

3. Пусть  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$  — конечная последовательность точек в предгильбертовом пространстве  $E$ . Определитель Грама этой последовательности есть определитель  $G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \det((x_i | x_j))$ .

a) Покажите, что  $G(x_1, \dots, x_n) \geq 0$  и  $G(x_1, \dots, x_n) = 0$  в том и только в том случае, если векторы  $x_i$  линейно зависимы.

[Рассмотрите ортонормальный базис подпространства, порожденного векторами  $x_i$ , и выразите  $x_i$  как линейные комбинации элементов этого базиса.]

b) Пусть векторы  $x_i$  линейно независимы и пусть  $V$  —  $n$ -мерное подпространство, которое они порождают. Покажите, что расстояние  $x$  от  $V$  равно  $\sqrt{G(x, x_1, \dots, x_n)/G(x_1, x_2, \dots, x_n)}$ .

[Найдите проекцию вектора  $x$  на  $V$  и запишите ее как линейную комбинацию векторов  $x_i$ .]

## Глава 7

### ПРОСТРАНСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

По своему значению в функциональном анализе пространства непрерывных функций уступают лишь гильбертовым пространствам. Введение этих пространств позволяет придать значительно более наглядный смысл классическому понятию *равномерной сходимости*. Наиболее важными результатами в этой главе являются:

1°. Теорема Стоуна — Вейерштрасса об аппроксимации (7.3.1), представляющая мощный инструмент для доказательства общих теорем о непрерывных функциях. Такого рода теоремы доказываются по следующей схеме: сначала они устанавливаются для функций какого-либо специального вида, а затем распространяются на все непрерывные функции с помощью соображений, связанных с плотностью.

2°. Теорема Асколи (7.5.7), лежащая в основании большинства доказательств компактности в функциональных пространствах и вместе с теоремой (7.5.6) мотивирующая введение понятия *равностепенной непрерывности*. Последнее понятие играет еще более существенную роль в общей теории двойственности, упоминавшейся в гл. 5.

В последнем параграфе настоящей главы в качестве полезного технического орудия в развитии анализа вводятся функции, которые с классической точки зрения описываются как „функции с точками разрыва первого рода“. Стремясь сделать термин более кратким и избежать повторения избитого слова „regular“ (регулярный), автор сделал попытку ввести неологизм „regulated functions“ (соответствующий французскому „fonctions régulières“)<sup>1)</sup>, который, как он надеется, не будет звучать слишком варварски для читателей, говорящих по-английски.

#### 1. Пространства ограниченных функций

Пусть  $A$  — произвольное множество и  $F$  — действительное (соответственно комплексное) нормированное пространство. Отображение  $f$  множества  $A$  в  $F$  *ограничено*, если множество  $f(A)$  ограничено в  $F$ , или, что то же самое, если верхняя грань  $\sup_{t \in A} \|f(t)\|$  конечна. Множество  $\mathcal{B}_F(A)$  всех ограниченных отображений множества  $A$

<sup>1)</sup> При переводе был выбран термин „простые“ функции. — Прим. перев. и ред.

$\mathcal{F}$  является действительным (соответственно комплексным) векторным пространством, поскольку  $\|f(t) + g(t)\| \leq \|f(t)\| + \|g(t)\|$ . Кроме того,

$$(7.1.1) \quad \|f\| = \sup_{t \in A} |f(t)|$$

есть норма в этом пространстве, что можно без труда проверить.

Если  $F$  конечномерно и  $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$  — базис пространства  $F$ , причем  $\|a_i\| = 1$ , то любое отображение множества  $A$  в  $F$  может быть одним и только одним способом записано в виде

$$(7.1.1.1) \quad t \rightarrow f(t) = f_1(t)a_1 + \dots + f_n(t)a_n,$$

и  $f$  ограничено в том и только в том случае, если скалярные отображения  $f_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) ограничены. Кроме того, норма отображения  $t \rightarrow f_i(t)a_i$  равна  $\|f_i(t)\| \cdot \|a_i\| = \|f_i\|$ , (норма отображения  $f_i$  берется в  $\mathcal{B}_R(A)$ , соответственно в  $\mathcal{B}_C(A)$ ). Из (5.9.1), (5.4.2) и (5.5.1) следует, что существует такая константа  $c$ , что для каждого  $t \in A$  выполняется неравенство  $|f_i(t)| \leq c \cdot \|f(t)\|$ , и, значит,  $\|f_i\| \leq c \cdot \|f\|$ .

Пусть  $L_i$  — подпространство пространства  $\mathcal{B}_F(A)$ , состоящее из всех ограниченных отображений вида  $t \rightarrow f(t)a_i$  ( $f$  скалярно). Тогда, если снова воспользоваться (5.4.2) и (5.5.1), предыдущие замечания докажут, что

(7.1.2) *Если  $F$  конечномерно, то  $\mathcal{B}_F(A)$  есть топологическая прямая сумма подпространств  $L_i$ , каждое из которых изометрично  $\mathcal{B}_R(A)$  (соответственно  $\mathcal{B}_C(A)$ ).*

В частности, если мы рассмотрим действительное нормированное векторное пространство, базисное для пространства  $\mathcal{B}_C(A)$ , то увидим, что оно есть топологическая прямая сумма  $\mathcal{B}_R(A) + i\mathcal{B}_R(A)$ .

(7.1.3) *Если  $F$  — банахово пространство, то и  $\mathcal{B}_F(A)$  — банахово пространство.*

Пусть  $(f_n)$  — последовательность Коши в  $\mathcal{B}_F(A)$ . Это означает, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $n_0$ , что при  $m \geq n_0$  и  $n \geq n_0$  выполняется неравенство  $\|f_m - f_n\| \leq \varepsilon$ . Из (7.1.1) следует, что для любого  $t \in A$  при  $m \geq n_0$  и  $n \geq n_0$  имеем  $\|f_m(t) - f_n(t)\| \leq \varepsilon$ , поэтому, так как  $F$  — полное пространство, последовательность  $(f_n(t))$  сходится к некоторому элементу  $g(t) \in F$ . Далее, по принципу продолжения неравенств для любого  $t \in A$  и всех  $m \geq n_0$ , мы имеем  $\|f_m(t) - g(t)\| \leq \varepsilon$ . Отсюда прежде всего заключаем, что при всех  $t \in A$  имеет место неравенство  $\|g(t)\| \leq \|f_m\| + \varepsilon$  и, значит, отображение  $g$  ограничено. Кроме того, при всех  $m \geq n_0$  имеем  $\|f_m - g\| \leq \varepsilon$ ,

а это значит, что последовательность  $(f_n)$  сходится в пространстве  $\mathcal{B}_F(A)$  к  $g$ .

Вообще если  $(f_n)$  — последовательность отображений множества  $A$  в метрическое пространство  $F$ , то говорят, что последовательность  $(f_n)$  просто сходится в  $A$  к отображению  $g$  множества  $A$  в  $F$ , если для каждого  $t \in A$  последовательность  $(f_n(t))$  сходится в  $F$  к  $g(t)$ . Говорят, что последовательность  $(f_n)$  равномерно сходится в  $A$  к  $g$ , если последовательность чисел  $(\sup_{t \in A} d(f_n(t), g(t)))$  стремится к 0. Ясно, что из равномерной сходимости следует простая сходимость; обратное не верно.

Если  $F$  — нормированное пространство, то сходимость последовательности элементов пространства  $\mathcal{B}_F(A)$ , таким образом, по определению, означает равномерную сходимость этой последовательности в  $A$ . Точно так же говорят, что ряд  $(u_n)$ , сходящийся в  $\mathcal{B}_F(A)$  к сумме  $s$ , равномерно сходится в  $A$  к сумме  $s$ .

Если  $F$  — банахово пространство, то из (7.1.3) следует: для того чтобы ряд  $(u_n)$  отображений, принадлежащих  $\mathcal{B}_F(A)$ , был равномерно сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы для любого  $\varepsilon > 0$  существовал такой номер  $n_0$ , что при  $n \geq n_0$ ,  $p \geq 0$  и при любом  $t \in A$  выполнялось неравенство

$$\|u_n(t) + u_{n+1}(t) + \dots + u_{n+p}(t)\| \leq \varepsilon.$$

Из (7.1.3) и (5.3.2) следует, что если  $F$  — банахово пространство и если ряд  $(u_n)$  ограниченных функций обладает тем свойством, что ряд  $(\|u_n\|)$  в  $\mathbb{R}$  сходится, то ряд  $(u_n)$  сходится равномерно. Кроме того, так как  $\|u_n(t)\| \leq \|u_n\|$ , в этом случае ряд  $(u_n(t))$  при каждом  $t \in A$  сходится абсолютно. Однако обратное неверно: из этих двух последних свойств не следует, что ряд  $(\|u_n\|)$  сходится. Чтобы избежать недоразумений, мы будем поэтому в случае, когда сходится ряд  $(\|u_n\|)$ , говорить, что ряд  $(u_n)$  в  $\mathcal{B}_F(A)$  сходится нормально. Подобным же образом определяем нормально суммируемое семейство  $(u_\lambda)_{\lambda \in L}$  в  $\mathcal{B}_F(A)$  [ $L$  счетно, ср. (5.3)].

### Задачи

1. Пусть  $u_n$  — функция, принадлежащая пространству  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ , равная  $1/n$  при  $n \leq t < n+1$  и 0 при всех остальных значениях  $t$ . Покажите, что ряд  $(u_n)$  сходится равномерно и коммутативно (задача 4 § 5.3) и что при каждом  $t \in \mathbb{R}$  ряд  $(u_n(t))$  сходится абсолютно, но что вместе с тем ряд  $(u_n)$  не сходится нормально.

2. Пусть  $A$  — произвольное множество. Покажите, что отображение  $u \rightarrow \sup_{t \in A} u(t)$  пространства  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}(A)$  в  $\mathbb{R}$  непрерывно.

3. Пусть  $E$  — метрическое пространство и  $F$  — нормированное пространство. Покажите, что множество всех отображений  $f \in \mathcal{B}_F(E)$ , колебание которых (3.14) в каждой точке пространства  $E$  не превосходит данного числа  $\alpha > 0$ , замкнуто в пространстве  $\mathcal{B}_F(E)$ .

## 2. Пространства ограниченных непрерывных функций

Пусть теперь  $E$  — метрическое пространство. Обозначим через  $\mathcal{C}_F(E)$  векторное пространство *всех непрерывных отображений пространства E в нормированное пространство F*, а через  $\mathcal{C}_F^\infty(E)$  — множество *всех ограниченных непрерывных отображений E в F*. Заметим, что если  $E$  компактно, то в силу (3.17.10)  $\mathcal{C}_F^\infty(E) = \mathcal{C}_F(E)$ , вообще же  $\mathcal{C}_F^\infty(E) = \mathcal{C}_F(E) \cap \mathcal{B}_F(E)$ . Если не сказано противное, мы будем рассматривать  $\mathcal{C}_F^\infty(E)$  как нормированное подпространство пространства  $\mathcal{B}_F(E)$ .

Если  $F$  конечномерно, то  $f$  непрерывно в том и только в том случае, если непрерывно каждое из  $f_i$  в разложении (7.1.2.1) [см. (3.20.4) и (5.4.2)]. Замечания, предшествующие (7.1.2), показывают, что в этом случае  $\mathcal{C}_F^\infty(E)$  есть топологическая прямая сумма конечного числа подпространств, каждое из которых изометрично  $\mathcal{C}_R^\infty(E)$  (соответственно  $\mathcal{C}_C^\infty(E)$ ). В частности, базисное действительное нормированное пространство для пространства  $\mathcal{C}_C^\infty(E)$  есть топологическая прямая сумма  $\mathcal{C}_R^\infty(E) + i\mathcal{C}_R^\infty(E)$ .

**(7.2.1)** Подпространство  $\mathcal{C}_F^\infty(E)$  замкнуто в  $\mathcal{B}_F(E)$ ; иначе говоря, предел равномерно сходящейся последовательности ограниченных непрерывных функций есть непрерывная функция.

Действительно, пусть  $(f_n)$  — последовательность ограниченных непрерывных отображений пространства  $E$  в  $F$ , сходящаяся в  $\mathcal{B}_F(E)$  к  $g$ . Тогда для любого  $\epsilon > 0$  существует такой номер  $n_0$ , что при  $n \geq n_0$  имеет место неравенство  $\|f_n - g\| \leq \epsilon/3$ . Пусть  $t_0$  — произвольная точка пространства  $E$  и  $V$  — такая окрестность точки  $t_0$ , что  $\|f_{n_0}(t) - f_{n_0}(t_0)\| \leq \epsilon/3$  для любой точки  $t \in V$ . Тогда, поскольку для всех  $t \in E$  имеем  $\|f_{n_0}(t) - g(t)\| \leq \epsilon/3$ , для любой точки  $t \in E$  выполняется неравенство  $\|g(t) - g(t_0)\| \leq \epsilon$ , что и доказывает непрерывность отображения  $g$ .

Хорошо известные примеры (например,  $x \rightarrow x^n$  в  $[0, 1]$ ) показывают, что предел просто сходящейся последовательности непрерывных функций может не быть непрерывной функцией. С другой стороны, легко привести примеры последовательностей непре-

рывных функций, неравномерно сходящихся к непрерывной функции (см. задачу 2). Однако [см. также (7.5.6)]:

**(7.2.2) (Теорема Дини)** Пусть  $E$  — компактное метрическое пространство. Если возрастающая (соответственно убывающая) последовательность  $(f_n)$  действительных непрерывных функций просто сходится к непрерывной функции  $g$ , то она сходится к  $g$  равномерно.

Предположим, что последовательность возрастающая. Для каждого  $\epsilon > 0$  и каждой точки  $t \in E$  существует такой номер  $n(t)$ , что при  $m \geq n(t)$  выполняется неравенство  $|g(t) - f_m(t)| \leq \epsilon/3$ . Так как  $g$  и  $f_{n(t)}$  непрерывны, у точки  $t$  существует такая окрестность  $V(t)$ , что из  $t' \in V(t)$  следует  $|g(t) - g(t')| \leq \epsilon/3$  и  $|f_{n(t)}(t) - f_{n(t)}(t')| \leq \epsilon/3$ . Таким образом, для любой точки  $t' \in V(t)$  мы имеем  $|g(t') - f_{n(t)}(t')| \leq \epsilon$ . Выберем теперь конечное число точек  $t_i \in E$  так, чтобы окрестности  $V(t_i)$  покрывали  $E$ , и пусть  $n_0$  — наибольший из номеров  $n(t_i)$ . Тогда любая точка  $t \in E$  принадлежит по крайней мере одной из окрестностей  $V(t_i)$ , поэтому при  $n \geq n_0$  имеют место неравенства  $|g(t) - f_n(t)| \leq |g(t) - f_{n_0}(t)| + |f_{n_0}(t) - f_n(t)| \leq \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon$ , ч. т. д.

### Задачи

1. Пусть  $E$  — метрическое пространство,  $F$  — нормированное пространство и  $(u_n)$  — последовательность ограниченных непрерывных отображений пространства  $E$  в  $F$ , просто сходящаяся в  $E$  к ограниченному отображению  $v$ .

а) Для того чтобы отображение  $v$  было непрерывно в точке  $x_0 \in E$ , необходимо и достаточно, чтобы для любого  $\epsilon > 0$  и любого целого  $m$  существовали такая окрестность  $V$  точки  $x_0$  и такой номер  $n > m$ , что  $\|v(x) - u_n(x)\| \leq \epsilon$  в каждой точке  $x \in V$ .

б) Пусть  $E$ , кроме того, компактно. Тогда, для того чтобы отображение  $v$  было непрерывно в  $E$ , необходимо и достаточно, чтобы для любого  $\epsilon > 0$  и любого целого  $m$  существовало конечное число таких номеров  $n_l > m$ , что для каждой точки  $x \in E$  нашелся бы по крайней мере один индекс  $i$ , для которого  $\|v(x) - u_{n_i}\| \leq \epsilon$ .

[Примените а) и аксиому Бореля — Лебега.]

2. Пусть  $g_n$  (где  $n$  — любое целое число  $> 0$ ) — непрерывная функция в  $\mathbb{R}$ , определяемая следующими условиями:  $g_n(t) = 0$  при  $t \leq 0$  и при  $t \geq 2/n$ ,  $g_n(1/n) = 1$ , а в каждом из промежутков  $[0, 1/n]$  и  $[1/n, 2/n]$  функция  $g_n(t)$  имеет вид  $\alpha t + \beta$  (где  $\alpha$  и  $\beta$  — надлежащим образом выбранные константы). Последовательность  $(g_n)$  сходится в  $\mathbb{R}$  к 0 просто, но сходимость не является равномерной ни в одном открытом промежутке, содержащем точку  $t = 0$ .

Пусть  $m \rightarrow r_m$  — биективное отображение множества  $N$  на множество  $Q$  рациональных чисел и пусть  $f_n(t) = \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m} g_n(t - r_m)$ . Функции  $f_n$  непрерывны (7.2.1), и последовательность  $(f_n)$  просто сходится в  $R$  к 0, но сходимость не является равномерной ни в каком открытом промежутке в  $R$ . Докажите эти утверждения.

3. Пусть  $I$  — компактный промежуток в  $R$  и  $(f_n)$  — последовательность монотонных действительных функций в  $I$ , просто сходящаяся в  $I$  к непрерывной действительной функции  $f$ . Покажите, что функция  $f$  монотонна и что последовательность  $(f_n)$  сходится в  $I$  к  $f$  равномерно.

4. Пусть  $E$  — метрическое пространство,  $F$  — банахово пространство,  $A$  — множество, плотное в  $E$ . Пусть  $(f_n)$  — последовательность ограниченных непрерывных отображений пространства  $E$  в  $F$ , для которых сужения отображений  $f_n$  на  $A$  образуют равномерно сходящуюся последовательность. Покажите, что последовательность  $(f_n)$  равномерно сходится в  $E$ .

5. Пусть  $E$  — метрическое пространство и  $F$  — нормированное пространство. Покажите, что отображение  $(x, u) \rightarrow u(x)$  пространства  $E \times \mathcal{C}_F^\infty(E)$  в  $F$  непрерывно.

6. Пусть  $E, E'$  — метрические пространства и  $F$  — нормированное пространство. Для каждого отображения  $f$  пространства  $E \times E'$  в  $F$  и каждой точки  $y \in E'$  обозначим через  $f_y$  отображение  $x \rightarrow f(x, y)$  пространства  $E$  в  $F$ .

a) Покажите, что если  $f$  ограничено и каждое из  $f_y$  непрерывно в  $E$  и если отображение  $y \rightarrow f_y$  пространства  $E'$  в  $\mathcal{C}_F^\infty(E)$  непрерывно, то  $f$  непрерывно. Докажите обратное, дополнительно предполагая, что  $E$  компактно.

[Примените задачу 3, а) § 3.20.]

b) Пусть  $E = E' = F = R$ , а в качестве  $f(x, y)$  возьмем функцию  $\sin xy$ , которая непрерывна и ограничена в  $E \times E'$ . Покажите, что отображение  $y \rightarrow f_y$  пространства  $E'$  в  $\mathcal{C}_F^\infty(E)$  не является непрерывным ни в одной точке пространства  $E'$ .

c) Предположим, что оба пространства  $E$  и  $E'$  компактны, и для каждого отображения  $f \in \mathcal{C}_F(E \times E')$  обозначим символом  $\tilde{f}$  отображение  $y \rightarrow f_y$  пространства  $E'$  в  $\mathcal{C}_F(E)$ . Покажите, что отображение  $f \rightarrow \tilde{f}$  есть линейная изометрия пространства  $\mathcal{C}_F(E \times E')$  на пространство  $\mathcal{C}_{\mathcal{C}_F}(E')$ .

7. Пусть  $E$  — метрическое, а  $F$  — нормированное пространство. Для каждого ограниченного непрерывного отображения  $f$  пространства  $E$  в  $F$  обозначим через  $G(f)$  график отображения  $f$  в пространстве  $E \times F$ .

a) Покажите, что  $f \rightarrow G(f)$  — равномерно непрерывное инъективное отображение нормированного пространства  $\mathcal{C}_F^\infty(E)$  в пространство  $\mathfrak{X}(E \times F)$  замкнутых множеств произведения  $E \times F$ , рассматриваемое в качестве метрического пространства с хаусдорфовым расстоянием (см. задачу 3 § 3.16).

b) Пусть  $\Gamma$  — образ пространства  $\mathcal{C}_F^\infty(E)$  при отображении  $f \rightarrow G(f)$ . Покажите, что если  $E$  компактно, то обратное отображение  $G^{-1}$  множества  $\Gamma$  на  $\mathcal{C}_F^\infty(E)$  непрерывно.

[Проведите доказательство от противного.]

с) Покажите, что в случае, когда  $E = [0, 1]$  и  $F = \mathbb{R}$ , отображение  $G^{-1}$  не равномерно непрерывно.

8. Пусть  $E$  — метрическое пространство с ограниченным расстоянием  $d$ . Пусть  $d_x$  для каждой точки  $x \in E$  — ограниченное непрерывное отображение  $y \rightarrow d(x, y)$  пространства  $E$  в  $\mathbb{R}$ . Покажите, что  $x \rightarrow d_x$  есть изометрия пространства  $E$  на подпространство банахова пространства  $\mathcal{C}_R^\infty(E)$ .

### 3. Теорема Стоуна — Вейерштрасса об аппроксимации

Для любого метрического пространства  $E$  векторное пространство  $\mathcal{C}_R^\infty(E)$  (соответственно  $\mathcal{C}_C^\infty(E)$ ) является алгеброй над полем действительных (соответственно комплексных) чисел. Из (7.1.1) следует, что в этой алгебре мы имеем  $\|fg\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$ , поэтому в силу (5.5.1) билинейное отображение  $(f, g) \rightarrow fg$  непрерывно. Из этого замечания легко следует, что для любой подалгебры  $A$  алгебры  $\mathcal{C}_R^\infty(E)$  (соответственно  $\mathcal{C}_C^\infty(E)$ ) замыкание  $\bar{A}$  множества  $A$  в  $\mathcal{C}_R^\infty(E)$  (соответственно в  $\mathcal{C}_C^\infty(E)$ ) также есть подалгебра [см. доказательство теоремы (5.4.1)].

Мы будем говорить, что подмножество  $A$  пространства  $\mathcal{C}_R(E)$  (соответственно  $\mathcal{C}_C(E)$ ) отделяет точки пространства  $E$ , если для любой пары различных точек  $x$  и  $y$  пространства  $E$  существует такая функция  $f \in A$ , что  $f(x) \neq f(y)$ .

**(7.3.1) (Теорема Стоуна — Вейерштрасса)** Пусть  $E$  — компактное метрическое пространство. Если подалгебра  $A \subset \mathcal{C}_R(E)$  содержит постоянные функции и отделяет точки пространства  $E$ , то множество  $A$  плотно в банаховом пространстве  $\mathcal{C}_R(E)$ .

Иными словами, если  $S$  — подмножество пространства  $\mathcal{C}_R(E)$ , отделяющее точки, то для любой непрерывной в  $E$  действительной функции  $f$  существует такая последовательность  $(g_n)$  функций, равномерно сходящаяся к  $f$ , что каждая функция  $g_n$  может быть представлена как многочлен относительно функций, принадлежащих  $S$ , с действительными коэффициентами.

Доказательство распадается на несколько шагов.

**(7.3.1.1)** Существует возрастающая последовательность действительных полиномов  $(u_n)$ , равномерно сходящаяся в промежутке  $[0, 1]$  к  $\sqrt{t}$ .

Определим  $u_n$  по индукции, взяв  $u_1 = 0$  и положив

$$(7.3.1.2) \quad u_{n+1}(t) = u_n(t) + \frac{1}{2}(t - u_n^2(t)) \quad \text{при } n \geq 1.$$

По индукции докажем, что  $u_{n+1} \geq u_n$  и  $u_n(t) \leq \sqrt{t}$  в  $[0, 1]$ . Из (7.3.1.2) видим, что первое утверждение следует из второго. С дру-

гой стороны,

$$\begin{aligned}\sqrt{t} - u_{n+1}(t) &= \sqrt{t} - u_n(t) - \frac{1}{2}(t - u_n^2(t)) = \\ &= (\sqrt{t} - u_n(t))\left(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{t} + u_n(t))\right),\end{aligned}$$

и из  $u_n(t) \leq \sqrt{t}$  следует, что  $\frac{1}{2}(\sqrt{t} + u_n(t)) \leq \sqrt{t} \leq 1$ . Таким образом, в каждой точке  $t \in [0, 1]$  последовательность  $(u_n(t))$  возрастает и ограничена и, следовательно, сходится к некоторому пределу  $v(t)$  (4.2.1). Но формула (7.3.1.2) дает  $t - v^2(t) = 0$ , и так как  $v(t) \geq 0$ , то  $v(t) = \sqrt{t}$ . Поскольку функция  $v$  непрерывна и последовательность  $(u_n)$  возрастает, из теоремы Дини (7.2.2) следует, что эта последовательность равномерно сходится к  $v$ .

(7.3.1.3) Для любой функции  $f \in A$  функция  $|f|$  принадлежит замыканию  $\bar{A}$  множества  $A$  в  $\mathcal{E}_R(E)$ .

Пусть  $a = \|f\|$ . В силу (7.3.1.1) последовательность функций  $u_n(f^2/a^2)$ , принадлежащих  $A$  (по определению алгебры), равномерно сходится в  $E$  к  $\sqrt{f^2/a^2} = |f|/a$ .

(7.3.1.4) Для любой пары функций  $f, g$ , принадлежащих  $\bar{A}$ , функции  $\sup(f, g)$  и  $\inf(f, g)$  принадлежат  $\bar{A}$ .

В самом деле, мы можем написать  $\sup(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$  и  $\inf(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$ ; таким образом, требуемый результат следует из утверждения (7.3.1.3), примененного к алгебре  $\bar{A}$ .

(7.3.1.5) Для любой пары различных точек  $x, y$  пространства  $E$  и любой пары действительных чисел  $\alpha, \beta$  существует такая функция  $f \in \bar{A}$ , что  $f(x) = \alpha$  и  $f(y) = \beta$ .

По предположению существует функция  $g \in A$ , для которой  $g(x) \neq g(y)$ . Так как  $A$  содержит постоянные функции, то мы можем взять  $f = \alpha + (\beta - \alpha)(g - \gamma)/(\delta - \gamma)$ , где  $\gamma = g(x)$  и  $\delta = g(y)$ .

(7.3.1.6) Для любой функции  $f \in \mathcal{E}_R(E)$ , любой точки  $x \in E$  и любого  $\epsilon > 0$  существует такая функция  $g \in \bar{A}$ , что  $g(x) = f(x)$  и что для любой точки  $y \in E$  имеет место неравенство  $g(y) \leq f(y) + \epsilon$ .

Пусть  $h_z$  для любой точки  $z \in E$  есть функция, принадлежащая  $\bar{A}$  и такая, что  $h_z(x) = f(x)$  и  $h_z(z) \leq f(z) + \epsilon/2$ ; существование такой функции при  $z = x$  очевидно, а при  $z \neq x$  следует из (7.3.1.5).

Ввиду непрерывности функций  $f$  и  $h_z$  существует такая окрестность  $V(z)$  точки  $z$ , что при  $y \in V(z)$  выполняется неравенство  $h_z(y) \leq f(y) + \varepsilon$ . Покроем  $E$  конечным числом окрестностей  $V(z_i)$ . Тогда в силу (7.3.1.4) функция  $g = \inf(h_{z_i})$  принадлежит  $\bar{A}$  и, поскольку каждая точка  $y \in E$  принадлежит некоторой окрестности  $V(z_i)$ , удовлетворяет требуемым условиям.

$$(7.3.1.7) \quad \bar{A} = \mathcal{E}_R(E).$$

Пусть  $f$  — произвольная функция из  $\mathcal{E}_R(E)$ . Для любого  $\varepsilon > 0$  и для каждой точки  $x \in E$  выберем функцию  $g_x \in \bar{A}$  так, чтобы  $g_x(x) = f(x)$  и чтобы для всех точек  $y \in E$  имело место неравенство  $g_x(y) \leq f(y) + \varepsilon$  (7.3.1.6). Тогда ввиду непрерывности функций  $f$  и  $g$  найдется такая окрестность  $U(x)$  точки  $x$ , что для всех точек  $y \in U(x)$  будет выполняться неравенство  $g_x(y) \geq f(y) - \varepsilon$ . Покроем  $E$  конечным числом окрестностей  $U(x_i)$ . Тогда в силу (7.3.1.4) функция  $\varphi = \sup(g_{x_i})$  принадлежит  $\bar{A}$  и (поскольку каждая точка  $y \in E$  принадлежит некоторой окрестности  $U(x_i)$ ) для всех  $y \in E$  будут выполняться неравенства  $f(y) - \varepsilon \leq \varphi(y) \leq f(y) + \varepsilon$ ; иными словами,  $\|f - \varphi\| \leq \varepsilon$ . А это показывает, что  $f$  принадлежит замыканию множества  $\bar{A}$ , т. е. самому множеству  $\bar{A}$ .

Соответствующая теорема для  $\mathcal{E}_C(E)$  не верна (см. гл. 9); имеется только более слабый результат:

**(7.3.2)** *Пусть  $E$  — компактное метрическое пространство. Если подалгебра  $A$  алгебры  $\mathcal{E}_C(E)$  содержит постоянные функции, отделяет точки пространства  $E$  и обладает тем свойством, что для всякой функции  $f \in A$  сопряженная функция  $\bar{f}$  также принадлежит  $A$ , то множество  $A$  плотно в  $\mathcal{E}_C(E)$ .*

Заметим, что для любой функции  $f \in A$  функции  $\Re f = \frac{1}{2}(f + \bar{f})$  и  $\Im f = (f - \bar{f})/2i$  также принадлежат  $A$ . Поэтому если  $A_0$  — (действительная) подалгебра  $A$ , состоящая из действительных функций, то из определения сразу следует, что  $A_0$  отделяет точки пространства  $E$  и содержит (действительные) постоянные функции. Следовательно,  $A_0$  плотно в  $\mathcal{E}_R(E)$  и отсюда, поскольку  $A = A_0 + iA_0$ , сразу следует, что  $A$  плотно в  $\mathcal{E}_C(E) = \mathcal{E}_R(E) + i\mathcal{E}_R(E)$ .

#### 4. Приложения

В теореме Стоуна — Вейерштрасса возьмем в качестве  $E$  любое компактное множество в пространстве  $R^n$ , а в качестве  $A$  — алгебру сужений на  $E$  многочленов от  $n$  координат. Так как у любых

двух различных точек множества  $E$  по крайней мере одна из координат имеет различные значения, условие об отделении точек  $E$  выполняется. Таким образом, мы получаем классическую теорему Вейерштрасса о приближении:

**(7.4.1)** Любая действительная непрерывная функция на компактном множестве  $E$  в пространстве  $\mathbb{R}^n$  является пределом равномерно сходящейся на  $E$  последовательности многочленов.

Возьмем теперь в качестве  $E$  единичную окружность  $x^2 + y^2 = 1$  в  $\mathbb{R}^2$ , параметризованную углом  $\pi t$ , так что непрерывные на  $E$  функции могут быть отождествлены с функциями, непрерывными в пространстве  $\mathbb{R}$  и имеющими период 2 (см. гл. 9). В качестве  $A$  возьмем (комплексную) алгебру, порожденную константами и функциями  $e^{\pi it}$  и  $e^{-\pi it}$ . Ясно, что элементы  $A$  — тригонометрические многочлены  $\sum_{n=-N}^N c_n e^{\pi n it}$ . Так как функция  $e^{\pi it}$  отделяет точки пространства  $E$ , то все условия теоремы (7.3.2) выполнены. Таким образом:

**(7.4.2)** Любая комплексная непрерывная функция в  $\mathbb{R}$ , периодическая с периодом 2, является пределом равномерно сходящейся в  $\mathbb{R}$  последовательности тригонометрических многочленов.

Этот последний результат позволяет нам дать доказательство следующего факта, уже упоминавшегося в 6.5:

**(7.4.3)** Тригонометрическая система тотальна в предгильбертовом пространстве  $F = \mathcal{E}_C(I)$ .

[Это пространство определено в (6.5.1); заметим, что здесь мы не вводим в  $\mathcal{E}_C(I)$  норму (7.1.1).]

В самом деле, для любой функции  $f \in \mathcal{E}_C(I)$  и любого целого числа  $n > 0$  рассмотрим функцию  $g$ , равную  $f$  при  $-1 + 1/n \leq t \leq 1$ , равную  $f(1)$  при  $t = -1$  и линейную между  $-1$  и  $-1 + 1/n$ . Тогда  $f(t) - g(t) = 0$ , если  $t \geq -1 + 1/n$ , и  $|f(t) - g(t)| \leq 4 \|f\|_\infty$  при всех остальных значениях  $t$  [символом  $\|\cdot\|_\infty$  обозначена норма, определенная формулой (7.1.1), а символом  $\|\cdot\|_2$  — предгильбертова норма]. Следовательно,

$$\|f - g\|_2^2 = \int_{-1}^1 |f(t) - g(t)|^2 dt \leq \frac{16}{n} \|f\|_\infty^2;$$

иными словами, норма  $\|f - g\|_2$  сколь угодно мала. Так как функция  $g$  непрерывна и (поскольку  $g(1) = g(-1)$ ) может быть продолжена периодически на всю ось  $t$ , то в силу (7.4.2) существует такой тригонометрический многочлен  $h$ , что норма  $\|g - h\|_2 \leq \sqrt{2} \|g - h\|_\infty$  сколь угодно мала, и это завершает доказательство.

(7.4.4) Если  $E$  — компактное метрическое пространство, то пространства  $\mathcal{C}_R(E)$  и  $\mathcal{C}_c(E)$  сепарабельны.

Так как  $\mathcal{C}_c(E)$  есть топологическая прямая сумма пространств  $\mathcal{C}_R(E)$  и  $i\mathcal{C}_R(E)$ , то нам нужно провести доказательство только для  $\mathcal{C}_R(E)$ . Пусть  $(U_n)$  — счетная база открытых множеств пространства  $E$  (3.16.2) и пусть  $g_n(t) = d(t, E \setminus U_n)$ . Одночлены  $g_1^{a_1} \dots g_n^{a_n}$  относительно  $g_n$  также образуют счетное множество  $(h_n)$  [ввиду (1.9.3) и (1.9.4)], а векторное пространство  $A$ , порожденное функциями  $h_n$ , есть подалгебра алгебры  $\mathcal{C}_R(E)$ , порожденная элементами  $g_n$ . Если мы докажем, что  $A$  плотно в  $\mathcal{C}_R(E)$ , то доказательство будет закончено (5.10.1).

Итак, нам нужно только применить теорему Стоуна — Вейерштрасса и, значит, убедиться в том, что семейство  $(g_n)$  отделяет точки пространства  $E$ . Но если  $x \neq y$ , то существует такая окрестность  $U_n$ , что  $x \in U_n$  и  $y \notin U_n$ . Поэтому по определению  $g_n(x) \neq 0$  и  $g_n(y) = 0$ , ч. т. д.

### Задачи

1. Пусть  $E$  и  $F$  — два компактных метрических пространства и  $f$  — непрерывное отображение произведения  $E \times F$  в  $\mathbb{R}$ . Покажите, что для любого  $\epsilon > 0$  существуют такая конечная система  $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$  непрерывных отображений пространства  $E$  в  $\mathbb{R}$  и такая конечная система  $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$  непрерывных отображений пространства  $F$  в  $\mathbb{R}$ , что для любой точки

$$(x, y) \in E \times F \text{ выполняется неравенство } \left| f(x, y) - \sum_{i=1}^n u_i(x) v_i(y) \right| \leq \epsilon.$$

[Примените теорему Стоуна — Вейерштрасса к алгебре, порожденной непрерывными отображениями  $(x, y) \mapsto u(x)$  и  $(x, y) \mapsto v(y)$ , где  $u \in \mathcal{C}_R(E)$  и  $v \in \mathcal{C}_R(F)$ .]

2. Пусть  $n \rightarrow r_n$  — биективное отображение множества  $\mathbb{N}$  на множество рациональных чисел, принадлежащих промежутку  $[0, 1] = I$ . По индукции определим последовательность  $(I_n)$  замкнутых промежутков, содержащихся в  $I$  и удовлетворяющих следующим условиям: 1°) центром промежутка  $I_n$  является число  $r_{k_n}$ , где  $k_n$  — наименьший индекс  $p$ , для которого число  $r_p$  не содержится в объединении промежутков  $I_h$  с индексами  $h < n$ ; 2°) длина промежутка  $I_n \leq 1/4^n$  и  $I_n$  не пересекается ни с одним из промежутков  $I_h$  с  $h < n$ . В произведении  $I \times \mathbb{R}$  определим действительную непрерывную ограниченную функцию  $u$ , обладающую следующими свойствами: 1°) для каждого целого числа  $n \geq 0$  отображение  $x \mapsto u(x, n)$  принимает значение 1 при  $x = r_{k_n}$ , равно 0 при  $x \notin I_n$  и  $0 \leq u(x, n) \leq 1$  во всех точках  $x \in I$ ; 2°) для каждой точки  $x \in I$  функция  $y \mapsto u(x, y)$  в каждом из промежутков  $]-\infty, 0]$  и  $[n, n+1]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , имеет вид  $ay + \beta$ . Покажите, что не существует конечной системы функций  $v_i \in \mathcal{C}_R(I)$ ,  $w_i \in \mathcal{C}_R(\mathbb{R})$  ( $1 \leq i \leq n$ ), для которых в  $I \times \mathbb{R}$

$$\left| u(x, y) - \sum_{i=1}^n v_i(x) w_i(y) \right| \leq 1/4.$$

[Допустим противное; рассмотрим функции  $u_n : x \rightarrow u(x, n)$ , принадлежащие  $\mathcal{C}_R(I)$ , и заметим, что  $\|u_n\| = 1$ ,  $\|u_n - u_m\| = 1$  при  $m \neq n$ . Если бы существовало конечномерное подпространство  $E$  пространства  $\mathcal{C}_R(I)$ , для которого при каждом  $n$  имело место неравенство  $d(u_n, E) \leqslant 1/4$ , то в  $E$  нашлась бы такая бесконечная последовательность  $(h_n)$ , что  $\|h_n\| = 2$  и  $\|h_n - h_m\| \geqslant 1/2$  при  $m \neq n$ , что противоречит (5.10.1).]

3. Пусть  $E$  — промежуток  $[0, 1]$  в  $R$ .

а) Покажите, что если  $a_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) —  $n$  различных точек промежутка  $E$ , то функции  $x \rightarrow |x - a_k|$  линейно независимы в  $\mathcal{C}_R(E)$ .

б) Выведите из а), что функция  $(x, y) \rightarrow |x - y|$  в  $E \times E$  не может быть представлена в виде конечной суммы  $\sum_{i=1}^n v_i(x) w_i(y)$ , где  $v_i$  и  $w_i$  непрерывны в  $E$ .

4. Покажите, что банахово пространство  $\mathcal{C}_R^\infty(R)$  не сепарабельно.

[Примените метод, аналогичный тому, которым пользовались в задаче § 5.10.]

## 5. Равностепенно непрерывные множества

Пусть  $H$  — множество в пространстве  $\mathcal{B}_F(E)$  ( $E$  — метрическое пространство,  $F$  — нормированное пространство). Мы говорим, что  $H$  равностепенно непрерывно в точке  $x_0 \in E$ , если для любого  $\epsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что из  $d(x_0, x) \leq \delta$  следует  $\|f(x) - f(x_0)\| \leq \epsilon$  для каждой функции  $f \in H$  (здесь важно, что  $\delta$  не зависит от  $f$ ). Далее,  $H$  равностепенно непрерывно, если оно равностепенно непрерывно в каждой точке пространства  $E$ .

**Примеры.** (7.5.1) Допустим, что существуют такие две константы  $c$ ,  $\alpha > 0$ , что для любой функции  $f \in H$  и любой пары точек  $x$  и  $y$  пространства  $E$  выполняется неравенство  $\|f(x) - f(y)\| \leq c \cdot (d(x, y))^\alpha$ . Тогда  $H$  равностепенно непрерывно.

(7.5.2) Любое конечно множество функций, непрерывных в точке  $x_0$  (соответственно в  $E$ ), равностепенно непрерывно в  $x_0$  (соответственно равностепенно непрерывно). Более общее утверждение: любое объединение конечного числа множеств функций, равностепенно непрерывных в точке  $x_0$  (соответственно равностепенно непрерывных), равностепенно непрерывно в точке  $x_0$  (соответственно равностепенно непрерывно).

(7.5.3) Пусть  $(f_n)$  — последовательность функций, принадлежащих  $\mathcal{B}_F(E)$ , просто сходящаяся к функции  $g$  и равностепенно непрерывная в точке  $x_0$  (соответственно равностепенно непрерывная). Тогда функция  $g$  непрерывна в точке  $x_0$  (соответственно непрерывна).

В самом деле, допустим, что для любой точки  $x$ , для которой  $d(x, x_0) \leq \delta$ , и любого  $n$  выполняется неравенство  $\|f_n(x_0) - f_n(x)\| \leq \epsilon$ . Тогда по принципу продолжения неравенств для любой точки  $x$ , для которой  $d(x, x_0) \leq \delta$ , мы будем иметь  $\|g(x) - g(x_0)\| \leq \epsilon$ , ч. т. д.

(7.5.4) В пространстве  $\mathcal{C}_F^\infty(E)$  замыкание любого равнотепенно непрерывного множества равнотепено непрерывно.

Это сразу следует из (3.13.13) и из доказательства (7.5.3).

(7.5.5) Пусть  $F$  — банахово пространство,  $(f_n)$  — равнотепенно непрерывная последовательность в  $\mathcal{C}_F^\infty(E)$  и пусть последовательность  $(f_n(x))$  для любой точки  $x$  множества  $D$ , плотного в  $E$ , сходится в  $F$ . Тогда последовательность  $(f_n)$  просто сходится к (непрерывной) функции  $g$ .

Так как  $F$  — полное пространство, нужно лишь доказать, что для каждой точки  $x \in E$  последовательность  $(f_n(x))$  является в  $F$  последовательностью Коши. Для любого  $\epsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что из  $d(x, y) \leq \delta$  следует  $\|f_n(x) - f_n(y)\| \leq \epsilon/3$  при каждом  $n$ . С другой стороны, существует такая точка  $y \in D$ , что  $d(x, y) \leq \delta$ , и, по предположению, найдется такой номер  $n_0$ , что при  $m \geq n_0$  и  $n \geq n_0$  будет иметь место неравенство  $\|f_m(y) - f_n(y)\| \leq \epsilon/3$ . Отсюда следует, что при  $m \geq n_0$  и  $n \geq n_0$  мы будем иметь  $\|f_m(x) - f_n(x)\| \leq \epsilon$ , ч. т. д.

(7.5.6) Пусть  $E$  — компактное метрическое пространство,  $(f_n)$  — равнотепенно непрерывная последовательность в  $\mathcal{C}_F(E)$ . Если последовательность  $(f_n)$  сходится в  $E$  к функции  $g$  просто, то она сходится к ней в  $E$  равномерно.

Пусть задано  $\epsilon > 0$ . У каждой точки  $x \in E$  существует такая окрестность  $V(x)$ , что из  $y \in V(x)$  следует  $\|f_n(x) - f_n(y)\| \leq \epsilon/3$  при каждом  $n$ . Покроем  $E$  конечным числом окрестностей  $V(x_i)$ . Выберем номер  $n_0$  так, чтобы мы имели  $\|g(x_i) - f_n(x_i)\| \leq \epsilon/3$  при  $n \geq n_0$  и при всех индексах  $i$ . Но любая точка  $x \in E$  принадлежит какой-либо из окрестностей  $V(x_i)$ , поэтому при всех  $n$  выполняется неравенство  $\|f_n(x) - f_n(x_i)\| \leq \epsilon/3$ , и, устремляя  $n$  к  $+\infty$ , получаем  $\|g(x) - g(x_i)\| \leq \epsilon/3$ . Таким образом, для любого  $n \geq n_0$  и любой точки  $x \in E$  мы имеем  $\|g(x) - f_n(x)\| \leq \epsilon$ , ч. т. д.

(7.5.7) (Теорема Асколи) Пусть  $F$  — банахово пространство и  $E$  — компактное метрическое пространство. Для того чтобы подмножество  $H$  банахова пространства  $\mathcal{C}_F(E)$  было относительно компактно, необходимо и достаточно, чтобы  $H$  было равнотепено непрерывно и чтобы для каждой точки  $x \in E$  множество  $H(x)$  всех  $f(x)$ , для которых  $f \in H$ , было относительно компактно в  $F$ .

**Необходимость.** Если  $H$  относительно компактно, то для любого  $\epsilon > 0$  существует конечное число таких функций  $f_i \in H$ , что для каждой функции  $f \in H$  найдется индекс  $i$ , при котором  $\|f - f_i\| \leq \epsilon/3$  (3.17.5). Отсюда прежде всего следует, что для каждой точки  $x \in E$  выполняется неравенство  $\|f(x) - f_i(x)\| \leq \epsilon/3$ , и, поскольку  $F$  — полное пространство, это ввиду (3.17.5) показывает, что  $H(x)$  относительно компактно. С другой стороны, пусть  $V$  — такая окрестность точки  $x$ , что из  $y \in V$  при каждом  $i$  следует  $\|f_i(y) - f_i(x)\| \leq \epsilon/3$ . Тогда для любой функции  $f \in H$  из  $y \in V$  следует  $\|f(y) - f(x)\| \leq \epsilon$ , что доказывает равностепенную непрерывность множества  $H$ .

**Достаточность.** Так как пространство  $\mathcal{C}_F(E)$  в силу (7.1.3) и (7.2.1) является полным, нам нужно лишь доказать, что  $H$  вполне ограничено (3.17.5). Возьмем произвольное  $\epsilon > 0$ . Для каждой точки  $x \in E$  пусть  $V(x)$  — такая ее окрестность, что из  $y \in V(x)$  для всех  $f \in H$  следует  $\|f(y) - f(x)\| \leq \epsilon/4$ . Покроем  $E$  конечным числом окрестностей  $V(x_i)$  ( $1 \leq i \leq m$ ). Каждое из множеств  $H(x_i)$ , по предположению, относительно компактно в  $F$ , поэтому относительно компактным будет и их объединение  $K$ . Пусть  $(c_j)_{1 \leq j \leq n}$  — такое конечное подмножество множества  $K$ , что каждая точка из  $K$  содержится в шаре с центром в одной из точек  $c_j$  и радиусом  $\epsilon/4$ . Пусть теперь  $\Phi$  — (конечное) множество всех отображений промежутка  $[1, m]$  в  $[1, n]$  (промежутки в  $\mathbb{N}$ ). Для каждого отображения  $\varphi \in \Phi$  обозначим через  $L_\varphi$  множество всех функций  $f \in H$ , для которых при всех  $i \in [1, m]$  выполняется неравенство  $\|f(x_i) - c_{\varphi(i)}\| \leq \epsilon/4$ . Некоторые из множеств  $L_\varphi$  могут оказаться пустыми, но из определения точек  $c_j$  следует, что объединение всех  $L_\varphi$  покрывает  $H$ . Чтобы завершить доказательство, нам нужно только показать, что диаметр каждого из множеств  $L_\varphi$  не превосходит  $\epsilon$ . Пусть функции  $f$  и  $g$  принадлежат  $L_\varphi$ . Для каждой точки  $y \in E$  найдется такой номер  $i$ , что  $y \in V(x_i)$ , и, следовательно,  $\|f(y) - f(x_i)\| \leq \epsilon/4$  и  $\|g(y) - g(x_i)\| \leq \epsilon/4$ . Так как по определению множества  $L_\varphi$  можем написать  $\|f(x_i) - g(x_i)\| \leq \epsilon/2$ , то для каждой точки  $y \in E$  имеем  $\|f(y) - g(y)\| \leq \epsilon$ , т. е.  $\|f - g\| \leq \epsilon$ , ч. т. д.

### Задачи

- Пусть  $E$  — метрическое пространство,  $F$  — нормированное пространство и  $H$  — ограниченное множество в  $\mathcal{C}_F^\infty(E)$ . Для каждой точки  $x \in E$  пусть  $\tilde{x}$  есть отображение  $u \rightarrow u(x)$  множества  $H$  в  $F$ , являющееся непрерывным и ограниченным. Покажите, что, для того чтобы  $H$  было равностепенно непрерывно в точке  $x_0$ , необходимо и достаточно, чтобы отображение  $x \rightarrow \tilde{x}$  пространства  $E$  в  $\mathcal{C}_F^\infty(H)$  было непрерывно в точке  $x_0$ .

2. Пусть  $E$  — метрическое пространство,  $F$  — нормированное пространство и  $(f_n)$  — равностепенно непрерывная последовательность в  $\mathcal{C}_F^\infty(E)$ . Покажите, что множество точек  $x \in E$ , для которых  $(f_n(x))$  есть последовательность Коши в  $F$ , замкнуто в  $F$ .

3. Пусть  $E$  — промежуток  $[0, +\infty[$  в  $\mathbf{R}$  и пусть для любого  $n$

$$f_n(t) = \sin \sqrt{t+4n^2\pi^2}$$

— функция на множестве  $E$ . Покажите, что последовательность  $(f_n)$  равностепенно непрерывна в  $E$  и просто сходится в  $E$  к 0, но не относительно компактна в пространстве  $\mathcal{C}_R^\infty(E)$ .

[Покажите, что если бы она была относительно компактна, то она равномерно сходилась бы к 0.]

4. Пусть  $E$  — метрическое пространство,  $F$  — нормированное пространство и  $(f_n)$  — последовательность функций, принадлежащих  $\mathcal{C}_F^\infty(E)$ , равностепенно непрерывная в точке  $a \in E$ . Покажите, что если последовательность  $(f_n(a))$  сходится к  $b \in F$ , то для любой последовательности  $(x_n)$  в  $E$ , для которой  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , последовательность  $(f_n(x_n))$  сходится в  $F$  к  $b$ .

5. Пусть  $E$  — метрическое пространство и  $F$  — нормированное пространство. Будем говорить, что множество  $H \subset \mathcal{C}_F^\infty(E)$  *равномерно равностепенно непрерывно*, если для любого  $\epsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что из  $d(x, y) \leq \delta$  следует  $\|f(x) - f(y)\| \leq \epsilon$  для каждой функции  $f \in H$ . Любая функция  $f \in H$  равномерно непрерывна; когда  $H$  конечно, верно и обратное: конечное множество равномерно непрерывных функций равномерно равностепенно непрерывно. Покажите, что для множества  $H$ , ограниченного в  $\mathcal{C}_F^\infty(E)$ , эквивалентны следующие свойства:

а)  $H$  равномерно равностепенно непрерывно;

б) отображение  $x \rightarrow \tilde{x}$  пространства  $E$  в  $\mathcal{C}_F^\infty(H)$  (задача 1) равномерно непрерывно;

γ) отображение  $(u, x) \rightarrow u(x)$  пространства  $H \times E$  в  $F$  ( $H$  рассматривается как подпространство пространства  $\mathcal{C}_F^\infty(E)$ ) равномерно непрерывно.

6. Пусть  $E$  — метрическое пространство,  $F$  — нормированное пространство и  $H$  — равномерно равностепенно непрерывное множество в  $\mathcal{C}_F^\infty(E)$  (задача 5). Покажите, что замыкание множества  $H$  в  $\mathcal{C}_F^\infty(E)$  равномерно равностепенно непрерывно.

7. Пусть  $E$  — компактное метрическое пространство и  $F$  — нормированное пространство. Покажите, что любое равностепенно непрерывное множество в  $\mathcal{C}_F(E)$  равномерно равностепенно непрерывно.

8. Пусть  $E$  — компактное метрическое пространство и  $F$  — банахово пространство. Покажите, что если множество  $H$  в  $\mathcal{C}_F(E)$  относительно компактно, то объединение всех множеств  $H(x)$ , где  $x \in E$ , относительно компактно в  $F$ .

[Примените задачу 5 § 7.2.]

9. Покажите, что заключение теоремы Асколи (7.5.7) останется справедливым, если предположение о том, что  $H(x)$  относительно компактно в  $F$  для всех точек  $x \in E$ , заменить предположением, что  $H(x)$  относительно компактно только для всех точек  $x \in D$ , где  $D$  — множество, плотное в  $E$ .

10. Пусть  $E$  — метрическое пространство и  $H$  — равнотепенно непрерывное множество в  $\mathcal{C}_R^\infty(E)$ . Покажите, что множество  $A$  точек  $x \in E$ , для которых  $H(x)$  ограничено в  $R$ , одновременно открыто и замкнуто в  $E$ . Если  $E$  компактно и связно и если для одной точки  $x_0 \in E$  множество  $H(x_0)$  ограничено в  $R$ , то  $H$  относительно компактно в  $\mathcal{C}_R^\infty(E)$ .

11. Пусть  $E$  — метрическое пространство и  $H$  — равнотепенно непрерывное множество в  $\mathcal{C}_R^\infty(E)$ . Для каждой точки  $x \in E$  положим

$$v(x) = \sup_{f \in H} f(x), \quad w(x) = \inf_{f \in H} f(x).$$

Покажите, что если верхняя грань  $v$  (соответственно нижняя грань  $w$ ) конечна в некоторой точке  $x_0$ , то она конечна и непрерывна в некоторой окрестности точки  $x_0$ ; если  $v(x_0) = +\infty$  (соответственно  $w(x_0) = -\infty$ ), то  $v(x) = +\infty$  (соответственно  $w(x) = -\infty$ ), в некоторой окрестности точки  $x_0$ . Заключите отсюда, что множество точек  $x \in E$ , для которых  $v(x)$  (соответственно  $w(x)$ ) конечно, одновременно открыто и замкнуто в  $E$ .

## 6. Простые функции

Пусть  $I$  — промежуток в  $R$  с началом  $a$  и концом  $b$  ( $a$  или  $b$  или и  $a$  и  $b$  могут быть бесконечны) и  $F$  — банахово пространство. Мы будем говорить, что отображение  $f$  промежутка  $I$  в  $F$  есть *ступенчатая функция*, если существует такая возрастающая конечная последовательность  $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$  точек промежутка  $\bar{I}$  (замыкания промежутка  $I$  в  $\bar{R}$ ), что  $x_0 = a$ ,  $x_n = b$  и что отображение  $f$  постоянно на каждом из открытых промежутков  $]x_l, x_{l+1}[$  ( $0 \leq l \leq n-1$ ).

Для любого отображения  $f$  промежутка  $I$  в  $F$  и любой точки  $x \in I$ , отличной от  $b$ , будем говорить, что  $f$  имеет в этой точке *предел справа*, если существует предел  $\lim_{\substack{y \in I, y > x \\ y \rightarrow x}} f(y)$ ; в этом случае

такой предел обозначается символом  $f(x+)$ . Точно так же для каждой точки  $x \in I$ , отличной от  $a$ , мы определяем *предел слева* отображения  $f$  в точке  $x$  и обозначаем его символом  $f(x-)$ ; эти пределы мы называем также *односторонними пределами* отображения  $f$ .

Отображение  $f$  промежутка  $I$  в  $F$  называется *простой функцией*, если оно имеет односторонние пределы в каждой точке промежутка  $I$ . Ясно, что каждая ступенчатая функция является простой.

**(7.6.1)** Для того чтобы отображение  $f$  компактного промежутка  $I = [a, b]$  в  $F$  было простым, необходимо и достаточно, чтобы  $f$  было пределом равномерно сходящейся последовательности ступенчатых функций.

**Необходимость.** Для каждого целого  $n > 0$  и каждой точки  $x \in I$  существует такой открытый промежуток  $V(x) = ]y(x), z(x)[$ , содержащий  $x$ , что  $\|f(s) - f(t)\| \leq 1/n$ , если обе точки  $s$  и  $t$  принадлежат  $]y(x), z(x)[ \cap I$  или обе они принадлежат  $]x, z(x)[ \cap I$ . Покроем  $I$  конечным числом промежутков  $V(x_i)$ , и пусть  $(c_j)_{0 < j \leq m}$  — строго возрастающая последовательность, состоящая из точек  $a, b, x_i, y(x_i)$  и  $z(x_i)$ . Так как каждая точка  $c_j$  содержится в некотором промежутке  $V(x_i)$ , то  $c_{j+1}$  либо принадлежит тому же промежутку  $V(x_i)$ , либо же мы имеем  $c_{j+1} = z(x_i)$  (где  $j \leq m-1$ ). Иными словами, если точки  $s$  и  $t$  принадлежат одному и тому же промежутку  $]c_j, c_{j+1}[$ , то  $\|f(s) - f(t)\| \leq 1/n$ . Пусть теперь  $g_n$  — ступенчатая функция, равная  $f$  в точках  $c_j$  и в середине каждого промежутка  $]c_j, c_{j+1}[$  и постоянная в каждом из этих промежутков. Ясно, что  $\|f - g_n\| \leq 1/n$ .

**Достаточность.** Пусть  $f$  — предел равномерно сходящейся последовательности  $(f_n)$  ступенчатых функций. Для каждого  $\epsilon > 0$  существует такое  $n$ , что  $\|f - f_n\| \leq \epsilon/3$ . Далее, для каждой точки  $x \in I$  найдется такой промежуток  $[c, d]$ , содержащий  $x$ , что  $\|f_n(s) - f_n(t)\| \leq \epsilon/3$ , если обе точки  $s$  и  $t$  содержатся в  $[c, x[$  или обе они содержатся в  $]x, d[$ . Поэтому при том же предположении  $\|f(s) - f(t)\| \leq \epsilon$ , и, поскольку  $F$  — полное пространство, это доказывает существование односторонних пределов отображения  $f$  в точке  $x$  (3.14.6).

Теорему (7.6.1) можно сформулировать по-другому, сказав, что множество простых функций замкнуто в  $\mathcal{B}_F(E)$  и что множество ступенчатых функций плотно в множестве простых функций.

**(7.6.2)** Любое непрерывное отображение промежутка  $I \subset \mathbb{R}$  в банахово пространство является простым; любое монотонное отображение промежутка  $I$  в  $\mathbb{R}$  является простым.

Это следует из определения, если принять во внимание (3.16.5) и (4.2.1).

### Задачи

1. Пусть  $f$  — простое отображение промежутка  $I \subset \mathbb{R}$  в банахово пространство  $F$ . Покажите, что образ  $f(H)$  каждого компактного подмножества  $H$  промежутка  $I$  относительно компактен в  $F$ . Приведите пример, показывающий, что образ  $f(H)$  может быть не замкнут в  $F$ .

2. Функция  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$  при  $x \neq 0$  и  $f(0) = 0$  непрерывна и, значит, проста в  $I = [0, 1]$ ; функция  $g(x) = \text{sign } x$  ( $g(x) = 1$  при  $x > 0$ ,  $g(0) = 0$ ,

$g(x) = -1$  при  $x < 0$ ) проста в  $\mathbf{R}$ , но сложная функция  $g \circ f$  не является простой в  $I$ .

3. Пусть  $I = [a, b]$  — компактный промежуток в  $\mathbf{R}$ . Функция ограниченной вариации в  $I$  есть отображение  $f$  промежутка  $I$  в банахово пространство  $F$ , обладающее следующим свойством: существует такое число  $V \geq 0$ , что для любой строго возрастающей конечной последовательности  $(t_i)_{0 \leq i \leq n}$  точек промежутка  $I$  имеет место неравенство

$$\sum_{i=0}^{n-1} \|f(t_{i+1}) - f(t_i)\| \leq V.$$

a) Покажите, что множество  $f(I)$  относительно компактно в  $F$ .

[Докажите от противного, что  $f(I)$  вполне ограничено.]

b) Покажите, что  $f$  — простая функция в  $I$ .

[Примените а) и (3.16.4).]

c) Функция, равная  $x^2 \sin \frac{1}{x^2}$  при  $x \neq 0$  и 0 при  $x = 0$ , не является в  $I = [0, 1]$  функцией ограниченной вариации, несмотря на то, что она имеет производную в каждой точке промежутка  $I$ .

## Г л а в а 8

### ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Эта глава содержит лишь элементарные теоремы дифференциального исчисления, но способ, которым они излагаются, вероятно, окажется новым для большинства читателей.

Такое изложение, строго соответствующее нашей общей „геометрической“ точке зрения на анализ, имеет целью как можно ярче и выпуклее оттенить основную идею дифференциального исчисления, а именно идею „локального“ приближения функций линейными функциями. В классическом преподавании анализа эта идея с самого начала затемняется тем случайным фактом, что между линейными формами в одномерном векторном пространстве и числами существует взаимно однозначное соответствие. Поэтому производная в точке определяется в классических курсах анализа не как линейная форма, а как число. Рабское подчинение фетишу числовой интерпретации, чего бы это ни стоило, приносит намного больше вреда, когда такая интерпретация распространяется и на функции нескольких переменных. Именно так, например, обстоит дело с теоремой (8.9.2), выражающей частные производные сложной функции. Ее классическая запись лишена какой бы то ни было наглядности, в то время как эта теорема, конечно, состоит в том, что (полная) производная композиции функций есть композиция их производных (8.2.1) — весьма естественная формулировка для того, кто привык рассуждать в терминах линейных приближений.

Такие „внутренние“ формулировки определений и теорем анализа в отличие от рутины классических формул требуют, несомненно, известного умственного напряжения, обусловленного большой „абстрактностью“ и в частности, тем, что приходится вновь и вновь покидать исходное пространство и взбираться все выше и выше в новые „функциональные пространства“ (особенно в теории производных высшего порядка). Но результат вполне заслуживает потраченного труда, так как он подготавливает к усвоению более общей идеи анализа — идеи *дифференцируемого многообразия*. Читатель, желающий познакомиться с этой идеей и с вопросами, к которым она приводит, может обратиться к книгам Шевалле [9] и де Рама [12]. Конечно, он заметит, что все встречающиеся в этих приложениях векторные пространства имеют конечную размерность. Разумеется, это дополнительное предположение можно при желании сделать и во всех теоремах настоящей главы. Однако читатель сам увидит, что теоремы от этого не делаются ни на iota короче или проще. Иными словами, предположение о конечной размерности для рассматриваемого материала абсолютно несущественно. Поэтому лучше вообще обойтись без такого ограничения,

хотя приложения дифференциального исчисления к конечномерному случаю намного превосходят остальные как по числу, так и по важности.

Формальные правила дифференциального исчисления выводятся в 8.1—8.4. Остальные параграфы этой главы посвящены различным приложениям, пожалуй, самой полезной теоремы анализа — теоремы о среднем значении, доказываемой в 8.5. Читатель заметит, что формулировка этой теоремы (которая дается для вектор-функций) по форме отличается от классической теоремы о среднем значении (для действительных скалярных функций), обычно записываемой в виде равенства  $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ . Неудобства этой классической формулировки состоят в следующем:

1°) нет ничего на нее похожего, если  $f$  принимает векторные значения;

2°) в ней полностью затушевывается тот факт, что о числе  $c$  не известно ничего, кроме того, что оно лежит между  $a$  и  $b$ .

Между тем для большинства приложений нужно знать только то, что  $f'(c)$  есть число, заключенное между нижней и верхней гранями производной  $f'$  на промежутке  $[a, b]$ , а вовсе не то, что это и в самом деле значение производной. Иными словами, настоящая природа теоремы о среднем значении выявляется, если записать ее не в виде равенства, а в виде неравенства.

Наконец, читателю бросится в глаза отсутствие интеграла Римана, составляющего освещенный временем раздел курса анализа. Можно быть уверенным, что если бы этот раздел не носил столь авторитетное имя, он давно был бы исключен из курсов анализа, ибо любому работающему математику (при всем уважении к гению Римана) совершенно ясно, что в наши дни эта „теория“ может претендовать лишь на место не слишком интересного упражнения в общей теории меры и интеграла. Только упрямый консерватизм педагогической традиции сохраняет интеграл Римана как полноправную часть учебной программы, хотя давно уже он пережил свое историческое значение.

Конечно, чтобы избежать каких бы то ни было рассуждений из теории меры, вполне возможно ограничить процесс интегрирования классом функций, достаточно широким для всех целей элементарного анализа (на уровне нашего курса), но достаточно близким к классу непрерывных функций. Именно это мы и сделали, определив только интеграл от простых функций (иногда называемый *интегралом Коши*). В случае когда требуется более мощный инструмент, не имеет смысла останавливаться на полпути, и единственное разумное решение дает общая теория (*лебеговского*) интегрирования.

## 1. Производная непрерывного отображения

Пусть  $E, F$  — банаховы пространства (оба действительные или же оба комплексные) и  $A$  — открытое множество в  $E$ . Пусть  $f$  и  $g$  — два непрерывные отображения множества  $A$  в  $F$ . Будем говорить, что  $f$  и  $g$  *касательны* в точке  $x_0 \in A$ , если

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \neq x_0} \frac{\|f(x) - g(x)\|}{\|x - x_0\|} = 0,$$

откуда, конечно, следует, что  $f(x_0) = g(x_0)$ . Заметим, что это определение зависит только от топологий пространств  $E$  и  $F$ , потому что если  $f$  и  $g$  касательны при данных нормах в пространствах  $E$  и  $F$ , то они останутся касательными и при эквивалентных нормах (5.6). Если  $f$  и  $g$  касательны в точке  $x_0$  и  $g$  и  $h$  касательны в точке  $x_0$ , то, как следует из неравенства

$$\|f(x) - h(x)\| \leq \|f(x) - g(x)\| + \|g(x) - h(x)\|,$$

отображения  $f$  и  $h$  касательны в точке  $x_0$ .

Среди всех функций, касательных к функции  $f$  в точке  $x_0$ , существует не больше одного отображения вида  $x \rightarrow f(x_0) + u(x - x_0)$ , где  $u$  линейно. В самом деле, если две такие функции  $x \rightarrow f(x_0) + u_1(x - x_0)$  и  $x \rightarrow f(x_0) + u_2(x - x_0)$  касательны в точке  $x_0$ , то для линейного отображения  $v = u_1 - u_2$  это означает, что  $\lim_{y \rightarrow 0, y \neq 0} \|v(y)\|/\|y\| = 0$ . Но отсюда следует, что  $v = 0$ . Действительно, если задать произвольное  $\epsilon > 0$ , то найдется такое  $r > 0$ , что при  $\|y\| \leq r$  будет выполняться неравенство  $\|v(y)\| \leq \epsilon \|y\|$ . Это последнее неравенство будет справедливо и для любой точки  $x \neq 0$ , в чем можно убедиться, применив его к  $y = rx/\|x\|$ . Так как  $\epsilon$  произвольно, то мы видим, что  $v(x) = 0$  для любой точки  $x$ .

Будем говорить, что непрерывное отображение  $f$  множества  $A$  в  $F$  дифференцируемо в точке  $x_0 \in A$ , если существует такое линейное отображение  $u$  пространства  $E$  в  $F$ , что отображение  $x \rightarrow f(x_0) + u(x - x_0)$  касательно к  $f$  в точке  $x_0$ . Мы уже видели, что такое отображение в этом случае единственно; оно называется производной (или полной производной) отображения  $f$  в точке  $x_0$  и обозначается символом  $f'(x_0)$  или  $Df(x_0)$ .

**(8.1.1)** Если непрерывное отображение  $f$  множества  $A$  в пространство  $F$  дифференцируемо в точке  $x_0$ , то производная  $f'(x_0)$  является непрерывным линейным отображением пространства  $E$  в  $F$ .

Пусть  $u = f'(x_0)$ . Если задано  $\epsilon > 0$ , то существует такое  $r$ , что  $0 < r < 1$  и что из  $\|t\| \leq r$  следует  $\|f(x_0 + t) - f(x_0)\| \leq \epsilon/2$  и  $\|f(x_0 + t) - f(x_0) - u(t)\| \leq \epsilon \|t\|/2$ . Поэтому из  $\|t\| \leq r$  следует  $\|u(t)\| \leq \epsilon$ , что в силу (5.5.1) доказывает непрерывность отображения  $u$ .

Производная непрерывного отображения  $f$  множества  $A$  в  $F$  в точке  $x_0 \in A$  (когда она существует) является, таким образом, элементом банахова пространства  $\mathcal{L}(E; F)$  [см. 5.7], а не пространства  $F$ . Ниже для любого отображения  $u \in \mathcal{L}(E; F)$  и точки  $t \in E$  вместо  $u(t)$  мы будем писать  $u \cdot t$ . Напомним (5.7), что  $\|u \cdot t\| \leq \|u\| \cdot \|t\|$  и  $\|u\| = \sup_{\|t\| \leq 1} \|u \cdot t\|$ .

В случае когда  $E$  имеет конечную размерность  $n$ , а  $F$  — конечную размерность  $m$ , производную  $f'(x_0)$  можно, таким образом,

отождествить с матрицей, имеющей  $m$  строк и  $n$  столбцов. Эта матрица будет определена в (8.10).

**Примеры (8.1.2)** Постоянная функция дифференцируема в каждой точке множества  $A$ , и ее производная есть элемент 0 пространства  $\mathcal{L}(E; F)$ .

**(8.1.3)** Производная непрерывного линейного отображения и пространства  $E$  в  $F$  существует в каждой точке  $x \in E$  и  $Du(x) = u$ .

Действительно, по определению  $u(x_0) + u(x - x_0) = u(x)$ .

**(8.1.4)** Пусть  $E$ ,  $F$  и  $G$  — три банаховых пространства и  $(x, y) \rightarrow [x \cdot y]$  — непрерывное билинейное отображение пространства  $E \times F$  в  $G$ . Тогда это отображение дифференцируемо в каждой точке  $(x, y) \in E \times F$  и его производная есть линейное отображение  $(s, t) \rightarrow [x \cdot t] + [s \cdot y]$ .

В самом деле, мы имеем

$$[(x+s) \cdot (y+t)] - [x \cdot y] - [x \cdot t] - [s \cdot y] = [s \cdot t],$$

и по предположению существует такое число  $c > 0$ , что  $\|[s \cdot t]\| \leq c \cdot \|s\| \cdot \|t\|$  (5.5.1). Поэтому для любого  $\epsilon > 0$  из  $\sup(\|s\|, \|t\|) = \|(s, t)\| \leq \epsilon/c$  следует, что

$$\frac{\|[x \cdot s] \cdot [y \cdot t] - [x \cdot y] - [x \cdot t] - [s \cdot y]\|}{\|(s, t)\|} \leq \epsilon,$$

и наше утверждение доказано.

Этот результат легко обобщается на случай непрерывного полилинейного отображения.

**(8.1.5)** Пусть  $F = F_1 \times F_2 \times \dots \times F_m$  — произведение банаховых пространств и  $f = (f_1, \dots, f_m)$  — непрерывное отображение открытого в пространстве  $E$  множества  $A$  в пространство  $F$ . Для того чтобы  $f$  было дифференцируемо в точке  $x_0$ , необходимо и достаточно, чтобы каждое отображение  $f_i$  было дифференцируемо в точке  $x_0$ ; в этом случае  $f'(x_0) = (f'_1(x_0), \dots, f'_m(x_0))$  (считая, что  $\mathcal{L}(E; F)$  отождествлено с произведением пространств  $\mathcal{L}(E; F_i)$ ).

Действительно, любое линейное отображение  $u$  пространства  $E$  в  $F$  единственным образом можно записать в виде  $u = (u_1, \dots, u_m)$ , где  $u_i$  — линейное отображение пространства  $E$  в  $F_i$ , и, по определению, мы имеем тогда  $\|u(x)\| = \sup(\|u_1(x)\|, \dots, \|u_m(x)\|)$ . Отсюда [в силу (5.7.1) и (2.3.7)] следует, что  $\|u\| = \sup(\|u_1\|, \dots, \|u_m\|)$ , и это позволяет отождествить пространство  $\mathcal{L}(E; F)$  с произведением  $\prod_{i=1}^m \mathcal{L}(E; F_i)$ . Из определения сразу следует, что  $u$  является произ-

водной отображения  $f$  в точке  $x_0$  в том и только в том случае, если  $u_i$  является производной отображения  $f_i$  в точке  $x_0$  при  $1 \leq i \leq m$ .

Пусть  $E, F$  — комплексные банаховы пространства и  $E_0, F_0$  — базисные для них действительные банаховы пространства. Тогда если отображение  $f$  множества  $A$ , открытого в пространстве  $E$ , в  $F$  дифференцируемо в точке  $x_0$ , то оно также дифференцируемо и имеет ту же самую производную и как отображение множества  $A$  в  $F_0$  (линейное отображение пространства  $E$  в  $F$  будет линейным и как отображение пространства  $E_0$  в  $F_0$ ). Но обратное не верно, как сразу показывает пример отображения  $z \rightarrow z$  пространства  $\mathbb{C}$  в себя. В качестве отображения пространства  $\mathbb{R}^2$  в себя отображение  $u : z \rightarrow \bar{z}$  (которое можно записать в виде  $(x, y) \rightarrow (x, -y)$ ) дифференцируемо и в силу (8.1.3) имеет в каждой точке производную, равную  $u$ ; но  $u$  не является комплексным линейным отображением, откуда и следует наше утверждение. Мы вернемся к этому вопросу в гл. 9 (9.10.2).

Когда отображение  $f$  множества  $A$  в  $F$  дифференцируемо в каждой точке множества  $A$ , оно называется *дифференцируемым в A*. Отображение  $x \rightarrow f'(x) = Df(x)$  множества  $A$  в  $\mathcal{L}(E; F)$  обозначается символом  $f'$  или  $Df$  и называется *производной отображения f в множестве A*.

## 2. Формальные правила дифференцирования

**(8.2.1)** Пусть  $E, F$  и  $G$  — три банахова пространства,  $A$  — открытая окрестность точки  $x_0 \in E$ ,  $f$  — непрерывное отображение окрестности  $A$  в  $F$ ,  $y_0 = f(x_0)$ ,  $B$  — открытая окрестность точки  $y_0$  в  $F$  и  $g$  — непрерывное отображение окрестности  $B$  в  $G$ . Тогда если  $f$  дифференцируемо в точке  $x_0$  и  $g$  дифференцируемо в точке  $y_0$ , то отображение  $h = g \circ f$  (которое определено и непрерывно в некоторой окрестности точки  $x_0$ ) дифференцируемо в точке  $x_0$  и

$$h'(x_0) = g'(y_0) \circ f'(x_0).$$

По предположению для заданного  $\varepsilon > 0$ , удовлетворяющего условию  $0 < \varepsilon < 1$ , найдется такое  $r > 0$ , что при  $\|s\| \leq r$  и  $\|t\| \leq r$  мы можем написать

$$\begin{aligned} f(x_0 + s) &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot s + o_1(s), \\ g(y_0 + t) &= g(y_0) + g'(y_0) \cdot t + o_2(t), \end{aligned}$$

где  $\|o_1(s)\| \leq \varepsilon \|s\|$  и  $\|o_2(t)\| \leq \varepsilon \|t\|$ . С другой стороны, в силу (8.1.1) и (5.5.1) существуют такие числа  $a$  и  $b$ , что для любых  $s$  и  $t$

$$\|f'(x_0) \cdot s\| \leq a \|s\| \quad \text{и} \quad \|g'(y_0) \cdot t\| \leq b \|t\|.$$

Следовательно, при  $\|s\| \leq r$

$$\|f'(x_0) \cdot s + o_1(s)\| \leq (a+1)\|s\|.$$

Таким образом, при  $\|s\| \leq r/(a+1)$  имеем

$$\|o_2(f'(x_0) \cdot s + o_1(s))\| \leq (a+1)\varepsilon\|s\|$$

и

$$\|g'(y_0) \cdot o_1(s)\| \leq b\varepsilon\|s\|.$$

Поэтому можно написать

$$\begin{aligned} h(x_0 + s) &= g(y_0 + f'(x_0) \cdot s + o_1(s)) = \\ &= g(y_0) + g'(y_0) \cdot (f'(x_0) \cdot s) + o_3(s), \end{aligned}$$

где  $\|o_3(s)\| \leq (a+b+1)\varepsilon\|s\|$ , и теорема доказана.

Теорема (8.2.1) имеет, конечно, бесчисленное множество приложений, из которых мы упомянем только следующее:

**(8.2.2)** Пусть  $f$  и  $g$  — два непрерывных отображения открытого множества  $A$  пространства  $E$  в  $F$ . Если  $f$  и  $g$  дифференцируемы в точке  $x_0$ , то  $f+g$  и  $\alpha f$  ( $\alpha$  — скаляр) дифференцируемы в точке  $x_0$ , причем  $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$  и  $(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$ .

Отображение  $f+g$  есть композиция отображения  $(u, v) \rightarrow u+v$  пространства  $F \times F$  в  $F$  и отображения  $x \rightarrow (f(x), g(x))$  множества  $A$  в  $F \times F$ . Оба эти отображения в силу (8.1.3) и (8.1.5) дифференцируемы, и наше утверждение (относительно  $f+g$ ) следует из (8.2.1). Для отображения  $\alpha f$  рассуждение еще проще ввиду того, что отображение  $u \rightarrow \alpha u$  пространства  $F$  в себя в силу (8.1.3) дифференцируемо. Разумеется, теорему (8.2.2) можно очень просто доказать и непосредственно.

Пусть  $E, F$  — два банаховых пространства,  $A$  — открытое множество в  $E$  и  $B$  — открытое множество в  $F$ . Если  $A$  и  $B$  гомеоморфны и если существует дифференцируемый гомеоморфизм  $f$  множества  $A$  на  $B$ , то отсюда не следует, что для каждой точки  $x_0 \in A$  производная  $f'(x_0)$  является линейным гомеоморфизмом пространства  $E$  на  $F$  (рассмотрите, например, отображение  $\xi \rightarrow \xi^3$  пространства  $\mathbf{R}$  на себя).

**(8.2.3)** Пусть  $f$  — гомеоморфизм открытого множества  $A$  банахова пространства  $E$  на открытое множество  $B$  банахова пространства  $F$  и  $g$  — обратный гомеоморфизм. Пусть отображение  $f$  дифференцируемо в точке  $x_0$  и  $f'(x_0)$  есть линейный гомеоморфизм пространства  $E$  на  $F$ . Тогда отображение  $g$  дифференцируемо в точке  $y_0 = f(x_0)$  и  $g'(y_0)$  является отображением, обратным отображению  $f'(x_0)$  [ср. (10.2.5)].

По предположению отображение  $s \rightarrow f(x_0 + s) - f(x_0)$  есть гомеоморфизм некоторой окрестности  $V$  точки  $0$  в  $E$  на некоторую окрестность  $W$  точки  $0$  в  $F$  и отображение  $t \rightarrow g(y_0 + t) - g(y_0)$  является обратным гомеоморфизмом. По предположению линейное отображение  $f'(x_0)$  пространства  $E$  на  $F$  имеет обратное отображение  $u$ , которое непрерывно, и поэтому в силу (5.5.1) существует такое  $c > 0$ , что для любой точки  $t \in F$  выполняется неравенство  $\|u(t)\| \leq c\|t\|$ . Возьмем произвольное  $\epsilon$ , удовлетворяющее условию  $0 < \epsilon < 1/2c$ . Тогда найдется такое  $r > 0$ , что если мы напишем  $f(x_0 + s) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot s + o_1(s)$ , то из  $\|s\| \leq r$  будет следовать  $\|o_1(s)\| \leq \epsilon\|s\|$ . Пусть теперь  $r'$  — такое число, что шар  $\|t\| \leq r'$  содержится в  $W$  и что его образ при отображении  $t \rightarrow g(y_0 + t) - g(y_0)$  содержится в шаре  $\|s\| \leq r$ . Пусть  $z = g(y_0 + t) - g(y_0)$ . По определению из этого равенства при  $\|t\| \leq r'$  следует, что  $t = f(x_0 + z) - f(x_0)$ , и, так как  $\|z\| \leq r$ , мы можем написать  $t = f'(x_0) \cdot z + o_1(z)$ , где  $\|o_1(z)\| \leq \epsilon\|z\|$ . Отсюда по определению  $u$  имеем

$$u \cdot t = u \cdot (f'(x_0) \cdot z) + u \cdot o_1(z) = z + u \cdot o_1(z),$$

причем  $\|u \cdot o_1(z)\| \leq c\|o_1(z)\| \leq c\epsilon\|z\| \leq \|z\|/2$  и, значит,  $\|u \cdot t\| \geq \|z\| - \|z\|/2 = \|z\|/2$ . Следовательно,  $\|z\| \leq 2\|u \cdot t\| \leq 2c\|t\|$ . И, наконец,  $\|u \cdot o_1(z)\| \leq c\epsilon\|z\| \leq 2c^2\epsilon\|t\|$ . Таким образом, мы доказали, что из  $\|t\| \leq r'$  следует  $\|g(y_0 + t) - g(y_0) - u \cdot t\| \leq 2c^2\epsilon\|t\|$ , и, поскольку  $\epsilon$  произвольно, это завершает доказательство.

Теорему (8.2.3) можно также (при тех же предположениях) записать в виде

$$(8.2.3.1) \quad (f^{-1})'(f(x_0)) = (f'(x_0))^{-1}.$$

### Задачи

1. Пусть  $E$  — действительное предгильбертово пространство. Покажите, что отображение  $x \rightarrow \|x\|$  пространства  $E$  в  $\mathbb{R}$ -дифференцируемо в каждой точке  $x \neq 0$  пространства  $E$  и что его производная в такой точке есть линейное отображение  $s \rightarrow (s|x)/\|x\|$ .

2. а) Покажите, что норма  $x \rightarrow \|x\|$  в пространстве  $(c_0)$  Банаха (задача 5 § 5.3) дифференцируема в точке  $x = (\xi_n)$  в том и только в том случае, если существует такой номер  $n_0$ , что при каждом  $n > n_0$  выполняется неравенство  $|\xi_{n_0}| > |\xi_n|$ . Вычислите производную.

б) Покажите, что норма  $x \rightarrow \|x\|$  в пространстве  $l^1$  Банаха (задача 1 § 5.7) не дифференцируема ни в одной точке.

[Воспользуйтесь (8.1.1) и задачей 1, с) § 5.7.]

3. Покажите, что в пространстве  $\mathcal{C}_R(I)$ , где  $I = [0, 1]$ , норма  $x \rightarrow \|x\|$  не дифференцируема ни в одной точке.

4. Пусть  $f$  — дифференцируемая действительная функция, определенная в открытом множестве  $A$  банахова пространства  $E$ .

а) Покажите, что если в точке  $x_0 \in A$  функция  $f$  достигает относительного максимума (задача 6 § 3.9), то  $Df(x_0) = 0$ .

б) Пусть  $E$  конечномерно,  $A$  — относительно компактно, функция  $f$  определена и непрерывна на  $\bar{A}$  и равна 0 на границе множества  $A$ . Покажите, что существует точка  $x_0 \in A$ , в которой  $Df(x_0) = 0$  (теорема Ролля).

[Примените а) и (3.17.10).]

### 3. Производные в пространствах непрерывных линейных функций

(8.3.1) Пусть  $E, F$  и  $G$  — три банаховых пространства. Тогда отображение  $(u, v) \rightarrow v \circ u$  (обозначаемое также через  $vu$ ) произведения  $\mathcal{L}(E; F) \times \mathcal{L}(F; G)$  в  $\mathcal{L}(E; G)$  дифференцируемо, и его производной в точке  $(u_0, v_0)$  является отображение  $(s, t) \rightarrow v_0 \circ s + t \circ u_0$ .

Если мы заметим, что в силу (5.7.5) отображение  $(u, v) \rightarrow v \circ u$  билинейно и непрерывно, то станет ясно, что наше утверждение является частным случаем теоремы (8.1.4).

(8.3.2) Пусть  $E$  и  $F$  — такие два банаховых пространства, что существует по крайней мере один линейный гомеоморфизм пространства  $E$  на  $F$ . Тогда множество  $\mathcal{W}$  всех этих линейных гомеоморфизмов открыто в  $\mathcal{L}(E; F)$ ; отображение  $u \rightarrow u^{-1}$  множества  $\mathcal{W}$  на множество  $\mathcal{W}^{-1}$  линейных гомеоморфизмов пространства  $F$  на  $E$  непрерывно и дифференцируемо, и производная отображения  $u \rightarrow u^{-1}$  в точке  $u_0$  есть линейное отображение  $s \rightarrow -u_0^{-1} \circ s \circ u_0^{-1}$  (пространства  $\mathcal{L}(E; F)$  в  $\mathcal{L}(F; E)$ ).

Рассмотрим сначала случай, когда  $F = E$ , и обозначим через 1 тождественное отображение пространства  $E^1$ ). Тогда

(8.3.2.1) Если  $\|w\| < 1$  в  $\mathcal{L}(E; E)$ , то линейное отображение  $1 + w$  является гомеоморфизмом; обратное к нему отображение  $(1 + w)^{-1}$  равно сумме абсолютно сходящегося ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^n$ , и имеет место неравенство

$$(8.3.2.2) \quad \|(1 + w)^{-1} - 1 + w\| \leq \frac{\|w\|^2}{1 - \|w\|}.$$

Имеем  $\sum_{n=0}^N \|w\|^n = (1 - \|w\|^{N+1})/(1 - \|w\|) \leq 1/(1 - \|w\|)$ , поэтому в силу (5.7.5), (5.3.1), (5.3.2) и (5.7.3) ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^n$  абсолютно

<sup>1)</sup> Таким образом, символом 1 обозначается и число 1 и тождественное отображение. — Прим. перев.

сходится в  $\mathcal{L}(E; E)$ . Кроме того,

$$(1+w)(1-w+w^2+\dots+(-1)^N w^N) = \\ = (1-w+w^2+\dots+(-1)^N w^N)(1+w) = 1-w^{N+1},$$

и так как  $w^{N+1}$  стремится к 0 вместе с  $1/N$ , то по определению и в силу (5.7.5) для элемента  $v = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^n$  пространства  $\mathcal{L}(E; E)$  имеют место равенства  $(1+w)v = v(1+w) = 1$ , и первые два утверждения доказаны. Неравенство (8.3.2.2) следует из соотношения  $(1+w)^{-1} - 1 + w = w^2(1-w+w^2+\dots)$  и из (5.7.5) и (5.3.2).

Рассмотрим теперь в теореме (8.3.2) общий случай. Пусть элемент  $s \in \mathcal{L}(E; F)$  удовлетворяет условию  $\|s\| \cdot \|u_0^{-1}\| < 1$ . Тогда ввиду (5.7.5) и (8.3.2.1) элемент  $1+u_0^{-1}s$  пространства  $\mathcal{L}(E; E)$  имеет обратный, и так как мы можем написать  $u_0+s = u_0(1+u_0^{-1}s)$ , то это верно и для элемента  $u_0+s$ , обратным к которому является элемент  $(1+u_0^{-1}s)^{-1}u_0^{-1}$ . Поэтому

$$(u_0+s)^{-1} - u_0^{-1} = ((1+u_0^{-1}s)^{-1} - 1)u_0^{-1}.$$

Применяя (8.3.2.2) к  $w = u_0^{-1}s$ , при  $\|s\| < 1/\|u_0^{-1}\|$  получаем

$$\|(u_0+s)^{-1} - u_0^{-1} + u_0^{-1}su_0^{-1}\| \leq \frac{\|u_0^{-1}\|^3 \cdot \|s\|^2}{1 - \|u_0^{-1}\| \cdot \|s\|}.$$

Следовательно, если взять  $\|s\| \leq 1/2\|u_0^{-1}\|$ , то мы будем иметь

$$\|(u_0+s)^{-1} - u_0^{-1} + u_0^{-1}su_0^{-1}\| \leq c\|s\|^2,$$

где  $c = 2\|u_0^{-1}\|^3$ , и это завершает доказательство.

#### 4. Производные функций одной переменной

Если в качестве  $E$  взять одномерное векторное пространство (отождествленное с  $\mathbf{R}$  или  $\mathbf{C}$ ), то, отождествляя вектор  $b \in F$  с линейным отображением  $\xi \rightarrow b\xi$  пространства  $E$  в  $F$ , мы естественным образом отождествляем пространство  $\mathcal{L}(E; F)$  с самим пространством  $F$  (5.7.6). Если  $f$  — дифференцируемое отображение открытого множества  $A \subset E$  в  $F$ , то его производная  $Df(\xi_0)$  в точке  $\xi_0 \in A$  отождествляется тогда с вектором пространства  $F$ , а отображение  $Df$  — с отображением множества  $A$  в  $F$ . Если само  $F$  одномерно (отождествлено с  $\mathbf{R}$  или  $\mathbf{C}$ ), то мы получаем классический случай производной (в точке) как числа. Общие результаты, установленные выше, превращаются в этом последнем случае в классические формулы дифференциального исчисления. Например, когда  $E$  и  $F$  одно-

мерны, (8.3.2) сводится просто к теореме о том, что при  $\xi \neq 0$  производная функции  $1/\xi$  равна  $-1/\xi^2$ . Сформулируем следствие из теоремы (8.2.1):

**(8.4.1)** Пусть  $E$  и  $F$  — два действительных (соответственно комплексных) банаховых пространства,  $f$  — дифференцируемое отображение открытого множества  $A$  пространства  $E$  в  $F$  и  $g$  — дифференцируемое отображение открытого множества  $I$  пространства  $R$  (соответственно  $C$ ) в  $A$ . Тогда производная в точке  $\xi \in I$  сложного отображения  $h = f \circ g$  множества  $I$  в  $F$  есть вектор из  $F$ , равный  $Df(g(\xi)) \cdot g'(\xi)$ .

Напомним, что  $g'(\xi)$  принадлежит  $E$ , а  $Df(g(\xi))$  — пространству  $\mathcal{L}(E; F)$ .

**Замечание.** Пусть  $F$  — комплексное банахово пространство и  $f$  — дифференцируемое отображение открытого множества  $A \subset C$  в  $F$ . Его производная в точке  $z \in A$  отождествляется тогда с вектором пространства  $F$ . Пусть теперь  $g$  — дифференцируемое отображение открытого множества  $I \subset R$  в пространстве  $C$  (рассматриваемое как базисное двумерное действительное векторное пространство). Тогда  $f \circ g$  есть дифференцируемое отображение множества  $I$  в базисное действительное банахово пространство  $F_0$  пространства  $F$  и теорема (8.4.1) показывает, что его производная в точке  $\xi \in I$  равна  $g'(\xi)Df(g(\xi))$  (напомним, что здесь  $g'(\xi)$  есть комплексное число).

В случае когда  $E = R$  и  $F$  — действительное банахово пространство, понятие производной может быть значительно обобщено: для любого множества  $J \subset R$  и любой точки  $\xi_0 \in J$ , являющейся точкой прикосновения множества  $J \setminus \{\xi_0\}$ , мы можем определить производную отображения  $f$  множества  $J$  в  $F$  в точке  $\xi_0$  (относительно множества  $J$ ) как предел

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_0, \xi \in J \setminus \{\xi_0\}} \frac{(f(\xi) - f(\xi_0))}{\xi - \xi_0},$$

если он существует. В этом случае мы говорим, что  $f$  дифференцируемо в точке  $\xi_0$  относительно  $J$ .

Будем рассматривать только случай, когда  $J$  — промежуток в  $R$ . Тогда во внутренней точке промежутка  $J$  производная относительно  $J$  совпадает (если она существует) с обычной производной. Производная отображения  $f$  относительно  $J$  в начале  $\alpha$  (соответственно конце  $\beta$ ) промежутка  $J$ , если  $\alpha$  (соответственно  $\beta$ ) принадлежит  $J$ , называется также правой (соответственно левой) производной отображения  $f$  в точке  $\alpha$  (соответственно  $\beta$ ) и обозначается символом  $f'_d(\alpha)$  или  $D_+f(\alpha)$  [соответственно  $f'_g(\beta)$  или  $D_-f(\beta)$ ]. Теорема (8.4.1) остается справедливой и в предположении, что  $I$  — промежуток и  $g$  имеет производную относительно  $I$  в точке  $\xi$ . В этом случае, если  $f$  дифференцируемо в  $A$ , отображение  $f \circ g$

имеет в точке  $\xi$  производную относительно  $I$  и ее можно найти по той же формуле (заменив  $g'(\xi)$  производной отображения  $g$  относительно  $I$ ). Доказательство проводится (с очевидными изменениями) так же, как в (8.2.1). Мы опускаем самые обычные следствия этой теоремы, вроде результата, соответствующего (8.2.2).

### Задачи

1. а) Пусть  $f$  — непрерывное отображение промежутка  $I \subset \mathbb{R}$  в банахово пространство  $E$ . Для того чтобы  $f$  было дифференцируемо во внутренней точке  $x_0$  промежутка  $I$ , необходимо и достаточно, чтобы отношение  $(f(x_0 + h) - f(x_0 - k))/(h + k)$  имело в  $E$  предел, когда точка  $(h, k)$  стремится к  $(0, 0)$  по множеству пар, удовлетворяющих условию  $h > 0, k > 0$ .

б) Действительная функция  $f$ , равная  $x^2 \sin(1/x)$  при  $x \neq 0$  и 0 при  $x = 0$  дифференцируема в  $\mathbb{R}$ , но отношение  $(f(x) - f(y))/(x - y)$  не имеет предела, когда  $(x, y)$  стремится к  $(0, 0)$  по множеству пар, удовлетворяющих условию  $x > 0, y > 0, x \neq y$ .

с) Последовательность непрерывных функций  $f_n$  в промежутке  $I = [0, 1]$ , определяется следующим образом:  $f_0(t) = t$ ; при каждом  $n \geq 1$  функция  $f_n$  в каждом из  $3^n$  промежутков  $k/3^n \leq t \leq (k+1)/3^n$  при  $0 \leq k \leq 3^n - 1$  имеет вид  $at + \beta$  и, кроме того,

$$\begin{aligned} f_n\left(\frac{k}{3^{n-1}}\right) &= f_{n-1}\left(\frac{k}{3^{n-1}}\right), \quad f_n\left(\frac{k}{3^{n-1}} + \frac{1}{3^n}\right) = f_{n-1}\left(\frac{k}{3^{n-1}} + \frac{2}{3^n}\right), \\ f_n\left(\frac{k}{3^{n-1}} + \frac{2}{3^n}\right) &= f_{n-1}\left(\frac{k}{3^{n-1}} + \frac{1}{3^n}\right). \end{aligned}$$

Покажите, что последовательность  $(f_n)$  сходится в  $I$  равномерно к непрерывной функции, не имеющей производной ни в одной точке промежутка  $I$ .

[Примените а.)]

2. Пусть  $f$  — непрерывное отображение открытого промежутка  $I \subset \mathbb{R}$  в банахово пространство  $E$ , имеющее в каждой точке  $t \in I$  и левую производную  $f'_g(t)$  и правую производную  $f'_d(t)$ .

а) Пусть  $U$  — непустое открытое множество в  $E$  и  $A$  — множество точек  $t \in I$ , в которых  $f'_d(t) \in U$ . Для любого  $\alpha > 0$  пусть  $B_\alpha$  — подмножество промежутка  $I$ , состоящее из точек  $t$ , для которых существует по крайней мере одна такая точка  $s \in I$ , что  $t - \alpha \leq s < t$  и  $(f(t) - f(s))/(t - s) \in U$ . Покажите, что  $B_\alpha$  открыто и что пересечение  $A \cap CB_\alpha$  счетно. На основании этого результата заключите, что множество точек  $t \in A$ , в которых  $f'_g(t) \notin \bar{U}$ , не более чем счетно.

[Примените задачу 3 § 3.9.]

б) Выполните из а), что множество точек  $t \in I$ , в которых  $f'_g(t) \neq f'_d(t)$ , не более чем счетно.

[Сначала убедитесь в том, что  $f(I)$  есть объединение счетного числа компактных метрических пространств, и, рассмотрев замкнутое векторное

подпространство пространства  $E$ , порожденное  $f(I)$ , сведите задачу к случаю, когда в  $E$  существует счетная база  $(U_n)$  открытых множеств. Затем заметьте, что для каждой пары различных точек  $a, b$  пространства  $E$  существует пара множеств  $U_p, U_q$ , удовлетворяющая условиям  $a \in U_p, b \in U_q, U_p \cap U_q = \emptyset$ .]

3. а) Пусть отображение  $f$  определено в  $\mathbb{R}^2$  условиями

$$f(x) = \frac{\xi_1 \xi_2^2}{\xi_1^2 + \xi_2^2} \quad \text{при } x = (\xi_1, \xi_2) \neq (0, 0) \text{ и } f(0) = 0.$$

Покажите, что для любых точек  $x \in \mathbb{R}^2$  и  $y \in \mathbb{R}^2$  предел

$$\lim_{t \rightarrow 0, t \neq 0} (f(x + ty) - f(x))/t = g(x, y)$$

существует, но отображение  $y \rightarrow g(0, y)$  не является линейным (и поэтому отображение  $f$  не дифференцируемо в точке 0).

б) Пусть отображение  $f$  определено в  $\mathbb{R}^2$  условиями

$$f(x) = \frac{\xi_1^3 \xi_2}{\xi_1^4 + \xi_2^2} \quad \text{при } x = (\xi_1, \xi_2) \neq (0, 0) \text{ и } f(0) = 0.$$

Покажите, что предел  $g(x, y)$  существует при каждом  $x$  и  $y$  и отображение  $y \rightarrow g(x, y)$  линейно при каждом  $x \in \mathbb{R}^2$ , но  $f$  не дифференцируемо в точке 0.

4. а) Пусть  $f$  — непрерывное отображение открытого множества  $A$  банахова пространства  $E$  в банахово пространство  $F$ . Будем говорить, что *функция  $f$  в точке  $x_0 \in A$  квазидифференцируема*, если существует линейное отображение  $u$  пространства  $E$  в  $F$  такое, что для любого непрерывного отображения  $g$  промежутка  $I = [0, 1]$  в  $A$ , такого, что  $g(0) = x_0$  и что существует производная  $g'(0)$  отображения  $g$  в точке 0 (относительно  $I$ ), отображение  $t \rightarrow f(g(t))$  имеет в точке  $t = 0$  производную (относительно  $I$ ), равную  $u(g'(0))$ . Линейное отображение  $u$  называется в этом случае *квазипроизводной отображения  $f$  в точке  $x_0$* . Покажите, что если  $f$  квазидифференцируемо в точке  $x_0$ , то его квазипроизводная единственна. Распространите свойство (8.2.1) на квазидифференцируемые отображения.

б) Покажите, что если  $f$  квазидифференцируемо в  $x_0$ , то его квазипроизводная  $u$  — непрерывное линейное отображение пространства  $E$  в  $F$ .

[Допустим, что  $x_0 = 0$  и  $f(x_0) = 0$ . Проведите доказательство от противного: если бы отображение  $u$  не было ограничено в шаре  $B(0; 1)$ , то нашлась бы такая последовательность  $(a_n)$  векторов в  $E$ , что  $\|a_n\| = 1$ , и такая последовательность  $(t_n)$  чисел  $> 0$ , что  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$  и что  $\|t_n^{-1} f(t_n a_n)\| = a_n$

стремится к  $+\infty$ ; можно считать, что последовательности  $(t_n)$  и  $(\sqrt{a_n} t_n)$  убывают и стремятся к 0. Определите непрерывное отображение  $g$  промежутка  $[0, 1]$  в  $E$ , такое, что  $g(0) = 0$ , что производная  $g'(0)$  существует и равна 0 и что  $g(\sqrt{a_n} t_n) = t_n a_n$ ]

5. а) Пусть  $E, F$  — два банаховых пространства и  $f$  — непрерывное отображение открытого множества  $A \subset E$  в  $F$ . Покажите, что если  $f$  диф-

ференцируемо в точке  $x_0 \in A$ , то оно квазидифференцируемо в  $x_0$  и его квазипроизводная равна его производной.

б) Предположим, что  $E$  имеет конечную размерность. Покажите, что если  $f$  квазидифференцируемо в точке  $x_0 \in A$ , то оно дифференцируемо в точке  $x_0$ .

[Проведите доказательство от противного. Пусть  $u$  — квазипроизводная отображения  $f$  в точке  $x_0$  и пусть существует такое число  $\alpha > 0$  и такая последовательность  $(x_n)$  точек множества  $A$ , сходящаяся к точке  $x_0$ , что  $\|f(x_n) - f(x_0) - u \cdot (x_n - x_0)\| \geq \alpha \|x_n - x_0\|$ . Пользуясь локальной компактностью пространства  $E$ , покажите, что можно считать, что последовательность  $(\|x_n - x_0\|)$  убывает и последовательность  $z_n = (x_n - x_0)/\|x_n - x_0\|$  имеет в  $E$  предел. Затем определите такое непрерывное отображение  $g$  промежутка  $[0, 1]$  в  $E$ , что  $g(0) = x_0$  и существует производная  $g'(0)$ , но  $u(g'(0))$  не является производной отображения  $t \rightarrow f(g(t))$  в точке  $t = 0$ .]

6. Пусть  $I = [0, 1]$  и пусть  $E$  — банахово пространство  $\mathcal{C}_R(I)$ . Для того чтобы отображение  $x \rightarrow \|x\|$  пространства  $E$  в  $\mathbb{R}$  было квазидифференцируемо в точке  $x_0$ , необходимо и достаточно, чтобы функция  $t \rightarrow |x_0(t)|$  достигала своего максимума в  $I$  в единственной точке  $t_0 \in I$ . Квазипроизводная отображения  $x \rightarrow \|x\|$  в точке  $x_0$  есть в этом случае такое линейное отображение  $u$ , что  $u(z) = z(t_0)$ , если  $x_0(t_0) > 0$ , и  $u(z) = -z(t_0)$ , если  $x_0(t_0) < 0$  (см. задачу 3 § 8.2).

[Чтобы доказать необходимость, допустим, что  $|x_0|$  достигает своего максимума по крайней мере в двух различных точках  $t_0, t_1$ . Пусть  $u$  — непрерывное отображение промежутка  $I$  в себя, равное 1 в  $t_0$  и 0 — в  $t_1$ . Исследуйте поведение отношения  $(\|x_0 + \lambda u\| - \|x_0\|)/\lambda$ , когда действительное число  $\lambda \neq 0$  стремится к 0. Чтобы доказать достаточность, допустим, что  $\lambda \rightarrow z_\lambda$  — непрерывное отображение промежутка  $I$  в  $E$ , имеющее в точке  $\lambda = 0$  производную  $a \in E$  и такое, что  $z_0 = 0$ . Убедитесь в том, что если  $t_\lambda$  — наибольшее число в  $I$  (или наименьшее число в  $I$ ), в котором функция  $t \rightarrow |x_0(t) + z_\lambda(t)|$  достигает своего максимума, то  $t_\lambda$  стремится к  $t_0$ , когда  $\lambda$  стремится к 0.]

7. Пусть  $f$  — непрерывное отображение открытого множества  $A$  банахова пространства  $E$  в банахово пространство  $F$ . Предположим, что  $f$  удовлетворяет в  $A$  условию Липшица; это значит [см. 10.5.4)], что существует такая константа  $k > 0$ , что для любой пары точек множества  $A$  выполняется неравенство  $\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq k \|x_1 - x_2\|$ . Пусть  $x_0 \in A$  и пусть существует такое линейное отображение  $u$  пространства  $E$  в  $F$ , что для любого вектора  $a \neq 0$  в  $E$  предел отношения  $(f(x_0 + at) - f(x_0))/t$  при  $t \neq 0$  и стремящемся к 0 в  $\mathbb{R}$  существует и равен  $u(a)$ . Покажите, что  $f$  квазидифференцируемо в точке  $x_0$ .

8. а) Пусть  $a$  и  $b$  — две точки в банаховом пространстве  $E$ . Покажите, что отображение  $t \rightarrow \|a + tb\|$  пространства  $\mathbb{R}$  в себя в каждой точке  $t \in \mathbb{R}$  имеет правую и левую производную.

[Докажите, что если  $0 < t < s$ , то  $(\|a + bt\| - \|a\|)/t \leq (\|a + bs\| - \|a\|)/s$ , и примените (4.2.1).]

b) Пусть  $u$  — непрерывное отображение промежутка  $I \subset \mathbb{R}$  в  $E$ . Покажите, что если в точке  $t_0 \in I$  отображение  $u$  имеет правую производную, то в точке  $t_0$  правую производную имеет и отображение  $t \rightarrow \|u(t)\|$  и  $D_+ \|u(t_0)\| \leq \|D_+ u(t_0)\|$ .

[Примените а.)]

c) Пусть  $U$  — непрерывное отображение промежутка  $I$  в  $\mathcal{L}(E; E)$ . Покажите, что если отображение  $U$  имеет в точке  $t_0 \in I$  правую производную и  $U(t_0)$  есть линейный гомеоморфизм пространства  $E$  на себя, то отображение  $t \rightarrow \|(U(t))^{-1}\|$ , которое определено в некоторой окрестности точки  $t_0$ , имеет в  $t_0$  правую производную и  $D_+ (\|(U(t_0))^{-1}\|)^{-1} \leq \|D_+ U(t_0)\|$ .

## 5. Теорема о среднем значении

(8.5.1) Пусть  $I = [\alpha, \beta]$  — компактный промежуток в  $\mathbb{R}$ ,  $f$  — непрерывное отображение  $I$  в банахово пространство  $F$  и  $\varphi$  — непрерывное отображение  $I$  в  $\mathbb{R}$ . Предположим, что существует такое счетное подмножество  $D \subset I$ , что в каждой точке  $\xi \in I \setminus D$  отображения  $f$  и  $\varphi$  имеют производные относительно  $I$  и  $\|f'(\xi)\| \leq \varphi'(\xi)$ . Тогда  $\|f(\beta) - f(\alpha)\| \leq \varphi(\beta) - \varphi(\alpha)$ .

Пусть  $n \rightarrow p_n$  — биективное отображение множества  $\mathbb{N}$  на  $D$ . Мы докажем, что для любого  $\varepsilon > 0$  выполняется неравенство  $\|f(\beta) - f(\alpha)\| \leq \varphi(\beta) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(\beta - \alpha + 1)$ , и так как левая часть не зависит от  $\varepsilon$ , то тем самым теорема будет доказана.

Пусть  $A$  — подмножество промежутка  $I$ , состоящее из всех точек  $\xi$ , для которых при  $\alpha \leq \zeta < \xi$  имеет место неравенство  $\|f(\zeta) - f(\alpha)\| \leq \varphi(\zeta) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(\zeta - \alpha) + \varepsilon \sum_{p_n < \zeta} 2^{-n}$ . Ясно, что  $\alpha \in A$ ;

если  $\xi \in A$  и  $\alpha < \eta < \xi$ , то по определению и  $\eta \notin A$ . Это показывает, что если  $\gamma$  — верхняя грань  $A$ , то  $A$  должно совпадать либо с промежутком  $[\alpha, \gamma]$ , либо с промежутком  $[\alpha, \gamma]$ ; но в действительности из определения  $A$  сразу следует, что  $A = [\alpha, \gamma]$ . Более того, из непрерывности  $f$  и  $\varphi$  следует, что

$$(8.5.1.1) \quad \|f(\gamma) - f(\alpha)\| \leq \varphi(\gamma) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(\gamma - \alpha) + \varepsilon \sum_{p_n < \gamma} 2^{-n},$$

и, таким образом, нам остается только доказать, что  $\gamma = \beta$ .

Допустим, что  $\gamma \neq \beta$ ; если  $\gamma \notin D$ , то из определения производной следует, что существует такой промежуток  $[\gamma, \gamma + \lambda]$ , содержащийся в  $I$ , что при  $\gamma \leq \zeta < \gamma + \lambda$

$$\|f(\zeta) - f(\gamma) - f'(\gamma)(\zeta - \gamma)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}(\zeta - \gamma)$$

и

$$|\varphi(\zeta) - \varphi(\gamma) - \varphi'(\gamma)(\zeta - \gamma)| \leq \frac{\varepsilon}{2}(\zeta - \gamma).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\|f(\zeta) - f(\gamma)\| &\leq \|f'(\gamma)(\zeta - \gamma) + \frac{\epsilon}{2}(\zeta - \gamma)\| \leq \varphi'(\gamma)(\zeta - \gamma) + \\ &+ \frac{\epsilon}{2}(\zeta - \gamma) \leq \varphi(\zeta) - \varphi(\gamma) + \epsilon(\zeta - \gamma),\end{aligned}$$

и из (8.5.1.1) получаем

$$\begin{aligned}\|f(\zeta) - f(\alpha)\| &\leq \varphi(\zeta) - \varphi(\alpha) + \epsilon(\zeta - \alpha) + \epsilon \sum_{\rho_n < \gamma} 2^{-n} \leq \\ &\leq \varphi(\zeta) - \varphi(\alpha) + \epsilon(\zeta - \alpha) + \epsilon \sum_{\rho_n < \zeta} 2^{-n}\end{aligned}$$

в противоречии с определением  $\gamma$ . Если  $\gamma \in D$ , то пусть  $\gamma = \rho_m$ . Из непрерывности  $f$  и  $\varphi$  следует, что существует такой промежуток  $[\gamma, \gamma + \lambda]$ , содержащийся в  $I$ , что при  $\gamma \leq \zeta < \gamma + \lambda$

$$\|f(\zeta) - f(\gamma)\| \leq \frac{\epsilon}{2} 2^{-m}, \quad |\varphi(\zeta) - \varphi(\gamma)| \leq \frac{\epsilon}{2} 2^{-m},$$

поэтому снова из (8.5.1.1) получаем

$$\begin{aligned}\|f(\zeta) - f(\alpha)\| &\leq \varphi(\zeta) - \varphi(\alpha) + \epsilon(\gamma - \alpha) + \epsilon \sum_{\rho_n < \zeta} 2^{-n} \leq \\ &\leq \varphi(\zeta) - \varphi(\alpha) + \epsilon(\zeta - \alpha) + \epsilon \sum_{\rho_n < \zeta} 2^{-n}.\end{aligned}$$

и мы вновь приходим к противоречию, ч. т. д.

Наиболее важен случай, когда  $\varphi(\xi) = M(\xi - \alpha)$ , где  $M > 0$ :

**(8.5.2)** *Если существует такое счетное подмножество  $D \subset I$ , что в каждой точке  $\xi \in I \setminus D$  отображение  $f$  имеет производную относительно  $I$ , удовлетворяющую условию  $\|f'(\xi)\| \leq M$ , то  $\|f(\beta) - f(\alpha)\| \leq M(\beta - \alpha)$ .*

Для действительных функций точно такие же рассуждения, как в (8.5.1), доказывают первую часть следующей теоремы:

**(8.5.3)** *Пусть  $\varphi$  — такое непрерывное отображение промежутка  $I$  в  $\mathbb{R}$ , что в каждой точке  $\xi \in I \setminus D$  отображение  $\varphi$  имеет производную относительно  $I$  и  $m \leq \varphi'(\xi) \leq M$ . Тогда  $m(\beta - \alpha) \leq \varphi(\beta) - \varphi(\alpha) \leq M(\beta - \alpha)$ ; строгие неравенства*

$$m(\beta - \alpha) < \varphi(\beta) - \varphi(\alpha) < M(\beta - \alpha)$$

*имеют место, если  $\varphi(\xi) \neq \varphi(\alpha) + m(\xi - \alpha)$  и  $\varphi(\xi) \neq \varphi(\alpha) + M(\xi - \alpha)$  при  $\xi \in I$ .*

Чтобы доказать вторую часть, заметим, что в силу первой части функция  $\varphi(\xi) - \varphi(\alpha) - m(\xi - \alpha)$  возрастает в  $I$ ; если она не тождественно равна 0, то  $\varphi(\beta) - \varphi(\alpha) - m(\beta - \alpha) > 0$ . Для второго неравенства проводим точно такое же рассуждение.

Определим *сегмент*, соединяющий две точки  $a$  и  $b$  в нормированном пространстве  $E$ , как множество точек  $a + \xi(b - a)$ , где  $0 \leq \xi \leq 1$ .

(8.5.4) Пусть  $E, F$  — два банаховых пространства и  $f$  — непрерывное отображение в  $F$  некоторой окрестности сегмента  $S$ , соединяющего две точки  $x_0$  и  $x_0 + t$  пространства  $E$ . Если  $f$  дифференцируемо в каждой точке сегмента  $S$ , то

$$\|f(x_0 + t) - f(x_0)\| \leq \|t\| \cdot \sup_{0 < \xi < 1} \|f'(x_0 + \xi t)\|.$$

Рассмотрим отображение  $g$  промежутка  $I = [0, 1]$  в  $F$ , определяемое формулой  $g(\xi) = f(x_0 + \xi t)$ . В силу (8.4.1), (8.2.2) и (8.1.3)  $g$  дифференцируемо в каждой точке промежутка  $I$  (относительно  $I$ ) и его производная равна  $f'(x_0 + \xi t) \cdot t$ . Отсюда и из (8.5.2) и (5.7.4) следует требуемый результат.

### Задачи

1. а) Пусть  $I = ]a, b[$  — открытый промежуток в  $\mathbb{R}$  и  $f$  — действительная функция, определенная в  $I$  и непрерывная слева в каждой точке  $t \in I$  [т. е. удовлетворяющая условию  $f(t) = f(t-)$ ]. Предположим, что существует такое счетное подмножество  $D \subset I$ , что в каждой точке  $t \in I \setminus D$  функция  $f$  возрастает справа (это означает, что существует такой промежуток  $[t, t+h]$  ( $h > 0$ ), что при  $t \leq t' \leq t+h$  выполняется неравенство  $f(t) \leq f(t')$ ). Покажите, что функция  $f$  возрастает в  $I$ .

[Проведите рассуждение такого же характера, как в (8.5.1).]

б) Для каждого числа  $t \in J = [0, 1]$  пусть  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n/2^n$  — единственное «двоичное» разложение числа  $t$ , где  $a_n$  равно 0 или 1 и не существует такого номера  $m$ , что  $a_n = 1$  при всех  $n \geq m$  (см. задачу 2 § 4.2). Пусть  $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n/4^n$ . Покажите, что функция  $f$  непрерывна справа в каждой точке  $t \in J$  [т. е.  $f(t+) = f(t)$ ], не постоянна ни в одном подпромежутке  $J$ , содержащем более одной точки, и имеет в каждой точке  $t \in J$  правую производную, равную 0.

2. Покажите, что заключение теоремы (8.5.1) останется справедливым, если предположить только, что  $f$  и  $\varphi$  имеют в каждой точке  $\xi \in I \setminus D$  (исключая  $\beta$ ) правую производную и что  $\|f'_d(\xi)\| \leq \varphi'_d(\xi)$ .

3. Пусть  $f$  — действительная непрерывная функция в компактном промежутке  $[\alpha, \beta]$ , имеющая в каждой точке промежутка  $[\alpha, \beta]$  правую производную. Пусть  $m$  и  $M$  — нижняя и верхняя грани  $f'_d$  в  $[\alpha, \beta]$ .

а) Покажите, что если  $f$  не есть отображение  $t \rightarrow \lambda t + \mu$ , то множество всех чисел вида  $(f(x) - f(y))/(x - y)$ , где  $x$  и  $y$  — произвольные числа из промежутка  $[\alpha, \beta]$ , и  $x \neq y$  совпадает с промежутком  $]m, M[$ .

[Вычтя подходящим образом выбранную функцию вида  $t \rightarrow \lambda t + \mu$ , сведите задачу к доказательству того, что если  $f'_d(\gamma) f'_d(\delta) < 0$  и  $\gamma < \delta$ , то в промежутке  $]\gamma, \delta[$  существуют две различные точки, в которых  $f$  принимает одно и то же значение.]

б) Покажите, что если  $f$ , кроме того, в каждой точке промежутка  $]\alpha, \beta[$  имеет левую производную, то верхние (соответственно нижние) грани производных  $f'_d$  и  $f'_g$  в  $]\alpha, \beta[$  совпадают.

с) Выведите из б), что если  $f$  в каждой точке промежутка  $]\alpha, \beta[$  имеет производную, то образ при  $f'$  любого промежутка, содержащегося в  $]\alpha, \beta[$ , связан [см. (3.19.1)].

4. Пусть  $f$  — отображение промежутка  $I = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}^2$ , определяемое следующим образом:  $f(t) = (0, 0)$ , если  $-1 \leq t \leq 0$ , и  $f(t) = (t^2 \sin(1/t), t^2 \cos(1/t))$ , если  $0 < t \leq 1$ . Покажите, что  $f$  имеет производную в каждой точке промежутка  $]-1, +1[$ , но образ этого промежутка при отображении  $f'$  несвязен.

5. Распространите теорему (8.5.4) на случай, когда  $f$  предполагается только квазидифференцируемой (задача 4 § 8.4) в каждой точке сегмента  $S$  и  $f'$  обозначает квазипроизводную.

6. Пусть  $F$  — действительное гильбертово пространство. Выполните теорему (8.5.1) из такой же теоремы для действительных функций  $g$ , применения ее к действительной функции  $\xi \rightarrow (f(\xi) | a)$ , где  $a \in F$ . (Этот метод фактически можно применить к любому банахову пространству и даже к более общему классу топологических векторных пространств; см. книги [6] и [23].)

## 6. Приложения теоремы о среднем значении

**(8.6.1)** Пусть  $A$  — открытое связное множество в банаховом пространстве  $E$  и  $f$  — непрерывное отображение множества  $A$  в банахово пространство  $F$ . Если  $f$  имеет в каждой точке множества  $A$  производную, равную 0, то  $f$  постоянно.

Пусть  $x_0$  — произвольная точка множества  $A$  и  $B$  — множество тех точек  $x \in A$ , в которых  $f(x) = f(x_0)$ . Очевидно,  $B$  замкнуто в  $A$  (3.15.1). С другой стороны, если  $x \in B$  и  $U$  — открытый шар с центром  $x$ , содержащийся в  $A$ , то  $U$  содержит сегмент, соединяющий  $x$  с любой из его точек  $y$ ; поэтому в силу (8.5.4)  $f(y) = f(x) = f(x_0)$ . Это показывает, что множество  $B$  и открыто в  $A$  и, значит, совпадает с  $A$  (3.19).

Более сильные результаты можно получить с помощью (8.5.2). Например, если  $E = \mathbb{R}$  и  $A$  — промежуток в  $\mathbb{R}$ , то для доказательства постоянства  $f$  достаточно предположить, что производная отображения  $f$  существует и равна 0 во всех точках, за исключением счетного множества.

**(8.6.2)** Пусть  $E, F$  — два банаховых пространства и  $f$  — дифференцируемое отображение в  $F$  некоторой открытой окрест-

ности  $A$  сегмента  $S$ , соединяющего две точки  $a$  и  $b$ . Тогда для каждой точки  $x_0 \in A$  имеем

$$\|f(b) - f(a) - f'(x_0)(b - a)\| \leq \|b - a\| \sup_{x \in S} \|f'(x) - f'(x_0)\|.$$

Достаточно применить (8.5.4) к отображению

$$x \rightarrow f(x) - f'(x_0) \cdot x,$$

производной которого в силу (8.2.2) и (8.1.3) является  $t \rightarrow (f'(x) - f'(x_0)) \cdot t$ .

**(8.6.3)** Пусть  $A$  — открытое связное множество в банаховом пространстве  $E$  и  $(f_n)$  — последовательность дифференцируемых отображений множества  $A$  в банахово пространство  $F$ . Предположим, что:

1°) существует по крайней мере одна такая точка  $x_0 \in A$ , что последовательность  $(f_n(x_0))$  сходится в  $F$ ;

2°) для каждой точки  $a \in A$  существует такой шар  $B(a)$  с центром  $a$ , содержащийся в  $A$ , что в  $B(a)$  последовательность  $(f'_n)$  сходится равномерно.

Тогда для каждой точки  $a \in A$  последовательность  $(f_n)$  равномерно сходится в  $B(a)$ . Если, кроме того,  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  и  $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$  для каждой точки  $x \in A$ , то и  $g(x) = f'(x)$  для каждой точки  $x \in A$ .

Пусть  $r$  — радиус шара  $B(a)$ . Тогда в силу (8.5.4) для любой точки  $x \in B(a)$  имеем

$$\begin{aligned} \|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(a) - f_m(a))\| &\leq \|x - a\| \cdot \sup_{z \in B(a)} \|f'_n(z) - f'_m(z)\| \leq \\ (8.6.3.1) \quad &\leq r \cdot \sup_{z \in B(a)} \|f'_n(z) - f'_m(z)\|. \end{aligned}$$

Так как последовательность  $(f'_n)$  равномерно сходится в  $B(a)$ , а  $F$  — полное пространство, то это доказывает, что если последовательность  $(f_n(x))$  сходится в какой-нибудь точке шара  $B(a)$ , то она сходится и в каждой точке  $B(a)$ , а в действительности равномерно сходится в  $B(a)$ . Отсюда прежде всего следует, что множество  $U$  точек  $x$ , в которых последовательность  $(f_n(x))$  сходится, одновременно открыто и замкнуто в  $A$ , а так как оно по предположению не пусто и  $A$  связно, то  $U = A$ .

Наконец, докажем, что  $g$  — производная отображения  $f$ . Пусть задано  $\epsilon > 0$ . Тогда, по предположению, существует такой номер  $n_0$ , что при  $n \geq n_0$  и  $m \geq n_0$  для каждой точки  $z \in B(a)$  имеет место неравенство  $\|f'_n(z) - f'_m(z)\| \leq \epsilon$  и, кроме того, неравенство  $\|g(a) - f'_n(a)\| \leq \epsilon$ . Устремляя индекс  $m$  в (8.6.3.1) к  $+\infty$ , видим, что при  $n \geq n_0$  и  $x \in B(a)$

$$\|f(x) - f(a) - (f_n(x) - f_n(a))\| \leq \epsilon \|x - a\|.$$

С другой стороны, для произвольного  $n \geq n_0$  существует такое  $r' \leq r$ , что неравенство  $\|f_n(x) - f_n(a) - f'_n(a)(x - a)\| \leq \varepsilon \|x - a\|$  выполняется при  $\|x - a\| \leq r'$ . Пользуясь (5.7.4), при  $\|x - a\| \leq r'$  находим

$$\|f(x) - f(a) - g(a)(x - a)\| \leq 3\varepsilon \|x - a\|,$$

тем самым доказывая, что производная  $f'(a)$  существует и равна  $g(a)$ .

В случае когда  $E = \mathbb{R}$  и  $A$  — промежуток в  $\mathbb{R}$ , мы можем снова установить более сильные результаты:

**(8.6.4)** Пусть  $(g_n)$  — последовательность отображений промежутка  $I \subset \mathbb{R}$  в  $F$  и пусть при каждом  $n$  для всех точек  $\xi \in I$ , за исключением точек счетного множества  $D_n \subset I$ , функция  $g_n(\xi)$  есть производная непрерывной функции  $f_n$ . Предположим, кроме того, что:

1) существует по крайней мере одна такая точка  $\xi_0 \in I$ , что последовательность  $(f_n(\xi_0))$  сходится в  $F$ ;

2) у каждой точки  $\zeta \in I$  существует такая окрестность  $B(\zeta)$  относительно  $I$ , что в  $B(\zeta)$  последовательность  $(g_n)$  сходится равномерно.

Тогда для каждой точки  $\zeta \in I$  последовательность  $(f_n)$  равномерно сходится в  $B(\zeta)$ , и если мы положим  $f(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\xi)$  и  $g(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(\xi)$ , то в каждой точке промежутка  $I$ , не принадлежащей  $\bigcup_n D_n$ , выполнено равенство  $f'(\xi) = g(\xi)$ .

Нужно повторить доказательство теоремы (8.6.3), воспользовавшись (8.5.2) вместо (8.5.4).

Из (8.6.3), в частности, получаем

**(8.6.5)** Пусть  $A$  — открытое связное множество в банаевом пространстве  $E$  и  $(u_n)$  — последовательность дифференцируемых отображений множества  $A$  в банаево пространство  $F$ . Если для каждой точки  $a \in A$  существует такой шар  $B(a)$  с центром  $a$ , содержащийся в  $A$ , что ряд  $(u'_n)$  равномерно сходится в  $B(a)$ , и если существует такая точка  $x_0 \in A$ , что ряд  $(u_n(x_0))$  сходится, то для каждой точки  $a \in A$  ряд  $(u_n)$  равномерно сходится в  $B(a)$  и его сумма  $s(x)$  в каждой точке  $x \in A$  имеет производную, равную  $\sum_{n=0}^{\infty} u'_n(x)$ .

### Задачи

- Пусть  $f$  и  $g$  — две действительные дифференцируемые функции в открытом промежутке  $I \subset \mathbb{R}$ . Предполагается, что в  $I$  выполнены неравенства  $f(t) > 0$ ,  $g(t) > 0$ ,  $f'(t) > 0$  и  $g'(t) > 0$ . Покажите, что если функция  $f'/g'$  строго возрастает в  $I$ , то функция  $f/g$  либо строго возрастает в  $I$ , либо

строго убывает в  $I$ , либо же существует такая точка  $c \in I$ , что функция  $f/g$  при  $t \leq c$  строго убывает, а при  $t \geq c$  — строго возрастает.

[Докажите, что если  $f'(s)/g'(s) < f(s)/g(s)$ , то для любого  $t < s$  имеем  $f'(t)/g'(t) < f(t)/g(t)$ .]

Примените это к отношению

$$\frac{\frac{\lg t}{t} - \frac{\lg a}{a}}{t \lg t - a \lg a}$$

в промежутке  $[a, \pi/2]$ , где  $a > 0$ .

2. а) Пусть  $I$  — открытый промежуток в  $\mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$  — один из его концов и  $f$  — непрерывное отображение промежутка  $I$  в банахово пространство  $E$ . Допустим, что существует такое счетное множество  $D \subset I$ , что в каждой точке множества  $I \setminus D$  отображение  $f$  имеет правую производную. Докажите следующий критерий: для того чтобы производная  $f'_d(t)$  имела предел, когда  $t$  стремится к  $x_0$  по множеству  $I \setminus D$ , необходимо и достаточно, чтобы отношение  $(f(t) - f(s))/(t - s)$  имело предел, когда пара  $(s, t)$  стремится к  $(x_0, x_0)$  по множеству, определяемому условиями  $s \in I$ ,  $t \in I$ ,  $s \neq t$ . Оба предела в этом случае совпадают. Покажите, что если  $c$  — их общее значение, то  $f(t)$  имеет предел в  $E$ , когда  $t$  стремится к  $x_0$  по  $I$ , и что если  $f$  продолжить по непрерывности на  $I \cup \{x_0\}$  (3.15.5), то отношение  $(f(t) - f(x_0))/(t - x_0)$  будет стремиться к  $c$ , когда  $t$  стремится к  $x_0$  по  $I$ .

[Воспользуйтесь теоремой о среднем значении и критерием Коши.]

б) Покажите, что в каждой точке  $t \in I \setminus D$ , в которой производная  $f'_d$  непрерывна слева, отображение  $f$  имеет левую производную. Если в точке  $t \in I \setminus D$  производная  $f'_d$  непрерывна, то  $f$  имеет производную в точке  $t$ .

[Примените а).]

3. Пусть  $f$  — дифференцируемое отображение открытого множества  $A \subset E$  в  $F$  ( $E$  и  $F$  — банаховы пространства). Докажите:

а) Для непрерывности производной  $f'$  в точке  $x_0$  необходимо и достаточно, чтобы для любого  $\epsilon > 0$  существовало такое  $\delta > 0$ , что из  $\|s\| \leq \delta$ ,  $\|t\| \leq \delta$  следует  $\|f(x_0 + s) - f(x_0 + t) - f'(x_0)(s - t)\| \leq \epsilon \|s - t\|$ .

б) Для равномерной непрерывности производной  $f'$  в  $A$  необходимо и достаточно, чтобы для любого  $\epsilon > 0$  существовало такое  $\delta > 0$ , что из  $\|s\| \leq \delta$ ,  $x \in A$ ,  $x + \xi s \in A$  при  $0 \leq \xi \leq 1$  следует  $\|f(x + s) - f(x) - f'(x)s\| \leq \epsilon \|s\|$ .

4. Пусть  $f$  — непрерывное отображение компактного промежутка  $I \subset \mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$ , имеющее в  $I$  непрерывную производную. Пусть  $S$  — множество точек  $t \in I$ , в которых  $f'(t) = 0$ . Покажите, что для любого  $\epsilon > 0$  существует

такая последовательность  $(r_n)$  чисел  $> 0$ , что  $\sum_{n=0}^{\infty} r_n \leq \epsilon$  и что множество  $f(S)$  содержится в объединении счетного числа промежутков  $J_n$  с диаметрами  $\delta(J_n) \leq r_n$ .

[Для любого  $\alpha > 0$  рассмотрите открытое подмножество  $U_\alpha$  промежутка  $I$ , состоящее из точек  $t$ , в которых  $|f'(t)| < \alpha$ ; воспользуйтесь (3.19.6) и теоремой о среднем значении.]

5. Пусть  $f$  — такое непрерывное отображение промежутка  $I \subset \mathbb{R}$  в  $\mathbb{C}$ , что  $f(t) \neq 0$  в  $I$  и что в дополнении счетного множества  $D \subset I$  существует  $f'_d(t)$ . Покажите, что, для того чтобы функция  $|f|$  была возрастающей в  $I$ , необходимо и достаточно, чтобы в  $I \setminus D$  выполнялось неравенство  $\Re(f'_d(t))/(f(t)) \geq 0$ .

6. Пусть  $E, F$  — два банаховых пространства,  $A$  — открытое множество в  $E$  и  $B$  — замкнутое подмножество подпространства  $A$ , внутренность которого пуста и которое обладает тем свойством, что любой сегмент в  $E$ , не содержащийся в  $B$ , имеет с  $B$  не более чем счетное пересечение. Пусть  $f$  — непрерывно дифференцируемое отображение множества  $A \setminus B$  в  $F$ , и предположим, что в каждой точке  $b \in B$  существует предел  $f'(x)$  по множеству  $A \setminus B$ . Покажите, что отображение  $f$  может быть продолжено по непрерывности в непрерывно дифференцируемое отображение  $\tilde{f}$  множества  $A$  в  $F$ .

[Тот же метод, что и в задаче 2, а.)]

## 7. Первообразные и интегралы

Пусть  $f$  — отображение промежутка  $I \subset \mathbb{R}$  в банахово пространство  $F$ . Мы будем говорить, что непрерывное отображение  $g$  промежутка  $I$  в  $F$  есть *первообразная* отображения  $f$  в  $I$ , если существует такое счетное множество  $D \subset I$ , что  $g$  дифференцируемо в каждой точке  $\xi \in I \setminus D$  и  $g'(\xi) = f(\xi)$ .

**(8.7.1)** Если  $g_1$  и  $g_2$  — две первообразные отображения  $f$  в  $I$ , то отображение  $g_1 - g_2$  постоянно.

Это сразу следует из обобщения теоремы (8.6.1).

**Замечание.** Любой промежуток  $I$  в  $\mathbb{R}$  (не состоящий из одной точки) является объединением возрастающей последовательности компактных промежутков  $J_n$ . Чтобы убедиться в том, что функция  $f$ , определенная в  $I$ , имеет первообразную, нужно только проверить это для сужения отображения  $f$  на каждом из этих промежутков  $J_n$ . В самом деле, если  $\xi_0$  — внутренняя точка промежутка  $J_1$  и если  $g_n$  для каждого  $n$  — такая первообразная в  $J_n$  сужения  $f$  на  $J_n$ , что  $g_n(\xi_0) = 0$  [в силу (8.7.1) однозначно определенная], то сужение отображения  $g_{n+1}$  на  $J_n$  является первообразной отображения  $f$  в  $J_n$ , обращающейся в 0 в точке  $\xi_0$ , и, значит, равно  $g_n$ . Мы можем поэтому определить отображение  $g$  промежутка  $I$  в  $F$ , полагая  $g$  равным  $g_n$  в  $J_n$ , и очевидно, что  $g$  является первообразной отображения  $f$  в  $I$ .

**(8.7.2)** Пусть  $I$  — промежуток в  $\mathbb{R}$ . Любое простое отображение промежутка  $I$  в банахово пространство  $F$  (7.6) (в частности, любое непрерывное отображение в  $F$  и, — в слу-

чае, когда  $F = \mathbb{R}$  — любая монотонная функция) имеет первообразную в  $I$ .

Из предыдущего замечания следует, что промежуток  $I$  мы можем считать компактным. Тогда из (8.6.4) и (7.6.1) вытекает, что нам нужно доказать теорему только для ступенчатых функций. Пусть  $f$  — ступенчатая функция и  $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq n}$  — возрастающая последовательность таких точек в промежутке  $I = [\alpha, \beta]$ , что  $\lambda_0 = \alpha$ ,  $\lambda_n = \beta$  и отображение  $f(\xi)$  в промежутке  $[\lambda_i, \lambda_{i+1}]$  равно постоянной  $c_i$  ( $0 \leq i \leq n - 1$ ). Если тогда отображение  $g$  определить так, чтобы в каждом промежутке  $[\lambda_i, \lambda_{i+1}]$  ( $0 \leq i \leq n - 1$ ) выполнялось равенство  $g(\xi) = c_i(\xi - \lambda_i) + \sum_{k=0}^{i-1} c_k(\lambda_{k+1} - \lambda_k)$ , то легко проверить, что  $g$  является первообразной отображения  $f$ .

Первообразная ступенчатой функции называется также *кусочно линейной функцией*

Для непрерывной функции далее имеем

**(8.7.3)** *Если  $g$  — первообразная непрерывного отображения  $f$  промежутка  $I$  в  $F$ , то в каждой точке  $\xi \in I$  отображение  $g$  имеет производную относительно  $I$ , равную  $f(\xi)$ .*

В самом деле, из (8.5.2) следует, что в каждом промежутке  $[\xi, \xi + \lambda] \subset I$

$$\|g(\xi + \zeta) - g(\xi) - f(\xi)\zeta\| \leq \zeta \sup_{0 \leq \eta \leq \lambda} \|f(\xi + \eta) - f(\xi)\|,$$

где  $0 \leq \zeta \leq \lambda$ , а верхняя грань  $\sup_{0 \leq \eta \leq \lambda} \|f(\xi + \eta) - f(\xi)\|$  по предположению сколь угодно мала вместе с  $\lambda$ .

Если  $g$  — произвольная первообразная простой функции  $f$ , то разность  $g(\beta) - g(\alpha)$  для любых двух точек промежутка  $I$  ввиду (8.7.1) не зависит от выбора рассматриваемой первообразной  $g$ . Эта разность обозначается символом  $\int_a^b f(\xi) d\xi$  и называется *интегралом от функции  $f$  от  $a$  до  $b$* .

Любое формальное правило дифференцирования можно перевести на язык этих обозначений и получить соответствующую формулу „интегрального исчисления“. Мы выпишем в явном виде лишь три наиболее важные формулы. При этом, если  $g$  — первообразная простой функции  $f$ , мы будем писать  $g'$  вместо  $f$ , хотя  $g$ , вообще говоря, имеет производную не всюду, и, даже когда эта производная существует, она может быть не равна  $f$  (в точках счетного множества).

**(8.7.4)** *(Замена переменных) Пусть  $\varphi$  — действительная первообразная некоторой простой функции, определенная в промежутке  $I$ ; пусть  $f$  — произвольная простая функция,*

определенная в промежутке  $I \ni \varphi(I)$ . Тогда если  $f$  непрерывна или  $\varphi$  монотонна, то для любых двух точек  $\alpha$  и  $\beta$  промежутка  $I$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(\xi)) \varphi'(\xi) d\xi = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(\zeta) d\zeta.$$

Единственное, что нужно проверить — это что  $f(\varphi(\xi)) \varphi'(\xi)$  есть простая функция. Но это сразу следует из предположений и из определения простой функции (7.6). Тогда, если  $g$  — первообразная функции  $f$ , обе части написанного равенства ввиду (8.4.1) равны  $g(\varphi(\beta)) - g(\varphi(\alpha))$ .

**(8.7.5)** (Интегрирование по частям) Пусть  $f$  и  $g$  — первообразные некоторых простых функций, определенные в промежутке  $I$  и принимающие значения соответственно в двух банаховых пространствах  $E$  и  $F$ , и пусть  $(x, y) \rightarrow [x \cdot y]$  — непрерывное билинейное отображение произведения  $E \times F$  в банахово пространство  $G$ . Тогда для любых двух точек  $\alpha$  и  $\beta$  промежутка  $I$

$$\int_{\alpha}^{\beta} [f(\xi) \cdot g'(\xi)] d\xi = [f(\beta) \cdot g(\beta)] - [f(\alpha) \cdot g(\alpha)] - \int_{\alpha}^{\beta} [f'(\xi) \cdot g(\xi)] d\xi.$$

Снова нужно лишь проверить, что  $[f \cdot g']$  и  $[f' \cdot g]$  — простые функции, и тогда утверждение следует из (8.1.4) и (8.4.1).

**(8.7.6)** Пусть  $f$  — простое отображение промежутка  $I$  в банахово пространство  $F$  и  $u$  — непрерывное линейное отображение пространства  $F$  в банахово пространство  $G$ . Тогда

$$\int_{\alpha}^{\beta} u(f(\xi)) d\xi = u \left( \int_{\alpha}^{\beta} f(\xi) d\xi \right).$$

Это следует из (8.4.1) и (8.1.3).

Перевод на язык интегралов теоремы о среднем значении выглядит так:

**(8.7.7)** Для любой простой функции  $f$  в компактном промежутке  $I$

$$\left\| \int_{\alpha}^{\beta} f(\xi) d\xi \right\| \leq \int_{\alpha}^{\beta} \|f(\xi)\| d\xi \leq (\beta - \alpha) \sup_{\xi \in I} \|f(\xi)\|.$$

И здесь, чтобы применить (8.5.1), нужно только проверить, что функция  $\xi \rightarrow \|f(\xi)\|$  проста.

В заключение выразим на языке интегралов результаты, соответствующие теоремам (8.6.4) и (8.6.5):

**(8.7.8)** Если последовательность  $(g_n)$  простых функций, определенных в компактном промежутке  $I = [\alpha, \beta]$ , равномерно сходится в  $I$  к функции  $g$ , то последовательность  $\left( \int_{\alpha}^{\beta} g_n(\xi) d\xi \right)$  сходится к  $\int_{\alpha}^{\beta} g(\xi) d\xi$ .

Напомним, что в силу (7.6.1) функция  $g$  проста.

**(8.7.9)** Если ряд  $(u_n)$  простых функций, определенных в компактном промежутке  $I = [\alpha, \beta]$ , нормально сходится в  $I$  (7.1), то ряд с общим членом  $\int_{\alpha}^{\beta} u_n(\xi) d\xi$  абсолютно сходится и

$$\int_{\alpha}^{\beta} u(\xi) d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} u_n(\xi) d\xi, \text{ где } u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

Абсолютная сходимость сразу следует из предположения и из теоремы о среднем значении (8.7.7).

### Задачи

1. Пусть  $f$  — простая функция, определенная в компактном промежутке  $I \subset \mathbb{R}$ . Покажите, что для любого  $\epsilon > 0$  существует такое число  $\delta > 0$ , что для любой возрастающей последовательности  $x_0 \leq t_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_k \leq t_k \leq x_{k+1} \leq \dots \leq x_n$  точек промежутка  $I$ , удовлетворяющих условию  $x_{k+1} - x_k \leq \delta$ , выполняется неравенство

$$\left\| \int_{x_0}^{x_n} f(t) dt - \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k) (x_{k+1} - x_k) \right\| \leq \epsilon.$$

(Римановы суммы; рассмотрите сначала случай, когда  $f$  — ступенчатая функция.)

2. а) Пусть  $f$  — простая функция, определенная в компактном промежутке  $I = [a, b]$ . Покажите, что для любого  $\epsilon > 0$  существует такая функция  $g$ , непрерывная в  $I$ , что  $\int_a^b \|f(t) - g(t)\| dt \leq \epsilon$ .

б) Пусть  $f$  принимает значения в  $E$ , пусть  $h$  — простая функция, определенная в  $I$  и принимающая значения в  $F$ , и пусть  $(x, y) \mapsto [x \cdot y]$  — непрерывное билинейное отображение произведения  $E \times F$  в  $G$  ( $E, F$  и  $G$  —

банаховы пространства). Покажите, что

$$\lim_{s \rightarrow 0, s > 0} \int_a^b [f(t) \cdot h(t+s)] dt = \int_a^b [f(t) \cdot h(t)] dt.$$

с) Покажите, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \sin nt dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \cos nt dt = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f(t)| \sin nt |dt| = \frac{2}{\pi} \int_a^b f(t) dt.$$

д) Пусть  $u$  — первообразная функции  $f$ , и предположим, что  $u(I)$  содержится в шаре  $B \subset E$ . Покажите, что если  $g$  — монотонная функция в  $I$ , то

$$\int_a^b f(t) g(t) dt = (u(b) - c) g(b) + (c - u(a)) g(a),$$

где  $c \in B$ . В частности, если  $f$  — действительная функция, то существует такая точка  $s \in I$ , что

$$\int_a^b f(t) g(t) dt = g(a) \int_a^s f(t) dt + g(b) \int_s^b f(t) dt$$

(вторая теорема о среднем значении).

[Во всех этих задачах воспользуйтесь тем же методом, что и в задаче 1.]

3. Пусть  $f$  — простая функция, определенная в компактном промежутке  $I = [a, b]$ . Для любого целого  $n > 0$  и любого целого  $k$ , удовлетворяющего условию  $0 \leq k \leq n$ , положим  $x_k = a + k(b-a)/n$ . Пусть

$$r(n) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) - \int_a^b f(t) dt.$$

а) Пусть  $f$  имеет в  $I$  непрерывную производную. Покажите, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nr(n) = \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)).$$

[Запишите  $r(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x_{k+1}) - f(t)) dt$ ; примените теорему о

среднем значении и задачу 1.]

б) Пусть  $f$  — возрастающая действительная функция в промежутке  $I$ . Покажите, что

$$0 \leq r(n) \leq \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)).$$

с) Приведите пример возрастающей непрерывной функции  $f$  в  $I$ , для которой произведение  $nr(n)$  не стремится к  $\frac{b-a}{2}(f(b)-f(a))$ , когда  $n$  стремится к  $+\infty$ .

[В качестве  $f$  возьмите предел последовательности  $(f_n)$  возрастающих непрерывных кусочно-линейных функций, удовлетворяющих условиям

$$(b-a) \sum_{k=1}^{2^n} f_n\left(a+k \frac{b-a}{2^n}\right) - 2^n \int_a^b f_n(t) dt \geq \frac{3}{4}(b-a)(f_n(b)-f_n(a))$$

и

$$f_{n+1}\left(a+k \frac{b-a}{2^n}\right) = f_n\left(a+k \frac{b-a}{2^n}\right) \text{ при } 0 \leq k \leq 2^n.$$

4. Покажите, что при  $n$ , стремящемся к  $+\infty$ , многочлен

$$f_n(x) = \frac{\int_0^x (1-t^2)^n dt}{\int_0^1 (1-t^2)^n dt}$$

на любом промежутке  $[-1, -\epsilon]$  равномерно сходится к  $-1$ , а на любом промежутке  $[\epsilon, +1]$  равномерно сходится к  $+1$  ( $\epsilon$  — произвольное число, удовлетворяющее условию  $0 < \epsilon < 1$ ).

[Воспользуйтесь неравенством  $\int_0^1 (1-t^2)^n dt \geq \int_0^1 (1-t)^n dt$ .]

Пусть  $g_n(x) = \int_0^x f_n(t) dt$ . Покажите, что многочлены  $g_n$  равномерно

сходятся в промежутке  $[-1, +1]$  к функции  $|x|$ , получив тем самым новое доказательство утверждения (7.3.1.3).

5. Пусть  $f$  — непрерывное отображение промежутка  $[x_0, +\infty[$  в банахово пространство  $E$ , обладающее тем свойством, что при каждом  $\lambda > 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+\lambda) - f(x)) = 0.$$

а) Покажите, что  $f(x+\lambda) - f(x)$  равномерно стремится к 0, когда  $x$  стремится к  $+\infty$ , а  $\lambda$  принадлежит компактному промежутку  $K = [a, b] \subset \subset [0, +\infty[$  (т. е. для каждого  $\epsilon > 0$  существует такое  $A > 0$ , что из  $x \geq A$  следует справедливость неравенства  $\|f(x+\lambda) - f(x)\| \leq \epsilon$  при любом  $\lambda \in K$ ).

[Проведите доказательство от противного. Допустим, что существует такая последовательность  $(x_n)$ , что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ , и такая последовательность  $(\lambda_n)$  точек промежутка  $K$ , что при каждом  $n$  выполняется неравенство  $\|f(x_n + \lambda_n) - f(x_n)\| > \alpha > 0$ . Заметим, что у  $\lambda_n$  существует такая окрестность  $J_n$  в  $K$ , что неравенство  $\|f(x_n + \lambda) - f(x_n)\| > \alpha$  выполняется

для любой точки  $\lambda \in J_n$ . По индукции определим убывающую последовательность замкнутых промежутков  $I_k \subset K$  и подпоследовательность  $(x_{n_k})$  последовательности  $(x_n)$  так, чтобы  $\|f(x_{n_k} + \mu) - f(x_{n_k})\| \geq a/3$  при каждом  $\mu \in I_k$ . Чтобы определить  $I_{k+1}$ , когда промежуток  $I_k$  уже построен, заметим, что если  $\delta_k$  — длина промежутка  $I_k$  и  $q$  — целое число, для которого  $q\delta_k > b - a$ , то при достаточно большом  $x$  имеет место неравенство  $\|f(x + \delta_k) - f(x)\| \leq a/3q$ .

b) Выведите из а), что  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \int_x^{x+1} f(t) dt - f(x) \right) = 0$ , и заключите

отсюда, что  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/x = 0$ .

6. а) Покажите, что существует дифференцируемая действительная функция  $f$  (соответственно  $g$ ) в  $\mathbb{R}$ , обладающая тем свойством, что  $f'(t) = -\sin(1/t)$  (соответственно  $g'(t) = \cos(1/t)$ ) при  $t \neq 0$  и  $f'(0) = 0$  (соответственно  $g'(0) = 0$ ). Функции  $f'$  и  $g'$  не являются простыми.

[Рассмотрите производные функций  $t^2 \cos(1/t)$  и  $t^2 \sin(1/t)$ .]

б) Пусть  $P(t, u, v)$  — многочлен относительно  $u$  и  $v$ , коэффициенты которого являются непрерывными действительными функциями от  $t$  в открытом промежутке  $I \subset \mathbb{R}$ , содержащем 0. Покажите, что существует такая дифференцируемая функция  $f$  в  $I$ , что  $f'(t) = P(t, \sin(1/t), \cos(1/t))$  при  $t \neq 0$ .

[Выразите одночлены относительно  $\sin(1/t)$  и  $\cos(1/t)$  как линейные комбинации членов вида  $\sin(k/t)$  и  $\cos(k/t)$  и примените а).]

Каково значение  $f'(0)$ ? Покажите, что можно получить  $f'(0) \neq P(0, 0, 0)$ .

с) Покажите, что существует такая дифференцируемая функция  $f$  в промежутке  $[-1, +1]$ , что  $f'(t) = \sin(1/\sin(1/t))$  в каждой точке  $t$ , отличной от 0 и от точек  $1/n\pi$  ( $n$  — целое число, положительное или отрицательное).

[В окрестности точки  $t = 1/n\pi$  возьмите  $t = 1/(n\pi + \arcsin u)$  и с помощью б) докажите, что существует  $f'(1/n\pi)$ . Далее, покажите, что существует такая константа  $a > 0$ , не зависящая от  $n$ , что

$$\left| \int_{2/(2n+1)\pi}^{2/(2n-1)\pi} \frac{\sin \frac{1}{t}}{\sin \frac{1}{t}} dt \right| < \frac{a}{n^3}$$

при любом целом  $n > 0$ . Затем рассмотрите функцию

$$g(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^t \frac{\sin \frac{1}{s}}{\sin \frac{1}{s}} ds$$

при  $t > 0$  и подобным же образом определите  $f$  при  $t < 0$ .]

7. Пусть  $I = [0, 1]$  и пусть  $E$  — векторное пространство простых комплексных функций, определенных в  $I$ , ограниченных и непрерывных справа (т. е.  $f(t+) = f(t)$  при  $t \in I$ ).

a) Покажите, что  $(f | g) = \int_{-1}^{+1} f(t) \overline{g(t)} dt$  есть невырождающаяся положительная эрмитова форма в  $E$  [см. (8.5.3)]. Докажите, что таким образом определенное предгильбертово пространство  $E$  не является полным.

[Используйте тот факт, что функция, равная  $\sin(1/t)$  при  $t > 0$  и 0 при  $t = 0$ , не принадлежит  $E$ .]

b) Определим последовательность  $(f_n)$  элементов пространства  $E$  следующим образом:

1°)  $f_0$  есть постоянная функция 1;

2°) пусть  $m$  для каждого целого  $n > 0$  — наибольшее целое число, удовлетворяющее условию  $2^m \leq n$ , и пусть  $n = 2^m + k$ ; тогда функция  $f_n$  равна  $2^{m/2}$  при  $2k/2^{m+1} \leq t < (2k+1)/2^{m+1}$ ,  $-2^{m/2}$  при  $(2k+1)/2^{m+1} \leq t < (2k+2)/2^{m+1}$  и 0 при всех остальных значениях  $t$  в  $I$ . Докажите, что в предгильбертовом пространстве  $E$  последовательность  $(f_n)$  является ортонормальной системой (ортонормальной системой Хаара).

c) Для каждого  $n \geq 0$  пусть  $V_n$  — подпространство пространства  $E$ , порожденное функциями  $f_k$  с индексами  $k \leq n$ . Покажите, что существует такое разложение промежутка  $I$  на  $n+1$  промежуток вида  $[\alpha, \beta]$  без общих точек, что на каждом из этих промежутков всякая функция, принадлежащая  $V_n$ , постоянна. Наоборот, всякая функция, обладающая этим свойством, принадлежит  $V_n$ .

[Рассмотрите размерность векторного подпространства пространства  $E$ , порожденного этими функциями.]

d) Пусть  $g$  — произвольная функция из  $E$  и  $h$  — ее ортогональная проекция в  $V_n$  (6.3). Покажите, что  $h(t) = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} g(u) du$  в каждом из промежутков  $[\alpha, \beta]$ , на которых все функции, принадлежащие  $V_n$ , постоянны.

e) Пользуясь d), покажите, что для всякой непрерывной в  $I$  функции  $g \in E$  ряд с общим членом  $(g | f_n) f_n(t)$  равномерно сходится в  $I$  и что его сумма равна  $g(t)$ . Заключите из этого результата, что  $(f_n)$  есть тотальная ортонормальная система в  $E$ .

8. Пусть  $f$  — простая действительная функция в компактном промежутке  $I = [a, b]$  и пусть  $\int_a^b |f(t)| dt = c$ . Покажите, что для любого  $\epsilon > 0$  существует такая действительная непрерывная функция  $g$  в  $I$ , что  $|g(t)| \leq 1$  в  $I$  и что  $\int_a^b f(t) g(t) dt \geq c - \epsilon$ .

[Сведите задачу к случаю, когда  $f$  — ступенчатая функция.]

### 8. Приложение: число $e$

Каково бы ни было число  $a > 0$ , функция  $x \rightarrow a^x$  непрерывна в  $\mathbb{R}$  (4.3). Поэтому функция  $g(x) = \int_0^x a^t dt$  определена и дифференцируема в  $\mathbb{R}$  и всюду  $g'(x) = a^x$ . Очевидно, что  $g(x+1) = \int_0^{x+1} a^t dt = \int_0^x a^t dt + \int_x^{x+1} a^t dt$ . Но в силу (8.7.4)  $\int_x^{x+1} a^t dt = \int_0^1 a^{x+u} du = a^x \int_0^1 a^u du$ , и так как  $a^x \geq \inf(a, 1)$  при  $0 \leq x \leq 1$ , то в силу (8.5.3) число  $c = \int_0^1 a^u du > 0$ . Таким образом, мы можем записать

$$a^x = \frac{1}{c}(g(x+1) - g(x)),$$

и, следовательно, функция  $a^x$  дифференцируема в  $\mathbb{R}$  и  $D(a^x) = \varphi(a) \cdot a^x$ , где  $\varphi(a) \neq 0$ , если  $a \neq 1$ . Пусть  $a \neq 1$  и пусть  $b$ —любое число  $> 0$ . Мы можем написать

$$b^x = a^x \log_a b,$$

и, следовательно, в силу (8.4.1)

$$\varphi(b) \cdot b^x = \log_a b \cdot \varphi(a) \cdot a^x;$$

иными словами,

$$\varphi(b) = \varphi(a) \log_a b.$$

Таким образом, существует одно и только одно такое число  $e > 0$ , что  $\varphi(e) = 1$ , именно число  $e = a^{1/\varphi(a)}$ . Так как  $D(e^x) = e^x > 0$ , то  $e^x$ —строго возрастающая функция [ввиду (8.5.3)], и поэтому  $e = e^1 > e^0 = 1$ . Функцию  $e^x$  обозначают также символом  $\exp(x)$  или  $\exp x$ . Функция  $\log_e x$  обозначается символом  $\ln x$ , и из (8.2.3) и (4.2.2) следует, что  $D(\ln x) = 1/x$  при  $x > 0$ . Далее,  $D(a^x) = a^x \ln a$ .

#### Задача

Изучите изменение функций

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+p}, \quad \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x-p}, \quad \left(1 + \frac{p}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, \quad \left(1 + \frac{p}{x}\right)^{x+1}$$

при  $x > 0$ , где  $p$ —произвольное фиксированное положительное число. Найдите их пределы при  $x$ , стремящемся к  $+\infty$ .

## 9. Частные производные

Пусть  $f$  — дифференцируемое отображение открытого множества  $A$  банахова пространства  $E$  в банахово пространство  $F$ ;  $Df$  есть тогда отображение множества  $A$  в пространство  $\mathcal{L}(E; F)$ . Мы будем говорить, что  $f$  непрерывно дифференцируемо в  $A$ , если отображение  $Df$  непрерывно в  $A$ .

Предположим теперь, что  $E = E_1 \times E_2$ . Для каждой точки  $(a_1, a_2) \in A$  мы можем рассмотреть частные отображения  $x_1 \rightarrow f(x_1, a_2)$  и  $x_2 \rightarrow f(a_1, x_2)$  открытых подмножеств пространств  $E_1$  и  $E_2$  в  $F$ . Будем говорить, что отображение  $f$  в точке  $(a_1, a_2)$  дифференцируемо по первой (соответственно по второй) переменной, если частное отображение  $x_1 \rightarrow f(x_1, a_2)$  (соответственно  $x_2 \rightarrow f(a_1, x_2)$ ) дифференцируемо в точке  $a_1$  (соответственно  $a_2$ ). Производная этого отображения, являющаяся элементом пространства  $\mathcal{L}(E_1; F)$  (соответственно пространства  $\mathcal{L}(E_2; F)$ ), называется частной производной отображения  $f$  в точке  $(a_1, a_2)$  по первой (соответственно по второй) переменной и обозначается символом  $D_1f(a_1, a_2)$  (соответственно  $D_2f(a_1, a_2)$ ).

**(8.9.1)** Пусть  $f$  — непрерывное отображение открытого множества  $A$  пространства  $E_1 \times E_2$  в  $F$ . Для того чтобы  $f$  было непрерывно дифференцируемо в  $A$ , необходимо и достаточно, чтобы  $f$  было дифференцируемо в каждой точке  $A$  и по первой и по второй переменной и чтобы отображения  $(x_1, x_2) \rightarrow D_1f(x_1, x_2)$  и  $(x_1, x_2) \rightarrow D_2f(x_1, x_2)$  (множества  $A$  в  $\mathcal{L}(E_1; F)$  и в  $\mathcal{L}(E_2; F)$ ) были непрерывны в  $A$ . В этом случае производная  $f$  в каждой точке  $(x_1, x_2)$  множества  $A$  равна

$$(8.9.1.1) \quad Df(x_1, x_2) \cdot (t_1, t_2) = D_1f(x_1, x_2) \cdot t_1 + D_2f(x_1, x_2) \cdot t_2.$$

Необходимость. Отображение  $x_1 \rightarrow f(x_1, a_2)$  является композицией отображения  $f$  и отображения  $x_1 \rightarrow (x_1, a_2)$  пространства  $E_1$  в  $E_1 \times E_2$ , причем производная этого второго отображения в силу (8.1.2), (8.1.3) и (8.1.5) есть  $t_1 \rightarrow (t_1, 0)$ . Тогда в силу (8.2.1) отображение  $x_1 \rightarrow f(x_1, a_2)$  имеет в точке  $(a_1, a_2)$  производную, равную  $t_1 \rightarrow Df(a_1, a_2) \cdot (t_1, 0)$ . Если мы обозначим через  $i_1$  (соответственно  $i_2$ ) естественное вложение  $t_1 \rightarrow (t_1, 0)$  (соответственно  $t_2 \rightarrow (0, t_2)$ ), являющееся постоянным элементом  $\mathcal{L}(E_1; E_1 \times E_2)$  (соответственно  $\mathcal{L}(E_2; E_1 \times E_2)$ ), то мы, таким образом, увидим, что  $D_1f(a_1, a_2) = Df(a_1, a_2) \circ i_1$  и  $D_2f(a_1, a_2) = Df(a_1, a_2) \circ i_2$  (все это справедливо, если отображение  $f$  предполагается просто дифференцируемым в  $A$ ). Так как отображение  $(v, u) \rightarrow v \circ u$  пространства  $\mathcal{L}(E_1 \times E_2; F) \times \mathcal{L}(E_1; E_1 \times E_2)$  в  $\mathcal{L}(E_1; F)$  непрерывно [(5.7.5) и (5.5.1)], то непрерывность отображений  $D_1f$  и  $D_2f$  следует из непрерывности  $Df$ . Наконец, так как  $(t_1, t_2) = i_1(t_1) + i_2(t_2)$ , мы получаем формулу (8.9.1.1).

**Достаточность.** Запишем

$$\begin{aligned} f(a_1 + t_1, a_2 + t_2) - f(a_1, a_2) = \\ = (f(a_1 + t_1, a_2 + t_2) - f(a_1 + t_1, a_2)) + (f(a_1 + t_1, a_2) - f(a_1, a_2)). \end{aligned}$$

Если задано  $\epsilon > 0$ , то по предположению существует такое  $r > 0$ , что при  $\|t_1\| \leq r$

$$\|f(a_1 + t_1, a_2) - f(a_1, a_2) - D_1 f(a_1, a_2) \cdot t_1\| \leq \epsilon \|t_1\|.$$

С другой стороны, в шаре  $B$  с центром  $(a_1, a_2)$ , содержащемся в  $A$ , в силу (8.6.2) имеем

$$\begin{aligned} \|f(a_1 + t_1, a_2 + t_2) - f(a_1 + t_1, a_2) - D_2 f(a_1 + t_1, a_2) \cdot t_2\| \leq \\ \leq \|t_2\| \cdot \sup_{\|z\| \leq \|t_2\|} \|D_2 f(a_1 + t_1, a_2 + z) - D_2 f(a_1 + t_1, a_2)\|. \end{aligned}$$

Из непрерывности отображения  $D_2 f$ , таким образом, следует, что существует такое  $r' > 0$ , что при  $\|t_2\| \leq r'$  и  $\|t_1\| \leq r'$

$$\|f(a_1 + t_1, a_2 + t_2) - f(a_1 + t_1, a_2) - D_2 f(a_1 + t_1, a_2) \cdot t_2\| \leq \epsilon \|t_2\|,$$

и, кроме того,

$$\|D_2 f(a_1 + t_1, a_2) - D_2 f(a_1, a_2)\| \leq \epsilon;$$

поэтому в силу (5.7.4)

$$\|D_2 f(a_1 + t_1, a_2) \cdot t_2 - D_2 f(a_1, a_2) \cdot t_2\| \leq \epsilon \|t_2\|.$$

Наконец, при  $\sup(\|t_1\|, \|t_2\|) \leq \inf(r, r')$  имеем

$$\begin{aligned} \|f(a_1 + t_1, a_2 + t_2) - f(a_1, a_2) - D_1 f(a_1, a_2) \cdot t_1 - D_2 f(a_1, a_2) \cdot t_2\| \leq \\ \leq 4\epsilon \sup(\|t_1\|, \|t_2\|), \end{aligned}$$

что и доказывает формулу (8.9.1.1). Непрерывность отображения  $Df$  следует из того факта, что формулу (8.9.1.1) можно записать в виде  $Df = D_1 f \circ i_1 + D_2 f \circ i_2$ , и из (5.7.5).

Теорема (8.9.1) с помощью индукции по  $n$  может быть немедленно обобщена на произведение  $n$  банаховых пространств. Сопоставляя этот результат с (8.2.1), получаем

**(8.9.2)** Пусть  $f$  — непрерывно дифференцируемое отображение открытого множества  $A$  произведения  $E = \prod_{i=1}^n E_i$  в  $F$  и пусть  $g_i$  для каждого  $i$  есть непрерывно дифференцируемое отображение открытого множества  $B$  банахова пространства  $G$  в  $E_i$ , причем для любой точки  $z \in B$  точка  $(g_1(z), \dots, g_n(z)) \in A$ . Тогда сложное отображение  $f \circ (g_1, \dots, g_n)$  непрерывно дифференцируемо в  $B$  и

$$D(f \circ (g_1, \dots, g_n)) = \sum_{k=1}^n (D_k f) \circ (g_1, \dots, g_n) \circ Dg_k.$$