpha$. Найдется подпоследовательность (x_{n_k}) , сходящаяся к некоторой точке a и, так как $d(x_{n_k}, y_{n_k}) < 1/n_k$, из неравенства треугольника следует, что тогда и последовательность (y_{n_k}) будет сходиться к a . Но f непрерывно в точке a , поэтому существует такое $\delta > 0$, что при $d(a, x) < \delta$ будет выполняться неравенство $d'(f(a), f(x)) < \alpha/2$. Возьмем номер k , при котором $d(a, x_{n_k}) < \delta$ и $d(a, y_{n_k}) < \delta$. Тогда $d'(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) < \alpha$ в противоречии с определением последовательностей (x_n) и (y_n) .

Задачи

1. а) Пусть E — компактное метрическое пространство, $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$ — открытое покрытие пространства E . Покажите, что существует такое число $\alpha > 0$, что любой открытый шар радиуса α содержится по крайней мере в одном из U_λ (свойство Лебега).

[Пусть для каждой точки $x \in E$ шар $B(x; r_x)$ выбран так, что шар $B(x, 2r_x)$ содержится в каком-либо из U_λ . Покройте E конечным числом шаров $B(x, r_x)$ и покажите, что наименьший из соответствующих радиусов r_x обладает требуемым свойством.]

б) Приведите пример вполне ограниченного пространства, для которого утверждение а) неверно.

2. Покажите, что для метрического пространства E эквивалентны следующие свойства:

а) E компактно;

б) каждое счетное открытое покрытие пространства E содержит конечное подпокрытие;

с) каждая убывающая последовательность (F_n) непустых замкнутых множеств пространства E имеет непустое пересечение;

д) для любого бесконечного открытого покрытия $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$ пространства E существует подмножество $H \subset L$, отличное от L и такое, что $(U_\lambda)_{\lambda \in H}$ все еще является покрытием E ;

е) каждое *точечно конечное* открытое покрытие (U_λ) пространства E (т. е. такое покрытие, что для любой точки $x \in E$ включение $x \in U_\lambda$ имеет место лишь для конечного числа индексов) содержит конечное подпокрытие;

ж) каждое бесконечное дискретное подпространство пространства E не замкнуто.

[Пользуясь (3.16.1), покажите, что из ж) следует а) и что из д) и е) следует ж).]

3. Пусть E — метрическое пространство, d — расстояние в E , $\mathfrak{F}(E) \subset \mathfrak{P}(E)$ — множество всех непустых замкнутых подмножеств пространства E . Предположим, что расстояние d ограничено в E (задача 2 § 3.14). Для любых двух элементов A, B множества $\mathfrak{F}(E)$ положим $\rho(A, B) = \sup_{x \in A} d(x, B)$

и $h(A, B) = \sup(\rho(A, B), \rho(B, A))$.

а) Покажите, что h является расстоянием в $\mathfrak{F}(E)$ (*хаусдорфово расстояние*).

б) Покажите, что если E — полное пространство, то и $\mathfrak{F}(E)$ — полное пространство.

[Пусть (X_n) — последовательность Коши в $\mathfrak{F}(E)$. Пусть Y_n для каждого n есть замыкание объединения множеств X_{n+p} , где $p \geq 0$. Рассмотрите в E пересечение убывающей последовательности (Y_n) .]

с) Покажите, что если E вполне ограничено, то и $\mathfrak{F}(E)$ вполне ограничено. Следовательно, если E компактно, то и $\mathfrak{F}(E)$ компактно.

[Примените задачу из 1.1.]

17. Компактные множества

Компактным (соответственно *вполне ограниченным*) *множеством* в метрическом пространстве E называется такое множество A , для которого подпространство A пространства E компактно (соответственно вполне ограничено).

(3.17.1) Любое вполне ограниченное множество ограничено.

Это следует из того, что объединение конечного числа ограниченных множеств ограничено (3.4.4).

Утверждение, обратное к (3.17.1), вообще говоря, не верно, потому что любое расстояние эквивалентно ограниченному расстоянию (задача 2 § 3.14) [см., однако, (3.17.6)].

(3.17.2) Любое компактное множество в метрическом пространстве замкнуто.

В самом деле, в силу (3.16.1) такое подпространство является полным, и нам остается только применить (3.14.4).

(3.17.3) В компактном пространстве E всякое замкнутое множество компактно.

Действительно, такое множество, очевидно, вполне ограничено и в силу (3.14.5) является полным подпространством.

Относительно компактным множеством в метрическом пространстве E называется множество $A \subset E$, замыкание \bar{A} которого компактно.

(3.17.4) Любое подмножество относительно компактного (соответственно вполне ограниченного) множества относительно компактно (соответственно вполне ограничено).

Это сразу следует из определений и (3.17.3).

(3.17.5) Относительно компактное множество вполне ограничено. В полном пространстве вполне ограниченное множество относительно компактно.

Первое утверждение сразу следует из (3.17.4). Допустим, далее, что E — полное пространство и что $A \subset E$ вполне ограничено. Для любого $\epsilon > 0$ существует покрытие множества A , состоящее из конечного числа множеств $C_k \subset A$ диаметра $< \epsilon/2$. Каждое C_k содержится в замкнутом (в E) шаре D_k радиуса $\epsilon/2$. Таким образом $A \subset \bigcup_k D_k$, причем объединение $\bigcup_k D_k$ замкнуто и каждый шар D_k

имеет диаметр $\leq \epsilon$. С другой стороны, в силу (3.14.5) \bar{A} является полным подпространством, откуда и следует требуемый результат.

Вполне ограниченное, но неполное пространство E дает пример вполне ограниченного множества, не являющегося относительно компактным в E .

(3.17.6) (Теорема Бореля—Лебега) Для того чтобы множество на действительной прямой было относительно компактно, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограничено.

Благодаря (3.17.1), (3.17.4) и (3.17.5) нам нужно только доказать, что любой замкнутый промежуток $[a, b]$ вполне ограничен. Для каждого целого $n > 0$ положим $x_k = a + k(b - a)/n$ ($0 \leq k \leq n$). Тогда открытые промежутки с центром x_k длины $2(b - a)/n$ образуют покрытие промежутка $[a, b]$, ч. т. д.

Если на действительной прямой рассмотреть два расстояния d_1 и d_2 , определенные в 3.14, то из (3.17.1) следует, что E_2 не вполне ограничено, а E_1 вполне ограничено, так как расширенная действительная прямая $\bar{\mathbf{R}}$, будучи гомеоморфна замкнутому промежутку $[-1, +1]$ пространства \mathbf{R} (3.12), в силу (3.17.6) компактна.

(3.17.7) Для того чтобы множество A в метрическом пространстве E было относительно компактно, необходимо и достаточно, чтобы каждая последовательность точек множества A имела предельную точку в E .

Ввиду (3.16.1) это условие, очевидно, необходимо. Допустим, напротив, что оно выполняется, и докажем, что каждая последовательность (x_n) точек множества \bar{A} имеет предельную точку в E (которая, следовательно, в силу (3.13.7) принадлежит \bar{A}); тогда на основании (3.16.1) \bar{A} компактно. Из определения замыкания следует, что для всякого n существует такая точка $y_n \in A$, что $d(x_n, y_n) \leq 1/n$. По предположению найдется подпоследовательность (y_{n_k}) , сходящаяся к некоторой точке a . Из неравенства треугольника следует, что и (x_{n_k}) сходится к a , ч. т. д.

(3.17.8) Объединение двух относительно компактных множеств относительно компактно.

Из (3.8.8) следует, что достаточно доказать компактность объединения двух компактных множеств A и B . Пусть $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$ — открытое покрытие подпространства $A \cup B$. Каждое множество U_λ в силу (3.10.1) можно записать в виде $(A \cup B) \cap V_\lambda$, где V_λ открыто в E . По предположению существует такое конечное подмножество H (соответственно K) множества L , что подсемейство $(A \cap V_\lambda)_{\lambda \in H}$ (соответственно $(B \cap V_\lambda)_{\lambda \in K}$) покрывает A (соответственно B). Тогда ясно, что семейство $((A \cup B) \cap V_\lambda)_{\lambda \in H \cup K}$ покрывает $A \cup B$.

(3.17.9) Пусть f — непрерывное отображение метрического пространства E в метрическое пространство E' . Образ $f(A)$ каждого компактного (соответственно относительно компакт-

ного) множества $A \subset E$ компактен и поэтому замкнут в E' (соответственно относительно компактен в E').

Достаточно доказать, что если компактно A , то компактно и $f(A)$. Пусть $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$ — открытое покрытие подпространства $f(A)$. Тогда в силу (3.11.4) множества $A \cap f^{-1}(U_\lambda)$ образуют открытое покрытие подпространства A . По предположению существует такое конечное подмножество $H \subset L$, что при $\lambda \in H$ множества $A \cap f^{-1}(U_\lambda)$ все еще образуют покрытие A . Но тогда множества $U_\lambda = f(A \cap f^{-1}(U_\lambda))$ при $\lambda \in H$ образуют покрытие $f(A)$, ч. т. д.

(3.17.10) Пусть E — компактное метрическое пространство и f — непрерывное отображение пространства E в \mathbb{R} . Тогда $f(E)$ ограничено, и в E существуют такие две точки a и b , что

$$f(a) = \inf_{x \in E} f(x), \quad f(b) = \sup_{x \in E} f(x).$$

Первое утверждение следует из (3.17.9) и (3.17.1). С другой стороны, в силу (3.17.2) $f(E)$ замкнуто в \mathbb{R} , и поэтому точки $\sup f(E)$ и $\inf f(E)$, являющиеся точками прикосновения множества $f(E)$, принадлежат $f(E)$.

(3.17.11) Пусть A — компактное множество в метрическом пространстве E . Тогда множества $V_r(A)$ (см. 3.6) образуют фундаментальную систему окрестностей множества A .

Пусть U — окрестность множества A . В силу (3.11.8) действительная функция $x \rightarrow d(x, E \setminus U)$ непрерывна в A и > 0 . Поэтому ввиду (3.17.10) существует такая точка $x_0 \in A$, что $d(x_0, E \setminus U) = \inf_{x \in A} d(x, E \setminus U)$. Но $d(x_0, E \setminus U) = r > 0$, следовательно, $V_r(A) \subset U$.

(3.17.12) Если E — компактное метрическое пространство и f — непрерывное инъективное отображение пространства E в метрическое пространство E' , то f — гомеоморфизм E на $f(E)$.

Ввиду (3.11.4) нам нужно лишь доказать, что образ $f(A)$ каждого замкнутого множества $A \subset E$ замкнут в $f(E)$. Но это следует из (3.17.3) и (3.17.9).

Задачи

1. Пусть f — равномерно непрерывное отображение метрического пространства E в метрическое пространство E' . Покажите, что образ $f(A)$ любого вполне ограниченного множества $A \subset E$ вполне ограничен.

2. Пусть A — компактное и B — замкнутое множества в метрическом пространстве E и $A \cap B = \emptyset$. Покажите, что $d(A, B) > 0$.

3. Пусть E — компактное ультраметрическое пространство (§ 3.8, задача 4) и d — расстояние в E . Покажите, что для каждой точки $x_0 \in E$ образ пространства E при отображении $x \rightarrow d(x_0, x)$ является не более чем счетным подмножеством промежутка $[0, +\infty]$, в котором каждая точка (кроме, быть может, точки 0) изолирована (§ 3.9, задача 2).

[Рассмотрите для любого $r = d(x_0, x) > 0$ верхнюю грань функции $d(x_0, y)$ на множестве точек y , в которых $d(x_0, y) < r$, и нижнюю грань функции $d(x_0, z)$ на множестве точек z , в которых $d(x_0, z) > r$; воспользуйтесь задачей 4 § 3.8.]

4. Пусть E — компактное метрическое пространство, d — расстояние в E и f — такое отображение E в E , что для любой пары точек (x, y) пространства E выполняется неравенство $d(f(x), f(y)) \geq d(x, y)$. Покажите, что f является изометрией E на E .

[Пусть a и b — две произвольные точки пространства E . Положите $f_n = f_{n-1} \circ f$, $a_n = f_n(a)$ и $b_n = f_n(b)$. Покажите, что для любого $\epsilon > 0$ существует такой номер k , что $d(a, a_k) \leq \epsilon$ и $d(b, b_k) \leq \epsilon$, и выведите отсюда, что $f(E)$ плотно в E и что $d(f(a), f(b)) = d(a, b)$.]

5. Пусть E и E' — два метрических пространства и f — отображение E в E' . Покажите, что если сужение f на любом компактном подпространстве пространства E непрерывно, то f непрерывно в E .

[Примените (3.13.14).]

18. Локально компактные пространства

Метрическое пространство E называется *локально компактным*, если у каждой точки $x \in E$ в E существует компактная окрестность. Любое дискретное пространство локально компактно, но не компактно, если оно бесконечно (3.16.3).

(3.18.1) *Действительная прямая R локально компактна, но не компактна.*

Это немедленно следует из теоремы Бореля — Лебега (3.17.6).

(3.18.2) *Пусть A — компактное множество в локально компактном метрическом пространстве E . Тогда существует такое $r > 0$, что множество $V_r(A)$ (см. 3.6) относительно компактно в E .*

У каждой точки $x \in A$ существует компактная окрестность V_x . Множества $\overset{\circ}{V}_x$ образуют открытые покрытие множества A ; поэтому существует такое конечное множество точек $\{x_1, \dots, x_n\}$ в A , что $\overset{\circ}{V}_{x_i}$ ($1 \leq i \leq n$) образуют открытое покрытие A . Множество $U = \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$ в силу (3.17.8) компактно и является окрестностью множества A . Применяя (3.17.11), получаем требуемый результат.

(3.18.3) Пусть E — локально компактное метрическое пространство. Следующие свойства эквивалентны:

а) в E существует такая возрастающая последовательность (U_n) открытых относительно компактных множеств, что $\bar{U}_n \subset U_{n+1}$ при каждом n и $E = \bigcup_n U_n$;

б) E является счетным объединением компактных подмножеств;

с) E сепарабельно.

Так как множества \bar{U}_n компактны, ясно, что из а) следует б).

Если E есть объединение последовательности (K_n) компактных множеств, то [в силу (3.16.2)] каждое подпространство K_n сепарабельно, и если D_n — не более чем счетное подмножество K_n , плотное в K_n , то $D = \bigcup_n D_n$ не более чем счетно и, поскольку $E = \bigcup_n K_n \subset \bigcup_n \bar{D}_n \subset \bar{D}$, плотно в E . Таким образом, из б) следует с).

Допустим, наконец, что E сепарабельно, и пусть (V_n) не более чем счетная база открытых множеств пространства E [см. (3.9.4)]. У каждой точки $x \in E$ существует компактная окрестность W_x , и поэтому в силу (3.9.3) найдется такой номер $n(x)$, что $x \in V_{n(x)} \subset W_x$. Отсюда следует, что те из V_n , которые относительно компактны, уже образуют базу открытых множеств пространства E . Мы можем, следовательно, считать, что все V_n относительно компактны. Определим теперь множества U_n по индукции следующим образом: $U_1 = V_1$, U_{n+1} есть объединение V_{n+1} и $V_r(\bar{U}_n)$, где $r > 0$ выбрано так, что множество $V_r(\bar{U}_n)$ относительно компактно [ввиду (3.18.2) такой выбор возможен]. Тогда ясно, что последовательность (U_n) удовлетворяет условиям, указанным в а).

(3.18.4) Каждое открытое и каждое замкнутое подпространство локально компактного метрического пространства E локально компактно.

Пусть A открыто в E . Из определения локально компактного пространства и (3.17.3) следует, что для каждой точки $a \in A$ в E существует компактный замкнутый шар $B'(a; r)$. С другой стороны, существует такое $r' \leq r$, что шар $B'(a; r')$ содержитя в A . Так как в силу (3.17.3) он компактен, A локально компактно.

Пусть A замкнуто в E и $a \in A$. Тогда, если V — компактная окрестность точки a в E , пересечение $V \cap A$ в силу (3.10.4) является окрестностью точки a в A , а в силу (3.17.3) компактно. Это доказывает, что A локально компактно.

Задачи

1. Покажите, что если A — локально компактное подпространство метрического пространства E , то A локально замкнуто в E (§ 3.10, задача 3). Обратное верно, если E локально компактно.

[Примените (3.18.4).]

2. а) Покажите, что пересечение двух локально компактных подпространств локально компактного метрического пространства локально компактно (ср. с задачей 1).

б) Приведите пример двух локально компактных подпространств действительной прямой, объединение которых не локально компактно, и пример локально компактного подпространства действительной прямой, дополнение которого не локально компактно.

3. а) Приведите пример локально компактного метрического пространства, не являющегося полным.

б) Пусть E — метрическое пространство, для которого существует такое число $r > 0$, что каждый замкнутый шар $B'(x; r)$ ($x \in E$) компактен. Покажите, что E — полное пространство и что для любого относительно компактного множества $A \subset E$ множество $V'_{r/2}(A)$ точек $x \in E$, удовлетворяющих условию $d(x, A) \leqslant r/2$, компактно.

19. Связные пространства и связные множества

Метрическое пространство E называется *связным*, если из всех подмножеств пространства E только пустое множество \emptyset и само E одновременно открыты и замкнуты. Эквивалентная формулировка: E связно, если не существует двух таких открытых непустых подмножеств A и B пространства E , что $A \cup B = E$ и $A \cap B = \emptyset$. Пространство, состоящее из одной точки, связно.

Множество F в метрическом пространстве E *связно*, если связно подпространство F пространства E .

Метрическое пространство E *локально связно*, если у каждой точки $x \in E$ есть фундаментальная система связных окрестностей.

(3.19.1) Для того чтобы множество A на действительной прямой R было связно, необходимо и достаточно, чтобы A было промежутком (ограниченным или нет). Действительная прямая — связное и локально связное пространство.

Второе утверждение, очевидно, следует из первого.

Пусть A связно. Если A состоит из одной точки, то A — промежуток. Допустим, что A содержит две различные точки $a < b$. Докажем, что каждая точка x , удовлетворяющая условию $a < x < b$, принадлежит A . В противном случае A было бы объединением непустых множеств $B = A \cap]-\infty, x[$ и $C = A \cap]x, +\infty[$, причем оба эти множества открыты в A и $B \cap C = \emptyset$. Из этого свойства заключаем, что A необходимо является промежутком. В самом деле,

пусть $c \in A$ и пусть p и q — нижняя и верхняя грани множества A в $\bar{\mathbb{R}}$. Если $p = -\infty$, то для каждой точки $x < c$ найдется точка $y < x$, принадлежащая A ; поэтому $y \in A$ и, таким образом, промежуток $] -\infty, c]$ содержится в A . Если нижняя грань p конечна и $p < c$, то для каждой точки x , удовлетворяющей условию $p < x < c$, найдется такая точка $y \in A$, что $p < y < x$; поэтому снова $y \in A$, так что A содержит промежуток $] p, c]$. Точно так же можно показать, что если $q > c$, то A содержит промежуток $[c, q [$. Отсюда следует, что в любом случае множество A содержит промежуток $] p, q [$ и, значит, оно должно быть одним из четырех промежутков в $\bar{\mathbb{R}}$ с концами p и q [конечно, если $p = -\infty$ (соответственно $q = +\infty$), то \emptyset (соответственно q) не входит в A].

Предположим, наоборот, что A — промежуток с началом a и концом b в $\bar{\mathbb{R}}$ (возможности $a = -\infty$, $a \notin A$ и $b = +\infty$, $b \notin A$ не исключаются). Допустим, что $A = B \cup C$, где B и C — непустые открытые множества в A и $B \cap C = \emptyset$. Пусть, например, $x \in B$, $y \in C$ и $x < y$. Пусть z — верхняя грань ограниченного множества $B \cap [x, y]$. Если $z \in B$, то $z < y$ и, по предположению, существует промежуток $[z, z+h]$, содержащийся в $[x, y]$ и в B , что противоречит определению z . Если, с другой стороны, $z \in C$, то $x < z$ и точно так же существует промежуток $[z-h, z] \subset C \cap [x, y]$, что снова противоречит определению z [см. (2.3.4)]. Таким образом, z не может принадлежать ни B , ни C , что противоречит включению $[x, y] \subset A$. Следовательно, A связно.

(3.19.2) *Если A — связное множество в метрическом пространстве E , то всякое множество B , $A \subset B \subset \bar{A}$, связно.*

В самом деле, допустим, что X и Y — два таких непустых открытых в B множества, что $X \cup Y = B$ и $X \cap Y = \emptyset$. Так как A плотно в B , множества $X \cap A$ и $Y \cap A$ не пусты, открыты в A , и мы имеем $(X \cap A) \cup (Y \cap A) = A$ и $(X \cap A) \cap (Y \cap A) = \emptyset$, что противоречит связности A .

(3.19.3) *Пусть $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ — семейство связных множеств в метрическом пространстве E , имеющее непустое пересечение. Тогда $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ связно.*

Пусть a — точка множества $\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda$; допустим, что $A = B \cup C$, где B и C — непустые множества, открытые в A и $B \cap C = \emptyset$. Пусть, например, $a \in B$. По предположению существует по крайней мере один такой индекс λ , что $C \cap A_\lambda \neq \emptyset$. Тогда, так как $B \cap A_\lambda \neq \emptyset$,

множества $B \cap A_\lambda$ и $C \cap A_\lambda$ не пусты, открыты в A_λ и таковы, что $(B \cap A_\lambda) \cup (C \cap A_\lambda) = A_\lambda$ и $(B \cap A_\lambda) \cap (C \cap A_\lambda) = \emptyset$, что невозможно.

(3.19.4) Пусть $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ — последовательность связных множеств, обладающая тем свойством, что $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ при $1 \leq i \leq n-1$. Тогда объединение $\bigcup_{i=1}^n A_i$ связно.

Это сразу выводится из (3.19.3) индукцией по n .

Из (3.19.3) следует, что объединение $C(x)$ всех связных множеств пространства E , содержащих произвольную точку $x \in E$, связно и потому является наибольшим связным множеством, содержащим x . Оно называется *компонентой связности точки x в E* . Ясно, что для любой точки $y \in C(x)$ имеем $C(y) = C(x)$, а если $y \notin C(x)$, то $C(x) \cap C(y) = \emptyset$. Кроме того, из (3.19.2) следует, что $C(x)$ замкнуто в E .

Для любого множества $A \subset E$ компоненты связности точек подпространства A называются *компонентами связности множества A* . Если каждая компонента связности множества A состоит из одной точки, A называется *вполне несвязным*.

Дискретное пространство вполне несвязно; множество рациональных чисел и множество иррациональных чисел в силу (2.2.16) и (3.19.1) вполне несвязны.

(3.19.5) Для того чтобы метрическое пространство E было локально связно, необходимо и достаточно, чтобы компоненты связности открытых множеств пространства E были открыты.

Условие достаточно, потому что если V — открытая окрестность точки $x \in E$, то компонента связности точки x в подпространстве V является связной окрестностью точки x , содержащейся в V , и, следовательно, E локально связно.

Условие необходимо, потому что если E локально связно, A — открытое в E множество и B — компонента связности множества A , то у любой точки $x \in B$, по предположению, существует связная окрестность V , содержащаяся в A . Таким образом, по определению B имеется включение $V \subset B$ и, следовательно, B является окрестностью каждой из своих точек, а значит — открытым множеством.

(3.19.6) Любое непустое открытое множество A на действительной прямой R является объединением не более чем счетного множества открытых промежутков, попарно не имеющих общих точек.

Из (3.19.1) и (3.19.5) следует, что компоненты связности множества A являются промежутками и открытыми множествами, следова-

тельно — открытыми промежутками. Пересечение $A \cap Q$ множества A с множеством Q рациональных чисел счетно, и каждая компонента множества A в силу (2.2.16) содержит точки множества $A \cap Q$. Отображение $r \rightarrow C(r)$ множества $A \cap Q$ в множество \mathcal{C} компонент связности множества A сюръективно, а поэтому ввиду (1.9.2) \mathcal{C} не более чем счетно.

(3.19.7) Пусть f — непрерывное отображение E в E' . Образ $f(A)$ любого связного множества $A \subset E$ связан.

Допустим, что $f(A) = M \cup N$, где M и N — непустые множества, открытые в $f(A)$, и $M \cap N = \emptyset$. Тогда в силу (3.11.4) пересечения $A \cap f^{-1}(M)$ и $A \cap f^{-1}(N)$ являются непустыми множествами, открытыми в A , и такими, что $A = (A \cap f^{-1}(M)) \cup (A \cap f^{-1}(N))$ и $(A \cap f^{-1}(M)) \cap (A \cap f^{-1}(N)) = \emptyset$ в противоречии с предположением.

(3.19.8) (Теорема Больцано) Пусть E — связное пространство и f — непрерывное отображение пространства E в действительную прямую R . Пусть a и b — две точки образа $f(E)$ и $a < b$. Тогда для любого числа c , удовлетворяющего условию $a < c < b$, существует такая точка $x \in E$, что $f(x) = c$.

В самом деле, в силу (3.19.7) образ $f(E)$ связан в R и поэтому в силу (3.19.1) он является промежутком.

(3.19.9) Пусть A — множество в метрическом пространстве E . Если B — такое связное множество в E , что и $A \cap B$ и $(E \setminus A) \cap B$ не пусты, то пересечение $\text{Fr}(A) \cap B$ не пусто. В частности, если E связно, то любое множество $A \subset E$, отличное от E и от \emptyset , имеет по крайней мере одну граничную точку.

Допустим, что $\text{Fr}(A) \cap B = \emptyset$. Пусть $A' = E \setminus A$. Так как E является объединением A , A' и $\text{Fr}(A)$, то B должно быть объединением множеств $U = A \cap B$ и $V = A' \cap B$, каждое из которых открыто в B и по предположению не пусто (поскольку $\text{Fr}(A) \cap B = \emptyset$, то любая точка множества $A \cap B$ должна принадлежать $A' \cap B$ и аналогично для $A' \cap B$). Так как $U \cap V = \emptyset$, то это противоречит предположению о связности B .

Замечание. Если мы условимся называть „*кривой*“ образ промежутка действительной прямой при непрерывном отображении (см. задачу 5 § 4.2), то (3.19.7) показывает, что „*кривая*“ связна, а (3.19.9) — что „*кривая*“, соединяющая точку множества A и точку дополнения $E \setminus A$, пересекает $\text{Fr}(A)$, и это соответствует интуитивной идее „*связности*“ (см. ниже задачу 3 и задачу 4 § 5.1).

Задачи

1. Пусть E — связное метрическое пространство, расстояние в котором не ограничено. Покажите, что каждая сфера в E не пуста.

2. а) Пусть E — компактное метрическое пространство, в котором замыкание любого открытого шара $B(a; r)$ есть замкнутый шар $B'(a; r)$. Покажите, что в E любой открытый шар $B(a; r)$ связан.

[Допустите, что $B(a; r)$ является объединением $C \cup D$ двух непустых открытых в $B(a; r)$ множеств, для которых $C \cap D = \emptyset$. Если $a \in C$, то рассмотрите точку $x \in D$, у которой расстояние $d(a, x)$ минимально (3.17.10).]

б) Приведите пример вполне несвязного метрического пространства, в котором замыкание любого открытого шара $B(a; r)$ есть замкнутый шар $B'(a; r)$.

с) Пусть E — компактное подпространство плоскости \mathbb{R}^2 , рассматриваемой с расстоянием $d(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$, состоящее из точек (x_1, x_2) , у которых $x_1 = 0$ и $0 \leq x_2 \leq 1$ или же $0 \leq x_1 \leq 1$ и $x_2 = 0$. Покажите, что в E каждый шар связан, но замыкание открытого шара $B(a; r)$ не обязательно есть $B'(a; r)$.

3. Пусть E — подпространство плоскости \mathbb{R}^2 , состоящее из точек (x, y) , у которых либо x иррационально и $0 \leq y \leq 1$, либо же x рационально и $-1 \leq y < 0$.

а) Покажите, что E связно и не локально связано.

[Примените (3.19.1) и (3.19.2) к изучению строения одновременно открытого и замкнутого подмножества подпространства E .]

б) Пусть $t \rightarrow (f(t), g(t))$ — непрерывное отображение промежутка $[0, 1]$ в E (где f и g непрерывны). Покажите, что функция f постоянна.

[Если существуют точки $t_0 \in [0, 1]$, в которых $g(t_0) < 0$, то рассмотрите открытое множество $U \subset [0, 1]$, состоящее из всех t , в которых $g(t) < 0$, и примените (3.19.6).]

4. Пусть A и B — два таких связных множества в метрическом пространстве E , что $\bar{A} \cap B \neq \emptyset$. Покажите, что $A \cup B$ связано.

5. Пусть A и B — два непустых множества в метрическом пространстве E . Покажите, что если A и B замкнуты, а $A \cup B$ и $A \cap B$ связаны, то A и B связаны. Приведите пример множеств на действительной прямой, показывающий, что предположение о том, что A и B замкнуты, отбросить нельзя.

6. Пусть E — связное метрическое пространство, имеющее по крайней мере две точки.

а) Пусть A — связное множество в E , а B — подмножество дополнения C_A , одновременно открытое и замкнутое в C_A . Покажите, что объединение $A \cup B$ связано.

[Примените задачу 1 § 3.10 к двум множествам $A \cup B$ и C_A .]

б) Пусть A — связное множество в E , а B — некоторая компонента связности дополнения C_A . Покажите, что C_B связано.

[Проведите доказательство от противного и примените а.)]

с) Покажите, что в E есть два таких непустых связных множества M и N , что $M \cup N = E$ и $M \cap N = \emptyset$.

[Примените б.).]

7. Покажите, что в счетном метрическом пространстве E каждая точка имеет фундаментальную систему одновременно открытых и замкнутых окрестностей.

8. а) Покажите, что компонента связности точки x в метрическом пространстве E содержится в каждом одновременно открытом и замкнутом множестве, содержащем x .

б) Пусть A_n — множество пар $(1/n, y)$ на плоскости \mathbb{R}^2 , где $-1 \leq y \leq 1$, B — множество пар $(0, y)$, где $0 < y \leq 1$, и C — множество пар $(0, y)$, где $-1 \leq y < 0$. Пусть E — подпространство \mathbb{R}^2 , являющееся объединением B , C и A_n при $n \geq 1$. Покажите, что E локально компактно, но не локально связно. Компонентами связности множества E являются B , C и A_n ($n \geq 1$), но пересечение всех одновременно открытых и замкнутых множеств, содержащих B , равно $B \cup C$.

9. Пусть E — локально компактное метрическое пространство.

а) Пусть C — компактная компонента связности пространства E . Покажите, что множество C является пересечением всех одновременно открытых и замкнутых его окрестностей.

[Пользуясь (3.18.2), сведите задачу к случаю, когда E компактно. Допустите, что пересечение B всех одновременно открытых и замкнутых окрестностей C отлично от C . Тогда B есть объединение двух замкнутых множеств $M \supset C$ и N без общих точек. Рассмотрите в E два открытых множества $U \supset M$ и $V \supset N$, не имеющих общих точек (§ 3.11, задача 3), и возьмите пересечение множества $E \setminus (M \cup N)$ с дополнениями одновременно открытых и замкнутых окрестностей множества C .]

б) Пусть E связно и A — относительно компактное открытое множество в E . Покажите, что всякая компонента связности множества A имеет по крайней мере одну точку прикосновения в CA .

[Предположив, что это не так, примените к каждой такой компоненте результат а) и получите противоречие.]

с) Выведите из б), что пересечение компонент связности любого компактного множества $K \subset E$ с $\overline{E \setminus K}$ не пусто.

20. Произведение двух метрических пространств

Пусть E_1 и E_2 — два метрических пространства, а d_1 и d_2 — расстояния в E_1 и E_2 . Для любой пары точек $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ произведения $E = E_1 \times E_2$ положим

$$d(x, y) = \max(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)).$$

Непосредственно проверяется, что эта функция удовлетворяет аксиомам (I) — (IV) § 3.1, иначе говоря, она является расстоянием в E . Метрическое пространство, получаемое из E , если взять в нем в качестве расстояния d , называется *произведением* метрических пространств E_1 и E_2 . Отображение $(x_1, x_2) \rightarrow (x_2, x_1)$ пространства $E_1 \times E_2$ на $E_2 \times E_1$ есть изометрия.

Легко проверить, что две функции d' и d'' , определяемые формулами

$$d'(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2),$$

$$d''(x, y) = \sqrt{(d_1(x_1, y_1))^2 + (d_2(x_2, y_2))^2},$$

также представляют собой расстояния в E , равномерно эквивалентные расстоянию d (см. 3.14), так как

$$d(x, y) \leq d''(x, y) \leq d'(x, y) \leq 2d(x, y).$$

Таким образом, во всех вопросах, относящихся к топологическим свойствам (или к последовательностям Коши и равномерно непрерывным функциям), безразлично, какое из расстояний — d , d' или d'' — брать в E . В случае когда не будет сделано никакой оговорки, мы будем рассматривать в E расстояние d .

Открытые (соответственно замкнутые) шары для расстояний d , d_1 , d_2 будут соответственно обозначаться символами B , B_1 , B_2 (соответственно B' , B'_1 , B'_2) вместо стандартного обозначения B (соответственно B'), которым мы пользовались до сих пор.

(3.20.1) Для любой точки $a = (a_1, a_2) \in E$ и любого $r > 0$ имеем $B(a; r) = B_1(a_1; r) \times B_2(a_2; r)$ и $B'(a; r) = B'_1(a; r) \times B'_2(a_2; r)$.

Это сразу следует из определения d .

(3.20.2) Если A_1 — открытое множество в E_1 и A_2 — открытое множество в E_2 , то множество $A_1 \times A_2$ открыто в $E_1 \times E_2$.

В самом деле, если $a = (a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$, то существуют такие $r_1 > 0$ и $r_2 > 0$, что $B_1(a_1; r_1) \subset A_1$ и $B_2(a_2; r_2) \subset A_2$. Возьмем $r = \min(r_1, r_2)$. Тогда в силу (3.20.1) $B(a; r) \subset A_1 \times A_2$.

(3.20.3) Для любой пары множеств $A_1 \subset E_1$ и $A_2 \subset E_2$ имеем $\bar{A}_1 \times \bar{A}_2 = \bar{A}_1 \times \bar{A}_2$. В частности, для того чтобы $A_1 \times A_2$ было замкнуто в E , необходимо и достаточно, чтобы A_1 было замкнуто в E_1 и A_2 было замкнуто в E_2 .

Если $a = (a_1, a_2) \in \bar{A}_1 \times \bar{A}_2$, то по предположению для любого $\epsilon > 0$ существуют такие точки $x_1 \in A_1$ и $x_2 \in A_2$, что $d_1(a_1, x_1) < \epsilon$ и $d_2(a_2, x_2) < \epsilon$. Поэтому для точки $x = (x_1, x_2)$ имеем: $d(a, x) < \epsilon$. С другой стороны, если $(a_1, a_2) \notin \bar{A}_1 \times \bar{A}_2$, то или $a_1 \notin \bar{A}_1$ или же $a_2 \notin \bar{A}_2$. В первом случае множество $(E_1 \setminus \bar{A}_1) \times E_2$ в силу (3.20.2) открыто в E , содержит a и имеет непустое пересечение с $A_1 \times A_2$, и, таким образом, $a \notin \bar{A}_1 \times \bar{A}_2$; второй случай рассматривается точно так же.

(3.20.4) Пусть $z \rightarrow f(z) = (f_1(z), f_2(z))$ — отображение метрического пространства F в $E = E_1 \times E_2$. Для того чтобы f было непрерывно в точке z_0 , необходимо и достаточно, чтобы f_1 и f_2 были непрерывны в z_0 .

Пусть $x_0 = (f_1(z_0), f_2(z_0))$. Тогда в силу (3.20.1)

$$f^{-1}(B(x_0; r)) = f_1^{-1}(B_1(f_1(z_0); r)) \cap f_2^{-1}(B_2(f_2(z_0); r))$$

и требуемый результат следует из (3.11.1) и (3.6.3).

(3.20.5) Пусть $f = (f_1, f_2)$ — отображение подпространства A метрического пространства F в $E_1 \times E_2$ и пусть $a \in \bar{A}$. Для того чтобы f имело в точке a предел по множеству A , необходимо и достаточно, чтобы существовали оба предела

$$b_1 = \lim_{z \rightarrow a, z \in A} f_1(z) \quad \text{и} \quad b_2 = \lim_{z \rightarrow a, z \in A} f_2(z),$$

и в этом случае предел отображения f равен $b = (b_1, b_2)$.

Это сразу следует из (3.20.4) и определения предела. В частности,

(3.20.6) Для того чтобы последовательность точек $z_n = (x_n, y_n)$ в $E = E_1 \times E_2$ сходилась, необходимо и достаточно, чтобы существовали оба предела $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ и $b = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, и в этом случае $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = (a, b)$.

Заметим, что если (a, b) — предельная точка последовательности $((x_n, y_n))$, то, как следует из (3.20.6) и определения предельных точек, a является предельной точкой последовательности (x_n) , а b — последовательности (y_n) . Но может случиться, что и (x_n) и (y_n) имеют предельные точки, а последовательность $((x_n, y_n))$ предельных точек не имеет; например, на плоскости \mathbb{R}^2 возьмем $x_{2n} = 1/n$, $y_{2n} = n$, $x_{2n+1} = n$, $y_{2n+1} = 1/n$. Однако если (x_n) имеет предел a , а (y_n) — предельную точку b , то из (3.20.6) следует, что (a, b) будет предельной точкой последовательности $((x_n, y_n))$.

(3.20.7) Для того чтобы последовательность точек $z_n = (x_n, y_n)$ в $E_1 \times E_2$ была последовательностью Коши, необходимо и достаточно, чтобы каждая из последовательностей (x_n) и (y_n) была последовательностью Коши.

Это сразу следует из определения расстояния в $E_1 \times E_2$ и определения последовательности Коши.

(3.20.8) Пусть $z \rightarrow f(z) = (f_1(z), f_2(z))$ — отображение метрического пространства F в $E_1 \times E_2$. Для того чтобы f было равномерно непрерывно, необходимо и достаточно, чтобы f_1 и f_2 были равномерно непрерывны.

Это немедленно следует из определений.

(3.20.9) Если E — метрическое пространство и d — расстояние в E , то отображение d произведения $E \times E$ в \mathbb{R} равномерно непрерывно.

В самом деле, в силу неравенства треугольника

$$|d(x, y) - d(x', y')| \leq d(x, x') + d(y, y').$$

(3.20.10) Проекции pr_1 и pr_2 равномерно непрерывны в $E = E_1 \times E_2$.

Достаточно к тождественному отображению пространства E применить (3.20.8).

(3.20.11) Для любой точки $a_2 \in E_2$ (соответственно $a_1 \in E_1$) отображение $x_1 \rightarrow (x_1, a_2)$ (соответственно $x_2 \rightarrow (a_1, x_2)$) есть изометрия пространства E_1 (соответственно E_2) на замкнутое подпространство $E_1 \times \{a_2\}$ (соответственно $\{a_1\} \times E_2$) произведения $E_1 \times E_2$.

Это — очевидное следствие определения расстояния в $E_1 \times E_2$ и (3.20.3).

(3.20.12) Для любого множества A открытого (соответственно замкнуто) в $E_1 \times E_2$ и любой точки $a_1 \in E_1$ множество $A(a_1) = \text{pr}_2(A \cap (\{a_1\} \times E_2))$ открыто (соответственно замкнуто) в E_2 .

В силу (3.20.11) достаточно доказать, что множество $A \cap (\{a_1\} \times E_2)$ открыто (соответственно замкнуто) в $\{a_1\} \times E_2$. Но это следует из (3.10.1) и (3.10.5).

(3.20.13) Для любого множества A , открытого в $E_1 \times E_2$, множество $\text{pr}_1 A$ (соответственно $\text{pr}_2 A$) открыто в E_1 (соответственно в E_2).

В самом деле, мы можем написать $\text{pr}_2 A = \bigcup_{x_1 \in E_1} A(x_1)$, и требуемый результат следует тогда из (3.20.12) и (3.5.2).

Отметим, что если A замкнуто в $E_1 \times E_2$, то множество $\text{pr}_1 A$ может не быть замкнуто в E_1 . Например, гипербола с уравнением $xy = 1$ представляет собою замкнутое множество на плоскости \mathbb{R}^2 , но обе ее проекции являются дополнениями в \mathbb{R} точки $\{0\}$ и, таким образом, не замкнуты.

(3.20.14) Пусть f — отображение произведения $E = E_1 \times E_2$ в метрическое пространство F . Если f непрерывно в точке (a_1, a_2) (соответственно равномерно непрерывно), то отображение $x_1 \rightarrow f(x_1, a_2)$ непрерывно в a_1 (соответственно равномерно непрерывно).

Это отображение можно представить в виде $x_1 \rightarrow (x_1, a_2) \rightarrow f(x_1, a_2)$. Поэтому требуемый результат следует из (3.20.11), (3.11.5) и (3.11.9).

Утверждение, обратное к (3.20.14), вообще говоря, не верно. Классический противоречий пример дает функция f , определяемая в \mathbb{R}^2 формулой $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$ при $(x, y) \neq (0, 0)$ и $f(0, 0) = 0$. Функция f не непрерывна в $(0, 0)$, так как $f(x, x) = 1/2$ при $x \neq 0$.

(3.20.15) Пусть E_1, E_2, F_1 и F_2 — четыре метрических пространства и f_1 (соответственно f_2) — отображение пространства E_1 в F_1 (соответственно пространства E_2 в F_2). Для того чтобы отображение $f: (x_1, x_2) \rightarrow (f_1(x_1), f_2(x_2))$ произведения $E_1 \times E_2$ в $F_1 \times F_2$ было непрерывно в точке (a_1, a_2) (соответственно равномерно непрерывно), необходимо и достаточно, чтобы f_1 было непрерывно в a_1 и f_2 — в a_2 (соответственно чтобы f_1 и f_2 были равномерно непрерывны).

Отображение $(x_1, x_2) \rightarrow f_1(x_1)$ можно представить в виде $f \circ \text{pr}_1$, поэтому достаточность условия следует из (3.20.4), (3.20.8) и (3.20.10). С другой стороны, отображение f_1 можно представить в виде $x_1 \rightarrow \text{pr}_1(f(x_1, a_2))$ и необходимость условия следует из (3.20.14) и (3.20.10).

(3.20.16) Пусть E_1 и E_2 — два непустых метрических пространства. Для того чтобы произведение $E = E_1 \times E_2$ было пространством одного из следующих типов:

- (i) дискретным;
- (ii) ограниченным;
- (iii) сепарабельным;
- (iv) полным;
- (v) компактным;
- (vi) вполне ограниченным;
- (vii) локально компактным;
- (viii) связным;
- (ix) локально связным;

— необходимо и достаточно, чтобы E_1 и E_2 были пространствами того же типа.

Доказательство необходимости для свойств (i) — (vii) проводится по одной и той же схеме: из (3.20.11) следует, что E_1 и E_2 изометричны замкнутым подпространствам произведения $E_1 \times E_2$, а эти свойства (i) — (vii) „наследственны“ по отношению к замкнутым подпространствам [для (i) и (ii) это очевидно; для свойств (iii) — (vii) доказано в (3.10.9), (3.14.5), (3.17.3), (3.17.4), (3.18.4)]. Для свойства (viii) необходимость следует из теоремы (3.19.7), примененной к проекциям pr_1 и pr_2 . Аналогично если E локально связно, то для любой точки $(a_1, a_2) \in E$ и любой окрестности V_1 точки a_1 в E_1 произведение $V_1 \times E_2$ является окрестностью точки (a_1, a_2) и поэтому содержит связную окрестность W этой точки. Но тогда в силу

(3.19.7) и (3.20.13) $\text{pr}_1 W$ будет связной окрестностью точки a_1 , содержащейся в V_1 .

Достаточность условия для (i) и (ii) является очевидным следствием определения расстояния в $E_1 \times E_2$. Если множества D_1 и D_2 не более чем счетны и плотны соответственно в E_1 и в E_2 , то в силу (1.9.3) произведение $D_1 \times D_2$ не более чем счетно, а в силу (3.20.3) — плотно в E , т. е. утверждение для (iii) верно. Перейдем к свойству (iv). Если (z_n) — последовательность Коши в E , то в силу (3.20.7) $(\text{pr}_1 z_n)$ и $(\text{pr}_2 z_n)$ являются последовательностями Коши соответственно в E_1 и в E_2 , поэтому они сходятся соответственно к некоторым точкам a_1 и a_2 и, значит, ввиду (3.20.6) последовательность (z_n) сходится к (a_1, a_2) . Достаточность условия для (vi) очевидна: если (A_i) (соответственно B_j) — конечное покрытие пространства E_1 (соответственно E_2) множествами диаметра $< \varepsilon$, то $(A_i \times B_j)$ является конечным покрытием произведения $E_1 \times E_2$ множествами диаметра $< \varepsilon$. Достаточность условия для (iv) и (vi) в силу (3.16.1) доказывает и достаточность условия для (v). Доказательство достаточности для (v) дает и доказательство достаточности для (vii), если вспомнить определение окрестностей в $E_1 \times E_2$. Наконец, обратимся к свойству (viii). Пусть (a_1, a_2) и (b_1, b_2) — две произвольные точки пространства E . В силу (3.20.11) и предположения множества $\{a_1\} \times E_2$ и $E_1 \times \{b_2\}$ связны и имеют общую точку (a_1, b_2) . Поэтому на основании (3.19.3) их объединение связно и содержит обе точки (a_1, a_2) и (b_1, b_2) . Следовательно, компонента связности точки (a_1, a_2) в E есть само E . То же рассуждение, учитывая определение окрестностей в E , доказывает достаточность условия и для (ix).

(3.20.17) Для того чтобы множество $A \subset E_1 \times E_2$ было относительно компактно, необходимо и достаточно, чтобы $\text{pr}_1 A$ и $\text{pr}_2 A$ были относительно компактны соответственно в E_1 и в E_2 .

Необходимость следует из теоремы (3.17.9), примененной к pr_1 и pr_2 . Достаточность следует из (3.20.16), (3.20.3) и (3.17.4).

Все определения и теоремы, рассмотренные в этом параграфе, сразу же распространяются на случай произведения конечного числа метрических пространств.

Задачи

- Пусть E, F — два метрических пространства, $A \subset E$ и $B \subset F$. Покажите, что $\text{Fr}(A \times B) = (\text{Fr}(A) \times \bar{B}) \cup (\bar{A} \times \text{Fr}(B))$.
- Пусть E, F — два связных метрических пространства, $A \neq E$ — множество в E и $B \neq F$ — множество в F . Покажите, что дополнение в $E \times F$ множества $A \times B$ связано.

3. а) Пусть E, F — два метрических пространства и A (соответственно B) — компактное множество в E (соответственно в F). Покажите, что если W — произвольная окрестность множества $A \times B$ в $E \times F$, то существуют такая окрестность U множества A в E и такая окрестность V множества B в F , что $U \times V \subset W$.

[Сначала рассмотрите случай, когда B состоит из одной точки.]

б) Пусть E — компактное метрическое пространство, F — метрическое пространство, A — замкнутое множество в $E \times F$. Покажите, что проекция множества A в F является замкнутым множеством.

[С помощью а) докажите, что дополнение проекции $\text{рг}_2 A$ открыто.]

с) Пусть, наоборот, E — метрическое пространство, обладающее тем свойством, что для любого метрического пространства F и любого замкнутого подмножества A произведения $E \times F$ проекция A в F замкнута в F . Докажите, что E компактно.

[В противном случае в E нашлась бы последовательность (x_n) , не имеющая предельной точки. Возьмите в качестве F подпространство действительной прямой \mathbf{R} , состоящее из нуля и точек $1/n$ (n — целые числа ≥ 1), и в $E \times F$ рассмотрите множество точек $(x_n, 1/n)$.]

4. Пусть E — компактное метрическое пространство, F — метрическое пространство, A — замкнутое множество в $E \times F$ и B — (замкнутая) проекция множества A в F . Пусть $y_0 \in B$ и C — сечение $A^{-1}(y_0) = \{x \in E \mid (x, y_0) \in A\}$. Покажите, что для любой окрестности V множества C в E найдется такая окрестность W точки y_0 в F , что из $y \in W$ следует $A^{-1}(y) \subset V$ (непрерывность „корней“ уравнения, зависящего от параметра).

[Воспользуйтесь задачей 3, а).]

5. а) Пусть f — отображение метрического пространства E в метрическое пространство F и пусть G — график отображения f в произведении $E \times F$. Покажите, что если f непрерывно, то множество G замкнуто в $E \times F$ и сужение проекции рг_1 на G является гомеоморфизмом G на E .

б) Наоборот, если F компактно и G замкнуто в $E \times F$, то f непрерывно.

[Воспользуйтесь задачей 3, б).]

с) Пусть F — метрическое пространство, обладающее тем свойством, что для всякого метрического пространства E любое отображение пространства E в F , график которого замкнут в $E \times F$, непрерывно. Покажите, что F компактно.

[Примените конструкцию из задачи 3, с).]

6. Пусть E, F, G — три метрических пространства, A — множество в $E \times F$, B — множество в $F \times G$, $C = B \circ A = \{(x, z) \in E \times G \mid \exists y \in F$, такое, что $(x, y) \in A$ и $(y, z) \in B\}$. Пусть A и B замкнуты и проекция множества A в F относительно компактна. Покажите, что C замкнуто в $E \times G$.

[Воспользуйтесь задачей 3, б).]

7. Пусть (E_n) ($n \geq 1$) — бесконечная последовательность непустых метрических пространств, и пусть при всех n расстояние d_n в E_n таково, что диаметр E_n не превосходит единицы (см. задачу 2, б) § 3.14). Пусть E — множество всех последовательностей $x = (x_n)$, где $x_n \in E_n$ при каждом n

[бесконечное произведение последовательности (E_n) ; его обозначают символом $E = \prod_{n=1}^{\infty} E_n$].

а) Покажите, что в E функция $d((x_n), (y_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n(x_n, y_n)/2^n$ является расстоянием.

б) Пусть для любой точки $x = (x_n) \in E$, любого целого $m \geq 1$ и любого числа $r > 0$ множество $V_m(x; r)$ есть множество всех таких точек $y = (y_n) \in E$, что $d_k(x_k, y_k) < r$ при $k \leq m$. Покажите, что множества $V_m(x; r)$ (при всех m и r) образуют фундаментальную систему окрестностей точки x в E .

с) Пусть $(x^{(m)})$ — последовательность точек $x^{(m)} = (x_n^{(m)})_{n \geq 1}$ пространства E . Покажите, что, для того чтобы последовательность $(x^{(m)})$ сходилась в E к $a = (a_n)$ (соответственно была в E последовательностью Коши), необходимо и достаточно, чтобы при каждом n последовательность $(x_n^{(m)})_{m \geq 1}$ сходилась в E_n к a_n (соответственно была в E_n последовательностью Коши). Для того чтобы E было полным пространством, необходимо и достаточно, чтобы полным было каждое E_n .

д) Пусть A_n — множество в E_n при любом n . Покажите, что замыкание в E множества $A = \prod_{n=1}^{\infty} A_n$ равно $\prod_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n$.

е) Покажите, что, для того чтобы E было вполне ограничено (соответственно компактно), необходимо и достаточно, чтобы каждое E_n было вполне ограничено (соответственно компактно).

ф) Покажите, что, для того чтобы E было локально компактно, необходимо и достаточно, чтобы каждое E_n было локально компактно и чтобы все E_n , за исключением не более конечного числа из них, были компактны.

г) Покажите, что, для того чтобы E было связно, необходимо и достаточно, чтобы каждое E_n было связно.

х) Покажите, что, для того чтобы E было локально связно, необходимо и достаточно, чтобы каждое E_n было локально связно и чтобы все E_n , за исключением не более конечного числа из них, были связны.

Глава 4

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПРЯМОЙ

Многие из свойств действительной прямой уже упоминались в гл. 3 в связи с различными рассмотренными в ней топологическими понятиями. Факты, собранные в настоящей главе, по большей части элементарные и классические, не имеют с этими понятиями непосредственной связи, но именно они фактически являются теми свойствами, которые ставят действительную прямую в столь исключительное положение среди других, более общих пространств.

Логарифмическая и показательная функции вводятся несколько неорто-доксальным образом: мы отправляемся не от показательной функции, а от логарифмов. Это дает нам известное техническое преимущество, делая необязательным предварительное определение $a^{m/n}$ (m и n — целые числа > 0) в качестве основного шага перед определением a^x для любого x .

Теорема Титце — Урысона занимает в настоящее время и в функциональном анализе и в алгебраической топологии центральное место. Ее можно рассматривать как первый шаг в изучении общей задачи продолжения непрерывного отображения замкнутого подмножества A пространства E в пространство F до непрерывного отображения *всего* пространства E в F . В книге Н. Стингрида [22] читатель может увидеть, как эта общая задача естественно приводит к наиболее важным и наиболее активно изучаемым задачам современной алгебраической топологии.

1. Непрерывность алгебраических операций

(4.1.1) *Отображение $(x, y) \rightarrow x + y$ произведения $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ в \mathbb{R} равномерно непрерывно.*

Это сразу следует из неравенства

$$|(x' + y') - (x + y)| \leq |x' - x| + |y' - y|$$

и определений.

(4.1.2) *Отображение $(x, y) \rightarrow xy$ произведения $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ в \mathbb{R} непрерывно; для любого $a \in \mathbb{R}$ отображение $x \rightarrow ax$ действительной прямой \mathbb{R} в \mathbb{R} равномерно непрерывно.*

Непрерывность xy в точке (x_0, y_0) следует из тождества

$$xy - x_0 y_0 = x_0(y - y_0) + (x - x_0)y_0 + (x - x_0)(y - y_0).$$

Если задано произвольное $\epsilon > 0$, то возьмем δ так, чтобы $0 < \delta < 1$ и $\delta(|x_0| + |y_0| + 1) < \epsilon$. Тогда из неравенства $|x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta$ будет вытекать неравенство $|xy - x_0y_0| < \epsilon$. Равномерная непрерывность отображения $x \rightarrow ax$ очевидна, так как справедливо равенство $|ax' - ax| = |a||x' - x|$.

(4.1.3) Любое непрерывное отображение f действительной прямой \mathbf{R} в себя, удовлетворяющее условию $f(x+y) = f(x) + f(y)$, имеет вид $x \rightarrow cx$, где $c \in \mathbf{R}$.

В самом деле, для каждого целого $n > 0$ индукцией по n получаем $f(nx) = nf(x)$. С другой стороны, $f(0+x) = f(0) + f(x)$, поэтому $f(0) = 0$ и $f(x+(-x)) = f(x) + f(-x) = f(0) = 0$, следовательно, $f(-x) = -f(x)$. Отсюда следует, что $f(x/n) = f(x)/n$ для любого целого $n > 0$, поэтому для любой пары целых чисел p и q , где $q > 0$, имеем $f(px/q) = pf(x)/q$; иными словами, $f(rx) = rf(x)$ для любого рационального числа r . Но любое действительное число t является пределом последовательности (r_n) рациональных чисел [в силу (2.2.16) и (3.13.13)]. Поэтому из предположения относительно f и (4.1.2) находим

$$f(tx) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} r_n x\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n x) = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n f(x) = f(x) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = tf(x).$$

Положив $c = f(1)$, мы получим $f(x) = cx$ для каждого $x \in \mathbf{R}$.

(4.1.4) Отображение $x \rightarrow 1/x$ непрерывно в каждой точке $x_0 \neq 0$ пространства \mathbf{R} .

В самом деле, если задано произвольное $\epsilon > 0$, то возьмем $\delta > 0$ так, чтобы $\delta < \min(|x_0|/2, \epsilon|x_0|^2/2)$. Тогда из неравенства $|x - x_0| < \delta$ прежде всего следует, что $|x| > |x_0| - \delta > |x_0|/2$, а затем что

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| = \frac{|x_0 - x|}{|xx_0|} \leqslant \frac{2|x_0 - x|}{|x_0|^2} < \epsilon.$$

(4.1.5) Любая рациональная функция

$$(x_1, \dots, x_n) \rightarrow P(x_1, \dots, x_n)/Q(x_1, \dots, x_n),$$

где P и Q — многочлены с действительными коэффициентами, непрерывна в каждой точке (a_1, \dots, a_n) пространства \mathbf{R}^n , в которой $Q(a_1, \dots, a_n) \neq 0$.

Непрерывность одночлена в \mathbf{R}^n доказывается индукцией по его степени на основании (4.1.2). Затем, исходя из (4.1.1), индукцией по числу членов доказывается непрерывность многочленов P и Q . Окончательный результат следует из (4.1.4).

(4.1.6) Отображения $(x, y) \rightarrow \sup(x, y)$ и $(x, y) \rightarrow \inf(x, y)$ равномерно непрерывны в $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

Так как $\sup(x, y) = (x + y + |x - y|)/2$ и $\inf(x, y) = (x + y - |x - y|)/2$, утверждение следует из (4.1.1) и (3.20.9).

(4.1.7) Открытый промежуток в \mathbb{R} гомеоморфен \mathbb{R} .

Из (4.1.1) и (4.1.2) следует, что любая линейная функция $x \rightarrow ax + b$ при $a \neq 0$ является гомеоморфизмом пространства \mathbb{R} на себя, потому что обратное отображение $x \rightarrow a^{-1}x - a^{-1}b$ имеет ту же форму. Любые два открытых промежутка $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ являются образами один другого при отображении $x \rightarrow ax + b$, поэтому они гомеоморфны. Рассмотрим теперь отображение $x \rightarrow x/(1 + |x|)$ пространства \mathbb{R} на промежуток $[-1, +1]$; обратным к нему является отображение $x \rightarrow x/(1 - |x|)$ и оба они непрерывны, так как непрерывно отображение $x \rightarrow |x|$. Так доказывается, что \mathbb{R} гомеоморфно любому ограниченному открытому промежутку. Наконец, при только что рассмотренном гомеоморфизме пространства \mathbb{R} на $[-1, +1]$ любой неограниченный открытый промежуток $[a, +\infty]$ или $-\infty, b]$ пространства \mathbb{R} отображается на ограниченный открытый промежуток, содержащийся в $[-1, +1]$. Поэтому эти промежутки также гомеоморфны \mathbb{R} .

(4.1.8) Функция $(x, y) \rightarrow x + y$ в каждой точке (a, b) пространства $\bar{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}}$, за исключением точек $(-\infty, +\infty)$ и $(+\infty, -\infty)$, имеет предел по множеству $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Если по крайней мере одна из координат a, b равна $+\infty$ (соответственно $-\infty$), то этот предел равен $+\infty$ (соответственно $-\infty$).

Докажем, например, что если $a \neq -\infty$, то $x + y$ имеет в точке $(a, +\infty)$ предел, равный $+\infty$. Если задано произвольное $c \in \mathbb{R}$, то из неравенств $x > b$ и $y > c - b$ следует неравенство $x + y > c$, и промежутки $[b, +\infty]$ и $[c - b, +\infty]$, если b взято конечным и $< a$, являются соответственно окрестностями точек a и $+\infty$. Отсюда следует наше утверждение. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

(4.1.9) Функция $(x, y) \rightarrow xy$ в каждой точке (a, b) пространства $\bar{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}}$, за исключением точек $(0, +\infty), (0, -\infty), (+\infty, 0), (-\infty, 0)$ имеет предел по множеству $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Если по крайней мере одна из координат a, b бесконечна и если при этом обе координаты имеют один и тот же знак (соответственно противоположные знаки), то этот предел равен $+\infty$ (соответственно $-\infty$).

Покажем, например, что если $a > 0$, то xy имеет в точке $(a, +\infty)$ предел $+\infty$. Если задано произвольное $c \in \mathbb{R}$, то из неравенств $x > b$ и $y > c/b$ при $b > 0$ следует неравенство $xy > c$ и промежутки $[b, +\infty]$ и $[c/b, +\infty]$, если b взято конечным и $< a$, являются окрестностями точек a и $+\infty$. Аналогичны доказательства и для других случаев.

Мы опускаем доказательства следующих двух свойств:

$$(4.1.10) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 1/x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} 1/x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} 1/x = -\infty.$$

(4.1.11) Отображения $(x, y) \rightarrow \sup(x, y)$ и $(x, y) \rightarrow \inf(x, y)$ непрерывны в $\bar{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}}$.

2. Монотонные функции

Пусть E — непустое подмножество расширенной действительной прямой $\bar{\mathbb{R}}$. Отображение f множества E в $\bar{\mathbb{R}}$ называется *возрастающим* (соответственно *строго возрастающим*, *убывающим*, *строго убывающим*), если из $x < y$ (в E) следует $f(x) \leq f(y)$ (соответственно $f(x) < f(y)$, $f(x) > f(y)$, $f(x) > f(y)$). Функция, являющаяся возрастающей или убывающей (соответственно строго возрастающей или строго убывающей), называется *монотонной* (соответственно *строго монотонной*). Строго монотонное отображение инъективно. Если f — возрастающее (соответственно строго возрастающее) отображение, то $-f$ убывающее (соответственно строго убывающее) отображение. Если f и g — возрастающие отображения и отображение $f+g$ определено, то $f+g$ возрастающее отображение; если вдобавок и f и g конечны и хотя бы одно из них является строго возрастающим, то и $f+g$ строго возрастающее отображение.

(4.2.1) Пусть E — непустое множество в $\bar{\mathbb{R}}$ и $a = \sup E$. Для любого монотонного отображения f множества E в $\bar{\mathbb{R}}$ предел $\lim_{x \rightarrow a, x \in E} f(x)$ существует и равен $\sup_{x \in E} f(x)$, если f — возрастающее, и $\inf_{x \in E} f(x)$, если f — убывающее отображение.

Допустим, например, что f — возрастающее отображение, и пусть $c = \sup_{x \in E} f(x)$. Если $c = -\infty$, то f постоянно (равно $-\infty$) на E и результат тривиален. Если $c > -\infty$, то для любого $b < c$ существует такая точка $x \in E$, что $b < f(x) \leq c$. Поэтому при $y \in E$ и $x \leq y \leq a$ мы, по предположению, имеем $b < f(x) \leq f(y) \leq c$, откуда следует наше заключение.

(4.2.2) Пусть I — промежуток в $\bar{\mathbb{R}}$. Любое непрерывное инъективное отображение f промежутка I в $\bar{\mathbb{R}}$ строго монотонно; любое непрерывное строго монотонное отображение f промежутка I в $\bar{\mathbb{R}}$ является гомеоморфизмом I на промежуток $f(I)$.

Пусть отображение f непрерывно и инъективно. Пусть a и b — две такие точки из I , что $a < b$, и допустим, например, что $f(a) < f(b)$. Тогда при $a < c < b$ мы должны иметь $f(a) < f(c) < f(b)$. В самом деле, из наших предположений следует, что $f(c) \neq f(b)$ и $f(c) \neq f(a)$, и если бы мы, например, имели $f(c) > f(b)$, то по теореме Больцано (3.19.8) нашлась бы такая точка x , что $a < x < c$ и $f(x) = f(b)$, что противоречит предположению. Аналогично мы убеждаемся в том, что невозможно и неравенство $f(c) < f(a)$. Если теперь $b < c$, то $f(b) < f(c)$, ибо предыдущее рассуждение показывает, что $f(b)$ должно содержаться в промежутке с концами $f(a)$ и $f(c)$. Точно так же, если $c < a$, то $f(c) < f(a)$. Наконец, если x и y — две произвольные точки промежутка I и $x < y$, то,

повторяя предыдущее рассуждение по отношению к a , x и y вместо a , b и c , мы получим $f(x) < f(y)$, и первое утверждение доказано.

Если f непрерывно и строго монотонно, то оно является биективным отображением I на $f(I)$, а $f(I)$, будучи связным, должно быть промежутком [(3.19.1), и (3.19.7)]. Для любой точки $x \in I$ образ при f любого промежутка, содержащего x и содержащегося в I , является тогда промежутком, содержащим $f(x)$ и содержащимся в $f(I)$. Это доказывает, что образ при отображении f любой окрестности точки x в I является окрестностью точки $f(x)$ в $f(I)$. Следовательно, f — гомеоморфизм [см. (3.11.1)].

Задачи

1. Пусть f — отображение \mathbf{R} в \mathbf{R} , при котором $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

а) Покажите, что если f на промежутке $]a, b[$ ограничено сверху, то оно на нем ограничено и снизу.

[Если c — фиксированная точка промежутка $]a, b[$, то рассмотрите пары точек x, y этого промежутка, для которых $x < c < y$, а отношение $(y-c)/(c-x)$ рационально.]

б) Докажите, что при том же предположении отображение f ограничено на любом компактном промежутке и непрерывно в \mathbf{R} и поэтому имеет вид $f(x) = cx$.

[Пользуясь аксиомой выбора, можно показать, что существуют решения уравнения $f(x+y) = f(x) + f(y)$, неограниченные на каждом промежутке.]

2. Пусть b — целое число > 1 .

а) Покажите, что для любой бесконечной последовательности (c_n) целых чисел, удовлетворяющих условию $0 \leq c_n \leq b - 1$, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n/b^n$ сходится к числу $x \in [0, 1]$. Обратно, для любого $x \in [0, 1]$ существует такая последовательность (c_n) , что $0 \leq c_n \leq b - 1$ при каждом n и $x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n/b^n$. Если x не имеет вида k/b^m (k и m — целые числа ≥ 0), то эта последовательность единственна; в противном случае существуют ровно две последовательности (c_n) , обладающие требуемыми свойствами.

[Воспользуйтесь тем фактом, что для любого целого $m \geq 0$ и любого $x \in [0, 1]$ существует единственное целое число k , при котором $k/b^m \leq x < (k+1)/b^m$.]

б) Пользуясь случаем $b = 2$ задачи а) и задачей 5 § 1.9, покажите, что множество $[0, 1]$ [а поэтому и само \mathbf{R} , см. (4.1.7)] равнomoщно множеству $\mathfrak{P}(\mathbf{N})$.

с) Пусть K — подмножество промежутка $[0, 1]$, состоящее из всех чисел вида $\sum_{n=0}^{\infty} c_n/3^n$, где $c_n = 0$ или $c_n = 2$ (*троичное канторово множество*). Покажите, что K компактно, а его дополнение в $[0, 1]$ является объединением счетного множества неперекрывающихся открытых промежутков. Опишите эти промежутки и покажите, что (бесконечная) сумма их длин равна 1.

d) Для каждой точки $x \in K$, где $x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n/3^n$, определим $f(x)$ как действительное число $\sum_{n=0}^{\infty} b_n/2^n$, где $b_n = c_n/2$. Покажите, что если x записывается в виде $\sum_{n=0}^{\infty} c_n/3^n$ двумя различными способами, то два соответствующих числа $\sum_{n=0}^{\infty} b_n/2^n$ равны. Докажите, далее, что f является непрерывным сюръективным отображением множества K на промежуток $[0, 1]$ действительной прямой R и что, следовательно, K и R равнomoщны. Объясните, как можно продолжить f в непрерывное отображение промежутка $I = [0, 1]$ на себя, постоеанное на каждой компоненте связности (3.19.6) дополнения $I \setminus K$.

3. а) Пусть E — метрическое пространство, удовлетворяющее следующему условию: для каждой конечной последовательности $s = (\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$, элементы которой равны 0 или 1, существует такое непустое множество $A_s \subset E$, что

(i) E является объединением двух множеств $A_{(0)}, A_{(1)}$ и если для каждой конечной последовательности s , состоящей из n элементов, s' и s'' — две последовательности из $n+1$ элемента, первые n элементов которых совпадают с s , то $A_s = A_{s'} \cup A_{s''}$;

(ii) для каждой бесконечной последовательности $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$, элементы которой равны 0 или 1, диаметр множества A_{s_n} , где $s_n = (\varepsilon_i)_{1 \leq i < n}$, стремится к нулю при n стремящемся к $+\infty$ и пересечение множеств A_{s_n} не пусто.

Покажите, что при этих условиях существует непрерывное отображение троичного канторова множества K (задача 2) на E и потому, в частности, E компактно.

б) Пусть, напротив, E — произвольное компактное метрическое пространство. Покажите, что существует непрерывное отображение K на E .

[Примените метод задачи а) и определение вполне ограниченного пространства (3.16); обратите внимание на то, что из свойств (i) и (ii) не вытекает, что два множества $A_{s'}$ и $A_{s''}$ должны быть отличны от A_s для всех последовательностей s .]

с) Если вдобавок E вполне несвязно и не имеет изолированных точек (задача 2 § 3.9), то E гомеоморфно K .

[Сначала докажите, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует покрытие пространства E конечным числом множеств A_i , одновременно открытых и замкнутых и имеющих диаметр $\leq \varepsilon$; для этой цели воспользуйтесь задачей 9, а) § 3.19. Затем примените метод задачи а).]

4. а) Пусть E (соответственно F) — множество четных (соответственно нечетных) целых чисел ≥ 0 . Покажите, что, ставя пару $(X \cap E, X \cap F)$ в соответствие каждому подмножеству $X \subset N$, мы определяем биективное отображение множества $\mathfrak{P}(N)$ на $\mathfrak{P}(E) \times \mathfrak{P}(F)$.

б) Выведите из а), что при всех $n > 1$ множества \mathbf{R}^n равнозначны \mathbf{R} (см., однако, задачу 6 § 5.1).

5. Пусть I — промежуток $[0, 1]$ в \mathbf{R} . Покажите, что существует непрерывное отображение f промежутка I на „квадрат“ $I \times I$ (кривая Пеано).

[Покажите сначала, что существует непрерывное отображение канторова множества K на $I \times I$ (задача 3), а затем линейно продолжите это отображение на компоненты связности дополнения множества K в I .]

6. Пусть g — отображение промежутка $[0, 1]$ в промежуток $[-1, 1]$; предположим, что $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} g(x) = 0$. Покажите, что существуют такое непрерывное убывающее отображение g_1 и такое непрерывное возрастающее отображение g_2 промежутка $[0, 1]$ в промежуток $[-1, 1]$, что $g_1(0) = g_2(0) = 0$ и $g_1(x) \leq g(x) \leq g_2(x)$ при $0 < x \leq 1$.

[Для каждого целого n рассмотрите нижнюю грань x_n множества точек x , в которых $g(x) \geq 1/n$.]

3. Логарифмы и показательная функция

(4.3.1) Для любого числа $a > 1$ существует единственное возрастающее отображение f промежутка $\mathbf{R}_+^* = [0, +\infty[$ в \mathbf{R} , удовлетворяющее условиям: $f(xy) = f(x) + f(y)$ и $f(a) = 1$. При этом f является гомеоморфизмом промежутка \mathbf{R}_+^* на \mathbf{R} .

Предварительно докажем лемму.

(4.3.1.1) Для любого $x > 0$ существует такое целое число m (положительное или отрицательное), что $a^m \leq x \leq a^{m+1}$.

Допустим сначала, что $x \geq 1$. Последовательность (a^n) является строго возрастающей. Если бы мы имели $a^n \leq x$ для всех целых $n > 0$, то $b = \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \sup_n a^n$ было бы конечным, > 1 и $\leq x$. Но в силу (4.1.2) $b = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{n+1} = a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a^n$, откуда $b = ab$, что противоречит предположению о том, что $a > 1$. Следовательно, существует такое целое n , что $x < a^n$. В качестве $m+1$ возьмем тогда наименьшее из этих целых чисел. Если же, напротив, $0 < x < 1$, то $x^{-1} > 1$, и если $a^m \leq x^{-1} \leq a^{m+1}$, то мы имеем $a^{-(m+1)} \leq x \leq a^{-(m+1)+1}$.

Обратимся теперь к (4.3.1). Предположим, что существует функция f , обладающая свойствами, перечисленными в (4.3.1). Тогда f является гомоморфизмом мультиликативной группы \mathbf{R}_+^* в аддитивную группу \mathbf{R} , и, таким образом, при любом $x > 0$ и любом целом n (положительном или отрицательном) мы должны иметь $f(1) = 0$, $f(x^n) = nf(x)$ и, в частности, $f(a^n) = n$. Кроме того, если $a^m \leq x^n \leq a^{m+1}$, то $f(a^m) \leq f(x^n) \leq f(a^{m+1})$. Иными словами, $m \leq$