Задачи

1. Пусть E и F — два банаховых пространства и f — непрерывное отображение открытого множества $A \subset E$ в F. Предположим, что для любой точки $x \in A$ существует такой элемент $u(x) \in \mathscr{L}(E; F)$, что для всякого вектора $y \in E$ предел отношения $(f(x+ty) - f(x))/t$, когда $t \neq 0$ стремится в $\mathbf{R}$ к 0, существует и равен $u(x) \cdot y$. Предположим, кроме того, что $x \to u(x)$ есть непрерывное отображение множества A в $\mathscr{L}(E; F)$. Покажите, что тогда f непрерывно дифференцируемо в A и что $u(x) = \mathrm{D}f(x)$ для каждой точки $x \in A$.

[Примените теорему о среднем значении к функции $t \to f(x+ty)$ при $t \in [0, 1]$.]

2. Пусть E — пространство (c_0) Банаха (задача 5 § 5.3). Пусть F — *комплексное банахово пространство* $(c_0) + i(c_0)$ (состоящее из всех последовательностей $z = (\zeta_n)_{n \geqslant 0}$ комплексных чисел, удовлетворяющих условию $\lim\limits_{n \to \infty} \zeta_n = 0$) с нормой $\|z\| = \sup\limits_n |\zeta_n|$. Обозначим через F_0 действительное банахово пространство, базисное для F (5.1). Пусть $I \subset \mathbf{R}$ — открытый промежуток, содержащий 0, и для каждого целого $n \geqslant 0$ пусть f_n — такое непрерывное отображение промежутка I в $\mathbf{C}$, что из $\lim\limits_{n \to \infty} t_n = 0$ следует $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(t_n) = 0$. Тем самым определено отображение $f : (\xi_n) \to (f_n(\xi_n))$ пространства E в F_0.

a) Пусть f непрерывно в некоторой окрестности точки 0. Для того чтобы f было квазидифференцируемо в точке 0 (задача 4 § 8.4), необходимо и достаточно, чтобы при каждом n существовала производная $f_n'(0)$ и чтобы $\sup\limits_n |f_n'(0)| < +\infty$.

b) Для того чтобы f было дифференцируемо в точке 0, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое $\delta > 0$, чтобы из $|t| \leqslant \delta$ при каждом n следовало $|f_n(t) - f_n(0) - f_n'(0)t| \leqslant \varepsilon |t|$.

c) Для того чтобы производная f' существовала в некоторой окрестности точки 0 в E и была непрерывна в 0, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая окрестность $J \subset I$ точки 0 в $\mathbf{R}$, чтобы 1°) каждая производная f_n' существовала в J; 2°) $\sup\limits_n |f_n'(0)| < +\infty$; 3°) последовательность (f_n') была равностепенно непрерывна в точке 0 (7.5).

[См. задачу 3 § 8.6.]

d) Пусть $f_n(t) = e^{nit}/n$ для каждого $n \geqslant 1$ и $f_0(t) = 1$. Покажите, что отображение f квазидифференцируемо в каждой точке $x \in E$. Покажите, что если $u(x)$ — квазипроизводная отображения f в точке x, то отображение $(x, y) \to u(x) \cdot y$ пространства $E \times E$ в F_0 непрерывно, но f не дифференцируемо ни в одной точке пространства E.

3. Пусть f — непрерывное отображение открытого множества A банахова пространства E в банахово пространство F. Допустим, что для любой

точки $x \in A$ и любой точки $y \in E$ предел $\lim\limits_{t \to 0,\ t \neq 0} (f(x+ty) - f(x))/t = g(x, y)$ существует в E. Покажите, что если для $y_i \in E$, $1 \leqslant i \leqslant n$ и $x_0 \in A$ каждое из отображений $x \to g(x, y_i)$ непрерывно в точке x_0, то

$$g(x_0, y_1 + y_2 + \ldots + y_n) = \sum_{i=1}^{n} g(x_0, y_i).$$

[Примените теорему о среднем значении.]

4. Пусть E_1, E_2 и F — три банаховых пространства и f — непрерывное отображение открытого множества A пространства $E_1 \times E_2$ в F. Для того чтобы f было дифференцируемо в точке $(a_1, a_2) \in A$, необходимо и достаточно, чтобы: 1°) существовали производные $D_1 f(a_1, a_2)$ и $D_2 f(a_1, a_2)$; 2°) для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое $\delta > 0$, чтобы из $\|t_1\| \leqslant \delta$ и $\|t_2\| \leqslant \delta$ следовало

$$\|f(a_1 + t_1, a_2 + t_2) - f(a_1 + t_1, a_2) - f(a_1, a_2 + t_2) + f(a_1, a_2)\| \leqslant \\ \leqslant \varepsilon(\|t_1\| + \|t_2\|).$$

Покажите, что второе условие будет выполнено, если существует производная $D_1 f(a_1, a_2)$ и если найдется такая окрестность V точки (a_1, a_2) в $E_1 \times E_2$, что в V существует производная $D_2 f$ и отображение $(x_1, x_2) \to D_2 f(x_1, x_2)$ окрестности V в $\mathscr{L}(E_2, F)$ непрерывно.

5. Пусть f — действительная функция, определенная в $\mathbf{R}^2$ условиями $f(x, y) = (xy/r)\sin(1/r)$ при $(x, y) \neq (0, 0)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, и $f(0, 0) = 0$. Покажите, что частные производные $D_1 f$ и $D_2 f$ существуют в каждой точке $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ и что четыре отображения $x \to D_1 f(x, b)$, $y \to D_1 f(a, y)$, $x \to D_2 f(x, b)$ и $y \to D_2 f(a, y)$ непрерывны в $\mathbf{R}$ для любой точки $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, но отображение f не дифференцируемо в точке $(0, 0)$.

6. Пусть I — промежуток в $\mathbf{R}$ и f — такое отображение пространства I^p в действительное банахово пространство E, что для любой точки $(a_1, \ldots, a_p) \in I^p$ каждое из отображений $x_j \to f(a_1, \ldots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \ldots, a_p)$ $(1 \leqslant j \leqslant p)$ непрерывно и дифференцируемо в I и, кроме того, p функций $D_j f$ $(1 \leqslant j \leqslant p)$ ограничены в I^p. Покажите, что f непрерывно в I^p.

[Примените теорему о среднем значении.]

10. Якобианы

Общую теорему (8.9.1) рассмотрим теперь для наиболее важных частных случаев.

A) $E = \mathbf{R}^n$ (соответственно $E = \mathbf{C}^n$). Если f — дифференцируемое отображение открытого множества $A \subset E$ в F, то частная производная $D_k f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ отождествляется с вектором пространства F (8.4), а производная отображения f есть отображение

$$(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \to \sum_{k=1}^{n} D_k f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\zeta_k.$$

Если непрерывна производная Df, то непрерывна и каждая из частных производных $D_k f$. Наоборот, если каждое из отображений $D_k f$ существует и непрерывно в A, то f непрерывно дифференцируемо в A.

B) $E = \mathbf{R}^n$ и $F = \mathbf{R}^m$ (соответственно $E = \mathbf{C}^n$ и $F = \mathbf{C}^m$). В этом случае мы можем написать, что $f = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, где φ_i — скалярные функции, определенные в E, и в силу (8.1.5) отображение f непрерывно дифференцируемо в том и только в том случае, если непрерывно дифференцируема каждая из функций φ_i. Но в силу A) функция φ_i непрерывно дифференцируема в том и только в том случае, если каждая из частных производных $D_j\varphi_i$ (являющаяся теперь скалярной функцией) существует и непрерывна. Далее, (полная) производная отображения f есть линейное отображение

$$(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \to (\eta_1, \ldots, \eta_m),$$

где

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{n} (D_j\varphi_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n))\zeta_j.$$

Иными словами, производной f', являющейся линейным отображением пространства $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$ (соответственно $\mathbf{C}^n$ в $\mathbf{C}^m$), соответствует матрица $(D_j\varphi_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n))$, называемая *матрицей Якоби* отображения f (или функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$) в точке $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Когда $m = n$, определитель (квадратной) матрицы Якоби отображения f называется *якобианом* отображения f (или функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$). Теорема (8.9.2) в этом случае превращается в

(8.10.1) *Пусть φ_j $(1 \leqslant j \leqslant m)$ — m скалярных функций, непрерывно дифференцируемых в открытом множестве A пространства $\mathbf{R}^n$ (соответственно $\mathbf{C}^n$). Пусть ψ_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ — p скалярных функций, непрерывно дифференцируемых в открытом множестве B пространства $\mathbf{R}^m$ (соответственно $\mathbf{C}^m$), содержащем образ множества A при отображении $(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$. Если тогда $\theta_i(x) = \psi_i(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x))$ при $x \in A$ и $1 \leqslant i \leqslant p$, то имеет место соотношение*

$$(D_k\theta_i) = (D_j\psi_i)(D_k\varphi_j)$$

между матрицами Якоби. В частности, при $m = n = p$ имеет место соотношение

$$\det(D_k\theta_i) = \det(D_j\psi_i)\det(D_k\varphi_j)$$

между якобианами.

Упомянем здесь об обычных обозначениях $f'_{\xi_i}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и $\frac{\partial}{\partial\xi_i} f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ частной производной $D_i f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, которые, к сожалению, приводят к безнадежной путанице, когда делается подстановка (что, например, означают символы $f'_y(y, x)$ или

$f'_x(x, x)$?). Якобиан $\det(D_j\varphi_i(\xi_1, \ldots, \xi_n))$ обозначается также символом $D(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)/D(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ или $\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)/\partial(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

11. Производная интеграла, зависящего от параметра

(8.11.1) *Пусть $I=[\alpha, \beta]\subset \mathbf{R}$ — компактный промежуток, E и F — банаховы пространства, f — непрерывное отображение произведения $I\times A$ в F (A — открытое множество пространства E). Тогда отображение $g(z)=\int\limits_\alpha^\beta f(\xi, z)\,d\xi$ непрерывно в A.*

Пусть заданы точка $z_0\in A$ и $\varepsilon>0$. Тогда для любой точки $\xi\in I$ существует такая ее окрестность $V(\xi)$ в I и такое число $r(\xi)>0$, что при $\eta\in V(\xi)$ и $\|z-z_0\|\leqslant r(\xi)$ выполняется неравенство $\|f(\eta, z)-f(\xi, z_0)\|\leqslant\varepsilon$. Покроем I конечным числом окрестностей $V(\xi_i)$ и положим $r=\inf(r(\xi_i))$. Тогда при $\|z-z_0\|\leqslant r$ для любой точки $\xi\in I$ выполняется неравенство $\|f(\xi, z)-f(\xi, z_0)\|\leqslant\varepsilon$. Поэтому в силу (8.7.7) $\|g(z)-g(z_0)\|\leqslant\varepsilon(\beta-\alpha)$ при $\|z-z_0\|\leqslant r$, ч. т. д.

(8.11.2) (Правило Лейбница). *Пусть выполняются предположения теоремы* (8.11.1) *и пусть, кроме того, частная производная D_2f по второй переменной существует и непрерывна в $I\times A$. Тогда отображение g непрерывно дифференцируемо в A и*

$$Dg(z)=\int\limits_\alpha^\beta D_2f(\xi, z)\,d\xi.$$

[Заметим, что обе части этого равенства принадлежат $\mathscr{L}(E, F)$.]

Те же рассуждения, что и в (8.11.1), в применении к D_2f показывают, что для заданного $\varepsilon>0$ и точки $z_0\in A$ существует такое $r>0$, что при $\|z-z_0\|\leqslant r$ для любой точки $\xi\in I$ выполняется неравенство $\|D_2f(\xi, z)-D_2f(\xi, z_0)\|\leqslant\varepsilon$. Поэтому в силу (8.6.2)

$$\|f(\xi, z_0+t)-f(\xi, z_0)-D_2f(\xi, z_0)\cdot t\|\leqslant\varepsilon\|t\|$$

для любой точки $\xi\in I$ и любого t, удовлетворяющего неравенству $\|t\|\leqslant r$. На основании (8.7.7) мы, таким образом, имеем

$$\left\|g(z_0+t)-g(z_0)-\int\limits_\alpha^\beta(D_2f(\xi, z_0)\cdot t)\,d\xi\right\|\leqslant\varepsilon(\beta-\alpha)\|t\|.$$

Но в силу (8.7.6) и (5.7.4) $\int\limits_\alpha^\beta(D_2f(\xi, z_0)\cdot t)\,d\xi=\left(\int\limits_\alpha^\beta D_2f(\xi, z_0)\,d\xi\right)\cdot t$ для любого t, и это завершает доказательство.

Задачи

1. Пусть $J \subset \mathbf{R}$ — открытый промежуток, E и F — два банаховых пространства, A — открытое множество пространства E, f — непрерывное отображение произведения $J \times A$ в F, для которого частная производная $D_2 f$ существует и непрерывна в $J \times A$, α и β — два непрерывно дифференцируемых отображения множества A в J. Пусть

$$g(z) = \int_{\alpha(z)}^{\beta(z)} f(\xi, z)\, d\xi.$$

Покажите, что отображение g непрерывно дифференцируемо в A и что $g'(z)$ есть линейное отображение

$$t \to \left(\int_{\alpha(z)}^{\beta(z)} D_2 f(\xi, z)\, d\xi \right) \cdot t + (\beta'(z) \cdot t) f(\beta(z), z) - (\alpha'(z) \cdot t) f(\alpha(z), z).$$

[Примените (8.9.1) и (8.11.2).]

2. Пусть f и g — две действительные простые функции в компактном промежутке $[a, b]$, причем f убывает на $[a, b]$, а $0 \leqslant g(t) \leqslant 1$. Покажите, что

$$\int_{b-\lambda}^{b} f(t)\, dt \leqslant \int_{a}^{b} f(t)\, g(t)\, dt \leqslant \int_{a}^{a+\lambda} f(t)\, dt,$$

где $\lambda = \int_a^b g(t)\, dt$. В каком случае имеют место равенства?

[Рассмотрите интегралы $\int_a^y f(t)\, g(t)\, dt$ и $\int_a^{a+h(y)} f(t)\, dt$, где $h(y) = \int_a^y g(t)\, dt$, как функции от y и аналогичные интегралы для второго неравенства.]

3. Пусть выполняются предположения задачи 1 с тем лишь отличием, что α и β непрерывны, а не обязательно дифференцируемы, и, кроме того, предполагается, что $f(\alpha(z), z) = 0$ и $f(\beta(z), z) = 0$ для любой точки $z \in A$. Покажите, что отображение $g(z)$ непрерывно дифференцируемо в A и что

$$g'(z) = \int_{\alpha(z)}^{\beta(z)} D_2 f(\xi, z)\, d\xi.$$

[С помощью теоремы Больцано (3.19.8) докажите, что если ξ принадлежит промежутку с концами $\beta(z_0)$ и $\beta(z)$, то существует такая точка $z' \in A$, что $\|z' - z_0\| \leqslant \|z - z_0\|$ и $\xi = \beta(z')$. С помощью теоремы о среднем значении покажите, что если M — верхняя грань нормы $\|D_2 f\|$ в произвольной окрестности точки $(\beta(z_0), z_0)$, то $\|f(\xi, z)\| \leqslant M \|z - z_0\|$.]

4. Пусть $I=[a, b]$, $A=[c, d]$ — два компактных промежутка в $\mathbf{R}$ и f — такое отображение произведения $I\times A$ в банахово пространство E, что: 1°) для каждой точки $y\in A$ функция $x\to f(x, y)$ проста в I и для каждой точки $x\in I$ функция $y\to f(x, y)$ проста в A; 2°) отображение f ограничено в $I\times A$; 3°) если D — подмножество произведения $I\times A$, состоящее из точек (x, y), в которых f не является непрерывным, то для каждой точки $x_0\in I$ (соответственно $y_0\in A$) множество тех y (соответственно x), для которых $(x_0, y)\in D$ (соответственно $(x, y_0)\in D$), конечно.

a) Покажите, что функция $g(y)=\int\limits_a^b f(t, y)\,dt$ непрерывна в A.

[Если заданы $y_0\in A$ и $\varepsilon>0$, то покажите, что существуют такая окрестность V точки y_0 в A и конечное число промежутков $J_k\subset I$ $(1\leqslant k\leqslant n)$, что сумма длин промежутков J_k не превосходит ε и что отображение f непрерывно в $W\times V$, где $W=I\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{n} J_k$. Для доказательства этого утверждения примените теорему Бореля — Лебега (3.17.6).]

b) Выведите из a), что

$$\int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x, y)\,dx=\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x, y)\,dy.$$

[Рассмотрите две функции

$$z\to\int\limits_c^z dy\int\limits_a^b f(x, y)\,dx \quad\text{и}\quad z\to\int\limits_a^b dx\int\limits_c^z f(x, y)\,dy$$

при $z\in A$.]

5. a) Пусть f — строго возрастающая непрерывная функция на промежутке $[0, a]$, причем $f(0)=0$; пусть g — обратная функция, являющаяся непрерывной и строго возрастающей на промежутке $[0, f(a)]$. Покажите, что $\int\limits_0^a f(t)\,dt=\int\limits_0^{f(a)}(a-g(u))\,du$.

[Примените задачу 4 к функции, равной 1 при $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant f(x)$ и 0 при $0\leqslant x\leqslant a$, $f(x)<y\leqslant f(a)$.]

b) Покажите, что при $0\leqslant x\leqslant a$ и $0\leqslant y\leqslant f(a)$ имеет место следующее неравенство:

$$xy\leqslant\int\limits_0^x f(t)\,dt+\int\limits_0^y g(u)\,du,$$

причем правая и левая части равны в том и только в том случае, если $y=f(x)$.

c) Выведите из b) неравенства:

$$xy \leqslant x \cdot \log x + e^{y-1} \quad \text{при} \quad x > 0,\ y \in \mathbf{R};$$

$$xy \leqslant ax^p + by^q \quad \text{при} \quad x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ p > 1,\ q > 1,$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ a > 0,\ b > 0 \text{ и } (pa)^q (qb)^p \geqslant 1.$$

12. Производные высшего порядка

Пусть f — непрерывно дифференцируемое отображение открытого множества A банахова пространства E в банахово пространство F. Тогда производная $\mathrm{D}f$ является непрерывным отображением множества A в банахово пространство $\mathscr{L}(E;\ F)$. Если это отображение дифференцируемо в точке $x_0 \in A$ (соответственно в A), то мы будем говорить, что f *дважды дифференцируемо* в точке x_0 (соответственно в A), а производную отображения $\mathrm{D}f$ в точке x_0 будем называть *второй производной* отображения f в точке x_0 и обозначать символом $f''(x_0)$ или $\mathrm{D}^2 f(x_0)$. Эта производная является элементом пространства $\mathscr{L}(E;\ \mathscr{L}(E;\ F))$, но мы знаем (5.7.8), что это последнее пространство естественным образом отождествляется с пространством $\mathscr{L}(E,\ E;\ F)$ (обозначаемым символом $\mathscr{L}_2(E;\ F)$) непрерывных билинейных отображений произведения $E \times E$ в F. Напомним, что такое отождествление осуществляется, если каждому элементу $u \in \mathscr{L}(E;\ \mathscr{L}(E;\ F))$ поставить в соответствие билинейное отображение $(s,\ t) \to (u \cdot s) \cdot t$. Этот последний элемент записывается также в виде $u \cdot (s,t)$.

(8.12.1) *Пусть f дважды дифференцируемо в точке x_0. Тогда при любом фиксированном $t \in E$ производная отображения $x \to \mathrm{D}f(x) \cdot t$ множества A в F в точке x_0 равна $s \to \mathrm{D}^2 f(x_0) \cdot (s,\ t)$.*

Если мы заметим, что отображение $x \to \mathrm{D}f(x) \cdot t$ является композицией линейного отображения $u \to u \cdot t$ пространства $\mathscr{L}(E;\ F)$ в F и отображения $x \to \mathrm{D}f(x)$ пространства E в $\mathscr{L}(E;\ F)$, то результат будет следовать из (8.2.1) и (8.1.3).

(8.12.2) *Если отображение f дважды дифференцируемо в точке x_0, то билинейное отображение $(s,\ t) \to \mathrm{D}^2 f(x_0) \cdot (s,\ t)$ симметрично; иными словами,*

$$\mathrm{D}^2 f(x_0) \cdot (s,\ t) = \mathrm{D}^2 f(x_0) \cdot (t,\ s).$$

Рассмотрим функцию

$$g(\xi) = f(x_0 + \xi s + t) - f(x_0 + \xi s)$$

действительной переменной ξ в промежутке $[0,\ 1]$, где s и t удовлетворяют условиям $\|s\| \leqslant r/2$, $\|t\| \leqslant r/2$ и шар с центром x_0 и

радиусом r содержится в A. Из (8.6.2) получаем

$$\|g(1)-g(0)-g'(0)\| \leqslant \sup_{0\leqslant\xi\leqslant 1} \|g'(\xi)-g'(0)\|.$$

В силу (8.4.1)

$$g'(\xi)=(f'(x_0+\xi s+t)-f'(x_0+\xi s))\cdot s=$$
$$=((f'(x_0+\xi s+t)-f'(x_0))-(f'(x_0+\xi s)-f'(x_0)))\cdot s.$$

По предположению, для заданного $\varepsilon>0$ существует такое $r'\leqslant r$, что при $\|s\|\leqslant r'/2$ и $\|t\|\leqslant r'/2$ имеем

$$\|f'(x_0+\xi s+t)-f'(x_0)-f''(x_0)\cdot(\xi s+t)\|\leqslant\varepsilon(\|s\|+\|t\|)$$

и

$$\|f'(x_0+\xi s)-f'(x_0)-f''(x_0)\cdot(\xi s)\|\leqslant\varepsilon\|s\|;$$

поэтому

$$\|g'(\xi)-(f''(x_0)\cdot t)\cdot s\|\leqslant 2\varepsilon\|s\|(\|s\|+\|t\|)$$

и, следовательно,

$$\|g(1)-g(0)-(f''(x_0)\cdot t)\cdot s\|\leqslant 6\varepsilon\|s\|(\|s\|+\|t\|).$$

Но разность $g(1)-g(0)=f(x_0+s+t)-f(x_0+t)-f(x_0+s)+$ $+f(x_0)$ симметрична относительно s и t; поэтому, меняя s и t местами, находим

$$\|(f''(x_0)\cdot t)\cdot s-(f''(x_0)\cdot s)\cdot t\|\leqslant 6\varepsilon(\|s\|+\|t\|)^2.$$

Это неравенство доказано пока при $\|s\|\leqslant r'/2$ и $\|t\|\leqslant r'/2$. Но если мы заменим s и t на λs и λt, то обе части неравенства будут иметь множителем $|\lambda|^2$. Поэтому оно справедливо при всех s и t, принадлежащих E, и, в частности, при $\|s\|=\|t\|=1$, откуда [в силу (5.7.7)] следует, что

$$\|f''(x_0)\cdot(t,s)-f''(x_0)\cdot(s,t)\|\leqslant 24\varepsilon\|s\|\,\|t\|$$

при всех s и t. Так как ε произвольно, то теорема доказана.

В частности,

(8.12.3) *Пусть A — открытое множество в $\mathbf{R}^n$ (соответственно в $\mathbf{C}^n$). Если отображение f множества A в банахово пространство F дважды дифференцируемо в точке x_0, то частные производные $\mathrm{D}_i f$ дифференцируемы в точке x_0 и*

$$D_iD_jf(x_0)=D_jD_if(x_0),\quad 1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant n.$$

Нам нужно только применить (8.12.1), специальным образом выбрав значения t, и заметить, что при $s=(\xi_i)$ и $t=(\eta_i)$ значение производной $\mathrm{D}^2f(x_0)\cdot(s,t)=(\mathrm{D}^2f(x_0)\cdot s)\cdot t$ равно $\sum_{i,j}(\mathrm{D}_i\mathrm{D}_jf(x_0))\xi_i\eta_j$ (см. 8.10).

Определим теперь по индукции *p раз дифференцируемое* отображение f открытого множества $A \subset E$ в F как $(p-1)$ раз дифференцируемое отображение, $(p-1)$-я производная $D^{p-1}f$ которого дифференцируема в A. Производная $D(D^{p-1}f)$ называется *p-й производной* отображения f и обозначается символом $D^p f$ или $f^{(p)}$. Производная $D^p f(x_0)$ отождествляется с элементом пространства $\mathscr{L}_p(E; F)$ непрерывных p-линейных отображений произведения E^p в F, и соответствующее отображение обозначается символом

$$(t_1, t_2, \ldots, t_p) \to D^p f(x_0) \cdot (t_1, \ldots, t_p).$$

Как и в (8.12.1), видим, что отображение

$$t_1 \to D^p f(x_0) \cdot (t_1, t_2, \ldots, t_p)$$

является производной в точке x_0 отображения

$$x \to D^{p-1} f(x) \cdot (t_2, \ldots, t_p).$$

Теорема (8.12.2) обобщается следующим образом:

(8.12.4) *Если отображение f является p раз дифференцируемым в A, то полилинейное отображение $D^p f(x)$ для каждой точки $x \in A$ симметрично.*

Доказательство проводится индукцией по p. Фиксируем $t_3, \ldots, t_p$ и рассмотрим отображение $x \to g(x) = D^{p-2} f(x) \cdot (t_3, \ldots, t_p)$. Тогда ясно, что вторая производная отображения g в точке x равна

$$(t_1, t_2) \to D^p f(x) \cdot (t_1, t_2, t_3, \ldots, t_p).$$

Поэтому в силу (8.12.2)

(8.12.4.1) $$D^p f(x) \cdot (t_2, t_1, t_3, \ldots, t_p) = D^p f(x) \cdot (t_1, t_2, t_3, \ldots, t_p).$$

С другой стороны, для любой перестановки σ множества индексов $\{2, 3, \ldots, p\}$ индукционное предположение дает

$$D^{p-1} f(x) \cdot (t_{\sigma(2)}, t_{\sigma(3)}, \ldots, t_{\sigma(p)}) = D^{p-1} f(x) \cdot (t_2, t_3, \ldots, t_p)$$

и, взяв первую производную от обеих частей (где t_i фиксированы), получаем

(8.12.4.2) $$D^p f(x) \cdot (t_1, t_{\sigma(2)}, \ldots, t_{\sigma(p)}) = D^p f(x) \cdot (t_1, t_2, \ldots, t_p).$$

Сопоставляя (8.12.4.1) и (8.12.4.2), прежде всего видим, что $D^p f(x) \cdot (t_1, t_2, \ldots, t_p)$ не изменится, если индекс 1 переставить с любым другим индексом, а также если переставить любые два индекса $\geqslant 2$. Но такого рода транспозиции порождают любую перестановку из индексов $1, 2, \ldots, p$, ч. т. д.

(8.12.5) *Если отображение f является m раз дифференцируемым, а производная $D^m f$, кроме того, n раз дифференцируема в A, то f будет $m+n$ раз дифференцируемо в A и $D^{m+n} f = D^n(D^m f)$.*

При $n=1$ это просто определение, а при $n>1$ это сразу доказывается индукцией по n с помощью определения.

(8.12.6) *Пусть $f=(f_1, \ldots, f_m)$ — непрерывное отображение открытого множества $A \subset E$ в произведение $F_1 \times \ldots \times F_m$ банаховых пространств. Для того чтобы f было p раз дифференцируемо в A, необходимо и достаточно, чтобы каждое из отображений f_i было p раз дифференцируемо в A, и в этом случае $D^p f = (D^p f_1, \ldots, D^p f_m)$.*

Это следует из (8.1.5) с помощью индукции по p.

(8.12.7) *Пусть A — открытое множество в $\mathbf{R}^n$ (соответственно в $\mathbf{C}^n$). Если отображение f множества A в банахово пространство F является p раз дифференцируемым, то для $t_i=(\xi_{ij})$ $(1 \leqslant i \leqslant p,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$ имеет место формула*

$$D^p f(x) \cdot (t_1, \ldots, t_p) = \sum_{(j_1, j_2, \ldots, j_p)} D_{j_1} D_{j_2} \ldots D_{j_p} f(x) \xi_{1, j_1} \xi_{2, j_2} \ldots \xi_{p, j_p},$$

где сумма распространяется на все n^p различных последовательностей $(j_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ целых чисел, принадлежащих $[1, n]$.

Это немедленно доказывается индукцией по p, исходя из (8.10).

Элементы $D_{j_1} D_{j_2} \ldots D_{j_p} f(x)$ называются *частными производными порядка p* отображения f в точке x; их всего n^p. Любые две частные производные, отличающиеся только перестановкой индексов, в силу (8.12.4) равны.

Мы будем говорить, что отображение f является *p раз непрерывно дифференцируемым в A*, если производная $D^p f$ существует и непрерывна в A.

(8.12.8) *Пусть A — открытое множество пространства $\mathbf{R}^n$ (соответственно $\mathbf{C}^n$) и f — непрерывное отображение множества A в банахово пространство F. Если все n^p частных производных отображения f существуют и непрерывны в A, то f p раз непрерывно дифференцируемо в A.*

При $p=1$ это просто теорема (8.9.1) (распространенная на произведение n пространств). В общем случае нам нужно только провести индукцию по p и воспользоваться формулой (8.12.7).

Мы будем говорить, что отображение f *бесконечно дифференцируемо* в A, если оно p раз дифференцируемо в A при любом p. Все производные $D^p f$ в этом случае бесконечно дифференцируемы в A.

Пример. **(8.12.9)** *Любое непрерывное билинейное отображение бесконечно дифференцируемо, и все его производные порядка* $\geqslant 3$ *равны* 0.

Из (8.1.4) следует, что производная билинейного непрерывного отображения в точке (x, y) равна $(s, t) \to [x \cdot t] + [s \cdot y]$. Если обозначить это линейное отображение через $g(x, y) \in \mathscr{L}(E \times F; G)$, то по предположению и в силу (5.5.1) существует такое $c > 0$, что в $E \times F$ выполняется неравенство $\|[x \cdot y]\| \leqslant c\|x\| \cdot \|y\|$. По определению нормы в пространстве $\mathscr{L}(E \times F; G)$ (5.7.1) имеем

$$\|g(x, y)\| \leqslant c(\|x\| + \|y\|) \leqslant 2c \sup(\|x\|, \|y\|).$$

Поэтому g есть непрерывное линейное отображение пространства $E \times F$ в $\mathscr{L}(E \times F; G)$ и, следовательно, отображение $(x, y) \to [x \cdot y]$ дважды дифференцируемо, а его вторая производная в точке (x, y) [в силу (8.1.3) и (8.12.1)] равна

$$((s_1, t_1), (s_2, t_2)) \to [s_1 \cdot t_2] + [s_2 \cdot t_1].$$

Так как это отображение не зависит от (x, y), то отсюда следует наше утверждение.

(8.12.10) *Пусть E, F и G — три банаховых пространства, A — открытое множество в E и B — открытое множество в F. Если отображение f множества A в B и отображение g множества B в G p раз непрерывно дифференцируемы, то $h = g \circ f$ есть p раз непрерывно дифференцируемое отображение множества A в G.*

При $p = 1$ утверждение следует из (8.2.1) и того факта, что в силу (5.7.5) $(u, v) \to v \circ u$ есть билинейное непрерывное отображение пространства $\mathscr{L}(E; F) \times \mathscr{L}(F; G)$ в $\mathscr{L}(E; G)$. Теперь проведем индукцию по p. Так как $h'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x)$ и так как f' и g' являются $p - 1$ раз непрерывно дифференцируемыми, то индукционное предположение показывает, что $p - 1$ раз непрерывно дифференцируемо отображение $g' \circ f'$. Из (8.12.6) и (8.12.9) тогда следует, что h' непрерывно дифференцируемо $p - 1$ раз, и поэтому в силу (8.12.5) h непрерывно дифференцируемо p раз.

Пример. **(8.12.11)** *Допустим, что существует по крайней мере один линейный гомеоморфизм банахова пространства E в банахово пространство F и что $\mathscr{H} \subset \mathscr{L}(E; F)$ — открытое множество таких гомеоморфизмов в $\mathscr{L}(E; F)$ (8.3.2). Тогда отображение $u \to u^{-1}$ множества $\mathscr{H}$ на $\mathscr{H}^{-1}$ бесконечно дифференцируемо.*

Индукцией по p мы докажем, что отображение $u \to u^{-1}$ дифференцируемо p раз, причем при $p = 1$ в силу (8.3.2) это утверждение верно. Для данных элементов v и w пространства $\mathscr{L}(F; E) = M$ пусть $f(v, w)$ — линейное отображение $t \to v \circ t \circ w$ пространства

$L = \mathscr{L}(E;\ F)$ в M. Ясно, что f билинейно [и отображает $M \times M$ в $\mathscr{L}(L;\ M)$], а теорема (5.7.5) показывает, что $\|f(v,\ w)\| \leqslant \|v\| \cdot \|w\|$; поэтому f непрерывно и, значит, в силу (8.12.9) бесконечно дифференцируемо. Теперь первой производной отображения $u \to u^{-1}$ ввиду (8.3.2) является отображение $u \to f(u^{-1},\ u^{-1})$. На основании (8.12.6) и (8.12.10) отсюда следует, что если p раз дифференцируемо отображение $u \to u^{-1}$, то p раз дифференцируемо отображение $u \to f(u^{-1},\ u^{-1})$ и, следовательно, в силу (8.12.5) $p+1$ раз дифференцируемо отображение $u \to u^{-1}$.

В случае когда f есть отображение промежутка $J \subset \mathbf{R}$ в действительное банахово пространство F, мы ранее определили (§ 8.4) понятие производной отображения f в точке $\xi_0 \in J$ относительно J. С помощью индукции по p определим p-ю *производную отображения f в точке ξ_0 относительно J* как производную в точке ξ_0 относительно J от $(p-1)$-й производной отображения f (которая, таким образом, предполагается существующей в некоторой окрестности точки ξ_0 в J). Эта производная является элементом пространства F и здесь обозначается символом $\mathrm{D}^p f(\xi_0)$ или $f^{(p)}(\xi_0)$. Если ξ_0 принадлежит внутренности промежутка J, то p-я производная, как она определена для общих отображений, совпадает с полилинейным отображением $(\zeta_1,\ \ldots,\ \zeta_p) \to f^{(p)}(\xi_0)\zeta_1\zeta_2 \ldots \zeta_p$ пространства $\mathbf{R}^p$ в F.

Задачи

1. Пусть f — дифференцируемое p раз отображение промежутка $I \subset \mathbf{R}$ в банахово пространство E. Покажите, что при любом $x \in I$, для которого $\frac{1}{x} \in I$,

$$\frac{1}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^n \mathrm{D}^n \left[x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

[Проведите индукцию по n.]

2. a) Пусть ρ — функция, определяемая в $\mathbf{R}$ условиями

$$\rho(t) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{(1+t)^2} - \dfrac{1}{(1-t)^2}\right) & \text{при} \quad -1 < t < 1, \\ 0 \quad \text{при} \quad t \leqslant -1 \quad \text{или} \quad t \geqslant 1. \end{cases}$$

Покажите, что функция ρ бесконечно дифференцируема в $\mathbf{R}$.

[Воспользуйтесь тем, что при любом $n > 0$ предел $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n e^{-x} = 0$.]

b) В этой задаче мы условимся любую простую функцию f, определенную в компактном промежутке $[a,\ b]$ пространства $\mathbf{R}$, продолжать на все $\mathbf{R}$, полагая ее равной 0 при $t < a$ и при $t > b$. Мы будем при этом писать $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ вместо интеграла $\int\limits_a^b f(t)\,dt$, который равен также

интегралу $\int_c^d f(t)\,dt$ при $c \leqslant a$ и $d \geqslant b$. Для любой такой функции f положим

$$f_n(t) = nc \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\,\rho(n(t-s))\,ds = nc \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)\,\rho(ns)\,ds,$$

где $1/c = \int_{-1}^{+1} \rho(t)\,dt$ (регуляризация функции f с помощью ρ; мы пишем $\rho_n(t) = \rho(nt)$ и $f_n = f * \rho_n$). Покажите, что функция f_n бесконечно дифференцируема и обращается в 0 на дополнении к некоторому компактному промежутку [см. (8.11.2)]. Если функция f действительна и возрастает (соответственно строго возрастает) на $[a, b]$, то и функция f_n возрастает (соответственно строго возрастает) на промежутке $\left[a+\frac{1}{n},\ b-\frac{1}{n}\right]$. Если функция f (продолженная на $\mathbf{R}$) p раз непрерывно дифференцируема, то

$$\mathrm{D}^p f_n(t) = nc \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathrm{D}^p f(s))\,\rho(n(t-s))\,ds = nc \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathrm{D}^p f(t-s))\,\rho(ns)\,ds.$$

c) Покажите, что $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ при любом n.

d) Если функция f (продолженная на $\mathbf{R}$) непрерывна (соответственно p раз непрерывно дифференцируема), то последовательность (f_n) (соответственно $\mathrm{D}^p f_n$) равномерно сходится в $\mathbf{R}$ к f (соответственно к $\mathrm{D}^p f$).

e) К какому пределу стремится $f_n(t_0)$ (где $t_0 \in \mathbf{R}$), когда функция f предполагается только простой в $[a, b]$?

[Сначала рассмотрите случай, когда f является ступенчатой функцией; затем примените (7.6.1).]

f) Покажите, что для любой простой функции f в $[a, b]$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f(t) - f_n(t)|\,dt = 0.$$

3. Пусть f — действительная функция, определенная на $]-1, 1[$, n раз дифференцируемая на этом промежутке и удовлетворяющая на нем условию $|f(t)| \leqslant 1$.

a) Пусть $m_k(J)$ — наименьшее значение $|f^{(k)}(t)|$ в промежутке J, содержащемся в $]-1, 1[$. Покажите, что если J разлагается на три последовательных промежутка J_1, J_2 и J_3 и если J_2 имеет длину μ, то

$$m_k(J) \leqslant \frac{1}{\mu}\,(m_{k-1}(J_1) + m_{k-1}(J_3)).$$

[Примените теорему о среднем значении.]

Выведите из этого неравенства, что если J имеет длину λ, то

$$m_k(J) \leqslant \frac{2^{k(k+1)/2}\, k^k}{\lambda^k}.$$

[Проведите индукцию по k.]

b) Выведите из a), что существует такое число α_n, зависящее только от n, что если $|f'(0)| \geqslant \alpha_n$, то уравнение $f^{(n)}(t) = 0$ имеет в $]-1, 1[$ по крайней мере $n-1$ различных корней.

[Индукцией по k покажите, что существует такая строго возрастающая последовательность $x_{k,1} < x_{k,2} < \ldots < x_{k,k}$ точек промежутка $]-1, 1[$, что $f^{(k)}(x_{k,i}) f^{(k)}(x_{k,i+1}) < 0$ при $1 \leqslant i \leqslant k-1$; примените теорему Ролля.]

4. Пусть E, F — два банаховых пространства, A — открытое множество в E и f — дифференцируемое n раз отображение множества A в F. Пусть $x_0 \in A$ и $h_i \in E$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ таковы, что $x_0 + \sum_{i=1}^{n} \xi_i h_i \in A$ при $0 \leqslant \xi_i \leqslant 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$. С помощью индукции по k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ определим

$$\Delta^1 f(x_0; h_1) = f(x_0 + h_1) - f(x_0),$$
$$\Delta^k f(x_0; h_1, \ldots, h_k) = \Delta^{k-1} g_k(x_0; h_1, \ldots, h_{k-1}),$$

где

$$g_k(x) = f(x + h_k) - f(x).$$

a) Покажите, что

$$\|\Delta^n f(x_0; h_1, \ldots, h_n)\| \leqslant \|h_1\| \cdot \|h_2\| \cdot \ldots \cdot \|h_n\| \sup_{z \in P} \|D^n f(z)\|,$$

где P — множество точек $x_0 + \sum_{i=1}^{n} \xi_i h_i$, $0 \leqslant \xi_i \leqslant 1$.

[Проведите индукцию по n.]

b) Выведите из a), что

$$\|\Delta^n f(x_0; h_1, \ldots, h_n) - D^n f(x_0) \cdot (h_1, \ldots, h_n)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|h_1\| \cdot \|h_2\| \cdot \ldots \cdot \|h_n\| \sup_{z \in P} \|D^n f(z) - D^n f(x_0)\|.$$

5. Пусть f — непрерывно дифференцируемое отображение открытого множества A пространства $\mathbf{R}^2$ в банахово пространство E, и пусть в окрестности V точки $(a, b) \in A$ производная $D_2(D_1 f)$ существует и непрерывна.

a) Пусть $(x, y) \in V$. Покажите, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из $|h| \leqslant \delta$ и $|k| \leqslant \delta$ следует неравенство[1])

$$\|\Delta^2 f(x, y; h, k) - D_2 D_1 f(x, y)\, hk\| \leqslant \varepsilon |hk|.$$

[К функции $g(t) = f(x+t, y+k) - f(x+t, y) - D_2 D_1 f(x, y)\, tk$ примените теорему о среднем значении и воспользуйтесь (8.6.2).]

b) Докажите, что производная $D_1(D_2 f)$ существует в V и равна $D_2(D_1 f)$. [Воспользуйтесь a).]

---

[1]) Здесь $\Delta^2 f(x, y, h, k) = f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y)$. — *Прим. перев.*

c) Приведите пример функции, удовлетворяющей предыдущим предположениям, для которой обе производные $D_1(D_1 f)$ и $D_2(D_2 f)$ не существуют ни в одной точке (см. задачу 1 § 8.4).

6. Пусть f — действительная функция, определяемая в $\mathbf{R}^2$ условиями $f(0, 0) = 0$, $f(x, y) = xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ при $(x, y) \neq (0, 0)$. Покажите, что все четыре производные $D_1(D_1 f)$, $D_1(D_2 f)$, $D_2(D_1 f)$ и $D_2(D_2 f)$ существуют всюду в $\mathbf{R}^2$, но что $D_1(D_2 f) \neq D_2(D_1 f)$ в точке $(0, 0)$.

7. Обозначения те же, что и в задаче 2 § 8.9. Пусть $g_n(t) = t/(1 + n|t|)$ и $f_n(t) = \int_0^t g_n(u)\,du$ для каждого $t \in \mathbf{R}$. Покажите, что функция $f: (\xi_n) \to (f_n(\xi_n))$ непрерывно дифференцируема в E и что для каждой точки $y = (\eta_n) \in E$ отображение $x \to f'(x) \cdot y$ дифференцируемо в точке $x = 0$, но отображение f' не дифференцируемо в этой точке [ср. (8.12.1)].

8. Пусть E и F — два банаховых пространства, A — открытое множество в E и $\mathscr{D}_F^{(p)}(A)$ — векторное пространство p раз непрерывно дифференцируемых отображений множества A в F, таких, что f и все его производные $D^k f$ $(1 \leqslant k \leqslant p)$ ограничены в A. Для любого отображения $f \in \mathscr{D}_F^{(p)}(A)$ пусть

$$\|f\|_p = \sup_{x \in A} (\|f(x)\| + \|Df(x)\| + \ldots + \|D^p f(x)\|).$$

Покажите, что $\|f\|_p$ есть норма в $\mathscr{D}_E^{(p)}(A)$, при которой это пространство становится банаховым пространством.

[Воспользуйтесь (8.6.3).]

Отображение $f \to Df$ является непрерывным линейным отображением пространства $\mathscr{D}_F^{(p)}(A)$ в $\mathscr{D}_{\mathscr{L}(E;F)}^{(p-1)}(A)$ (соответственно в $\mathscr{C}_{\mathscr{L}(E;F)}^{\infty}(A)$ при $p=1$).

9. Пусть E, F, G — три банаховых пространства и L, M, N — соответственно банаховы пространства $\mathscr{D}_F^{(p)}(E)$, $\mathscr{D}_G^{(p)}(F)$, $\mathscr{D}_G^{(p)}(E)$. При $f \in L$, $g \in M$ пусть $\Phi(f, g) = g \circ f \in N$.

a) Пусть $(f_0, g_0) \in L \times M$. Покажите, что если отображение $D^p g_0$ равномерно непрерывно в F, то отображение Φ непрерывно в (f_0, g_0).

[Проведите индукцию по p.]

Если E, F и G конечномерны, то Φ непрерывно в $L \times M$.

[Примените (3.16.5).]

b) Пусть $N_k = \mathscr{D}_G^{(p-k)}(E)$ при $1 \leqslant k \leqslant p$, где $\mathscr{D}_G^{(0)}(E) = \mathscr{C}_G^{\infty}(E)$. Покажите: что как отображение произведения $L \times M$ в N_1 отображение Φ непрерывно в каждой точке; для того чтобы Φ (как отображение произведения $L \times M$ в N_1) было дифференцируемо в точке (f_0, g_0), достаточно, чтобы отображение $D^p g_0$ было равномерно непрерывно; что производная $D\Phi$ есть линейное отображение

$$(u, v) \to ((Dg_0) \circ f_0) \cdot u + v \circ f_0.$$

c) Пусть U_f — линейное отображение $g \to g \circ f$ пространства M в N. Покажите, что U_f непрерывно. Мы можем также U_f рассматривать как элемент пространства $\mathscr{L}(M; N_k)$ при любом $k \leqslant p$. Покажите, что отображе-

ние $f \to U_f$ пространства L в $\mathscr{L}(M; N_1)$ непрерывно и что отображение $f \to U_f$ пространства L в $\mathscr{L}(M; N_2)$ дифференцируемо, причем элемент $DU_f \in \mathscr{L}(L; \mathscr{L}(M; N_2))$ есть билинейное отображение $(u, v) \to ((Dv) \circ f) \cdot u$.

d) Выведите из b) и c), что как отображение произведения $L \times M$ в N_k отображение Φ дифференцируемо $k-1$ раз.

10. Пусть f — действительная дважды дифференцируемая функция, определенная в открытом множестве A банахова пространства E. Допустим, что в точке $x_0 \in E$ производная $Df(x_0) = 0$ и что существует такое число $c > 0$, что $D^2f(x_0) \cdot (t, t) \leqslant -c\|t\|^2$ для каждой точки $t \in E$. Покажите, что в точке x_0 функция f достигает строгого относительного максимума (задача 6 § 3.9). Если E конечномерно, то предыдущее условие можно заменить условием $D^2f(x_0) \cdot (t, t) < 0$ для любой точки $t \neq 0$ в E.

[Используйте компактность сферы $\|t\| = 1$ в E.]

11. a) Пусть f — действительная функция, определенная в открытом промежутке $I \subset \mathbf{R}$ и дифференцируемая в I. Пусть $[a, b] \subset I$, и предположим, что f'' существует в открытом промежутке $]a, b[$, но f' может и не быть непрерывной в точках a и b (см. задачу 6 § 8.7). Покажите, что существует такая точка $c \in]a, b[$, что $f'(b) - f'(a) = (b-a) f''(c)$.

[Воспользуйтесь задачей 3 § 8.5.]

b) Каково соответствующее свойство для функций, определенных в I и принимающих значения в гильбертовом пространстве (см. задачу 6 § 8.5)?

13. Дифференциальные операторы

Пусть A — открытое множество в $\mathbf{R}^n$ (соответственно в $\mathbf{C}^n$) и F — действительное (соответственно комплексное) банахово пространство. Обозначим через $\mathscr{E}_F^{(p)}(A)$ *множество всех p раз непрерывно дифференцируемых отображений множества A в F*. Из (8.12.10) ясно, что $\mathscr{E}_F^{(p)}(A)$ есть действительное (соответственно комплексное) векторное пространство. Теорема (8.12.10) показывает, что верно и более общее утверждение: $\mathscr{E}_{\mathbf{R}}^{(p)}(A)$ (соответственно $\mathscr{E}_{\mathbf{C}}^{(p)}(A)$) есть кольцо, а $\mathscr{E}_F^{(p)}(A)$ — модуль над этим кольцом.

Для любой системы $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \boldsymbol{\alpha}$ целых чисел $\geqslant 0$, удовлетворяющей условию $|\boldsymbol{\alpha}| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leqslant p$, положим $M_\alpha = X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \ldots X_n^{\alpha_n}$ и определим D^α или D_{M_α} как отображение $D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \ldots D_n^{\alpha_n}$ пространства $\mathscr{E}_F^{(p)}(A)$ в $\mathscr{E}_F^{(p-|\alpha|)}(A)$. *Линейный дифференциальный оператор* есть линейная комбинация $D = \sum_\alpha a_\alpha D^\alpha$, где $|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant p$ и a_α — непрерывные скалярные функции, определенные в A. Если $a_\alpha = 0$ при $|\boldsymbol{\alpha}| > k$ и каждая из функций a_α непрерывно дифференцируема $(p-k)$ раз, то D линейно отображает пространство $\mathscr{E}_F^{(p)}(A)$ в $\mathscr{E}_F^{(p-k)}(A)$.

(8.13.1) *Если оператор* $\sum_\alpha a_\alpha D^\alpha$ *тождественно равен* 0, *то каждая из функций* a_α *тождественно равна* 0 *в* A.

Запишем, что $Df=0$ для $f(x)=c\cdot\exp(\lambda_1\xi_1+\ldots+\lambda_n\xi_n)$, где $c\neq 0$ принадлежит F, а λ_i — произвольные константы. На основании 8.8 и (8.4.1) получим:

$$c\cdot\left(\sum_\alpha a_\alpha(x)M_\alpha(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\right)\exp(\lambda_1\xi_1+\ldots+\lambda_n\xi_n)=0$$

тождественно в A. Но это условие эквивалентно условию $\sum_\alpha a_\alpha(x)M_\alpha(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)=0$. Поскольку λ_i произвольны, отсюда следует, что для каждого α в любой точке $x\in A$ функция $a_\alpha(x)=0$.

Коэффициенты a_α линейного дифференциального оператора, таким образом, определены однозначно. Наибольшее значение $|\alpha|$, для которого $a_\alpha\neq 0$, называется *порядком* оператора D.

Каждому многочлену $P=\sum_\alpha b_\alpha M_\alpha$ степени $\leqslant p$ с постоянными коэффициентами можно поставить в соответствие линейный оператор $D_P=\sum_\alpha b_\alpha D^\alpha$ порядка $\leqslant p$. Ясно, что $D_{P_1+P_2}=D_{P_1}+D_{P_2}$, а из (8.12.3) следует, что если многочлен P_1P_2 имеет полную степень $\leqslant p$, то $D_{P_1P_2}=D_{P_1}D_{P_2}$. В частности, из (8.12.7) следует, что при фиксированных ξ_{ij} оператор $f\to Df$, где

$$Df(x)=D^pf(x)\cdot(t_1,\ldots,t_p)$$

может быть записан в виде

$$\prod_{i=1}^{p}(\xi_{i1}D_1+\ldots+\xi_{in}D_n).$$

(8.13.2) (Формула Лейбница) *Пусть* $P(X_1,\ldots,X_n)$ — *многочлен степени* $\leqslant p$ *и предположим, что* $P(X_1+Y_1,\ldots,X_n+Y_n)=\sum_k\gamma_kM'_k(X_1,\ldots,X_n)M''_k(Y_1,\ldots,Y_n)$, *где* M'_k *и* M''_k — *одночлены. Пусть* $(x,y)\to[x\cdot y]$ — *билинейное непрерывное отображение произведения* $E\times F$ *в* G. *Тогда для любого отображения* $f\in\mathscr{C}_E^{(p)}(A)$ *и любого отображения* $g\in\mathscr{C}_F^{(p)}(A)$ *отображение* $[f\cdot g]$ *принадлежит* $\mathscr{C}_G^{(p)}(A)$ *и имеет место формула*

$$D_P[f\cdot g]=\sum_k\gamma_k\left[D_{M'_k}f\cdot D_{M''_k}g\right].$$

Достаточно доказать формулу для случая, когда P есть одночлен M. Проводя индукцию по полной степени P, мы можем допустить, что $P=X_iM$, и, значит, $D_P=D_iD_M$. По предположению,

имеем

$$D_M[f \cdot g] = \sum_k \gamma_k \left[D_{M_k'} f \cdot D_{M_k''} g \right].$$

Поэтому в силу (8.1.4)

$$D_P[f \cdot g] = \sum_k \gamma_k \left(\left[D_i D_{M_k'} f \cdot D_{M_k''} g \right] + \left[D_{M_k'} f \cdot D_i D_{M_k''} g \right] \right).$$

Правую часть мы можем записать в виде

$$\sum_h \gamma_h' \left[D_{N_h'} f \cdot D_{N_h''} g \right],$$

где суммирование распространяется на все пары одночленов

$$\left(N_k'(X_1, \ldots, X_n), N_h''(Y_1, \ldots, Y_n)\right),$$

такие, что либо $N_h' = X_i M_k'$ и $N_h'' = M_k''$ для некоторого индекса k, либо же $N_h' = M_k'$ и $N_h'' = Y_i M_k''$ для некоторого индекса k. Для каждого из рассматриваемых индексов h существует в точности один такой индекс k, и мы имеем $\gamma_h' = \gamma_k$. После этого наше утверждение очевидно.

Задачи

1. Пусть A — открытое множество в $\mathbf{R}^n$, E, F, G — три банаховых пространства и $(x, y) \to [x \cdot y]$ — непрерывное билинейное отображение произведения $E \times F$ в G. Покажите, что отображение $(f, g) \to [f \cdot g]$ произведения $\mathscr{D}_E^{(p)}(A) \times \mathscr{D}_F^{(p)}(A)$ в $\mathscr{D}_G^{(p)}(A)$ (задача 8 § 8.12) непрерывно.

2. Пусть I — компактный промежуток в $\mathbf{R}$, J — открытая окрестность промежутка I. Покажите, что существует бесконечно дифференцируемое отображение f пространства $\mathbf{R}$ в промежуток $[0, 1]$, равное 1 на I и 0 на дополнении J.

[Рассмотрите функции $g * \rho_n$ (задача 2, b § 8.12), где g равно 1 на таком компактном промежутке K, что $I \subset K \subset J$, и 0 на $\mathbf{R} \setminus K$.]

Покажите, что если u — бесконечно дифференцируемое отображение пространства $\mathbf{R}$ в банахово пространство E, то существует такое бесконечно дифференцируемое отображение v пространства $\mathbf{R}$ в E, что $v(t) = u(t)$ на I и $v(t) = 0$ на $\mathbf{R} \setminus J$.

14. Формула Тейлора

(8.14.1) *Пусть I — открытый промежуток в $\mathbf{R}$, f и g — две функции, принадлежащие соответственно $\mathscr{C}_E^{(p)}(I)$ и $\mathscr{C}_F^{(p)}(I)$, и $(x, y) \to [x \cdot y]$ — непрерывное билинейное отображение произведения $E \times F$ в G. Тогда*

$$[f \cdot D^p g] - (-1)^p [D^p f \cdot g] = D([f \cdot D^{p-1} g] - [Df \cdot D^{p-2} g] + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{p-1} [D^{p-1} f \cdot g]).$$

Это немедленно проверяется с помощью (8.1.4).

(8.14.2) *Пусть I — открытый промежуток в $\mathbf{R}$, f — функция, принадлежащая $\mathscr{C}_E^{(p)}(I)$. Тогда для любой пары α, ξ точек промежутка I*

$$f(\xi)=f(\alpha)+\frac{\xi-\alpha}{1!}f'(\alpha)+\frac{(\xi-\alpha)^2}{2!}f''(\alpha)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{(\xi-\alpha)^{p-1}}{(p-1)!}f^{(p-1)}(\alpha)+\int_\alpha^\xi\frac{(\xi-\zeta)^{p-1}}{(p-1)!}f^{(p)}(\zeta)\,d\zeta.$$

Применим (8.14.1) к билинейному отображению $(\lambda, x)\to\lambda x$ и к функции $g(\zeta)=(\xi-\zeta)^{p-1}/(p-1)!$ и проинтегрируем обе части от α до ξ.

(8.14.3) *Пусть E и F — два банаховых пространства, A — открытое множество пространства E и f — p раз непрерывно дифференцируемое отображение множества A в F. Тогда если сегмент, соединяющий точки x и $x+t$, содержится в A, то*

$$f(x+t)=f(x)+\frac{1}{1!}f'(x)\cdot t+\frac{1}{2!}f''(x)\cdot t^{(2)}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{(p-1)!}f^{(p-1)}(x)\cdot t^{(p-1)}+\left(\int_0^1\frac{(1-\zeta)^{p-1}}{(p-1)!}f^{(p)}(x+\zeta t)\,d\zeta\right)\cdot t^{(p)},$$

где $t^{(k)}$ обозначает $(t, t, \ldots, t)$ (k раз). В частности, для всякого $\varepsilon>0$ существует такое $r>0$, что при $\|t\|\leqslant r$

$$\left\|f(x+t)-f(x)-\frac{1}{1!}f'(x)\cdot t-\frac{1}{2!}f''(x)\cdot t^{(2)}-\ldots\right.$$
$$\left.\ldots-\frac{1}{p!}f^{(p)}(x)\cdot t^{(p)}\right\|\leqslant\varepsilon\|t\|^p.$$

Чтобы получить первую формулу, применим (8.14.2) к функции $g(\xi)=f(x+\xi t)$ на промежутке $[0, 1]$. В силу (8.12.10) функция g непрерывно дифференцируема p раз, и с помощью индукции по k, пользуясь (8.4.1) и (8.1.3), сразу видим, что $g^{(k)}(\xi)=f^{(k)}(x+\xi t)\cdot t^{(k)}$. Чтобы получить вторую формулу, заметим, что ввиду непрерывности $f^{(p)}$ число r можно выбрать так, чтобы при $0\leqslant\zeta\leqslant1$ и $\|t\|\leqslant r$ выполнялось неравенство $\|f^{(p)}(x+\zeta t)-f^{(p)}(x)\|\leqslant p!\,\varepsilon$. Тогда теорема о среднем значении (8.7.7) дает

$$\left\|\int_0^1\frac{(1-\zeta)^{p-1}}{(p-1)!}f^{(p)}(x+\zeta t)\,d\zeta-\frac{1}{p!}f^{(p)}(x)\right\|\leqslant\varepsilon,$$

и наше утверждение следует из (5.5.1).

Задачи

1. *Полином Лежандра* n-го порядка определяется формулой

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \mathrm{D}^n((t^2-1)^n).$$

a) Покажите, что с точностью до положительного множителя P_n является n-м элементом последовательности, получаемой путем ортонормализации в предгильбертовом пространстве $\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(I)$, где $I = [-1, +1]$, из последовательности (t^n) (6.6).

[Для доказательства того, что скалярное произведение $P_n(t)$ и t^m при $m < n$ равно 0, воспользуйтесь (8.14.1).]

b) Покажите, что $P_n(1) = 1$, $P_n(-1) = (-1)^n$.

[Воспользуйтесь (8.13.2).]

c) Покажите, что между тремя последовательными полиномами Лежандра имеет место следующее рекуррентное соотношение:

$$nP_n(t) - (2n-1)\,tP_{n-1}(t) + (n-1)\,P_{n-2}(t) = 0.$$

[Заметьте, что если число c_n выбрано так, чтобы разность $P_n(t) - c_n t P_{n-1}(t)$ имела степень $\leqslant n-1$, то эта разность ортогональна всем t^k при $k \leqslant n-3$ и поэтому должна быть линейной комбинацией P_{n-2} и P_{n-1}; воспользуйтесь также b).]

d) Покажите, что все корни P_n являются действительными и простыми и содержатся в промежутке $]-1, 1[$.

[Если бы полином P_n менял знак в промежутке $]-1, 1[$ только в $k \leqslant n-1$ точках, то существовал бы такой многочлен $g(t)$ степени k, что при $-1 \leqslant t \leqslant 1$ выполнялось бы неравенство $P_n(t)\,g(t) \geqslant 0$. Покажите, что это приводит к противоречию с тем фактом, что полином $P_n(t)$ при $h < n$ ортогонален t^h.]

e) Покажите, что полином P_n удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1-t^2)\,P_n''(t) - 2tP_n'(t) + n(n+1)\,P_n(t) = 0.$$

[Покажите, что при $k < n$ производная $\mathrm{D}((1-t^2)\,P_n'(t))$ ортогональна t^k.]

2. a) Пусть f — дважды дифференцируемое отображение промежутка $I = [-a, a]$ в банахово пространство E; пусть $M_0 = \sup\limits_{t \in I} \|f(t)\|$ и $M_2 = \sup\limits_{t \in I} \|f''(t)\|$. Покажите, что для каждого $t \in I$

$$\|f'(t)\| \leqslant \frac{M_0}{a} + \frac{t^2+a^2}{2a} M_2.$$

[Пользуясь формулой Тейлора, оцените каждую из разностей $f(a) - f(t)$ и $f(-a) - f(t)$.]

b) Пусть f — дважды дифференцируемое отображение промежутка J (ограниченного или нет) в E. Покажите, что если верхние грани $M_0 = \sup\limits_{t \in J} \|f(t)\|$ и $M_2 = \sup\limits_{t \in J} \|f''(t)\|$ конечны, то конечна и верхняя грань

$M_1 = \sup_{t \in J} \| f'(t) \|$, и что

$$(*) \qquad \begin{cases} M_1 \leqslant 2\sqrt{M_0 M_2}, \text{ если длина } J \geqslant 2\sqrt{M_0/M_2}, \\ M_1 \leqslant \sqrt{2M_0 M_2}, \text{ если } J = \mathbf{R}. \end{cases}$$

[Воспользуйтесь a).]

Докажите, что в этих двух неравенствах числа 2 и $\sqrt{2}$ не могут быть заменены меньшими.

[Если предположить, что f' имеет в J только правую производную f'_d, то неравенства (*) могут фактически превратиться в равенства, если в качестве f' взять кусочно-линейное отображение. Затем нужно применить задачу 2, d) § 8. 12.]

c) Выведите из b), что если отображение f является p раз дифференцируемым в $\mathbf{R}$ и если верхние грани $M_0 = \sup_{t \in \mathbf{R}} \| f(t) \|$ и $M_p = \sup_{t \in \mathbf{R}} \| f^{(p)}(t) \|$ конечны, то при $1 \leqslant k \leqslant p-1$ конечна и верхняя грань $M_k = \sup_{t \in \mathbf{R}} \| f^{(k)}(t) \|$, и

$$(**) \qquad M_k \leqslant 2^{k(p-k)/2} M_0^{1-k/p} M_p^{k/p}$$

[Проведите индукцию по p. Сначала, применяя индукционное предположение и первое из неравенств (*), покажите, что верхняя грань нормы $\| f''(t) \|$ на большом промежутке не может быть слишком велика; при этом нужно также воспользоваться задачей 2 § 8.12. Затем, пользуясь вторым из неравенств (*), по индукции докажите неравенство (**).]

3. Пусть E, F — два банаховых пространства и A — открытый шар в E (или все пространство E). Покажите, что норма

$$\sup_{x \in A} (\| f(x) \| + \| \mathrm{D}^p f(x) \|)$$

в пространстве $\mathscr{D}_F^{(p)}(A)$ эквивалентна (5.6) норме $\| f \|_p$, определенной в задаче 8 § 8.12.

[Воспользуйтесь результатом, полученным в задаче 2, c).]

4. Пусть E — банахово пространство и (c_n) — произвольная последовательность элементов пространства E.

a) Покажите, что существуют строго убывающая последовательность (a_n) чисел, сходящаяся к 0, и последовательность (u_n) бесконечно дифференцируемых отображений пространства $\mathbf{R}$ в E, обладающие следующими свойствами: 1°) $u_n(t) = 0$ при $|t| > a_n$; 2°) $\| u_n^{(k)}(t) \| \leqslant 2^{-n}$ при $|t| \leqslant a_{n+1}$ и $0 \leqslant k \leqslant n-1$; 3°) $u_n^{(k)}(t) = 0$ при $|t| \leqslant a_{n+1}$ и $k \geqslant n+1$; 4°) $u_n^{(n)}(0) = c_n$.

[Воспользуйтесь задачей 2, § 8.12.]

b) Выведите из a), что существует такое бесконечно дифференцируемое отображение f пространства $\mathbf{R}$ в E, что $f^{(n)}(0) = c_n$ для каждого n.

c) Таким же способом докажите, что если задано произвольное семейство (c_α) элементов пространства E, где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ пробегает все системы, состоящие из p целых чисел $\alpha_i \geqslant 0$, то существует такое бесконечно

дифференцируемое отображение f пространства $\mathbf{R}^p$ в E, что $D^\alpha f(0) = c_\alpha$ для каждого α.

d) Выведите из b), что если g — бесконечно дифференцируемое отображение замкнутого промежутка $I \subset \mathbf{R}$ в E и J — открытый промежуток, содержащий I, то существует бесконечно дифференцируемое отображение f пространства $\mathbf{R}$ в E, совпадающее с g на I и равное 0 на $\mathbf{R} \setminus J$.

5. Пусть f — отображение промежутка $I \subset \mathbf{R}$ в банахово пространство E, и предположим, что f n раз дифференцируемо в точке $\alpha \in I$. Покажите, что

$$\lim_{\xi \to \alpha,\, \xi \neq \alpha,\, \xi \in I} \frac{f(\xi) - f(\alpha) - f'(\alpha)\dfrac{\xi - \alpha}{1!} - \ldots - f^{(n)}(\alpha)\dfrac{(\xi - \alpha)^n}{n!}}{(\xi - \alpha)^n} = 0.$$

[Проведите индукцию по n и воспользуйтесь (8.5.1), взяв $\varphi(\xi) = (\xi - \alpha)^{n-1}$.]

6. Пусть $I \subset \mathbf{R}$ — промежуток, содержащий 0, а f является $n-1$ раз дифференцируемым отображением промежутка I в банахово пространство E. Запишем равенство

$$f(t) = f(0) + f'(0)\frac{t}{1!} + \ldots + f^{(n-1)}(0)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + f_n(t)\,t^n,$$

определяющее f_n в $I \setminus \{0\}$.

a) Покажите, что если f дифференцируемо $n+p$ раз в точке $t=0$, то отображение f_n может быть непрерывно продолжено на I и при таком продолжении превращается в функцию, $n+p-1$ раз непрерывно дифференцируемую во всех точках $t \neq 0$ некоторой окрестности V точки 0 в I и p раз дифференцируемую в точке $t=0$. Далее,

$$f_n^{(k)}(0) = \frac{k!}{(n+k)!} f^{(n+k)}(0) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant k \leqslant p$$

и

$$\lim_{t \to 0,\, t \neq 0,\, t \in V} f_n^{(p+k)}(t)\,t^k = 0 \quad \text{при} \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1.$$

[Выразите производные f_n с помощью тейлоровских разложений (задача 5) производных отображения f и воспользуйтесь задачей 2 § 8.6.]

b) Наоборот, пусть g является $n+p-1$ раз дифференцируемым отображением множества $I \setminus \{0\}$ в E, для которого при $0 \leqslant k \leqslant n-1$ существуют пределы $\lim\limits_{t \to 0,\, t \neq 0,\, t \in I} g^{(p+k)}(t)\,t^k$. Покажите, что отображение g может быть продолжено в $p-1$ раз дифференцируемое отображение промежутка I в E и что отображение $g(t)\,t^n$ дифференцируемо $n+p$ раз в I. Если, кроме того, существует $g^{(p)}(0)$, то $g(t)\,t^n$ дифференцируемо $n+p$ раз в точке 0.

c) Предположим, что $I =]-1, 1[$ и что отображение f *четно* в I, т. е. что выполняется условие $f(-t) = f(t)$. Пользуясь a) и b), покажите что если f дифференцируемо $2n$ раз в I, то существует n раз дифференцируемое отображение h промежутка I в E, для которого $f(t) = h(t^2)$.

7. a) Пусть f — бесконечно дифференцируемое отображение пространства $\mathbf{R}^n$ в банахово пространство E. Покажите, что

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(0, \ldots, 0) + x_1 f_1(x_1, \ldots, x_n) + x_2 f_2(x_2, \ldots, x_n) + \\ + \ldots + x_n f_n(x_n),$$

где f_k бесконечно дифференцируемо в $\mathbf{R}^{n-k+1}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$.

[Запишите $f(x_1, \ldots, x_n) = (f(x_1, \ldots, x_n) - f(0, x_2, \ldots, x_n)) + f(0, x_2, \ldots, x_n)$ и к первому слагаемому, рассматриваемому как функция от x_1, примените (8.14.2); при подходящем выборе значения p (зависящем от k) это докажет, что отображение $(f(x_1, \ldots, x_n) - f(0, x_2, \ldots, x_n))/x_1$ дифференцируемо k раз в точке $(0, \ldots, 0)$. В заключение проведите индукцию по n.]

b) Выведите из a), что при любом $p > 0$

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant p} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} f_\alpha(x),$$

где все f_α бесконечно дифференцируемы.

8. a) Пусть S — метрическое пространство, A и B — непустые множества в S, M — векторное подпространство пространства $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(S)$ действительных непрерывных функций в S, N — векторное подпространство пространства M и $u \to L(u)$ — линейное отображение пространства M в пространство $\mathbf{R}^A$ всех отображений множества A в $\mathbf{R}$. Предположим, что: 1°) существует такая функция $u_0 \in N$, что $L(u_0)$ есть тождественная 1 на A; 2°) если $u \in N$ и существует такая точка $t \in B$, что $u(t) = 0$, то существует такая точка $x \in A$, в которой $(L(u))(x) = 0$. Пусть функция $v \in M$ такова, что $L(v) = 0$. Покажите, что для любой функции $u \in M$, для которой $u - v \in N$, и любой точки $t \in B$ существует такая точка $\theta \in A$ (зависящая от t), что $u(t) = v(t) + u_0(t)(L(u))(\theta)$.

[Заметьте, что $u_0(t) \neq 0$ и что, следовательно, существует такая константа c (зависящая от t), что $u(t) - v(t) - cu_0(t) = 0$.]

b) Допустим, что S компактно, A связно и плотно в S и что все функции $u \in N$ обращаются в 0 на $S \setminus B$. Допустим, что $L(u)$ непрерывно в A для каждой функции $u \in M$ и что если функция $u \in N$ обладает тем свойством, что $(L(u))(t) > 0$ для любого $t \in A$, то u не имеет в B строгого максимума. Покажите, что в таком случае условие 2° задачи a) также выполняется.

9. a) Пусть f есть n раз дифференцируемая действительная функция, определенная на промежутке I; пусть $x_1 < x_2 < \ldots < x_p$ — точки промежутка I и n_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ — целые числа > 0, такие, что $n_1 + n_2 + \ldots + n_p = n$. Допустим, что в каждой из точек x_i при $0 \leqslant k \leqslant n_i - 1$ производная $f^{(k)}(x_i) = 0$. Покажите, что в промежутке $]x_1, x_p[$ существует такая точка ξ, что $f^{(n-1)}(\xi) = 0$.

[Несколько раз примените теорему Ролля.]

b) Пусть g есть n раз дифференцируемая действительная функция, определенная в I, и пусть P — действительный многочлен степени $n - 1$,

такой, что $g^{(k)}(x_i) = P^{(k)}(x_i)$ при $0 \leqslant k \leqslant n_i - 1$, $1 \leqslant i \leqslant p$. Покажите, что внутри наименьшего промежутка, содержащего x и точки x_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$, существует такая точка ξ, что

$$g(x) = P(x) + \frac{(x-x_1)^{n_1}(x-x_2)^{n_2}\ldots(x-x_p)^{n_p}}{n!}\, g^{(n)}(\xi).$$

[Примените задачу 8, а) или же дайте прямое доказательство; в обоих случаях воспользуйтесь а).]

10. Пусть g — действительная *нечетная* функция, определенная и пять раз дифференцируемая в симметричной окрестности I точки 0 в $\mathbf{R}$. Покажите, что для каждой точки $x \in I$

$$g(x) = \frac{x}{3}(g'(x) + 2g'(0)) - \frac{x^5}{180}\, g^{(5)}(\xi),$$

где ξ — точка, принадлежащая открытому промежутку с концами 0 и x. Выведите из этого результата, что если f — действительная функция, определенная и пять раз дифференцируемая в $[a, b]$, то

$$f(b) - f(a) = \frac{b-a}{6}\left[f'(a) + f'(b) + 4f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] - \frac{(b-a)^5}{2880}\, f^{(5)}(\xi),$$

где $a < \xi < b$ (формула Симпсона).

11. Пусть $I = [a, b]$ — компактный промежуток и пусть M_0 — векторное пространство действительных непрерывных функций, определенных в I и обладающих тем свойством, что предел

$$(L(f))(t) = \lim_{h \to 0,\ h \neq 0} \frac{f(t+h) + f(t-h) - 2f(t)}{h^2}$$

существует в $\mathbf{R}$ для любой точки $t \in\,]a, b[$. Покажите, что все действительные функции, дважды дифференцируемые в I, принадлежат M_0.

а) Пусть M — векторное подпространство пространства M_0, состоящее из функций f, для которых предел $L(f)$ непрерывен в $]a, b[$. Покажите, что любая из функций $f \in M$ дважды дифференцируема в $]a, b[$ и что $L(f) = f''$.

[Примените задачи 8, а) и b), положив $S = I$, $A = B =]a, b[$ и взяв в качестве N подпространство пространства M, состоящее из функций f, для которых $f(a) = f(b) = 0$.]

b) Покажите, что функция $f(t)$, равная $t\cos(1/t)$ при $t \neq 0$ и 0 при $t = 0$, принадлежит M_0, несмотря на то, что она недифференцируема в точке $t = 0$.

12. Какие свойства функций с значениями в гильбертовом пространстве соответствуют свойствам действительных функций, рассмотренным в задачах 9, b), 10 и 11? (См. задачу 6 § 8.5.)

Глава 9

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

В этой главе мы попытались собрать наиболее общие факты, относящиеся к теории аналитических функций, и, в частности, установить как можно больше результатов для аналитических функций любого числа переменных. До 9.13 теоремы, касающиеся только функций одной переменной, помещены в такой контекст, в котором они выглядят лишь как подготовка к общим утверждениям. Только в 9.14 — 9.17 и во многих задачах речь пойдет о свойствах, специально относящихся к случаю одной переменной. Далее, до тех пор, пока это возможно (т. е. до 9.5), мы одновременно рассматриваем аналитические функции действительных переменных и аналитические функции комплексных переменных. Наконец, всюду последовательно проведен наш общий принцип, состоящий в том, чтобы с самого начала рассматривать функции, принимающие векторные значения. Это не требует никаких изменений в доказательствах, и в гл. 11 читатель увидит, насколько полезным является изучение таких функций.

Конечно, здесь можно найти только наиболее элементарную часть чрезвычайно обширной теории аналитических функций. Определение таких функций дается исходя из локального существования степенного ряда, определяющего функцию, дифференциальные свойства аналитических функций устанавливаются с помощью аппарата степенных рядов (9.3.5). Обычное определение аналитических функций, использующее существование непрерывных производных, приложимо, конечно, только к функциям комплексных переменных, и поэтому такое рассмотрение откладывается до 9.10. Основными результатами относительно степенных рядов являются лемма Абеля (9.1.2), из которой выводится чрезвычайно существенная возможность подстановки степенного ряда в степенной ряд (9.2.2), и принцип изолированности нулей (9.1.5), наиболее важным следствием которого является принцип аналитического продолжения (9.4.2), выражающий „единство“ значений аналитической функции в точках области ее определения.

Начиная с этого момента мы предполагаем, что переменные комплексны. За исключением принципа максимума (9.5.9), все основные свойства аналитических функций комплексных переменных выводятся из единственной новой идеи — идеи „комплексного интегрирования“ и ее фундаментальных следствий: теоремы Коши (9.6.3), формулы Коши (9.9.1) и ее обобщения — теоремы о вычетах. Формулировка теоремы Коши, которую мы здесь приводим, не является наилучшей. Она утверждает, что интеграл вдоль контура есть инвариант гомотопического класса этого контура, тогда как на самом деле этот интеграл является инвариантом его гомо-

логического класса. В большинстве случаев такая формулировка не вызывает никаких неудобств, однако в то время, как доказательство этой слабой формы теоремы Коши почти не нуждается в топологической подготовке, доказательство полной теоремы потребовало бы привлечения алгебраической топологии в объеме, который, как мы считаем, превышает уровень настоящего курса. Интересующийся читатель найдет полную теорему Коши вместе со всеми необходимыми предпосылками у Альфорса [1] и Спрингера [21].

Мы думаем, что, вместо того чтобы, пользуясь дополнительными результатами из алгебраической топологии, получить эти уточнения теоремы Коши, читателям будет интересно увидеть, как с помощью простого метода, предложенного С. Эйленбергом, можно получить очень глубокую информацию о топологии действительной плоскости (включая теорему Жордана о кривых), пользуясь только элементарными фактами, относящимися к комплексному интегрированию. Метод Эйленберга изложен в добавлении к главе (которое, кстати сказать, не используется нигде в дальнейших главах и может быть, таким образом, пропущено без какого бы то ни было ущерба).

Как было отмечено уже в гл. 1, читатель не найдет ниже никакого упоминания о так называемых „многозначных" функциях. Конечно, очень неприятно, что в поле $\mathbf{C}$ нельзя определить настоящую непрерывную функцию $\sqrt{z}$, которая удовлетворяла бы уравнению $(\sqrt{z})^2 = z$. Но разрешение этой трудности, несомненно, нельзя искать в намеренном извращении общего понятия отображения, внезапно объявив, что в конечном счете такая „функция" имеется; однако она обладает необыкновенным свойством: для каждого $z \neq 0$ она имеет два различных „значения". Расплата за это глупое „нововведение" наступает немедленно: над такими „функциями" невозможно хоть с какой-нибудь разумной уверенностью производить даже простейшие алгебраические операции. Например, соотношение $2\sqrt{z} = \sqrt{z} + \sqrt{z}$, очевидно, неверно; в самом деле, если мы будем следовать „определению" $\sqrt{z}$, то при $z \neq 0$ мы будем вынуждены левой части приписать два, а правой — три различных значения.

К счастью, существует разрешение этой трудности, не имеющей ничего общего с такого рода бессмыслицами. Оно было указано более ста лет назад Риманом и состоит в восстановлении единственности значения $\sqrt{z}$ с помощью, так сказать, „удвоения" области изменения переменной z, так что два значения $\sqrt{z}$ вместо единственной точки z соответствуют двум различным точкам. Если вообще бывают гениальные открытия, то это было одним из них, и оно положило начало обширной теории *римановых поверхностей* и их современного обобщения — *комплексных многообразий*. Читателя, который пожелает познакомиться с этими красивыми и активно развивающимися теориями, мы отсылаем к классической книге Г. Вейля [25] и современному изложению Спрингера [21] по теории римановых поверхностей, материалам семинара А. Картана [8] и недавней книге А. Вейля [24] о комплексных многообразиях.

1. Степенные ряды

Во всем последующем K будет обозначать или действительное поле $\mathbf{R}$, или же комплексное поле $\mathbf{C}$; его элементы будут называться *скалярами*. *Открытый* (соответственно *замкнутый*) *полицилиндр* в векторном пространстве K^p над полем K есть произведение p открытых (соответственно замкнутых) шаров. Иными словами, это есть множество P точек $z=(z_1, \ldots, z_p)$, удовлетворяющих условиям вида $|z_i-a_i|<r_i$ (соответственно $|z_i-a_i|\leqslant r_i$), $1\leqslant i\leqslant p$, причем для любого индекса $r_i>0$. Точка $a=(a_1, \ldots, a_p)$ есть *центр* полицилиндра P, а $r_1, \ldots, r_p$ — его *радиусы* (таким образом, шар в K^p является полицилиндром, все радиусы которого равны между собой).

(9.1.1) *Пусть P и Q — два открытых полицилиндра в K^p, для которых $P\cap Q\neq\varnothing$. Тогда сегмент* (8.5), *соединяющий любые две точки x и y пересечения $P\cap Q$, содержится в $P\cap Q$; в частности, пересечение $P\cap Q$ связно.*

В самом деле, если $|x_i-a_i|<r_i$ и $|y_i-a_i|<r_i$, то при $0\leqslant t\leqslant 1$ имеем $|tx_i+(1-t)y_i-a_i|\leqslant t|x_i-a_i|+(1-t)|y_i-a_i|<r_i$. Последнее утверждение следует из того факта, что [в силу (3.19.1) и (3.19.7)] сегмент связен, и из (3.19.3).

Введем следующие обозначения: для любого элемента $\nu=(n_1, \ldots, n_p)$ множества $\mathbf{N}^p$ (n_i — целые числа $\geqslant 0$) и любого $z=(z_1, \ldots, z_p)\in K^p$ мы будем писать $z^\nu=z_1^{n_1}z_2^{n_2}\ldots z_p^{n_p}$ и $|\nu|=n_1+n_2+\ldots+n_p$. Если E — банахово пространство (над K) и $(c_\nu)_{\nu\in\mathbf{N}^p}$ — семейство элементов пространства E, имеющее $\mathbf{N}^p$ множеством индексов, то мы будем говорить, что семейство $(c_\nu z^\nu)_{\nu\in\mathbf{N}^p}$ элементов пространства E есть *степенной ряд* относительно p *переменных* z_i $(1\leqslant i\leqslant p)$ *с коэффициентами* c_ν.

(9.1.2) (Лемма Абеля) *Пусть точка $b=(b_1, \ldots, b_p)\in K^p$ такова, что $b_i\neq 0$ при $1\leqslant i\leqslant p$ и что семейство $(c_\nu b^\nu)$ ограничено в E. Тогда для любой системы радиусов (r_i), удовлетворяющей условию $0<r_i<|b_i|$ (где $1\leqslant i\leqslant p$), степенной ряд $(c_\nu z^\nu)$ нормально сходится в полицилиндре с центром 0 и радиусами r_i.*

В самом деле, если для любого $\nu\in\mathbf{N}^p$ выполняется неравенство $\|c_\nu b^\nu\|\leqslant A$, то из определения нормы в K^p следует, что при $|z_i|\leqslant r_i<|b_i|$ $(1\leqslant i\leqslant p)$ имеем $\|c_\nu z^\nu\|\leqslant Aq^\nu$, где $q=(q_1, \ldots, q_p)$, $q_i=r_i/|b_i|<1$. Из (5.5.3) следует, что семейство $(q^\nu)_{\nu\in\mathbf{N}^p}$ положительных чисел абсолютно суммируемо, откуда на основании (5.3.1) вытекает требуемый результат.

(9.1.3) *При предположениях* (9.1.2) *сумма степенного ряда* $(c_\nu z^\nu)$ *непрерывна в открытом полицилиндре с центром* 0 *и радиусами* $|b_i|$.

Так как каждая точка этого полицилиндра является внутренней для некоторого замкнутого полицилиндра с радиусами $r_i < |b_i|$, то утверждение следует из (7.2.1).

Пусть q — целое число, удовлетворяющее условию $1 \leqslant q \leqslant p$. Для любого $\nu = (n_1, \ldots, n_p)$ положим $\nu' = (n_1, \ldots, n_q)$, $\nu'' = (n_{q+1}, \ldots, n_p)$. Будем рассматривать K^p как пространство, тождественное с произведением $K^q \times K^{p-q}$, и для $z = (z_1, \ldots, z_p) \in K^p$ писать $z' = (z_1, \ldots, z_q)$, $z'' = (z_{q+1}, \ldots, z_p)$. При этих обозначениях справедливо утверждение

(9.1.4) *Пусть степенной ряд* $(c_\nu z^\nu)$ *абсолютно суммируем в полицилиндре* $P \subset K^p$ *с радиусами* r_i *и центром* 0. *Тогда для любого* $\nu'' \in \mathbf{N}^{p-q}$ *ряд* $(c_{(\nu', \nu'')} z'^{\nu'})$ *абсолютно суммируем в полицилиндре* P', *являющемся проекцией полицилиндра* P *в* K^q. *Если обозначить сумму этого ряда через* $g_{\nu''}(z')$, *то для любой точки* $z' \in P'$ *степенной ряд* $\left(g_{\nu''}(z') z''^{\nu''}\right)$ *абсолютно суммируем в полицилиндре* P'', *являющемся проекцией* P *в* K^{p-q}, *и его сумма равна сумме ряда* $(c_\nu z^\nu)$.

Так как $z^\nu = z'^{\nu'} z''^{\nu''}$, то тот факт, что каждый из рядов $\left(c_{(\nu', \nu'')} z'^{\nu'} z''^{\nu''}\right)$ (ν'' фиксировано) абсолютно суммируем и что $\sum_{\nu''} g_{\nu''}(z') z''^{\nu''} = \sum_\nu c_\nu z^\nu$, следует из (5.3.5) и из теоремы ассоциативности (5.3.6) для абсолютно суммируемых семейств. Если мы возьмем точку $z'' \in P''$ так, чтобы при $q+1 \leqslant i \leqslant p$ было $z_i \neq 0$, то отсюда будет следовать абсолютная суммируемость ряда $\left(c_{(\nu', \nu'')} z'^{\nu'}\right)$.

(9.1.5) (Принцип изолированности нулей) *Пусть* $(c_n z^n)$ — *степенной ряд относительно одной переменной, сходящийся в открытом шаре* P *радиуса* r, *и пусть* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. *Тогда если не все* c_n *равны* 0, *то существует такое* $r' < r$, *что* $f(z) \neq 0$ *при* $0 < |z| < r'$.

Пусть h — наименьший номер, для которого $c_h \neq 0$. Тогда мы можем написать $f(z) = z^h (c_h + c_{h+1} z + \ldots + c_{h+m} z^m + \ldots)$, причем ряд $(c_{h+m} z^m)$ сходится в P. Если $g(z) = c_h + c_{h+1} z + \ldots + c_{h+m} z^m + \ldots$, то в силу (9.1.3) функция g непрерывна в P и, так как $g(0) = c_h \neq 0$, существует такое $r' > 0$, что при $|z| < r'$ функция $g(z) \neq 0$. Отсюда следует требуемый результат.

(9.1.6) *Пусть два степенных ряда* $(a_\nu z^\nu)$ *и* $(b_\nu z^\nu)$ *абсолютно суммируемы и имеют в полицилиндре* P *одну и ту же сумму. Тогда для каждого* $\nu \in \mathbf{N}^p$ *коэффициенты* $a_\nu = b_\nu$.

Проведем индукцию по p. При $p=1$ результат сразу следует из (9.1.5). Переходя, если потребуется, к разности двух рассматриваемых рядов, можем считать, что $b_\nu = 0$ для каждого ν. Применяя теорему (9.1.4) при $q = p-1$, имеем $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(z') z_p^n = 0$; поэтому $g_n(z') = 0$ для каждого n и каждой точки z' проекции P' полицилиндра P в K^{p-1}. Применяя к каждой функции g_n предположение индукции, получаем, что при любом ν коэффициент $\alpha_\nu = 0$.

Задачи

1. Пусть $(c_\nu z^\nu)$ — степенной ряд относительно p переменных z_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ и пусть $a = (a_1, \ldots, a_p) \in K$. Для того чтобы действительное число $r > 0$ обладало тем свойством, что для любого числа $t \in K$, удовлетворяющего условию $|t| < r$, ряд $(c_\nu (ta_1)^{n_1} \ldots (ta_p)^{n_p})$ абсолютно суммируем, необходимо и достаточно, чтобы для всех индексов $\nu = (n_1, \ldots, n_p)$, исключая, быть может, конечное их число, выполнялось неравенство

$$\ln r + \frac{1}{|\nu|}\left(\ln \|c_\nu\| + \sum_{i=1}^{p} n_i \ln |a_i|\right) \leqslant 0.$$

[Примените (9.1.2).]

В частности, при $p=1$ существует наибольшее число $R \geqslant 0$ (*радиус сходимости*, который может также быть равен $+\infty$), такое, что ряд $(c_n z^n)$ сходится при $|z| < R$; это число определяется формулой

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geqslant 0}\left(\|c_{n+k}\|\right)^{1/(n+k)}\right),$$

причем правая часть обозначается также символом $\limsup_{n\to\infty} \|c_n\|^{1/n}$. Если существует предел $\lim_{n\to\infty} \|c_n\|^{1/n}$, то он равен $1/R$.

2. Приведите примеры степенных рядов относительно одной комплексной переменной, имеющих радиус сходимости $R=1$ (задача 1) и таких, что:

a) ряд нормально сходится при $|z| = R$;

b) ряд сходится в некоторой точке z окружности $|z| = R$, но не сходится в остальных точках этой окружности;

c) ряд не сходится ни в одной точке окружности $|z| = R$.

3. Приведите пример степенного ряда относительно двух переменных, абсолютно суммируемого в точках (a_1, a_2) и (b_1, b_2), но не в точке $\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}\right)$.

[В степенном ряде с одной переменной замените z на $z_1 z_2$.]

4. Пусть $(c_n z^n)$ и $(d_n z^n)$ — два степенных ряда относительно одной переменной со скалярными коэффициентами. Если их радиусы сходимости (задача 1)

R и R' и если ни R, ни R' не равны 0, то радиус сходимости R'' степенного ряда $(c_n d_n z^n)$ не меньше RR' (это произведение считается равным $+\infty$, если R или R' равно $+\infty$). Приведите пример, когда $R'' > RR'$.

2. Подстановка степенных рядов в степенной ряд

Пусть Q — полицилиндр в K^q с центром 0; предположим, что p степенных рядов $(b_\mu^{(k)} u^\mu)$ относительно q переменных со скалярными коэффициентами абсолютно суммируемы в Q [здесь $\mu = (m_1, \ldots, m_q)$, $u = (u_1, \ldots, u_q)$ и $u^\mu = (u_1^{m_1} \ldots u_q^{m_q})$]. Положим $g_k(u) = \sum_\mu b_\mu^{(k)} u^\mu$, $G_k(u) = \sum_\mu |b_\mu^{(k)}| u^\mu$. Пусть, с другой стороны, $(a_\nu z^\nu)$ — степенной ряд относительно p переменных с коэффициентами из E, абсолютно суммируемый в полицилиндре P пространства K^p с центром 0 и радиусами r_k $(1 \leqslant k \leqslant p)$. Если мы „формально" заменим в члене $z^\nu = z_1^{n_1} \ldots z_p^{n_p}$ каждое z_k степенным рядом $g_k(u)$, то нам придется взять формальное „произведение" $n_1 + n_2 + \ldots + n_p$ рядов, т. е. выбрать по члену в каждом из $n_1 + \ldots + n_p$ множителей, составить их произведение и затем „просуммировать" все полученные таким путем члены. Таким образом, для каждого $\nu = (n_1, n_2, \ldots, n_p)$ нам нужно рассмотреть множество A_ν всех конечных семейств $(\mu_{kj}) = \rho$, где $\mu_{kj} \in \mathbf{N}^q$; k пробегает от 1 до p и при каждом k индекс j меняется от 1 до n_k. Такому ρ мы ставим в соответствие член

$$t_\rho(u) = a_\nu \prod_{k=1}^{p} \prod_{j=1}^{n_k} b_{\mu_{kj}}^{(k)} u^{\mu_{kj}}.$$

При этих обозначениях имеет место теорема

(9.2.1) *Пусть $s_1, \ldots, s_q$ — q чисел > 0, удовлетворяющих условиям $G_k(s_1, \ldots, s_q) < r_k$, где $1 \leqslant k \leqslant p$. Тогда для каждой точки u, принадлежащей открытому полицилиндру $S \subset K^q$ с центром 0 и радиусами s_l $(1 \leqslant l \leqslant q)$ семейство $(t_\rho(u))$ (где ρ пробегает все счетное множество индексов $A = \bigcup_{\nu \in \mathbf{N}^p} A_\nu$) абсолютно суммируемо, и, если $f(z) = \sum_\nu a_\nu z^\nu$, его сумма равна $f(g_1(u), g_2(u), \ldots, g_p(u))$.*

Иными словами, при условиях $G_k(s_1, \ldots, s_q) < r_k$ $(1 \leqslant k \leqslant p)$ „подстановка" рядов $g_k(u)$ вместо z_k $(1 \leqslant k \leqslant p)$ в ряд f дает абсолютно суммируемое семейство даже прежде, чем все члены $t_\rho(u)$, имеющие относительно $u_1, \ldots, u_q$ одинаковые степени, будут собраны вместе.

Чтобы доказать (9.2.1), нужно лишь убедиться в том, что семейство $(t_\rho(u))$ абсолютно суммируемо; то, что его сумма равна $f(g_1(u), \ldots, g_p(u))$, следует из применения теоремы ассоциативности (5.3.6) к подмножествам A_ν множества A и из теоремы (5.5.3), которая показывает, что сумма $\sum_{\rho \in A_\nu} t_\rho(u)$ равна $a_\nu(g_1(u))^{n_1} \ldots (g_p(u))^{n_p}$. Для доказательства того, что семейство $(t_\rho(u))_{\rho \in A}$ абсолютно суммируемо, воспользуемся теоремой (5.3.4). Для любого конечного подмножества $B \subset A$ в силу (5.3.5) и (5.5.3) имеем

$$\sum_{\rho \in B \cap A_\nu} \|t_\rho(u)\| \leqslant \|a_\nu\| \cdot (G_1(s_1, \ldots, s_q))^{n_1} \ldots (G_p(s_1, \ldots, s_q))^{n_p},$$

и, по предположению, правая часть этого неравенства есть член с индексом ν абсолютно суммируемого семейства; отсюда следует наше утверждение.

Запишем $t_\rho(u) = c_\rho u^\lambda$, где $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_q)$, $\lambda_i = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_k} m_{kji}$ (если $\mu_{kj} = (m_{kj1}, \ldots, m_{kjq})$). Из (9.2.1) и (5.3.5) (в предположении, что все $u_i \neq 0$, $u \in S$) следует, что для каждого λ семейство всех c_ρ, где ρ пробегает все элементы множества A, соответствующие одному и тому же λ, абсолютно суммируемо в E. Если d_λ — его сумма, то по теореме ассоциативности (5.3.6) мы видим, что

$$f(g_1(u), \ldots, g_p(u)) = \sum_\lambda d_\lambda u^\lambda, \tag{9.2.1.1}$$

где ряд в правой части равенства абсолютно суммируем в полицилиндре S. По определению этот степенной ряд называется *степенным рядом, полученным в результате подстановки рядов $g_k(u)$ вместо z_k при $1 \leqslant k \leqslant p$ в степенной ряд $(a_\nu z^\nu)$.*

(9.2.2) *Если точка $(g_1(0), \ldots, g_p(0))$ пространства K^p принадлежит полицилиндру P, то в пространстве K^q существует такой открытый полицилиндр S, что при $u \in S$ ряды $g_k(u)$ можно подставить вместо z_k $(1 \leqslant k \leqslant p)$ в степенной ряд $(a_\nu z^\nu)$.*

Заметим, что, по определению, $G_k(0) = |g_k(0)|$ при $1 \leqslant k \leqslant p$. Так как функции G_k в силу (9.1.3) непрерывны в точке 0, то существование таких чисел $s_l > 0$ $(1 \leqslant l \leqslant q)$, что $G_k(s_1, \ldots, s_q) < r_k$ при $1 \leqslant k \leqslant p$, сразу следует из предположения.

3. Аналитические функции

Пусть D — открытое множество в пространстве K^p. Мы будем говорить, что отображение f множества D в банахово пространство E над K является *аналитическим*, если для каждой точки $a \in D$

существует такой открытый полицилиндр $P \subset D$ с центром a, что в P отображение $f(z)$ равно сумме абсолютно суммируемого степенного ряда относительно p переменных $z_k - a_k$ $(1 \leqslant k \leqslant p)$ [в силу (9.1.6) этот ряд необходимо единственен]. Предположим, что $K = \mathbf{C}$; пусть b — точка множества D и B — прообраз множества D при отображении $x \to b + x$ пространства $\mathbf{R}^p$ в $\mathbf{C}^p$. Тогда из определений сразу следует, что отображение $x \to f(b + x)$ является аналитическим в открытом множестве B пространства $\mathbf{R}^p$.

(9.3.1) *Пусть $(a_\nu z^\nu)$ — абсолютно суммируемый степенной ряд в открытом полицилиндре $P \subset K^p$. Тогда сумма ряда $f(z) = \sum_\nu a_\nu z^\nu$ является аналитической в P; точнее, если r_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ — радиусы полицилиндра P, то для любой точки $b = (b_i) \in P$ отображение $f(z)$ равно сумме абсолютно суммируемого ряда относительно $z_k - b_k$ в открытом полицилиндре с центром b и радиусами $r_i - |b_i|$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$.*

Это сразу следует из теоремы (9.2.1), в которой следует взять $q = p$, $g_k(u) = b_k + u_k$. В этом случае $G_k(u) = |b_k| + u_k$, и условия $G_k(s_1, \ldots, s_p) < r_k$ $(1 \leqslant k \leqslant p)$ превращаются в условия $s_k < r_k - |b_k|$ $(1 \leqslant k \leqslant p)$.

Целая функция p переменных есть отображение f пространства K^p в E, равное сумме степенного ряда, абсолютно суммируемого во всем пространстве K^p [ср. (9.9.6)]. В силу (9.3.1) для любой точки $b \in K^p$ в этом случае $f(z)$ равно сумме степенного ряда относительно $z_k - b_k$, который абсолютно суммируем во всем K^p.

(9.3.2) *Пусть A — открытое множество пространства K^p, B — открытое множество пространства K^q, g_k $(1 \leqslant k \leqslant p)$ — p скалярных функций, определенных и аналитических в B, и предположим, что образ множества B при отображении $(g_1, \ldots, g_p)$ содержится в A. Тогда для любого аналитического отображения f множества A в E отображение $f(g_1, \ldots, g_p)$ является аналитическим в B.*

Это сразу следует из определения и из (9.2.2). В частности, если отображение f является аналитическим в $A \subset K^p$, то для любой системы $(a_{q+1}, \ldots, a_p)$, состоящей из $p - q$ скаляров, отображение $(z_1, \ldots, z_q) \to f(z_1, \ldots, z_q, a_{q+1}, \ldots, a_p)$ является аналитическим в открытом множестве $A(a_{q+1}, \ldots, a_p)$ пространства K^q.

(9.3.3) *Для того чтобы отображение $f = (f_1, \ldots, f_q)$ открытого множества $A \subset K^p$ в K^q было аналитическим, необходимо и достаточно, чтобы каждая из скалярных функций f_i $(1 \leqslant i \leqslant q)$ была аналитической в A.*

Очевидно из определения.

(9.3.4) *Пусть* $z_k = x_k + iy_k$ *при* $1 \leqslant k \leqslant p$, *где* x_k *и* y_k — *действительные числа. Если отображение* f *является аналитическим в открытом множестве* $A \subset \mathbf{C}^p$, *то отображение* $(x_1, y_1, \ldots, x_p, y_p) \to f(x_1 + iy_1, \ldots, x_p + iy_p)$ *является аналитическим в множестве* A, *рассматриваемом как открытое множество* в $\mathbf{R}^{2p}$.

В самом деле, в силу (9.3.2) эта функция является аналитической в открытом множестве $B \subset \mathbf{C}^{2p}$, являющемся прообразом множества A при отображении $(u_1, v_1, \ldots, u_p, v_p) \to (u_1 + iv_1, \ldots, u_p + iv_p)$ пространства $\mathbf{C}^{2p}$ в $\mathbf{C}^p$. Поэтому она будет аналитической в пересечении $A = B \cap \mathbf{R}^{2p}$, когда A рассматривается как подмножество пространства $\mathbf{R}^{2p}$.

(9.3.5) *Пусть* $\left(c_{n_1 n_2 \ldots n_p} z_1^{n_1} \ldots z_p^{n_p}\right)$ — *степенной ряд, абсолютно суммируемый в открытом полицилиндре* P *с центром* 0, *и* $f(z)$ — *его сумма. Тогда степенной ряд*

$$\left(n_k c_{n_1 n_2 \ldots n_p} z_1^{n_1} \ldots z_k^{n_k - 1} \ldots z_p^{n_p}\right)$$

абсолютно суммируем в P, *и его сумма есть частная производная* $\mathrm{D}_k f \left(= \frac{\partial f}{\partial z_k}\right)$.

Для любого $z \in P$ мы можем в рассматриваемый ряд вместо z_i при $i \neq k$ подставить само z_i, а вместо z_k — сумму $z_k + u_k$ и таким образом получить степенной ряд относительно $p+1$ переменных $z_1, \ldots, z_p, u_k$, который в силу (9.2.1) будет абсолютно суммируемым при $|z_i| < r_i (i \neq k)$ и $|z_k| + |u_k| < r_k$ (где $r_1, \ldots, r_p$ — радиусы полицилиндра P). На основании (9.1.4) мы можем, следовательно, написать $f(z_1, \ldots, z_k + u_k, \ldots, z_p) = f(z) + u_k f_1(z) + \ldots$ $\ldots + u_k^n f_n(z) + \ldots$, где каждое из f_n является степенным рядом, абсолютно суммируемым в P, и правая часть при каждом $z \in P$ является степенным рядом относительно u_k, абсолютно суммируемым в некотором открытом шаре B (зависящем от z) с центром 0. Кроме того, из формулы бинома Ньютона следует, что

$$f_1(z) = \sum_{\nu} n_k c_{n_1 \ldots n_p} z_1^{n_1} \ldots z_k^{n_k - 1} \ldots z_p^{n_p},$$

и так как

$$(f(z_1, \ldots, z_k + u_k, \ldots, z_p) - f(z))/u_k = f_1(z) + \ldots + u_k^{n-1} f_n(z) + \ldots,$$

в силу (9.1.4) есть абсолютно суммируемый степенной ряд (относительно u_k) в B (при фиксированном z), то из (9.1.3) мы заключаем, что $f_1(z) = \mathrm{D}_k f(z)$ при любом $z \in P$. Из этого результата и из (9.1.3) получаются выражения коэффициентов c_ν через производные отображения f, а именно

(9.3.5.1) $$\nu!\, c_\nu = \mathrm{D}^\nu f(0),$$

где $D^\nu = D_1^{n_1} \ldots D_p^{n_p}$ и $\nu! = n_1! n_2! \ldots n_p!$ Эта формула сразу выводится индукцией по $|\nu| = n_1 + \ldots + n_p$.

(9.3.6) *Функция, аналитическая в открытом множестве $A \subset K^p$, бесконечно дифференцируема, и все ее производные являются аналитическими в A.*

Это — очевидное следствие теорем (9.3.5) и (8.12.8).

При $p = 1$ имеем теорему, „обратную" (9.3.5):

(9.3.7) *Пусть $(c_n z^n)$ — степенной ряд, сходящийся в шаре $P: |z| < r$ пространства K, и пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ в P. Тогда степенной ряд $c_n z^{n+1}/(n+1)$ сходится в P, и его сумма является первообразной отображения f.*

Ввиду (9.3.5) нам нужно только убедиться в сходимости ряда $c_n z^{n+1}/(n+1)$, но она сразу следует из неравенства

$$\left\| \frac{1}{n+1} c_n z^{n+1} \right\| \leqslant \|c_n\| \cdot |z|^{n+1}$$

и из (9.1.2).

Задачи

1. Пусть $(a_n z^n)$ и $(b_n z^n)$ — два степенных ряда относительно одной переменной, причем b_n — действительные числа > 0. Допустим, что $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = s$.

a) Предположим, что ряд $(b_n z^n)$ сходится при $|z| < 1$, но не сходится при $z = 1$ (это значит, что $\lim_{k \to \infty} c_k = +\infty$, где $c_k = \sum_{n=0}^{k} b_n$). Покажите, что ряд $(a_n z^n)$ абсолютно сходится при $|z| < 1$ и что

$$\lim_{z \to 1,\ z \in I} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n} = s,$$

где $I = [0, 1[$.

[Заметьте, что $\lim_{z \to 1,\ z \in I} \left(\sum_{n \geqslant k} b_n z^n \right) = +\infty$ при любом данном k.]

b) Предположим, что ряд $(b_n z^n)$ сходится при каждом z. Покажите, что ряд $(a_n z^n)$ абсолютно сходится при каждом z и что

$$\lim_{z \to +\infty,\ z \in J} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n} = s,$$

где J — промежуток $[0, +\infty]$ в $\overline{\mathbf{R}}$.

c) Покажите, что если ряд (a_n) сходится и $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$, то ряд $(a_n z^n)$ при $|z| < 1$ абсолютно сходится и $\lim_{z \to 1,\ z \in I} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = s$ (теорема Абеля).

[Примените a), взяв $b_n = 1$ при каждом n.]

d) Степенной ряд $((-1)^n z^n)$ имеет радиус сходимости 1, и его сумма $1/(1+z)$ стремится к пределу, когда z стремится к 1 по I, но ряд $((-1)^n)$ расходится (см. задачу 2).

2. Пусть $(a_n z^n)$ — степенной ряд относительно одной переменной, имеющий радиус сходимости, равный 1. Пусть $f(z)$ — его сумма; предположим, что существует предел $f(1-)$. Покажите, что если, сверх того, $\lim_{n \to \infty} n a_n = 0$, то ряд (a_n) сходится и его сумма равна $f(1-)$ (теорема Таубера).

[Заметьте, что если при $n \geqslant k$ выполняется неравенство $|n a_n| \leqslant \varepsilon$, то для любого $N > k$ и $0 < x < 1$

$$\left\| \sum_{n=k}^{N} a_n (1 - x^n) \right\| \leqslant \varepsilon N (1 - x) \quad \text{и} \quad \left\| \sum_{n \geqslant N} a_n x^n \right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{N(1-x)}.\ ]$$

3. Пусть $(a_n z^n)$ — степенной ряд относительно одной переменной, имеющий радиус сходимости $r > 0$, и пусть (b_n) — такая последовательность скаляров $\neq 0$, что $q = \lim_{n \to \infty} (b_n / b_{n+1})$ существует и $|q| < r$. Покажите, что если $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$, то предел $\lim_{n \to \infty} (c_n / b_n)$ существует и равен $f(q)$.

4. Пусть $(p_n z^n)$ и $(q_n z^n)$ — два степенных ряда с комплексными коэффициентами и радиусами сходимости $\neq 0$ и пусть $f(z) = \sum_n p_n z^n$ и $g(z) = \sum_n q_n z^n$ в окрестности U точки 0, в которой оба ряда абсолютно сходятся. Предположим, что $q_0 = g(0) \neq 0$. Тогда существует степенной ряд $\sum_n c_n z^n$, абсолютно сходящийся в окрестности $V \subset U$ точки 0 и имеющий сумму, равную $f(z)/g(z)$ в V.

[Заметьте, что ряд (z^n) при $|z| < 1$ сходится, и примените (9.2.2).]

Покажите, что если все $q_n > 0$, последовательность q_{n+1}/q_n возрастает, коэффициенты p_n действительны и таковы, что последовательность p_n/q_n возрастает (соответственно убывает), то $c_n \leqslant 0$ (соответственно $c_n \leqslant 0$) при каждом $n \geqslant 1$.

[Выразите разность $p_n/q_n - p_{n-1}/q_{n-1}$ через q_k и c_k и проведите индукцию по n.]

Выведите из этого результата, что все производные функции $x/\ln(1-x)$ при $0 < x < 1$ будут > 0.

5. Пусть g_k $(1 \leqslant k \leqslant p)$ — p скалярных целых функций, определенных в K^p. Если f — целая функция, определенная в K^p, то $f(g_1, \ldots, g_p)$ есть целая функция в K^q.

4. Принцип аналитического продолжения

(9.4.1) *Пусть P и Q — два открытых полицилиндра в пространстве K^p с центрами a и b, причем $P \cap Q \neq \varnothing$. Пусть $\left(c_{n_1 \ldots n_p}(x_1-a_1)^{n_1} \ldots (x_p-a_p)^{n_p}\right)$ — степенной ряд относительно $x_i - a_i$, абсолютно суммируемый в P, и пусть $f(x)$ — его сумма. Пусть $\left(d_{n_1 \ldots n_p}(x_1-b_1)^{n_1} \ldots (x_p-b_p)^{n_p}\right)$ — степенной ряд относительно $x_i - b_i$, абсолютно суммируемый в Q, и пусть $g(x)$ — его сумма. Если существует такое непустое открытое подмножество U пересечения $P \cap Q$, что $f(x) = g(x)$ в любой точке $x \in U$, то $f(x) = g(x)$ в любой точке $x \in P \cap Q$.*

Пусть $u \in U$ и пусть v — произвольная точка пересечения $P \cap Q$. Тогда сегмент, соединяющий u и v, в силу (9.1.1) содержится в $P \cap Q$. Пусть $h(t) = f(u + t(v-u)) - g(u + t(v-u))$, где t — действительное число; ввиду (9.3.2) это — аналитическая функция от t в некотором открытом промежутке I, содержащем $[0, 1]$. Пусть A — замкнутое подмножество промежутка $[0, 1]$, состоящее из тех t, для которых $h(s) = 0$ при $0 \leqslant s \leqslant t$. По предположению существует открытая окрестность точки 0 в промежутке $[0, 1]$, содержащаяся в A; поэтому верхняя грань ρ множества A, естественно, > 0.

Мы докажем, что $\rho = 1$, и тем самым теорема (9.4.1) будет доказана. Прежде всего заметим, что $h(t) = 0$ при $0 \leqslant t < \rho$, следовательно, по непрерывности $h(\rho) = 0$. Так как h — аналитическая функция в точке ρ, существует степенной ряд относительно $t - \rho$, сходящийся при $|t - \rho| < \alpha$, где $\alpha > 0$, сумма которого при $|t - \rho| < \alpha$ равна $h(t)$. Но при $0 \leqslant t \leqslant \rho$, по предположению, $h(t) = 0$. Из принципа изолированности нулей (9.1.5) тогда следует, что $h(t) = 0$ при $|t - \rho| < \alpha$, и, если бы ρ было < 1, это противоречило бы определению ρ.

(9.4.2) (Принцип аналитического продолжения). *Пусть $A \subset K^p$ — открытое связное множество, f и g — две аналитические функции в A с значениями в E. Если существует такое непустое открытое подмножество U множества A, что $f(x) = g(x)$ в U, то $f(x) = g(x)$ в каждой точке $x \in A$.*

Пусть B — внутренность множества точек $x \in A$, в которых $f(x) = g(x)$. Ясно, что B открыто и, по предположению, не пусто. Мы докажем, что B замкнуто в A и, следовательно, равно A, так как A связно [см. 3.19]. Пусть $a \in A$ — точка прикосновения множества B. Поскольку f и g — аналитические функции, существует такой открытый полицилиндр P с центром a, содержащийся в A, что $f(x)$ и $g(x)$ в P равны суммам двух степенных рядов относительно $x_i - a_i$, абсолютно суммируемых в P. Но по определению пересечение $P \cap B$ содержит открытый полицилиндр, в котором

$f(x)=g(x)$. Применяя (9.4.1) к $P=Q$, заключаем, что $f(x)=g(x)$ в P; иными словами, $P\subset B$ и, в частности, $a\in B$, ч. т. д.

При $p=1$ мы можем следующим образом усилить предыдущую теорему:

(9.4.3) *Пусть $A\subset K$ — открытое связное множество в K, f и g — две аналитические функции в A с значениями в E. Допустим, что существует такое компактное подмножество $H\subset A$, что множество M точек $x\in H$, в которых $f(x)=g(x)$, бесконечно. Тогда $f(x)=g(x)$ в каждой точке $x\in A$.*

Пусть (z_n) — бесконечная последовательность различных точек множества M. Так как H компактно, последовательность (z_n) имеет предельную точку $b\in H$ и, значит, любой шар P с центром b, содержащийся в A, содержит бесконечное множество точек из M. Но мы можем считать, что в шаре $P\subset A$ с центром b функции f и g равны суммам сходящихся степенных рядов относительно $z-b$. Принцип изолированности нулей (9.1.5) тогда показывает, что $f(x)=g(x)$ в P, и мы можем теперь применить (9.4.2).

При $K=\mathbf{C}$ мы также можем усилить теорему (9.4.2):

(9.4.4) *Пусть $A\subset \mathbf{C}^p$ — открытое связное множество, f и g — две аналитические функции в A с значениями в комплексном банаховом пространстве E, U — открытое подмножество A, b — точка множества U. Предположим, что $f(x)=g(x)$ в пересечении $U\cap(b+\mathbf{R}^p)$. Тогда $f(x)=g(x)$ в каждой точке $x\in A$.*

Производя, если потребуется, перенос, можем считать, что $b=0$. Пусть $h=f-g$ и пусть P — полицилиндр в $\mathbf{C}^p$ с центром 0, содержащийся в U и такой, что в P функция $h(z)$ равна сумме абсолютно суммируемого степенного ряда $(c_\nu z^\nu)$. Множество $P\cap\mathbf{R}^p$ является полицилиндром в $\mathbf{R}^p$, и в $P\cap\mathbf{R}^p$ функция $h(x)=0$. Это на основании (9.1.5) показывает, что $c_\nu=0$ при каждом ν, поэтому $h(z)=0$ в P, и мы можем применить (9.4.2).

Пусть $A\subset K^p$ — открытое связное множество. Мы будем говорить, что подмножество $M\subset A$ есть *множество единственности* в A, если любые две функции, определенные и аналитические в A, совпадают в A, коль скоро они совпадают в M. Теоремы (9.4.2) — (9.4.4) показывают, что непустое открытое подмножество $U\subset A$, или же пересечение $U\cap(b+\mathbf{R}^p)$ (если оно не пусто), или, при $p=1$, компактное бесконечное подмножество A являются множествами единственности. В (9.9) для $K=\mathbf{C}$ мы встретим еще один пример.

Последняя теорема показывает, что если открытое связное множество $A\subset\mathbf{C}^p$ обладает тем свойством, что $A\cap\mathbf{R}^p\neq\varnothing$, то любая функция f, аналитическая в A, вполне определяется своими значениями в $A\cap\mathbf{R}^p$. Сужение функции f на $A\cap\mathbf{R}^p$ является аналитической функцией, но, вообще говоря, функция, аналитическая в $A\cap\mathbf{R}^p$,

не может быть продолжена в функцию, аналитическую *в* A. Мы имеем, однако, более слабый результат:

(9.4.5) *Пусть E — комплексное банахово пространство, A — открытое множество в $\mathbf{R}^p$ и f — аналитическое отображение множества A в E. Тогда существуют открытое множество $B \subset \mathbf{C}^p$, для которого $B \cap \mathbf{R}^p = A$, и аналитическое отображение g множества B в E, являющееся продолжением f.*

В самом деле, для каждой точки $a = (a_1, \ldots, a_p) \in A$ существует открытый полицилиндр P_a в $\mathbf{R}^p$, определяемый условиями $|x_i - a_i| < r_i$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$, содержащийся в множестве A и такой, что в P_a отображение $f(x)$ равно сумме абсолютно суммируемого степенного ряда $\left(c_{n_1 \ldots n_p}(x_1 - a_1)^{n_1} \ldots (x_p - a_p)^{n_p}\right)$. Пусть Q_a — открытый полицилиндр в $\mathbf{C}^p$ с центром a и радиусами r_i. Тогда в силу (9.1.2) степенной ряд $\left(c_{n_1 \ldots n_p}(z_1 - a_1)^{n_1} \ldots (z_p - a_p)^{n_p}\right)$ абсолютно суммируем в Q_a; пусть $g_a(z)$ — его сумма. Если a и b — две точки множества A, для которых $Q_a \cap Q_b \neq \varnothing$, то пересечение $P_a \cap P_b = (Q_a \cap Q_b) \cap \mathbf{R}^p$ не пусто, и в $P_a \cap P_b$ мы имеем $g_a(x) = g_b(x) = f(x)$. Кроме того, ввиду (9.9.1) пересечение $Q_a \cap Q_b$ связно. Из (9.4.4) следует, что $g_a(z) = g_b(z)$ в $Q_a \cap Q_b$. Мы можем теперь взять $B = \bigcup_{a \in A} Q_a$ и определить g как отображение, равное g_a на каждом Q_a; аналитичность отображения g следует из (9.3.1).

Доказательство теоремы (9.4.5) показывает, что если f — целая функция, определенная в $\mathbf{R}^p$, то она может быть продолжена в целую функцию, определенную в $\mathbf{C}^p$, и что эта функция в силу (9.4.4) единственна.

Задачи

1. a) Пусть $P(u_1, \ldots, u_{r+1})$ — многочлен с коэффициентами из K и $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ — элементы K, удовлетворяющие условию $|\alpha_i| < 1$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Предположим, что в K существуют шар B с центром 0 и скалярная функция f, аналитическая в B и такая, что для каждого $z \in B$ справедливо равенство $f(z) = P(z, f(\alpha_1 z), \ldots, f(\alpha_r z))$. Покажите, что функцию f можно продолжить в функцию g, аналитическую во всем пространстве K и удовлетворяющую в K тому же самому функциональному уравнению.

[Воспользуйтесь (9.4.2).]

b) Пусть $K = \mathbf{C}$, и предположим, что существуют действительное число β и скалярная функция f, аналитическая при $\Re z > \beta$ и удовлетворяющая на этом множестве уравнению $f(z) = P(z, f(z + a_1), \ldots, f(z + a_r))$, где a_i — комплексные числа с $\Re a_i > 0$. Покажите, что функция f может быть продолжена в функцию g, аналитическую в $\mathbf{C}$ и удовлетворяющую тому же самому функциональному уравнению.

c) Обобщите предыдущий результат на случай функций любого числа переменных.

2. Пусть D — связное открытое множество в $\mathbf{C}^p$ и D' — образ множества D при отображении $(z_1, \ldots, z_p) \to (\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_p)$. Пусть f — комплексная функция, аналитическая в D, и предположим, что пересечение $D \cap \mathbf{R}^p$ не пусто и что f принимает в $D \cap \mathbf{R}^p$ действительные значения. Покажите, что функция f может быть продолжена в функцию g, аналитическую в $D \cup D'$.

[Рассмотрите в D' функцию $(z_1, \ldots, z_p) \to f(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_p)$ и примените (9.4.4).]

5. Примеры аналитических функций; показательная функция. Число π

(9.5.1) *Пусть $P(z)$ и $Q(z)$ — два многочлена в K^p, причем Q не равен тождественно 0. Тогда частное $P(z)/Q(z)$ является аналитической функцией в (открытом) множестве точек z, в которых $Q(z) \neq 0$ (т. е. в множестве точек, на котором это частное определено).*

Очевидно, что любой многочлен является целой функцией. На основании (9.3.2) нам нужно лишь показать, что функция $1/z$ является аналитической при $z \neq 0$. Но если $z_0 \neq 0$, то можно написать

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z_0\left(1 + \frac{z - z_0}{z_0}\right)} = \frac{1}{z_0} - \frac{z - z_0}{z_0^2} + \frac{(z - z_0)^2}{z_0^3} - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^n \frac{(z - z_0)^n}{z_0^{n+1}} + \ldots,$$

где степенной ряд абсолютно суммируем при $|z - z_0| < |z_0|$, ч. т. д.

Рассмотрим теперь функцию e^x действительной переменной x; докажем, что она является целой функцией. Из формулы Тейлора (8.14.3), пользуясь (8.8), для любого n получаем

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \int_0^x \frac{(x - t)^n}{n!} e^t \, dt.$$

Так как e^x в силу (8.5.3) является возрастающей функцией, то при $|t| \leqslant |x|$ мы имеем $|e^t| \leqslant e^{|x|}$, следовательно, $\left| \int_0^x \frac{(x - t)^n}{n!} e^t \, dt \right| \leqslant$ $\leqslant \frac{|x|^{n+1} e^{|x|}}{(n+1)!}$. Но если n_0 — целое число $> |x|$, то при $n > n_0$ выполняется неравенство $\left| \frac{x^n}{n!} \right| \leqslant \left| \frac{x}{n_0} \right|^{n - n_0} \frac{|x|^{n_0}}{n_0!}$, и, таким образом, для

любого $x \in \mathbf{R}$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,$$

причем в силу (9.1.2) этот ряд нормально сходится во всяком компактном промежутке.

Пользуясь замечанием, следующим после доказательства теоремы (9.4.5), мы можем определить в $\mathbf{C}$ целую функцию e^z (обозначаемую также символом $\exp z$) как функцию, равную сумме степенного ряда $(z^n/n!)$. Имеем

(9.5.2) $$e^{z+z'} = e^z e^{z'},$$

ибо обе части равенства являются целыми функциями в $\mathbf{C}^2$, совпадающими в $\mathbf{R}^2$ ввиду (9.4.4).

Для действительного x комплексное число e^{-ix} является сопряженным с e^{ix}, поскольку $(-ix)^n$ есть число, сопряженное с $(ix)^n$. Из (9.5.2) следует, что $|e^{ix}| = 1$. По определению для действительного x имеем: $\cos x = \mathcal{R} e^{ix}$ и $\sin x = \mathcal{J} e^{ix}$.

В силу (9.3.3) эти функции являются целыми функциями действительной переменной x, а соотношение $|e^{ix}| = 1$ эквивалентно соотношению $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, откуда следует, что $|\cos x| \leqslant 1$ и $|\sin x| \leqslant 1$ для любого действительного x. Кроме того, имеем

(9.5.3) $$\mathrm{D}(e^z) = e^z,$$

так как обе части равенства являются [в силу (9.3.5)] целыми функциями в $\mathbf{C}$, совпадающими в $\mathbf{R}$. В частности [см. замечание, следующее за (8.4.1)], для действительного x имеем $\mathrm{D}(e^{ix}) = ie^{ix}$; поэтому

(9.5.4) $$\mathrm{D}(\cos x) = -\sin x, \quad \mathrm{D}(\sin x) = \cos x.$$

Формулы, определяющие $\cos x$ и $\sin x$ для действительного x, можно также записать в виде $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ и $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$. Эти формулы можно использовать для определения $\cos z$ и $\sin z$ для комплексного z, заменяя в правой части этих формул x на z. При этом определении формулы (9.5.4) остаются справедливыми и для комплексных значений аргумента.

(9.5.5) *Существует такое число $\pi > 0$, что решениями уравнения $e^z = 1$ являются числа $2n\pi i$ (n — положительные или отрицательные целые числа).*

Если $z = x + iy$, то мы имеем $|e^z| = e^x |e^{iy}| = e^x$; поэтому из $e^z = 1$ следует, что $x = 0$, $z = iy$. Сначала докажем:

(9.5.5.1) *Множество точек $x \geqslant 0$, в которых $\cos x = 0$, не пусто.*

Допустим противное. Тогда, так как $\cos 0 = 1$, для любого $x \geqslant 0$ мы должны были бы иметь $\cos x > 0$, поэтому в силу (9.5.4) и (8.5.3)

$\sin x$ был бы строго возрастающей функцией, значит, при любом $x > 0$ он был бы > 0 и в силу (9.5.4) и (8.5.3) $\cos x$ при $x \geqslant 0$ был бы строго убывающей функцией. Прежде всего заметим, что невозможно, чтобы при всех $x \geqslant 0$ выполнялось неравенство $\cos x \geqslant 1/2$. В самом деле, отсюда по теореме о среднем значении (8.5.3) следовало бы, что $\sin x \geqslant x/2$ при всех $x \geqslant 0$, и это при $|x| > 2$ нарушало бы неравенство $|\sin x| \leqslant 1$. Допустим поэтому, что $\cos a < 1/2$. Тогда при $x \geqslant a$ также $\cos x < 1/2$, и отсюда следует, что $\sin x \geqslant 1/2$ при $x \geqslant a$. Но тогда теорема о среднем значении снова дает

$$\cos x - \cos a \leqslant -\frac{x-a}{2},$$

и это показывает, что $\cos x \leqslant 0$ при достаточно большом x, ч. т. д.

Так как $\cos x$ — непрерывная функция, множество D корней уравнения $\cos x = 0$, удовлетворяющих условию $x \geqslant 0$, замкнуто (3.15.1) и не содержит 0, следовательно, оно имеет наименьший элемент, который мы обозначим через $\pi/2$. Тогда мы имеем $\sin^2 \pi/2 = 1$ и, так как $\sin x$ при $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$ возрастает, $\sin \pi/2 = 1$, а $e^{i\pi/2} = i$. Это уже показывает, что $e^{2\pi i} = 1$; поэтому $e^{2n\pi i} = 1$ для любого целого n и в силу (9.5.2)

(9.5.6) $$e^{z+2n\pi i} = e^z.$$

Чтобы завершить доказательство утверждения (9.5.5), нам остается только показать, что в промежутке $]0, 2\pi[$ нет корней уравнения $e^{ix} = 1$. Но из (9.5.2) получаем $\cos(x + \pi/2) = -\sin x$, следовательно, $\cos x \leqslant 0$ при $\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi$, и, так как $\cos(x + \pi) = -\cos x$, мы видим, что $\cos x < 1$ при $0 < x < 2\pi$, и доказательство закончено.

(9.5.7) *Отображение $x \to e^{ix}$ есть непрерывное биективное отображение любого промежутка $[a, a + 2\pi[$ на „единичную окружность“ $\mathbf{U} : |z| = 1$ в $\mathbf{C}$ и гомеоморфизм промежутка $]a, a + 2\pi[$ на дополнение точки e^{ia} в $\mathbf{U}$.*

Рассматриваемое отображение, очевидно, непрерывно и в силу (9.5.2) и (9.5.5) инъективно. Чтобы доказать, что оно является сюръективным отображением промежутка $[a, a + 2\pi[$ на $\mathbf{U}$, мы можем, очевидно, предполагать, что $a = 0$, потому что если $\zeta \in \mathbf{U}$, то и ζe^{-ia} также принадлежит $\mathbf{U}$. Пусть $\zeta = \alpha + i\beta$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Так как $|\alpha| \leqslant 1$ и $\cos x$ в промежутке $[0, \pi]$ непрерывен, а $\cos 0 = 1$ и $\cos \pi = -1$, то по теореме Больцано (3.19.8) существует такое $y \in [0, \pi]$, что $\cos y = \alpha$. Тогда $\sin y = \pm \beta$. Если $\sin y = \beta$, то все в порядке; если же это не так, то $\cos(2\pi - y) = \cos y = \alpha$ и $\sin(2\pi - y) = -\sin y = \beta$. Пусть V — дополнение точки e^{ia} в $\mathbf{U}$ и $\zeta_0 = e^{ib} \in V$, где $a < b < a + 2\pi$. Если бы отображение, обратное сужению отображения $x \to e^{ix}$ на промежутке $]a, a + 2\pi[$, было не непрерывно в точке ζ_0, то в $]a, a + 2\pi[$ существовала бы последо-

вательность (x_n), элементы которой принадлежали бы дополнению некоторой окрестности точки b и вместе с тем $\lim\limits_{n\to\infty} e^{ix_n}=\zeta_0$. Но тогда в силу (3.16.1) в компактном множестве $[a, a+2\pi]$ нашлась бы подпоследовательность (x_{n_k}), сходящаяся к точке $c\neq b$, и, так как $e^{ic}\neq e^{ib}$, мы пришли бы к противоречию. [Существует другое доказательство, использующее (10.3.1).]

(9.5.8) *Единичная окружность* $\mathbf{U}$ *связна.*

Это следует из (9.5.7), (3.19.1) и (3.19.7).

(9.5.9) (Принцип максимума) *Пусть* $(c_\nu z^\nu)$ — *степенной ряд с комплексными коэффициентами, абсолютно суммируемый в открытом полицилиндре* $P\subset\mathbf{C}^p$ *с центром* 0, *и пусть* $f(z)$ — *его сумма. Допустим, что существует такой открытый шар* $B\subset P$ *с центром* 0, *что* $|f(z)|\leqslant|f(0)|$ *для каждой точки* $z\in B$. *Тогда для каждого индекса* $\nu\neq(0, \ldots, 0)$ *коэффициент* $c_\nu=0$; *иными словами, функция* f *постоянна.*

Докажем сначала, что если теорема верна для $p=1$, то она верна и для любого p. В самом деле, для любой точки $z=(z_1, \ldots, z_p)\in P$ рассмотрим функцию $g(t)=f(tz_1, \ldots, tz_p)$ одной комплексной переменной, аналитическую при $|t|<1+\varepsilon$, где ε достаточно мало. Так как при достаточно малых значениях t выполняется неравенство $|g(t)|\leqslant|g(0)|$, то, по предположению, $g(t)=g(0)$ и, в частности, $f(z_1, \ldots, z_p)=g(1)=f(0)$. При $p=1$ мы можем считать, что $c_0\neq 0$, так как в противном случае утверждение очевидно в силу (9.1.6). Допустим, что существуют индексы $n>0$, для которых $c_n\neq 0$, и пусть m — наименьший из таких индексов. Мы можем написать

$$f(z)=c_0(1+b_m z^m+z^m h(z)),$$

где $b_m\neq 0$, h — функция, аналитическая в P, и $h(0)=0$. Пусть $r>0$ выбрано так, что круг $|z|\leqslant r$ содержится в B и что при $|z|\leqslant r$ имеет место неравенство $|h(z)|\leqslant\frac{1}{2}|b_m|$ (9.1.3). Запишем $b_m=|b_m|\zeta$, где $|\zeta|=1$. В силу (9.5.7) существует такое действительное число t, что $e^{mit}=\zeta^{-1}$. Для $z=re^{it}$ мы, таким образом, имеем

$$|1+b_m z^m+z^m h(z)|=|1+|b_m|r^m+z^m h(z)|\geqslant 1+\frac{1}{2}|b_m|r^m,$$

что противоречит предположению о том, что $|f(z)|\leqslant|c_0|$ в B.

Теорема (9.5.9) не будет верна, если в ней $\mathbf{C}^p$ заменить на $\mathbf{R}^p$, как показывает пример степенного ряда $1/(1+z^2)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$ (при $|z|<1$).

(9.5.10) *Пусть f — комплексная функция, аналитическая в открытом множестве $A \subset \mathbf{C}^p$, не постоянная ни в какой компоненте связности множества A. Для любого компактного подмножества $H \subset A$ точки $z \in H$, в которых $|f(z)| = \sup_{x \in H} |f(x)|$ [такие точки в силу* (3.17.10) *обязательно существуют] являются граничными точками множества H.*

Это сразу следует из (9.5.9) и из принципа аналитического продолжения (9.4.2).

Задачи

1. Покажите, что если $\Re z \leqslant 0$, то для любого целого $n \geqslant 0$

$$\left| e^z - \left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!}\right) \right| \leqslant \left| \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \right|.$$

[Формулу Тейлора (8.14.2) примените к функции $t \to e^{zt}$.]

2. Докажите, что для любого действительного x

$$\left| \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right) \right| \leqslant \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

и разность слева под знаком абсолютной величины имеет тот же знак, что и $(-1)^{n+1}$; точно так же

$$\left| \sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right) \right| \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

и разность слева под знаком абсолютной величины имеет тот же знак, что и $(-1)^n x$.

[Проведите индукцию по n.]

3. a) Пусть U — относительно компактное открытое множество в $\mathbf{C}^p$ и f — комплексная аналитическая функция в U, не постоянная ни в какой компоненте связности множества U. Предположим, что существует такое число $M > 0$, что для каждой граничной точки x множества U и любого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность V точки x, что для любой точки $z \in U \cap V$ выполняется неравенство $|f(z)| \leqslant M + \varepsilon$. Покажите, что $|f(z)| \leqslant M$ для любой точки $z \in U$, причем равенство не может достигаться ни в одной точке множества U.

[Воспользуйтесь (9.5.10) и компактностью границы множества U.]

b) Пусть U — открытое множество в $\mathbf{C}$, определяемое условиями $\Re z > 0$ и $-\pi/2 < \Im z < \pi/2$. Покажите, что целая функция $\exp(\exp(z))$ ограничена на границе множества U, но не ограничена в U.

4. a) Пусть E — банахово пространство $\mathbf{C}^2$ с нормой $\|(z_1, z_2)\| = \sup(|z_1|, |z_2|)$. Функция $z \to f(z) = (1, 0) + (0, 1)z$ есть аналитическое отображение пространства $\mathbf{C}$ в $\mathbf{C}^2$, обладающее тем свойством, что норма $\|f(z)\|$ при $|z| < 1$ постоянна.

b) Распространите теорему (9.5.10) на функции, определенные в открытом множестве $A \subset \mathbf{C}^p$ и принимающие значения в комплексном гильбертовом пространстве.

[Если норма $\|f(z)\|$ достигает максимума в точке $z_0 \in A$, то рассмотрите комплексную функцию $z \to (f(z) \mid f(z_0))$; сравните с a).]

5. Пусть U — открытое множество в $\mathbf{C}^p$ и $P \subset U$ — замкнутый полицилиндр с центром $a = (a_1, \ldots, a_p)$ и радиусами r_k $(1 \leqslant k \leqslant p)$. Пусть f — комплексная функция, аналитическая в U; предположим, что на множестве $S = \{(z_i) \mid |z_i - a_i| = r_i$ при $1 \leqslant i \leqslant p\}$ (т. е. на произведении окружностей $|z_i - a_i| = r_i$) имеется оценка $|f(z)| \leqslant M$. Покажите, что $|f(z)| \leqslant M$ для любой точки $z \in P$.

[Рассмотрите функцию $(z_2, \ldots, z_p) \to f(b_1, z_2, \ldots, z_p)$, где $|b_1 - a_1| = r_1$, и проведите индукцию по p.]

6. Пусть $P(x, y)$ — многочлен от двух комплексных переменных с комплексными коэффициентами максимальной степени m по x и n по y. Предположим, что для действительных x и y, удовлетворяющих условию $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$, выполняется неравенство $|P(x, y)| \leqslant M$. Покажите, что $|P(x, y)| \leqslant M(|x| + \sqrt{x^2 - 1})^m (|y| + \sqrt{y^2 - 1})^n$ для действительных x и y, для которых $|x| \geqslant 1$ и $|y| \geqslant 1$.

[Примените задачу 5 к функции $s^m t^n P(s + s^{-1}, t + t^{-1})$ при $|s| < 1$, $|t| < 1$.]

Распространите это утверждение на случай многочленов от любого числа переменных.

7. a) Пусть $f(z)$ — комплексная аналитическая функция одной комплексной переменной в круге $B: |z| < 1$; пусть $|f(z)| < M$ в B и $f(0) = 0$. Покажите, что $|f(z)| \leqslant M|z|$ в B (лемма Шварца).

[Рассмотрите функцию $f(z)/z$, являющуюся аналитической в B.]

b) Рассмотрим в $\mathbf{C}^p$ норму $\|z\| = (|z_1|^2 + \ldots + |z_p|^2)^{1/2}$, где $z = (z_1, \ldots, z_p)$ (называемую *эрмитовой нормой*). Пусть B — шар $\|z\| < 1$ при этой норме и пусть f — комплексная аналитическая в B функция, такая, что $f(0) = 0$ и $|f(z)| \leqslant M$ в B. Покажите, что $|f(z)| \leqslant M\|z\|$ в B.

[Рассмотрите функцию $t \to f(z_1 t_1, \ldots, z_p t)$ одной комплексной переменной и примените a).]

8. a) Пусть $\mathbf{R}_-$ (*отрицательная действительная полупрямая*) — подмножество комплексного поля $\mathbf{C}$, определяемое условиями $\mathscr{I}z = 0$, $\mathscr{R}z \leqslant 0$; пусть F — дополнение множества $\mathbf{R}_-$ в $\mathbf{C}$. Пусть, с другой стороны, S — множество, определяемое условием $-\pi < \mathscr{I}z < \pi$. Покажите, что отображение $z \to e^z$ есть гомеоморфизм S на F.

[Воспользуйтесь (9.5.7).]

Обратное отображение обозначается символом $z \to \ln z$ и называется *главным значением логарифма* z. Имеем $\ln z = \ln|z| + \arg z$, где $\arg z$ — единственное число θ, удовлетворяющее условиям $-\pi < \theta < \pi$ и $z = |z| e^{i\theta}$ (*аргумент* z). Покажите, что если все три числа z, z' и zz' принадлежат F, то разность $\ln zz' - \ln z - \ln z'$ равна 0, $2\pi i$ или $-2\pi i$.

b) Степенной ряд $((-1)^n z^n/n)_{n \geqslant 1}$ абсолютно сходится в шаре $B: |z| < 1$; пусть $f(z)$ — его сумма. Покажите, что $f(z) = \ln(1 + z)$. Из этого результата заключаем, что $\ln z$ есть функция, аналитическая в F.

[Заметив, что при $z \in B$ имеем $1 + z \in F$, покажите, что $f'(z) = 1/(1 + z)$, и выведите отсюда, что $f(z) = \ln(1 + z)$, когда z — действительное число и

$-1 < z < 1$; в заключение рассмотрите аналитическую функцию $e^{f(z)}$ и примените (9.4.4).]

c) Для любого комплексного числа t и любого целого числа $n > 0$ пусть $\binom{t}{n} = t(t-1)\ldots(t-n+1)/n! = \sum_{k=0}^{n} c_{kn}t^k$, где c_{kn} — рациональные числа $\left(\text{мы полагаем } \binom{t}{0} = 1\right)$. Покажите, что степенной ряд $(c_{kn}z^n t^k)$ абсолютно суммируем в $B \times \mathbf{C}$.

[Заметьте, что для любого числа $r > 0$

$$\left(1+\frac{r}{1}\right)\left(1+\frac{r}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{r}{n}\right) \leqslant \exp\left(r\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\right) \leqslant a \cdot n^r,$$

где a — константа.]

Докажите, что сумма этого ряда равна $\exp(t \ln(1+z))$.

[Сначала рассмотрите случай, когда z и t — действительные числа, и к функции $z \to (1+z)^t$ примените формулу Тейлора (8.14.2). Затем воспользуйтесь (9.4.4).]

Функция $\exp(t \ln(1+z))$ обозначается также символом $(1+z)^t$; покажите, что $|(1+z)^t| = |1+z|^t$ для действительных значений t.

d) Покажите, что при $t > 0$ функция $z \to (1+z)^t$ может быть по непрерывности продолжена на замкнутый круг $|z| \leqslant 1$.

$\left[\text{Заметив, что } 1 - s < e^{-s} \text{ при } s > 0, \text{ воспользуйтесь оценкой для } \left|\binom{t}{n}\right|,\right.$ аналогичной оценке, полученной в c).$\Big]$

9. a) Пусть f_{jk} $(1 \leqslant j \leqslant m,\ 1 \leqslant k \leqslant n)$ — скалярные аналитические функции в открытом связном множестве $A \subset \mathbf{C}^p$ и α_{jk} — действительные числа $\geqslant 0$. Покажите, что непрерывная функция

$$u(z) = \sum_{k=1}^{n} |f_{1k}(z)|^{\alpha_{1k}} |f_{2k}(z)|^{\alpha_{2k}} \ldots |f_{mk}(z)|^{\alpha_{mk}}$$

не может достигать относительного максимума ни в одной точке множества A, если каждое из произведений $|f_{1k}(z)|^{\alpha_{1k}} \ldots |f_{mk}(z)|^{\alpha_{mk}}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ не постоянно в A.

[Заметим, что если $f(z)$ — функция, аналитическая в A, и $f(z_0) \neq 0$, то для каждого действительного числа λ существует такая функция $g_\lambda(z)$, аналитическая в некоторой окрестности точки z_0, что $|g_\lambda(z)| = |f(z)|^\lambda$ в этой окрестности; для доказательства этого воспользуйтесь задачей 8, c).]

Распространите этот результат на случай, когда α_{jk} — произвольные действительные числа, предполагая, что ни одна из функций f_{jk} не обращается в A в 0.

b) Обобщите на функции $u(z)$ утверждение задачи 3, a).

10. Пусть $f(z)$ — комплексная функция одной комплексной переменной, аналитическая в открытом множестве A, определяемом условиями $R_1 < |z| < R_2$ (где $0 \leqslant R_1 \leqslant R_2$). Для любого r, такого, что $R_1 < r < R_2$, пусть $M(r) = \sup\limits_{|z|=r} |f(z)|$. Покажите, что если $R_1 < r_1 < r_2 < r_3 < R_2$, то

$$\ln M(r_2) \leqslant \frac{\ln r_2 - \ln r_1}{\ln r_3 - \ln r_1} \ln M(r_3) + \frac{\ln r_3 - \ln r_2}{\ln r_3 - \ln r_1} \ln M(r_1).$$

(теорема Адамара о трех окружностях). Когда может иметь место равенство?

[Примените задачу 9 к функции $|z|^\alpha \cdot |f(z)|$, где действительное число α выбрано подходящим образом и функция $|z|^\alpha \cdot |f(z)|$ рассматривается на множестве $r_1 < |z| < r_3$.]

11. Введем в $\mathbf{C}^p$ и $\mathbf{C}^q$ эрмитовы нормы (задача 7). Пусть f — аналитическое отображение шара $B: \|z\| < 1$ в пространстве $\mathbf{C}^p$ в $\mathbf{C}^q$; мы имеем $f = (f_1, \ldots, f_q)$, где f_k — комплексные функции, аналитические в B. Предположим, что $f(0) = 0$. Покажите, что если при $z \in B$ выполняется неравенство $\|f(z)\| \leqslant M$, то при $z \in B$ выполняется и неравенство $\|f(z)\| \leqslant M \cdot \|z\|$. Когда имеет место равенство?

[Для каждой точки $z \in B$ рассмотрите функции $t \to f_k(tz)/t$ и примените задачи 9 и 3.]

12. Введем в $\mathbf{C}^p$ эрмитову норму (задача 7). Пусть F и G — два аналитических отображения шара $B: \|z\| < 1$ в пространство $\mathbf{C}^p$, являющиеся гомеоморфизмами шара B соответственно на открытые множества $U = F(B)$ и $V = G(B)$, и пусть обратные отображения являются аналитическими соответственно в $F(B)$ и $G(B)$ (последнее условие в действительности следует из остальных; см. задачу 2 § 10.3). Для любого r, удовлетворяющего условию $0 < r < 1$, пусть B_r — шар $\|z\| < r$ и пусть $U_r = F(B_r)$ и $V_r = G(B_r)$ (U_r и V_r являются открытыми подмножествами соответственно U и V). Покажите, что если аналитическое отображение u множества U в V обладает тем свойством, что $u(F(0)) = G(0)$, то $u(U_r) \subset V_r$ для каждого r, удовлетворяющего условию $0 < r < 1$.

[Воспользуйтесь задачей 11.]

13. Пусть f — комплексная аналитическая функция одной комплексной переменной в шаре $B: |z| < R$. Для любого r, удовлетворяющего условию $0 \leqslant r < R$, пусть $A(r) = \sup\limits_{z \leqslant r} \Re f(z)$.

a) Покажите, что если функция f непостоянна, то функция $r \to A(r)$ строго возрастает.

[Рассмотрите $\exp(f(z))$.]

b) Покажите, что при $A(R-) < +\infty$

$$A(r) \leqslant \frac{R-r}{R+r} A(0) + \frac{2r}{R+r} A(R-).$$

[Примените задачу 12, взяв $F(z) = Rz$, а в качестве $G(z)$ — функцию вида $(az+b)/(cz+d)$, где константы a, b, c, d выбраны так, чтобы множество $G(B)$ было полуплоскостью, определяемой условиям $\Re z < A(R-)$.]

14. a) Пусть A — относительно компактное открытое множество в $\mathbf{C}^p$ и E — замкнутое подмножество границы множества A. Предположим, что существует комплексная функция g, аналитическая в некоторой окрестности замыкания $\bar{A}$, равная 0 в E и не тождественно равная 0 в A. Пусть f — комплексная функция, аналитическая и ограниченная в A. Допустим, что существует такое число M, что для каждой граничной точки $x \notin E$ множества A и всякого $\varepsilon > 0$ существует окрестность V точки x в $\mathbf{C}^p$, обладающая тем свойством, что $|f(z)| \leqslant M + \varepsilon$ при $z \in A \cap V$. Покажите, что $|f(z)| \leqslant M$ для каждой точки $z \in A$. Можно считать, что $|g(z)| \leqslant 1$ при $z \in A$.

[Рассмотрите функцию $|f(z)| \cdot |g(z)|^{\sigma}$, где $\alpha > 0$ произвольно, и примените к этой функции утверждение из задачи 9, b).]

b) Покажите, что утверждение задачи a) не останется верным, если отбросить предположение о том, что функция f ограничена в A.

[Рассмотрите функцию $\exp(\exp((1-z)/z))$ и воспользуйтесь задачей 3, b).]

15. Пусть $\omega(x)$ — действительная функция, определенная в промежутке $[0, +\infty[$ и удовлетворяющая условиям $\omega(x) > 0$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} \omega(x) = +\infty$. Покажите, что если комплексная функция f является аналитической в некоторой окрестности полуплоскости $A: \Re z \geqslant 0$, то существует по крайней мере одна такая точка $\zeta \in A$, что $|f(\zeta)| < \exp(\omega(|\zeta|)\zeta)$.

[Проведите доказательство от противного: с помощью задачи 9, a) покажите, что если бы заключение было неверно, то функция $|e^z| \cdot |f(z)|^{-\varepsilon}$ для каждого значения $\varepsilon > 0$ была бы $\leqslant 1$ в A.]

16. Пусть A — открытое относительно компактное множество в пространстве $\mathbf{C}^p$ и f — комплексная функция, аналитическая в A. Предположим, что существуют такое число $M > 0$ и такая комплексная функция g, аналитическая в A, что в любой точке $z \in A$ функция $g(z) \neq 0$ и что выполняется следующее условие: для каждой точки x границы множества A и каждого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность V точки x, что при $z \in A \cap V$ имеет место неравенство $|f(z)| \leqslant M |g(z)|^{\varepsilon}$. Покажите, что $|f(z)| \leqslant M$ в A (принцип Фрагмена — Линделефа).

[Воспользуйтесь задачей 9, b).]

17. Пусть U — открытое множество, определенное в задаче 3, b), и пусть f — комплексная функция, аналитическая в некоторой окрестности A замыкания $\bar{U}$ и обладающая следующими свойствами: 1°) $|f(z)| \leqslant 1$ на границе множества U; 2°) существует такая константа a, что $0 < a < 1$ и что при $z \in U$ выполняется неравенство $|f(z)| \leqslant \exp(\exp(a\Re z))$. Докажите, что $|f(z)| \leqslant 1$ в U.

[Заметьте, что отображение $z \to 1/(z+1)$ переводит U в относительно компактное множество, и примените принцип Фрагмена — Линделефа (задача 16), взяв функцию $g(z)$ вида $\exp(\exp(bz))$.]

6. Интегрирование вдоль пути

Траектория в $\mathbf{C}$ есть непрерывное отображение γ компактного промежутка $I=[a, b]\subset\mathbf{R}$, состоящего более чем из одной точки, в $\mathbf{C}$. Если $\gamma(I)\subset A\subset\mathbf{C}$, то мы будем говорить, что γ есть *траектория в* A. Точка $\gamma(a)$ (соответственно $\gamma(b)$) называется *началом* (соответственно *концом*) траектории; обе эти точки называются также *концами* траектории γ. Если $\gamma(a)=\gamma(b)$, то γ называется *петлей*; если отображение γ постоянно в I, то мы будем также говорить, что траектория γ *сводится к точке*. Отображение γ° промежутка I в $\mathbf{C}$, удовлетворяющее условию $\gamma^\circ(t)=\gamma(a+b-t)$ есть траектория, называемая *противоположной* траектории γ.

Пусть $I_1=[b, c]$ — компактный промежуток в $\mathbf{R}$, начало которого служит концом промежутка I, и пусть $I_2=I\cup I_1=[a, c]$. Если γ_1 — траектория, определенная в I_1 и такая, что $\gamma_1(b)=\gamma(b)$, и если мы определим отображение γ_2, равное γ в I и γ_1 в I_1, то γ_2 будет траекторией, которую мы будем обозначать символом $\gamma\vee\gamma_1$ и называть *соединением* траекторий γ и γ_1.

Мы будем говорить, что траектория γ, определенная в $I=[a, b]\subset\mathbf{R}$, есть *путь*, если γ является первообразной некоторой простой функции (8.7.2); если, кроме того, $\gamma(a)=\gamma(b)$, то мы будем говорить, что γ есть *контур*. Ясно, что траектория, противоположная пути, есть путь и что соединение двух путей есть путь.

Пусть γ и γ_1 — два пути, определенные соответственно в промежутках I и I_1. Мы будем говорить, что γ и γ_1 *эквивалентны*, если существует такое биективное отображение φ промежутка I на I_1, что φ и φ^{-1} являются первообразными некоторых простых функций и что $\gamma=\gamma_1\circ\varphi$ (и, следовательно, $\gamma_1=\gamma\circ\varphi^{-1}$). Из (8.4.1) сразу следует, что это действительно есть отношение эквивалентности между путями.

Если путь γ определен в $I=[a, b]$, то существует путь γ_1, эквивалентный пути γ и определенный в любом другом промежутке $J=[c, d]$. В самом деле, существует линейное биективное отображение $t\to\varphi(t)=\alpha t+\beta$ промежутка J на промежуток I, и требуемыми свойствами обладает путь $\gamma_1=\gamma\circ\varphi$.

Пусть γ — путь, определенный в $I=[a, b]$, а f — непрерывное отображение компактного множества $\gamma(I)$ в комплексное банахово пространство E. Функция $t\to f(\gamma(t))$ тогда непрерывна в I, и поэтому $t\to f(\gamma(t))\gamma'(t)$ есть простая функция. Интеграл $\int\limits_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$ называется *интегралом от отображения* f *вдоль пути* γ и обозначается символом $\int\limits_\gamma f(z)\,dz$. Из (8.7.4) сразу

следует, что если γ_1 — путь, эквивалентный пути γ, то $\int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma} f(z)\,dz$. Кроме того, из определения сразу следует, что

(9.6.1) $$\int\limits_{\gamma^\circ} f(z)\,dz = -\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz;$$

(9.6.2) $$\int\limits_{\gamma_1 \vee \gamma_2} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz,$$

если определено соединение $\gamma_1 \vee \gamma_2$.

Пусть γ — *контур*, определенный в $I = [a, b]$. Для любой точки $c \in I$ рассмотрим отображение γ_1 промежутка $J = [c, c+b-a]$, определяемое следующим образом: $\gamma_1(t) = \gamma(t)$, если $c \leqslant t \leqslant b$, и $\gamma_1(t) = \gamma(t-b+a)$, если $b \leqslant t \leqslant c+b-a$. Немедленно проверяется, что γ_1 есть контур, для которого $\gamma_1(J) = \gamma(I)$, и что для любого непрерывного отображения f множества $\gamma(I)$ в E выполняется равенство $\int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma} f(z)\,dz$. Иными словами, интеграл от f вдоль контура не зависит от начала этого контура.

Пусть γ_0 и γ_1 — две траектории, определенные в одном и том же промежутке I, и пусть A — такое открытое множество в $\mathbf{C}$, что $\gamma_0(I) \subset A$ и $\gamma_1(I) \subset A$. *Гомотопия траектории* γ_0 *в* γ_1 *в множестве* A есть непрерывное отображение φ произведения $I \times [\alpha, \beta]$ ($\alpha < \beta$ в $\mathbf{R}$) в множество A, обладающее тем свойством, что $\varphi(t, \alpha) = \gamma_0(t)$ и $\varphi(t, \beta) = \gamma_1(t)$ в I. Говорят, что траектория γ_1 *гомотопна траектории* γ_0 *в* A, если существует гомотопия траектории γ_0 в траекторию γ_1 в A. Ясно, что для любой точки $\xi \in [\alpha, \beta]$ отображение $t \to \varphi(t, \xi)$ есть траектория в A. Если и γ_0 и γ_1 — петли, то мы будем говорить, что φ есть *петельная гомотопия* петли γ_0 в петлю γ_1 в A, если отображение $t \to \varphi(t, \xi)$ для любой точки $\xi \in [\alpha, \beta]$ есть петля. Когда мы будем говорить, что две петли γ_0 и γ_1 гомотопны в A, мы будем подразумевать, что существует петельная гомотопия (а не просто гомотопия) петли γ_0 в петлю γ_1 в A.

Если φ — гомотопия траектории γ_0 в γ_1 в A, определенная в $I \times [\alpha, \beta]$, то отображение $(t, \xi) \to \varphi(t, \alpha+\beta-\xi)$ является гомотопией траектории γ_1 в γ_0 в A; с другой стороны, если ψ — гомотопия траектории γ_1 в γ_2 в A, определенная в произведении $I \times [\alpha', \beta']$, то мы можем следующим образом определить гомотопию θ траектории γ_0 в γ_2 в A: берем $\theta = \varphi$ в $I \times [\alpha, \beta]$ и, полагая $\beta'' = \beta' + \beta - \alpha'$, берем $\theta(t, \xi) = \psi(t, \xi + \alpha' - \beta)$ в $I \times [\beta, \beta'']$. Это разумно, поскольку обе формулы по предположению дают $\theta(t, \beta) = \gamma_1(t)$, и немедленно проверяется, что отображение θ непрерывно

в $I\times[\alpha, \beta'']$, принимает значения в A и что, кроме того, $\theta(t, \alpha)=\gamma_0(t)$ и $\theta(t, \beta'')=\gamma_2(t)$. Это показывает, что отношение „траектория γ_1 гомотопна траектории γ_0 в A'' является отношением эквивалентности между траекториями в A; оно является также отношением эквивалентности между петлями в A, потому что в случае, когда φ и ψ являются петельными гомотопиями, петельной гомотопией будет и отображение, определенное выше.

(9.6.3) (Теорема Коши) *Пусть $A\subset\mathbf{C}$ — открытое множество и f — аналитическое отображение множества A в комплексное банахово пространство E. Если Γ_1 и Γ_2 — два контура в A, гомотопные в A, то* $\int\limits_{\Gamma_1} f(z)\,dz=\int\limits_{\Gamma_2} f(z)\,dz$.

Предположим, что Γ_1 и Γ_2 определены в $I=[a, b]$, и пусть φ — гомотопия контура Γ_1 в контур Γ_2 в A, определенная в $I\times[\alpha, \beta]$. Отметим, что не предполагается, что при $\xi\neq\alpha$ и $\xi\neq\beta$ петля $t\to\varphi(t, \xi)$ является контуром. Так как отображение φ непрерывно, $L=\varphi(I\times[\alpha, \beta])$ есть компактное множество, содержащееся в A. По определению и по аксиоме Бореля — Лебега в L существуют конечное число точек $a_k (1\leqslant k\leqslant m)$ и для каждого k открытый шар $P_k\subset A$ с центром a_k, такие, что: 1°) шары P_k образуют покрытие множества L; 2°) в каждом шаре P_k функция $f(z)$ равна сумме степенного ряда относительно $z-a_k$, сходящегося в P_k. Существует такое число $\rho>0$, что для каждой точки $x\in L$ открытый шар с центром x и радиусом ρ содержится по крайней мере в одном из шаров P_k[1]). Чтобы это доказать, допустив противное, извлечем из L сходящуюся последовательность (x_n) таких точек, что шар B_n с центром x_n и радиусом $1/n$ не содержится ни в одном из P_k. Так как предел x последовательности (x_n) принадлежит некоторому шару P_k, то существует шар $\mathrm{B}\subset P_k$ с центром x и радиусом r. Но тогда, если точка x_n выбрана так, что $|x_n-x|+1/n<r$, шар B_n содержится в P_k, что противоречит допущению. Из (9.3.1) следует, что для каждой точки $x\in L$ отображение $f(z)$ равно в шаре $\mathrm{B}(x; \rho)$ сумме сходящегося степенного ряда относительно $z-x$.

Поскольку отображение φ равномерно непрерывно в $I\times[\alpha, \beta]$ (3.16.5), существует такое $\varepsilon>0$, что из $|t-t'|\leqslant\varepsilon$ и $|\xi-\xi'|\leqslant\varepsilon$ следует $|\varphi(t, \xi)-\varphi(t', \xi')|\leqslant\rho/4$. Пусть $(t_i)_{0\leqslant i\leqslant r}$ — возрастающая последовательность в I, такая, что $t_0=a$, $t_r=b$ и $t_{i+1}-t_i\leqslant\varepsilon$ при $0\leqslant i\leqslant r-1$, и $(\xi_j)_{0\leqslant j\leqslant s}$ — возрастающая последовательность в $[\alpha, \beta]$, такая, что $\xi_0=\alpha$, $\xi_s=\beta$ и $\xi_{j+1}-\xi_j\leqslant\varepsilon$ при $0\leqslant j\leqslant s-1$. Определим γ_j следующим образом:

$$\gamma_j(t)=\varphi(t_i, \xi_j)+\frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}(\varphi(t_{i+1}, \xi_j)-\varphi(t_i, \xi_j))$$

[1]) См. задачу 1, а) § 16 гл. 3. — *Прим. перев.*