Поэтому $|w(t) - w(t-h)| \leqslant \int_{t-h}^{t} \omega(s, w(s))\, ds.$

[Используйте (8.7.8)].

d) Заключите, что $w(t) = 0$ в J [то же рассуждение, что и в задачах 4, b) и 5, a)], и, пользуясь задачей 7, докажите, что последовательность (u_n) равномерно сходится в J к решению уравнения $x' = f(t, x)$, принимающему при $t = 0$ значение x_0.

9. Обозначения те же, что и в 10.4. Предположим, что E конечномерно, а f непрерывно и ограничено в $I \times H$. Предположим, кроме того, что существует не более одного решения уравнения $x' = f(t, x)$, определенного в любом открытом промежутке $J \subset I$, содержащем t_0, и при $t = t_0$ равного $x_0 \in H$. Предположим, что для любого целого $n > 0$ существует $1/n$-решение u_n уравнения $x' = f(t, x)$, определенное в I, принимающее значения в H и удовлетворяющее условию $u_n(t_0) = x_0$. Покажите, что на любом компактном промежутке, содержащемся в I, последовательность (u_n) равномерно сходится к решению u уравнения $x' = f(t, x)$, принимающему значения в H и удовлетворяющему условию $u(t_0) = x_0$.

[Проведите то же рассуждение, что и в задаче 7.]

8. Зависимость решения от начальных условий

(10.8.1) *Пусть отображение f является локально липшицевским* (10.5.4) *в $I \times H$, если $K = \mathbf{R}$, и аналитическим в $I \times H$, если $K = \mathbf{C}$. Тогда для любой точки $(a, b) \in I \times H$:*

1°. *Найдутся открытый шар $J \subset I$ с центром a и открытый шар $V \subset H$ с центром b, такие, что для каждой точки $(t_0, x_0) \in J \times V$ существует единственное решение $t \to u(t, t_0, x_0)$ уравнения* (10.4.1), *определенное в J, принимающее значения в H и удовлетворяющее условию $u(t_0, t_0, x_0) = x_0$.*

2°. *Отображение $(t, t_0, x_0) \to u(t, t_0, x_0)$ равномерно непрерывно в $J \times J \times V$.*

3°. *Существует такой открытый шар $W \subset V$ с центром b, что для любой точки $(t, t_0, x_0) \in J \times J \times W$ уравнение $x_0 = u(t_0, t, x)$ имеет в V единственное решение $x = u(t, t_0, x_0)$.*

1°. По предположению существуют такой шар $J_0 \subset I$ с центром a и такой шар $B_0 \subset H$ с центром b и радиусом r, что в $J_0 \times B_0$ выполняется неравенство $\|f(t, x\| \leqslant M$ и что при $t \in J_0$, $x_1 \in B_0$ и $x_2 \in B_0$ выполняется неравенство $\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leqslant k \cdot \|x_1 - x_2\|$. В силу (10.4.5) существуют открытый шар $J_1 \subset J_0$ с центром t_0 и единственное решение v уравнения (10.4.1), определенное в J_1, принимающее значения в H и удовлетворяющее условию $v(a) = b$. Мы собираемся показать, что нашим требованиям отвечают, если только ρ достаточно мало, открытый шар V с центром b и радиусом $r/2$ и открытый шар J с центром a и радиусом ρ. Применим теорему (10.5.6)

к случаю $\alpha = \varepsilon = 0$. Она показывает, что если для каждой точки $t \in J$

(10.8.1.1) $$\|v(t) - b\| + \|v(t_0) - x_0\| e^{k|t-t_0|} < r,$$

то существует решение уравнения (10.4.1), определенное в J, принимающее значения в B_0 и равное $x_0 \in V$ в точке $t_0 \in J$. Но по теореме о среднем значении для каждой точки $t \in J$ мы имеем $\|v(t) - b\| \leqslant \leqslant M|t-a| \leqslant M\rho$. Так как по предположению $\|x_0 - b\| \leqslant r/2$, то неравенство (10.8.1.1) будет удовлетворяться, если ρ выбрано так, что

(10.8.1.2) $$M\rho + \left(M\rho + \frac{r}{2}\right) e^{2k\rho} < r,$$

что, конечно, будет выполнено при достаточно малых значениях $\rho > 0$.

2°. По теореме о среднем значении

(10.8.1.3) $$\|u(t_1, t_0, x_0) - u(t_2, t_0, x_0)\| \leqslant M|t_2 - t_1|$$

при $t_0 \in J$, $t_1 \in J$, $t_2 \in J$ и $x_0 \in V$. В силу (10.5.1)

(10.8.1.4) $$\|u(t, t_0, x_1) - u(t, t_0, x_2)\| \leqslant e^{2k\rho} |x_2 - x_1|$$

при $t \in J$, $t_0 \in J$, $x_1 \in V$ и $x_2 \in V$. Наконец, неравенство (10.8.1.3) дает по определению при $t_0 = t_2$

$$\|u(t_1, t_2, x_0) - x_0\| \leqslant M|t_2 - t_1|,$$

и [поскольку $t \to u(t, t_2, x_0)$ есть единственное решение уравнения (10.4.1) в J, которое в точке t_1 равно $u(t_1, t_2, x_0)$] мы в силу (10.5.1) имеем

(10.8.1.5) $$\|u(t, t_1, x_0) - u(t, t_2, x_0)\| \leqslant Me^{2k\rho} |t_2 - t_1|$$

при $t \in J$, $t_1 \in J$, $t_2 \in J$ и $x_0 \in V$. Три неравенства — (10.8.1.3), (10.8.1.4) и (10.8.1.5) — доказывают, что отображение u равномерно непрерывно в $J \times J \times V$.

3°. В силу (10.8.1.3) в $J \times J \times V$ выполняется неравенство $\|u(t, t_0, x_0) - x_0\| \leqslant M|t - t_0| \leqslant 2M\rho$. Предположим, что ρ удовлетворяет неравенству (10.8.1.2) и, кроме того, неравенству $2M\rho < r/4$. Тогда если W — открытый шар с центром b и радиусом $r/4$, то при $t \in J$, $t_0 \in J$ и $x_0 \in W$ мы будем иметь $u(t, t_0, x_0) \in V$. Пусть $x = u(t, t_0, x_0)$ для таких значений t, t_0 и x_0. Тогда отображение $s \to u(s, t, x)$ определено в J и является единственным решением уравнения (10.4.1), принимающим значения в H и равным x в точке t. Но так как отображение $s \to u(s, t_0, x_0)$ обладает этими свойствами, то при $s \in J$ мы имеем $u(s, t, x) = u(s, t_0, x_0)$. В частности, $x_0 = u(t_0, t_0, x_0) = u(t_0, t, x)$. Предположим теперь, что точка $y \in V$ такова, что $u(t_0, t, y) = x_0$. Тогда отображение $s \to u(s, t, y)$ является решением уравнения (10.4.1), определенным в J и при $s = t_0$,

принимающим значение x_0. Следовательно, $u(s, t, y) = u(s, t_0, x_0)$ для любой точки $s \in J$, и, в частности, $y = u(t, t_0, x_0) = x$ при $s = t$, что и завершает доказательство.

(10.8.2) *Предположим в обозначениях теоремы* (10.8.1), *что f непрерывно дифференцируемо* [*соответственно p раз непрерывно дифференцируемо, аналитично* (*если E конечномерно*)] *в $I \times H$. Тогда J и V можно выбрать так, что функция $(t, t_0, x_0) \to u(t, t_0, x_0)$ будет непрерывно дифференцируема* (*соответственно p раз непрерывно дифференцируема, аналитична*) *в $J \times J \times V$.*

Действительно, если мы положим $v(s, t_0, x_0) = u(t_0 + s, t_0, x_0) - x_0$, то мы увидим, что отображение $s \to v(s, t_0, x_0)$ является решением уравнения $z' = f(t_0 + s, x_0 + z)$, принимающим в точке $s = 0$ значение 0. Наше утверждение тогда следует из (10.7.3), (10.7.4) и (10.7.5).

Для линейных дифференциальных уравнений имеются значительно более точные результаты. Уравнение

(10.8.3) $$x' = A(t) \cdot x$$

называется *однородным* линейным дифференциальным уравнением, соответствующим уравнению (10.6.2). Разность любых двух решений уравнения (10.6.2) в I является решением уравнения (10.8.3) в I, и решения уравнения (10.8.3) в I образуют векторное подпространство $\mathscr{H}$ пространства $\mathscr{C}_E(I)$ всех непрерывных отображений множества I в E.

(10.8.4) *Для каждой точки (s, x_0) пусть $t \to u(t, s, x_0)$ есть единственное решение уравнения* (10.8.3), *определенное в I и удовлетворяющее условию $u(s, s, x_0) = x_0$. Тогда:*

1°. *Для каждой точки $t \in I$ отображение $x_0 \to u(t, s, x_0)$ есть линейный гомеоморфизм $C(t, s) \in \mathscr{L}(E)$ пространства E на себя.*

2°. *Отображение $t \to C(t, s)$ шара I в банахово пространство $\mathscr{L}(E)$ есть решение линейного однородного дифференциального уравнения*

(10.8.4.1) $$U' = A(t) \circ U,$$

при $t = s$ равное I_E (тождественному отображению пространства E).

3°. *Для любых трех точек r, s и t шара I*

(10.8.4.2) $$C(r, t) = C(r, s) \circ C(s, t) \quad \text{и} \quad C(s, t) = (C(t, s))^{-1}.$$

Ясно, что отображение $u(t, s, x_1) + u(t, s, x_2)$ (соответственно $\lambda u(t, s, x_0)$) есть решение уравнения (10.8.3), при $t = s$ равное $x_1 + x_2$ (соответственно λx_0). Поэтому (10.6.4) оно равно $u(t, s, x_1 + x_2)$ (соответственно $u(t, s, \lambda x_0)$) в I. Тем самым доказано,

что отображение $x_0 \to u(t, s, x_0)$ линейно. Обозначим его символом $C(t, s)$ (мы еще не доказали, что это отображение непрерывно в E).

Билинейное отображение $(X, Y) \to X \circ Y$ произведения $\mathscr{L}(E) \times \mathscr{L}(E)$ в $\mathscr{L}(E)$ непрерывно дифференцируемо (8.1.4). Обозначим через $R(t)$ непрерывное линейное отображение $U \to A(t) \circ U$ пространства $\mathscr{L}(E)$ в себя. Из (5.7.5) сразу следует, что

$$\|R(t) - R(t')\| \leqslant \|A(t) - A(t')\|.$$

Поэтому в случае, когда $K = \mathbf{R}$, если отображение $t \to A(t)$ простое, то и отображение $t \to R(t)$ простое. С другой стороны, если отображение $t \to A(t)$ дифференцируемо, то дифференцируемо и отображение $t \to R(t)$, и его производной [отождествленной (8.4) с элементом пространства $\mathscr{L}(E)$] является отображение $U \to A'(t) \circ U$ [(8.1.3) и (8.2.1)]. Поэтому если непрерывно отображение $t \to A'(t)$, то непрерывно и отображение $t \to R'(t)$.

Таким же образом мы можем заключить, что если $K = \mathbf{C}$ и если отображение $t \to A(t)$ является аналитическим в I, то и отображение $t \to R(t)$ будет аналитическим (9.10.1).

В любом из случаев мы можем к уравнению (10.8.4.1) применить теорему (10.6.4). Пусть $V(t)$ — решение этого уравнения, которое при $t = s$ равно тождественному отображению. Для любой точки $t \in I$ имеем

$$\mathrm{D}(V(t) \cdot x_0) = V'(t) \cdot x_0 = A(t) \cdot (V(t) \cdot x_0)$$

[(8.1.3) и (8.2.1)] и, кроме того, при $t = s$ имеем $V(s) \cdot x_0 = x_0$. Следовательно, применяя теорему (10.6.4) к уравнению (10.8.3), получаем, что $C(t, s) \cdot x_0 = V(t) \cdot x_0$ для любой точки $x_0 \in E$, и поэтому $C(t, s) = V(t)$ при $t \in I$. Это доказывает, что $C(t, s) \in \mathscr{L}(E)$ и что отображение $t \to C(t, s)$ есть решение уравнения (10.8.4.1), при $t = s$ равное тождественному отображению.

Наконец, функция $t \to C(t, r) \cdot x_0$ есть решение уравнения (10.8.3), при $t = s$ равное $C(s, r) \cdot x_0$. Поэтому по определению для любой точки $x_0 \in E$

$$C(t, r) \cdot x_0 = C(t, s) \cdot (C(s, r) \cdot x_0) = (C(t, s) \circ C(s, r)) \cdot x_0,$$

что доказывает первое из соотношений (10.8.4.2). Это соотношение дает $C(t, s) \circ C(s, t) = C(t, t)$, где $C(t, t)$ — тождественное отображение. Поэтому линейное отображение $C(s, t)$ является биективным отображением пространства E, обратным к которому является отображение $C(t, s)$ (таким образом, также принадлежащее пространству $\mathscr{L}(E)$). Этим мы завершили доказательство теоремы (10.8.4).

Оператор $C(t, s)$ называется *резольвентой* уравнения (10.8.3) [или уравнения (10.6.2)] в I.

(10.8.5) *Отображение* $(s, t) \to C(s, t)$ *произведения* $I \times I$ *в* $\mathscr{L}(E)$ *непрерывно.*

В самом деле, мы можем написать $C(s, t) = C(s, t_0) \circ (C(t, t_0))^{-1}$, и требуемый результат следует тогда из (10.8.4), (5.7.5) и (8.3.2).

Знание резольвенты $C(s, t)$ позволяет дать явное решение уравнения (10.6.2), принимающее при $t = t_0$ значение x_0.

(10.8.6) *Функция*

$$u(t) = C(t, t_0) \cdot x_0 + \int_{t_0}^{t} (C(t, s) \cdot b(s))\, ds$$

есть решение уравнения (10.6.2) *в* I, *при* $t = t_0$ *равное* x_0 (*если* $K = \mathbf{C}$, *то интеграл берется вдоль сегмента с началом* t_0 *и концом* t).

В самом деле, в силу (10.8.4.2) мы можем написать, пользуясь (8.7.6),

$$\int_{t_0}^{t} (C(t, s) \cdot b(s))\, ds = C(t, t_0) \cdot \left(\int_{t_0}^{t} (C(t_0, s) \cdot b(s))\, ds \right).$$

Следовательно, мы имеем $u(t) = C(t, t_0) \cdot z(t)$, где

$$z(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (C(t_0, s) \cdot b(s))\, ds.$$

Поэтому [(8.1.4) и (8.2.1)]

$$u'(t) = C'(t, t_0) \cdot z(t) + C(t, t_0) \cdot z'(t).$$

Но в силу (10.8.4.1) $C'(t, t_0) = A(t) \circ C(t, t_0)$ и, с другой стороны, по определению, $z'(t) = C(t_0, t) \cdot b(t)$. Таким образом,

$$u'(t) = A(t) \cdot u(t) + b(t),$$

и, так как $u(t_0) = x_0$, это завершает доказательство.

В случае когда $E = K^n$ и уравнение (10.6.2) записывается как система скалярных линейных дифференциальных уравнений (10.6.5), резольвента [1]) $C(s, t)$ есть невырожденная квадратная матрица $(c_{ij}(s, t))$ порядка n, элементы которой непрерывны в $I \times I$, а функция $t \to c_{ij}(t, s)$ есть первообразная некоторой простой функции в I, если $K = \mathbf{R}$, и аналитическая функция в I, если $K = \mathbf{C}$.

[1]) Называемая в этом случае *фундаментальной матрицей решений.* — *Прим. ред.*

Задачи

a) Предположим, что A и b в линейном дифференциальном уравнении (10.6.2) являются аналитическими функциями в односвязном открытом множестве $H \subset \mathbf{C}$. Покажите, что для любой точки $t_0 \in H$ и любой точки $x_0 \in E$ существует единственное решение u уравнения (10.6.2), определенное в H и удовлетворяющее условию $u(t_0) = x_0$.

[Проведите рассуждение такого же характера, как в (9.6.3): теорема (10.6.3) позволяет определить решение уравнения (10.6.2) вдоль ломаной линии (задача 4 § 5.1) в H, и рассуждение из (9.6.3) вместе с локальной единственностью приводит к требуемому результату.]

b) Покажите, что результат задачи a) несправедлив для скалярного дифференциального уравнения $x' = t/x$: если дано любое односвязное открытое множество $H \subset \mathbf{C}$ и любая точка $t_0 \in H$, то существует такая точка $x_0 \in E$, что $x_0 \neq 0$ и что не существует никакого решения этого уравнения, определенного в H и при $t = t_0$ равного x_0.

9. Теорема Фробениуса

Пусть E и F — два банаховых пространства (над K), A (соответственно B) — открытое множество в E (соответственно в F) и U — отображение произведения $A \times B$ в банахово пространство $\mathscr{L}(E; F)$ (5.7). Дифференцируемое отображение u множества A в множество B является решением дифференциального уравнения

(10.9.1) $$y' = U(x, y),$$

если для любой точки $x \in A$ мы имеем

(10.9.2) $$u'(x) = U(x, u(x)).$$

В случае когда $E = K$, пространство $\mathscr{L}(E; F)$ отождествляется с F (5.7.6), и дифференциальное уравнение (10.9.1) является, таким образом, обыкновенным дифференциальным уравнением (10.4.1). В случае когда пространство $E = K^n$ конечномерно, линейное отображение U пространства E в F определяется своими значениями в каждом из n базисных векторов пространства E, и по определению уравнение (10.9.2), таким образом, эквивалентно системе n уравнений с частными производными

(10.9.3) $$\mathrm{D}_i y = f_i(x_1, \ldots, x_n, y) \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Вообще говоря, такая система при $n > 1$ не будет иметь решения, даже если f_i в правой части равенства являются непрерывно дифференцируемыми функциями. Мы будем говорить, что уравнение (10.9.1) *вполне интегрируемо в* $A \times B$, если для каждой точки $(x_0, y_0) \in A \times B$ найдется такая открытая окрестность S точки x_0 в A, что существует единственное решение u уравне-

ния (10.9.1), определенное в S, принимающее значения в B и удовлетворяющее условию $u(x_0)=y_0$.

Во всем последующем мы будем предполагать, что отображение U непрерывно дифференцируемо в $A\times B$. Для каждой точки $(x, y)\in A\times B$ частная производная $D_1U(x, y)$ (соответственно $D_2U(x, y)$) является элементом пространства $\mathscr{L}(E; \mathscr{L}(E; F))$ (соответственно $\mathscr{L}(F; \mathscr{L}(E; F))$), который можно отождествить с непрерывным билинейным отображением $(s_1, s_2)\to(D_1U(x, y)\cdot s_1)\cdot s_2$ произведения $E\times E$ в F; этот элемент обозначается символом $(s_1, s_2)\to$ $\to D_1U(x, y)\cdot(s_1, s_2)$ (соответственно с непрерывным билинейным отображением $(t, s)\to(D_2U(x, y)\cdot t)\cdot s$ произведения $F\times E$ в F, обозначаемым символом $(t, s)\to D_2U(x, y)\cdot(t, s)$) (5.7.8). Далее, линейное отображение $s_1\to(D_1U(x, y)\cdot s_1)\cdot s_2$ пространства E в F для каждой точки $s_2\in E$ является в силу (8.2.1) и (8.1.3) производной в точке (x, y) отображения $x\to U(x, y)\cdot s_2$ пространства E в F; точно так же линейное отображение $t\to(D_2U(x, y)\cdot t)\cdot s$ пространства F в F для каждой точки $s\in E$ является производной в точке (x, y) отображения $y\to U(x, y)\cdot s$ пространства F в F.

(10.9.4) (Теорема Фробениуса) *Предположим, что U непрерывно дифференцируемо в $A\times B$. Для того чтобы уравнение* (10.9.1) *было вполне интегрируемо в $A\times B$, необходимо и достаточно, чтобы для каждой точки $(x, y)\in A\times B$ и для любой пары (s_1, s_2) из $E\times E$ выполнялось следующее соотношение*:

(10.9.4.1) $$D_1U(x, y)\cdot(s_1, s_2)+D_2U(x, y)\cdot(U(x, y)\cdot s_1, s_2)=$$
$$=D_1U(x, y)\cdot(s_2, s_1)+D_2U(x, y)\cdot(U(x, y)\cdot s_2, s_1).$$

Необходимость. Предположим, что u есть решение уравнения (10.9.1) в открытом шаре $S\subset A$ с центром x_0, удовлетворяющее условию $u(x_0)=y_0$. Тогда из (10.9.2) и предположения следует, что производная $u'(x)$ дифференцируема в S. Далее, для любой точки $s_2\in E$ производная в точке x_0 отображения $x\to u'(x)\cdot s_2$ в силу (8.12.1) есть отображение $s_1\to u''(x_0)\cdot(s_1, s_2)$. Но на основании (10.9.2) эта производная [в силу (8.2.1), (8.1.3) и (8.9.1)] равна также отображению

$$s_1\to(D_1U(x_0, y_0)\cdot s_1)\cdot s_2+(D_2U(x_0, y_0)\cdot(u'(x_0)\cdot s_1))\cdot s_2.$$

Вновь пользуясь соотношением (10.9.2) и выражая тот факт, что вторая производная отображения u в точке x_0 есть симметрическое билинейное отображение (8.12.2), получаем соотношение (10.9.4.1) в точке (x_0, y_0). Но по предположению эта точка в $A\times B$ может быть выбрана произвольно, откуда и следует наше утверждение.

Достаточность. Пусть $S_0\subset A$ — открытый шар с центром x_0 и радиусом α и $T_0\subset B$ — открытый шар с центром y_0 и радиусом β, такие, что отображение U ограничено в $S_0\times T_0$; пусть $\|U(x, y)\|\leqslant M$.

Для вектора $z \in E$ рассмотрим (обыкновенное) дифференциальное уравнение

$$w' = U(x_0 + \xi z,\ w) \cdot z = f(\xi,\ w,\ z) \tag{10.9.4.2}$$

(где $\xi \in K$) и заметим, что если отображение u в окрестности $\|x - x_0\| < \rho$ точки x_0 удовлетворяет условию (10.9.2) и при $x = x_0$ принимает значение y_0, то отображение $\xi \to u(x_0 + \xi z)$ при $\|z\| < \rho$ является решением уравнения (10.9.4.2) в шаре $|\xi| < 1$ в K, принимающим при $\xi = 0$ значение y_0 [что в силу (10.5.2) уже доказывает единственность u]. Теперь правая часть уравнения (10.9.4.2) непрерывно дифференцируема при $|\xi| \leqslant 2$, $\|w - y_0\| < \beta$ и $\|z\| < \alpha/2$, и для таких значений мы имеем $\|f(\xi,\ w,\ z)\| \leqslant M\|z\|$. Применяя теорему (10.5.6) к f и к $g = 0$, заключаем, что для любой точки $z \in E$, для которой $\|z\| < \beta/(2M)$, существует единственное решение $\xi \to v(\xi,\ z)$ уравнения (10.9.4.2), определенное при $|\xi| < 2$, принимающее значения в H и удовлетворяющее условию $v(0,\ z) = y_0$. Мы собираемся доказать, что функция $u(x) = v(1,\ x - x_0)$ является решением уравнения (10.9.1) в шаре $\|x - x_0\| < \beta/(2M)$.

Мы знаем из (10.7.3), что при $\|z\| < \beta/(2M)$ и $|\xi| < 2$ отображение v непрерывно дифференцируемо и что отображение $\xi \to D_2 v(\xi,\ z)$ при $|\xi| < 2$ является решением дифференциального уравнения

$$V' = D_2 f(\xi,\ v(\xi,\ z),\ z) \circ V + D_3 f(\xi,\ v(\xi,\ z),\ z),$$

принимающим при $\xi = 0$ значение 0. Для любой точки $s_1 \in E$ положим $g(\xi) = D_2 v(\xi,\ z) \cdot s_1$. Мы имеем $g'(\xi) = D_2 f(\xi,\ v(\xi,\ z),\ z) \cdot g(\xi) + D_3 f(\xi,\ v(\xi,\ z),\ z) \cdot s_1$ и ввиду определения f это можно переписать в виде

$$g'(\xi) = A(\xi) \cdot (g(\xi),\ z) + B(\xi) \cdot s_1 + \xi C(\xi) \cdot (s_1,\ z),$$

где $A(\xi) = D_2 U(x_0 + \xi z,\ v(\xi,\ z))$, $B(\xi) = U(x_0 + \xi z,\ v(\xi,\ z))$ и $C(\xi) = D_1 U(x_0 + \xi z,\ v(\xi,\ z))$. Мы хотим доказать, что $g(\xi) = \xi U(x_0 + \xi z,\ v(\xi,\ z)) \cdot s_1$ и по этой причине рассмотрим разность $h(\xi) = g(\xi) - \xi U(x_0 + \xi z,\ v(\xi,\ z)) \cdot s_1 = g(\xi) - \xi B(\xi) \cdot s_1$. Пользуясь тем, что $D_1 v(\xi,\ z) = U(x_0 + \xi z,\ v(\xi,\ z)) \cdot z = B(\xi) \cdot z$, находим

$$h'(\xi) = A(\xi) \cdot (g(\xi),\ z) + B(\xi) \cdot s_1 + \xi C(\xi) \cdot (s_1,\ z) - B(\xi) \cdot s_1 - \\ - \xi C(\xi) \cdot (z,\ s_1) - \xi A(\xi) \cdot (B(\xi) \cdot z,\ s_1).$$

Но соотношение (10.9.4.1), в частности, дает

$$C(\xi) \cdot (z,\ s_1) + A(\xi) \cdot (B(\xi) \cdot z,\ s_1) = C(\xi) \cdot (s_1,\ z) + A(\xi) \cdot (B(\xi) \cdot s_1,\ z),$$

поэтому

$$h'(\xi) = A(\xi) \cdot (g(\xi) - \xi B(\xi) \cdot s_1,\ z) = A(\xi) \cdot (h(\xi),\ z).$$

Кроме того, $h(0) = 0$. Но единственное решение линейного дифференциального уравнения $r' = A(\xi) \cdot (r,\ z)$, обращающееся в 0 при $\xi = 0$, есть $r(\xi) = 0$ (10.6.3). Следовательно, $h(\xi) = 0$ при $|\xi| < 2$, откуда

следует равенство

$$D_2v(\xi, z)\cdot s_1 = \xi U(x_0+\xi z, v(\xi, z))\cdot s_1$$

для любой точки $s_1 \in E$, т. е. $D_2v(\xi, z) = \xi U(x_0+\xi z, v(\xi, z))$. Это верно при $|\xi| < 2$ и $\|z\| < \beta/(2M)$. В частности, при $\xi = 1$, полагая $x = x_0 + z$, получаем $u'(x) = U(x, u(x))$ при $\|x - x_0\| < \beta/(2M)$, что и завершает доказательство.

(10.9.5) *Предположим, что U непрерывно дифференцируемо в $A\times B$ и удовлетворяет условию Фробениуса* (10.9.4.1). *Тогда для каждой точки $(a, b)\in A\times B$ существуют открытый шар $S\subset A$ с центром a и открытый шар $T\subset B$ с центром b, обладающие следующими свойствами*: 1°) *для любой точки $(x_0, y_0)\in S\times T$ существует единственное решение $x\to u(x, x_0, y_0)$ уравнения* (10.9.1), *определенное в S и такое, что $(x_0, x_0, y_0) = y_0$*; 2°) *и непрерывно дифференцируемо в $S\times S\times T$. Если, кроме того, U непрерывно дифференцируемо p раз (соответственно аналитично, если E и F конечномерны) в $A\times B$, то и и непрерывно дифференцируемо p раз (соответственно аналитично) в $S\times S\times T$. Наконец, существует такой открытый шар $W\subset T$ с центром b, что для каждой точки $(x, x_0, y_0)\in S\times S\times W$ уравнение $y_0 = u(x_0, x, y)$ имеет в T единственное решение $y = u(x, x_0, y_0)$.*

Пусть $S_0\subset A$ — открытый шар с центром a и радиусом α и $T_0\subset B$ — открытый шар с центром b и радиусом β, такие, что в $S_0\times T_0$ выполняется неравенство $\|U(x, y)\|\leqslant M$. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(10.9.5.1)\qquad w' = U(x_0+\xi z, y_0+w)\cdot z = f(\xi, w, z, x_0, y_0).$$

Как и в доказательстве теоремы (10.9.4), убеждаемся в том, что если $\|x_0 - a\| < \alpha/8$, $\|z\| < \min(\alpha/4, \beta/(2M))$ и $\|y_0 - b\| < \beta$, то существует единственное решение $\xi\to v(\xi, z, x_0, y_0)$ этого уравнения, определенное при $|\xi| < 2$ и такое, что $v(0, z, x_0, y_0) = 0$. Далее, теорема (10.7.3) показывает, что отображение v непрерывно дифференцируемо при этих значениях ξ, z, x_0 и y_0, если только α и β выбраны так, чтобы производная отображения U была ограничена в $S_0\times T_0$. Тогда теорема (10.9.4) показывает, что отображение $u(x, x_0, y_0) = y_0 + v(1, x - x_0, x_0, y_0)$ является единственным решением уравнения (10.9.1), определенным в шаре $S: \|x - a\| < \alpha/8$, принимающим при $x = x_0$ значение y_0. Поэтому отображение $(x, x_0, y_0)\to u(x, x_0, y_0)$ непрерывно дифференцируемо в $S\times S\times T_0$. Доказательство того, что u непрерывно дифференцируемо p раз (соответственно аналитично) в случае, когда U обладает соответствующим свойством, проводится точно так же, только вместо теоремы (10.7.3) нужно воспользоваться теоремой (10.7.4) [соответственно теоремой (10.7.5)]. Наконец, последнее утверждение теоремы (10.9.5)

доказывается с помощью того же рассуждения, что и утверждение 3 теоремы (10.8.1).

В случае когда $E = K^n$, условие Фробениуса (10.9.4.1) полной интегрируемости эквивалентно для системы (10.9.3) соотношениям

$$\textbf{(10.9.6)}\quad \frac{\partial}{\partial x_j} f_i(x_1, \ldots, x_n, y) + \frac{\partial}{\partial y} f_i(x_1, \ldots, x_n, y) \cdot f_j(x_1, \ldots, x_n, y) = \frac{\partial}{\partial x_i} f_j(x_1, \ldots, x_n, y) + \frac{\partial}{\partial y} f_j(x_1, \ldots, x_n, y) \cdot f_i(x_1, \ldots, x_n, y)$$

[где нужно вспомнить, что $\frac{\partial}{\partial y} f_i(x_1, \ldots, x_n, y)$ является элементом пространства $\mathscr{L}(F; F)$ (матрицей, если F конечномерно), а $f_j(x_1, \ldots, x_n, y)$ — элементом пространства F].

Глава 11

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ

Выбор содержания этой главы диктовался двумя соображениями: во-первых, излагаемая здесь теория представляет первый шаг в одном из главнейших разделов современного функционального анализа, так называемой „спектральной теории", а, во-вторых, она черпает формулировки своих понятий и доказательства своих теорем практически в каждой из предыдущих глав и, таким образом, может убедить читателя, что „абстрактные" рассуждения этих глав не были бесполезными обобщениями.

Общая спектральная теория, будучи тесно связанной с общей теорией интегрирования, остается за пределами этой книги, и читатель не найдет в настоящей главе никаких результатов этой теории, за исключением доказательства существования спектра (11.1.3) и нескольких простейших свойств сопряженного оператора (11.5).

Мы сосредоточили внимание лишь на теории линейных *вполне непрерывных* операторов, которые снова можно рассматривать как „легкие" возмущения общих операторов, хотя и совсем не в том смысле, который преобладал в гл. 10. Здесь в качестве „пренебрежимого" рассматривается то, что происходит в конечномерных подпространствах. Сущность центральной теоремы (11.3.3) о вполне непрерывных операторах состоит в том, что если мы прибавляем такой оператор к тождественному, то в результате снова получаем линейный гомеоморфизм, если только ограничиться рассмотрением подходящего подпространства конечной коразмерности.

Особый интерес представляют вполне непрерывные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Дело не только в том, что об их спектре можно получить значительно более точную информацию (11.5.7), чем о спектре общих вполне непрерывных операторов, но главным образом в том, что их общая теория немедленно применяется к интегральному уравнению Фредгольма с эрмитовым ядром (11.6) и, в частности, в классической задаче Штурма—Лиувилля, которую мы выбрали в качестве особенно яркой иллюстрации силы методов функционального анализа (11.7).

Более полное представление о спектральной теории и об ее мощных приложениях читатель может найти в книгах [1]) Тейлора [23], Данфорда и

---

[1]) См. также, например, Ахиезер Н. И. и Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, Гостехиздат, М.—Л., 1950. — *Прим. ред.*

Шварца [13] и Люмиса [20]. Мы также усиленно рекомендуем классический труд Куранта и Гильберта [11] — книгу, написанную великолепным стилем и содержащую богатую информацию.

1. Спектр непрерывного оператора

Пусть E — комплексное нормированное пространство. Линейное отображение u пространства E в себя часто называется *оператором* в E. Множество $\mathscr{L}(E;\ E)$ *непрерывных* операторов (которое мы будем просто обозначать символом $\mathscr{L}(E)$) есть комплексное нормированное пространство (5.7). Оно является также некоммутативной алгеброй над $\mathbf{C}$, в которой „произведение" есть отображение $(u,\ v) \to u \circ v$, записываемое также в виде $(u,\ v) \to uv$. Тождественное отображение пространства E служит единичным элементом алгебры $\mathscr{L}(E)$, обозначаемым символом 1. Отображения $(u,\ v) \to u + v$ и $(u,\ v) \to u \circ v$ непрерывны в $\mathscr{L}(E) \times \mathscr{L}(E)$ (5.7.5).

Мы будем говорить, что комплексное число ζ является *регулярным* значением непрерывного оператора u, если оператор $u - \zeta \cdot 1$ имеет в $\mathscr{L}(E)$ обратный оператор v_ζ (т. е. является линейным гомеоморфизмом пространства E на себя). Комплексное число ζ, не являющееся регулярным значением оператора u, называется его *спектральным значением*, а множество всех спектральных значений оператора u называется его *спектром* $S(u)$.

Если число $\zeta \in \mathbf{C}$ обладает тем свойством, что ядро отображения $u - \zeta \cdot 1$ не сводится к 0, то ζ есть спектральное значение оператора u. Такие спектральные значения наываются *собственными значениями* оператора u. Любой вектор $x \neq 0$, принадлежащий ядру отображения $u - \zeta \cdot 1$, т. е. вектор, для которого $u(x) = \zeta x$, называется *собственным вектором* оператора u, соответствующим собственному значению ζ. Собственные векторы и 0 образуют замкнутое векторное подпространство пространства E, ядро отображения $u - \zeta \cdot 1$, называемое также *собственным подпространством* оператора u, соответствующим собственному значению ζ, и обозначаемое символом $E(\zeta)$ или $E(\zeta;\ u)$.

В случае когда пространство E имеет конечную размерность n, элементарная линейная алгебра показывает, что любое спектральное значение оператора u является и его собственным значением. Спектр оператора u есть конечное множество, состоящее не более чем из n элементов, являющихся корнями *характеристического многочлена* $\det(u - \zeta \cdot 1)$ оператора u; степень этого многочлена равна n. Но если E бесконечномерно, то могут существовать спектральные значения, не являющиеся собственными значениями.

(11.1.1) Пример. Пусть E — комплексное гильбертово пространство и (a_n) — тотальная ортонормальная система в E (6.6.1).

Каждому вектору $x=\sum_n \zeta_n a_n$ в E (где $\|x\|^2=\sum_n |\zeta_n|^2$) поставим в соответствие вектор $u(x)=\sum_n \zeta_n a_{n+1}$. Легко проверить, что отображение u линейное и что $\|u(x)\|=\|x\|$; следовательно, отображение u непрерывно (5.5.1). Кроме того, $u(E)$ есть подпространство пространства E, ортогональное a_1; поэтому u не является отображением на все E, и это показывает, что $\zeta=0$ является спектральным значением оператора u. Но из $u(x)=0$ следует $x=0$, и, значит, 0 не является собственным значением u.

(11.1.2). *Предположим, что E есть комплексное банахово пространство и u — непрерывный оператор в E. Множество R_u регулярных значений $\zeta\in\mathbf{C}$ оператора u открыто в $\mathbf{C}$, а отображение $\zeta\to(u-\zeta\cdot 1)^{-1}$ множества R_u в $\mathscr{L}(E)$ является аналитическим.*

Пусть $\zeta_0\in R_u$ и пусть $v_0=(u-\zeta_0\cdot 1)^{-1}$. Для любого числа $\zeta\in\mathbf{C}$ мы можем в $\mathscr{L}(E)$ написать $u-\zeta\cdot 1=u-\zeta_0\cdot 1-(\zeta-\zeta_0)\cdot 1=(u-\zeta_0\cdot 1)(1-(\zeta-\zeta_0)v_0)$. Но в силу (8.3.2.1) при $|\zeta-\zeta_0|<\|v_0\|^{-1}$ оператор $1-(\zeta-\zeta_0)v_0$ имеет в $\mathscr{L}(E)$ обратный оператор, равный сумме абсолютно сходящегося ряда $\sum_{n=0}^{\infty}(\zeta-\zeta_0)^n v_0^n$. Поэтому для таких значений ζ оператор $u-\zeta\cdot 1$ обратим в $\mathscr{L}(E)$ и обратный ему оператор, равный $(1-(\zeta-\zeta_0)v_0)^{-1}v_0$, может быть записан в виде $(u-\zeta\cdot 1)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(\zeta-\zeta_0)^n v_0^{n+1}$, причем ряд абсолютно сходится при $|\zeta-\zeta_0|\leqslant\|v_0\|^{-1}$, что и завершает доказательство.

(11.1.3) *Если E — комплексное банахово пространство, то спектр любого непрерывного оператора u в E есть непустое компактное множество в $\mathbf{C}$, содержащееся в шаре $|\zeta|\leqslant\|u\|$.*

Прежде всего заметим, что $u-\zeta\cdot 1=-\zeta(1-\zeta^{-1}u)$ при $\zeta\neq 0$ и, следовательно, в силу (8.3.2.1) оператор $u-\zeta\cdot 1$ при $|\zeta|>\|u\|$ обратим в $\mathscr{L}(E)$. Далее, при $|\zeta|>\|u\|$ имеем $(u-\zeta\cdot 1)^{-1}=-\sum_{n=0}^{\infty}\zeta^{-n-1}u^n$, где ряд абсолютно сходится, и $\|(u-\zeta\cdot 1)^{-1}\|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}|\zeta|^{-n-1}\|u\|^n=(|\zeta|-\|u\|)^{-1}$. Таким образом, при $|\zeta|\geqslant 2\|u\|$ мы имеем $\|(u-\zeta\cdot 1)^{-1}\|\leqslant\|u\|^{-1}$. Если бы теперь мы имели $R_u=\mathbf{C}$, то оператор $(u-\zeta\cdot 1)^{-1}$ был бы целой функцией (9.9.6), ограниченной в $\mathbf{C}$, поскольку он ограничен как на компактном множестве $|\zeta|\leqslant 2\|u\|$, так и на его дополнении. Тогда по теореме Лиувилля

(9.11.1) оператор $(u-\zeta\cdot 1)^{-1}$ был бы постоянным, значит, постоянным был бы и обратный ему оператор $u-\zeta\cdot 1$, что неверно. Первая часть этого доказательства, кроме того, показывает, что оператор $(u-\zeta\cdot 1)^{-1}$ существует и является аналитическим при $|\zeta|>\|u\|$. Следовательно, спектр оператора u, будучи замкнутым в $\mathbf{C}$, компактен и содержится в шаре $|\zeta|\leqslant\|u\|$.

Можно привести примеры операторов, спектр которых является произвольным компактным множеством в $\mathbf{C}$ (см. задачу 3).

Задачи

1. Пусть E — комплексное банахово пространство, u — элемент пространства $\mathscr{L}(E)$ и $S(u)$ — его спектр.

a) Покажите, что если комплексное число ζ обладает тем свойством, что для любого целого $p>1$ выполняется неравенство $|\zeta|^p>\|u^p\|$, то ζ регулярно для u.

[Воспользуйтесь (11.1.3) и из сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\zeta^{-np}u^{np}$ заключите, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\zeta^{-n}u^n$ также сходится.]

b) Покажите, что число $\rho(u)=\inf_n\|u^n\|^{1/n}$ равно радиусу наименьшего круга с центром 0, содержащего $S(u)$, и, кроме того, что последовательность $(\|u^n\|^{1/n})$ имеет предел, равный $\rho(u)$.

[Воспользуйтесь задачами a), 1 § 9.1 и теоремой (9.9.4). Пример, когда $\rho(u)\neq\|u\|$, см. в задаче 4 § 11.4.]

2. Пусть u и v — два элемента пространства $\mathscr{L}(E)$, где E — комплексное банахово пространство. Покажите, что в обозначениях задачи 1 справедливо равенство: $S(vu)=S(uv)$.

[Заметьте, что если f и g — два элемента пространства $\mathscr{L}(E)$, для которых оператор $1-fg$ обратим, и если $h=(1-fg)^{-1}$, то оператор $1+ghf$ является обратным оператору $1-gf$.]

3. Пусть E — сепарабельное комплексное гильбертово пространство и $(e_n)_{n\geqslant 1}$ — ортонормальный базис пространства E. Пусть S — произвольное бесконечное компактное множество в $\mathbf{C}$ и пусть (ρ_n) — счетное множество точек из S, плотное в S (3.10.9). Покажите, что существует единственный элемент $u\in\mathscr{L}(E)$, такой, что $u(e_n)=\rho_n e_n$ при каждом $n\geqslant 1$. Докажите, что спектр оператора u совпадает с S, а собственными значениями оператора u являются числа ρ_n. Покажите, что если $\zeta\in S$ и ζ не равно ни одному из ρ_n и если $v_\zeta=u-\zeta\cdot 1$, то образ $v_\zeta(E)$ плотен в E, но не равен E.

[Для доказательства первого из этих утверждений воспользуйтесь (6.5.3).]

4. Покажите, что спектр оператора u, определенного в (11.1.1), есть круг $|\zeta|\leqslant 1$ в $\mathbf{C}$; u не имеет собственных значений. Покажите, что если

$v_\zeta = u - \zeta \cdot 1$, то при $|\zeta| < 1$ образ $v_\zeta(E)$ не плотен в E, но при $|\zeta| = 1$ образ $v_\zeta(E)$ плотен в E и отличен от E [ср. (6.5.3)].

5. Пусть E — комплексное банахово пространство и E_0 — плотное подпространство пространства E. Покажите, что для любого элемента $u \in \mathscr{L}(E_0)$ спектр оператора u совпадает со спектром единственного его непрерывного продолжения $\tilde{u}$ на E (5.5.4). Приведите пример такого оператора $u \in \mathscr{L}(E_0)$ и его спектрального значения ζ, чтобы $v_\zeta = u - \zeta \cdot 1$ было биективным отображением подпространства E_0 на себя [1]).

[Рассмотрите подпространство E_0 пространства E из задачи 3, состоящее из всех (конечных) линейных комбинаций векторов e_n.]

2. Вполне непрерывные операторы

Пусть E и F — два нормированных (действительных или комплексных) пространства. Мы будем говорить, что линейное отображение u пространства E в F *вполне непрерывно*, если образ $u(B)$ любого ограниченного множества $B \subset E$ относительно компактен в F. Эквивалентное условие состоит в том, чтобы у любой ограниченной последовательности (x_n) в E существовала такая подпоследовательность (x_{n_k}), что последовательность $(u(x_{n_k}))$ сходилась бы в F. Так как любое относительно компактное множество ограничено в F (3.17.1), то из (5.5.1) следует, что вполне непрерывное отображение непрерывно.

Примеры. **(11.2.1)** Если E или F конечномерно, то каждое непрерывное линейное отображение пространства E в F вполне непрерывно [в силу (5.5.1), (3.17.6), (3.20.16) и (3.17.9)].

(11.2.2) Если F — бесконечномерное нормированное пространство, то тождественный оператор в E в силу теоремы Рисса (5.9.4) не является вполне непрерывным.

(11.2.3) Пусть $I = [a, b]$ — компактный промежуток в $\mathbf{R}$, $E = \mathscr{C}_{\mathbf{C}}(I)$ — банахово пространство непрерывных комплексных функций в I (7.2) и $(s, t) \to K(s, t)$ — некоторая непрерывная комплексная функция в $I \times I$. Для любой функции $f \in E$ отображение $t \to \int_a^b K(s, t) f(s)\, ds$ в силу (8.11.1) непрерывно в I; обозначим эту функцию через Uf. Тогда отображение $f \to Uf$ пространства E в себя линейно.

---

[1]) Можно показать, что в банаховом пространстве E это невозможно, так как любое взаимно однозначное непрерывное линейное отображение пространства E на себя является гомеоморфизмом; см. Н. Бурбаки [6].

Докажем, что оно вполне непрерывно. В самом деле, если $g = Uf$, то при $t_0 \in I$ и $t \in I$ мы можем написать

$$(11.2.3.1) \quad g(t) - g(t_0) = \int_a^b (K(s, t) - K(s, t_0)) f(s)\, ds.$$

Так как функция K равномерно непрерывна в $I \times I$ (3.16.5), то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из $|t - t_0| \leqslant \delta$ следует $|K(s, t) - K(s, t_0)| \leqslant \varepsilon$ для любой точки $s \in I$. Поэтому для любой функции $f \in E$ по теореме о среднем значении

$$(11.2.3.2) \qquad |g(t) - g(t_0)| \leqslant \varepsilon (b - a) \|f\|.$$

Это показывает, что образ $U(B)$ любого ограниченного множества $B \subset E$ равностепенно непрерывен в каждой точке t_0 промежутка I (7.5). С другой стороны, для любой точки $t \in I$ мы подобным же образом имеем $|g(t)| \leqslant k\|f\|$, если $|K(s, t)| \leqslant k$ в $I \times I$. По теореме Асколи (7.5.7) множество $U(B)$ относительно компактно в E.

(11.2.4) При тех же обозначениях и при тех же предположениях относительно K, что и в (11.2.3), пусть теперь F — пространство комплексных простых функций в I (7.6), снова являющееся банаховым пространством, если его рассматривать как подпространство пространства $\mathscr{B}_{\mathbf{C}}(I)$. В этом случае функция Uf определяется, как и в (11.2.3) для любой функции $f \in F$, и неравенство (11.2.3.2) остается в силе. Рассуждение, проведенное в (11.2.3), доказывает, что U и в этом случае является вполне непрерывным отображением пространства F в E.

(11.2.5) *Если u и v — два вполне непрерывных отображения пространства E в F, то и сумма $u + v$ вполне непрерывна.*

Пусть (x_n) — ограниченная последовательность в E. По предположению, существует такая подпоследовательность (x'_n) последовательности (x_n), что последовательность $(u(x'_n))$ сходится в F. Так как последовательность (x'_n) ограничена в E, то у нее существует такая подпоследовательность (x''_n), что последовательность $(v(x''_n))$ сходится в F. Тогда в силу (3.13.10) и (5.1.5) последовательность $(u(x''_n) + v(x''_n))$ сходится в F, ч. т. д.

(11.2.6.) *Пусть E, F, E_1 и F_1 — нормированные пространства, f — непрерывное линейное отображение пространства E_1 в E и g — непрерывное линейное отображение пространства F в F_1. Тогда для любого вполне непрерывного отображения u пространства E в F отображение $u_1 = g \circ u \circ f$ пространства E_1 в F_1 вполне непрерывно.*

В самом деле, если множество B_1 ограничено в E_1, то множество $f(B_1)$ в силу (5.5.1) ограничено в E, множество $u(f(B_1))$ относительно компактно в F по предположению и множество $g(u(f(B_1)))$ относительно компактно в F_1 в силу (3.17.9).

(11.2.7) *Если u — вполне непрерывное отображение пространства E в F, то сужение u на любом векторном подпространстве E_1 пространства E является вполне непрерывным отображением E_1 в $\overline{u(E_1)}$.*

В самом деле, в силу (11.2.6) это сужение является вполне непрерывным отображением подпространства E_1 в F. Если B — ограниченное подмножество E_1, то $\overline{u(B)}$ является тогда компактным подмножеством пространства F и, так как $\overline{u(B)} \subset \overline{u(E_1)}$, множество $u(B)$ относительно компактно в $\overline{u(E_1)}$.

(11.2.8) Пример. Пусть теперь, при тех же обозначениях и тех же предположениях относительно функции K, что и в (11.2.3), G есть предгильбертово пространство, определяемое на множестве $\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(I)$ скалярным произведением $(f|g) = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt$ (6.5.1). Норму в этом пространстве будем обозначать символом $\|f\|_2 = \sqrt{(f|f)}$, чтобы отличить ее от нормы $\|f\| = \sup_{t \in I} |f(t)|$; обозначим через E пространство $\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(I)$ с нормой $\|f\|$. Тождественное отображение $f \to f$ пространства E в G непрерывно, так как по теореме о среднем значении $\|f\|_2 \leqslant \sqrt{b-a} \cdot \|f\|$. Но оно не взаимно непрерывно и G не является банаховым пространством. Неравенство Коши — Шварца (6.2.1) записывается в виде

$$\left|\int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt\right|^2 \leqslant \left(\int_a^b |f(t)|^2\,dt\right)\left(\int_a^b |g(t)|^2\,dt\right). \tag{11.2.8.1}$$

При тех же обозначениях, что и в (11.2.3), мы можем, таким образом, вывести из (11.2.3.1) и (11.2.8.1), что при $|t_1 - t_2| \leqslant \delta$

$$|g(t_1) - g(t_2)| \leqslant \varepsilon \sqrt{b-a} \cdot \|f\|_2 \tag{11.2.8.2}$$

и аналогично $|g(t)| \leqslant k\sqrt{b-a} \cdot \|f\|_2$ для любой точки $t \in I$. Поэтому в силу точно такого же рассуждения, как и в (11.2.3), $f \to Uf$ есть вполне непрерывное отображение пространства G в E. А так как тождественное отображение E в G непрерывно, то отображение $f \to Uf$ в силу (11.2.6) есть также и вполне непрерывное отображение G в G.

(11.2.9) *Пусть E и F — два банаховых пространства, E_0 (соответственно F_0) — подпространство, плотное в E (соответственно в F), u — вполне непрерывное отображение подпространства F_0 в F_0 и $\tilde{u}$ — единственное его непрерывное продолжение как отображение пространства E в F (5.5.4). Тогда $\tilde{u}(E) \subset F_0$ и $\tilde{u}$ есть вполне непрерывное отображение пространства E в F_0.*

Очевидно, что любой шар $\|x\| \leqslant r$ в E содержится в замыкании любого шара в E_0 с центром 0 и радиусом $> r$ (3.13.13). Поэтому любое множество, ограниченное в E, содержится в замыкании некоторого множества B, ограниченного в E_0. Множество $\tilde{u}(\bar{B})$ в силу (3.11.4) содержится в замыкании в F множества $\tilde{u}(B) = u(B)$. Множество $u(B)$ относительно компактно в F_0, т. е. его замыкание в F_0 компактно и, значит, замкнуто в F и, таким образом, совпадает со своим замыканием в F. Это показывает, что множество $\tilde{u}(\bar{B})$ содержится в F_0 и относительно компактно в этом пространстве, ч. т. д.

(11.2.10) *Пусть E — нормированное пространство, F — банахово пространство и (u_n) — последовательность отображений, принадлежащих $\mathscr{L}(E; F)$ (5.7), сходящаяся в $\mathscr{L}(E; F)$ к u. Тогда если вполне непрерывно каждое из отображений u_n, то вполне непрерывно и отображение u.*

Пусть B — произвольное ограниченное множество в E. Так как F — полное пространство, то нам нужно только доказать, что множество $u(B)$ вполне ограничено (3.17.5). Пусть множество B содержится в некотором шаре $\|x\| \leqslant a$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое n_0, что из $n \geqslant n_0$ будет следовать $\|u - u_n\| \leqslant \varepsilon/(2a)$ и, значит [в силу (5.7.4)], $\|u(x) - u_n(x)\| \leqslant \varepsilon/2$ для любой точки $x \in B$. Но, поскольку множество $u_{n_0}(B)$ вполне ограничено, оно может быть покрыто конечным числом шаров с центрами y_j $(1 \leqslant j \leqslant m)$ и радиусом $\varepsilon/2$. Для любой точки $x \in B$, таким образом, существует такое j, что $\|u_{n_0}(x) - y_j\| \leqslant \varepsilon/2$ и, следовательно, $\|u(x) - y_j\| \leqslant \varepsilon$, и шары с центрами y_j и радиусом ε покрывают $u(B)$, ч. т. д.

В частности, любой предел в $\mathscr{L}(E; F)$ последовательности отображений конечного ранга в силу (11.2.1) и (11.2.10) вполне непрерывен. Вопрос о том, будет ли, напротив, любое вполне непрерывное отображение равно такому пределу, все еще остается открытым.

Задачи

1. Пусть E — банахово пространство, A — открытое множество в E и F — конечномерное векторное пространство. Покажите, что для любого $p \geqslant 1$ тождественное отображение $f \to f$ банахова пространства $\mathscr{D}_F^{(p)}(A)$ (задача 8, § 8, 12) в пространство $\mathscr{D}_F^{(p-1)}(A)$ [которое при $p = 1$ нужно заменить на $\mathscr{C}_F^{\infty}(A)$] есть вполне непрерывный оператор.

[Воспользуйтесь теоремой о среднем значении и теоремой Асколи.]

2. Пусть u — вполне непрерывное отображение бесконечномерного банахова пространства E в нормированное пространство F. Покажите, что в E существует такая последовательность (x_n), что $\|x_n\| = 1$ при каждом n и что $\lim\limits_{n\to\infty} u(x_n) = 0$.

[Заметьте, что существуют такое число $\alpha > 0$ и такая последовательность (y_n) точек пространства E, что $\|y_n\| = 1$ при каждом n и что $\|y_m - y_n\| \geqslant \alpha$ при $m \neq n$ (задача 3 § 5.9 и (3.16.1)), и рассмотрите последовательность $(u(y_n))$.]

Заключите отсюда, что если образ при u сферы $S: \|x\| = 1$ замкнут в F, то он содержит 0.

3. Пусть E — сепарабельное гильбертово пространство и (e_n) — ортонормальный базис в E. Покажите, что если u — вполне непрерывное отображение пространства E в нормированное пространство F, то последовательность $(u(e_n))$ сходится к 0.

[Допустите противное и покажите, что невозможно, чтобы последовательность $(u(e_n))$ имела в F предел $b \neq 0$.]

Покажите, обратно, что если F — банахово пространство и если ряд с общим членом $\|u(e_n)\|^2$ сходится, то отображение u вполне непрерывно.

[Для доказательства того, что образ шара $\|x\| \leqslant 1$ при u вполне ограничен, воспользуйтесь неравенством Коши — Шварца.]

4. Пусть F — нормированное пространство, обладающее следующим свойством: существует такая константа $c > 0$, что для любого конечного множества $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ в F и любого $\varepsilon > 0$ существует разложение $F = M + N$ пространства F в прямую сумму двух замкнутых подпространств, такое, что M конечномерно, $d(a_i, M) \leqslant \varepsilon$ при $1 \leqslant i \leqslant n$ и что если для любого вектора $x \in F$ имеем $x = p(x) + q(x)$, где $p(x) \in M$ и $q(x) \in N$, то $\|q(x)\| \leqslant c \cdot d(x, M)$. Покажите, что при этом предположении любое вполне непрерывное линейное отображение нормированного пространства E в F является в $\mathscr{L}(E; F)$ пределом некоторой последовательности линейных отображений конечного ранга.

[Воспользуйтесь определением вполне ограниченных пространств.]

Покажите, что любое гильбертово пространство, а также пространства (c_0) (задача 5 § 5.3) и l^1 (задача 1 § 5.7) удовлетворяют предыдущему условию.

5. Пусть $I = [a, b]$ — компактный промежуток в $\mathbf{R}$ и $K(s, t)$ — комплексная функция, непрерывная в $I \times I$ и удовлетворяющая предположениям задачи 4 § 8.11. Покажите, что если отображение U определено как в (11.2.3), то U остается и при этих предположениях вполне непрерывным отображением пространства $E = \mathscr{C}_{\mathbf{C}}(I)$ в себя.

3. Теория Ф. Рисса

Нам многократно потребуется следующая лемма:

(11.3.1) *Пусть u — непрерывный оператор в нормированном пространстве E, $v = 1 - u$, а L и M — два замкнутых*

векторных подпространства пространства E, такие, что $M \subset L$, $M \neq L$ и $v(L) \subset M$. Тогда существует такая точка $a \in L \cap \complement M$, что $\|a\| \leqslant 1$ и что для любой точки $x \in M$ выполняется неравенство $\|u(a) - u(x)\| \geqslant 1/2$.

По предположению, существует такая точка $b \in L$, что $b \notin M$ и, значит, $d(b, M) = \alpha > 0$. Пусть точка $y \in M$ выбрана так, что $\|b - y\| \leqslant 2\alpha$, и возьмем точку $a = (b - y)/\|b - y\|$. Тогда $\|a\| = 1$ и $a - z = (b - y - \|b - y\| z)/\|b - y\|$ для любой точки $z \in M$. Так как $y + \|b - y\| z \in M$, то $\|b - y - \|b - y\| z\| \geqslant \alpha$. Поэтому для любой точки $z \in M$ выполняется неравенство $\|a - z\| \geqslant 1/2$. Но при $x \in M$ имеем $u(a) - u(x) = a - (x + v(a) - v(x))$ и по предположению $x + v(a) - v(x) \in M$, откуда и следует наше заключение.

(11.3.2) *Пусть u — вполне непрерывный оператор в нормированном пространстве E и пусть $v = 1 - u$. Тогда:*

1°) *ядро $v^{-1}(0)$ конечномерно;*

2°) *образ $v(E)$ замкнут в E;*

3°) *$v(E)$ имеет в E конечную коразмерность;*

4°) *если $v^{-1}(0) = \{0\}$, то v есть линейный гомеоморфизм пространства E на $v(E)$* [ср. (11.3.4)].

1°). Для любой точки $x \in N = v^{-1}(0)$ мы имеем $u(x) = x$. Поэтому образ шара $B: \|x\| \leqslant 1$ в N при u есть сам шар B. По предположению множество $u(B)$ относительно компактно в E, а значит, и в N, поскольку N замкнуто в E. Но отсюда по теореме Рисса (5.9.4) следует, что N конечномерно.

2°). Пусть $y \in \overline{v(E)}$. Тогда в E существует такая последовательность (x_n), что $y = \lim\limits_{n \to \infty} v(x_n)$ (3.13.13). Предположим сначала, что последовательность $(d(x_n, N))$ не ограничена. Тогда (если потребуется, выделив подпоследовательность) мы можем считать, что $\lim\limits_{n \to \infty} d(x_n, N) = +\infty$. Пусть $z_n = x_n/d(x_n, N)$. Сразу видим, что $d(z_n, N) = 1$ и что, следовательно, существует такая точка $t_n \in N$, что $\|z_n - t_n\| \leqslant 2$. Пусть $s_n = z_n - t_n$. По определению $v(s_n) = v(z_n) = v(x_n)/d(x_n, N)$ и $d(s_n, N) = 1$. Из предположений сразу выводим, что $\lim\limits_{n \to \infty} v(s_n) = 0$. Но последовательность (s_n) ограничена в E. Так как оператор u вполне непрерывен, то существует такая ее подпоследовательность (s_{n_k}), что последовательность $(u(s_{n_k}))$ сходится к некоторой точке $a \in E$. Так как $\lim\limits_{n \to \infty} (s_n - u(s_n)) = 0$, то мы также имеем $\lim\limits_{n \to \infty} s_{n_k} = a$, и, значит, поскольку отображение $x \to d(x, N)$ непрерывно, $d(a, N) = 1$. Но $v(a) = \lim\limits_{k \to \infty} v(s_{n_k}) = 0$, а это противоречит определению N.

Таким образом, мы можем предполагать, что последовательность $(d(x_n, N))$ ограничена некоторым числом $M - 1$. В таком случае существует такая последовательность (x'_n), что $x_n - x'_n \in N$ и

$\|x'_n\| \leqslant M$. Так как $v(x'_n) = v(x_n)$, то мы можем считать, что $\|x_n\| \leqslant M$. Тогда, так как оператор u вполне непрерывен, существует подпоследовательность (x_{n_k}), для которой последовательность $(u(x_{n_k}))$ сходится к некоторой точке $b \in E$. Поскольку последовательность $x_{n_k} - u(x_{n_k}) = v(x_{n_k})$ сходится к y, последовательность (x_{n_k}) сходится к $b + y$, и ввиду непрерывности, мы имеем $v(b + y) = y$. Это доказывает, что $y \in v(E)$ и что, следовательно, образ $v(E)$ замкнут.

3°). Сказать, что $v(E)$ имеет в E бесконечную коразмерность, значит сказать, что существует такая бесконечная последовательность (a_n) точек пространства E, что при каждом n точка a_n не принадлежит подпространству V_{n-1}, порожденному $v(E)$ и точками $a_1, \ldots, a_{n-1}$. Так как подпространство $v(E)$ замкнуто, то [ввиду (5.9.2)] замкнуто и каждое из подпространств V_n. В силу (11.3.1) мы можем по индукции определить такую последовательность (b_n), что $b_n \in V_n$, $b_n \notin V_{n-1}$, $\|b_n\| \leqslant 1$ и $\|u(b_n) - u(b_j)\| \geqslant 1/2$ при любом $j \leqslant n - 1$. Отсюда следует, что последовательность $(u(b_n))$ не имеет предельных точек — в противоречии с предположением о том, что оператор u вполне непрерывен.

4°). Чтобы доказать, что в случае, когда $v^{-1}(0) = \{0\}$, отображение v есть гомеоморфизм пространства E на $v(E)$, нужно только показать, что образ $v(A)$ любого замкнутого множества $A \subset E$ замкнут в E [а потому и в $v(E)$] (3.11.4). Но это доказывается точно таким же рассуждением, как то, которое было проведено в 2°), только всюду E нужно заменить множеством A (а N — множеством $\{0\}$).

(11.3.3) *При тех же предположениях, что и в* (11.3.2), *определим по индукции подпространства* $N_1 = v^{-1}(0)$, $N_k = v^{-1}(N_{k-1})$ *при* $k > 1$, $F_1 = v(E)$ *и* $F_k = v(F_{k-1})$ *при* $k > 1$. *Тогда*:

1°). N_k *образуют возрастающую последовательность конечномерных подпространств, а* F_k — *убывающую последовательность замкнутых подпространств конечной коразмерности.*

2°). *Существует такой наименьший номер* n, *что при* $k \geqslant n$ *имеет место равенство* $N_{k+1} = N_k$. *Тогда при* $k \geqslant n$ *справедливо равенство* $F_{k+1} = F_k$, *пространство* E *есть топологическая прямая сумма* (5.4) *подпространств* F_n *и* N_n *и сужение оператора* v *на* F_n *есть линейный гомеоморфизм подпространства* F_n *на себя.*

1°). Определим по индукции $v_1 = v$, $v_k = v_{k-1} \circ v$. Убедимся, что $v_k = 1 - u_k$, где u_k — вполне непрерывный оператор. Это легко показать индукцией по k. Действительно, $v_k = (1 - u_{k-1}) \circ (1 - u) = 1 - u_{k-1} - u + u_{k-1} \circ u$, и поэтому наше утверждение сразу следует из индуктивного предположения и из (11.2.6) и (11.2.5). Тогда по определению $N_k = v_k^{-1}(0)$ и $F_k = v_k(E)$, и 1°) следует из (11.3.2).

2°). Предположим, что $N_k \neq N_{k+1}$ при каждом k. При $k \geqslant 1$ мы имеем $v(N_{k+1}) \subset N_k$. В силу (11.3.1) существует бесконечная последовательность (x_k) точек пространства E, такая, что $x_k \in N_k$, $x_k \notin N_{k-1}$, $\|x_k\| \leqslant 1$ при $k > 1$ и $\|u(x_k) - u(x_j)\| \geqslant 1/2$ при любом $j < k$. Отсюда следует, что последовательность $(u(x_n))$ не имеет предельных точек — в противоречии с предположением о том, что оператор u вполне непрерывен.

Подобным же образом предположим, что $F_{k+1} \neq F_k$ при каждом k. При $k \geqslant 1$ имеем $v(F_k) \subset F_{k+1}$. В силу (11.3.1) существует бесконечная последовательность (x_k) точек пространства E, такая, что $x_k \in F_k$, $x_k \notin F_{k+1}$, $\|x_k\| \leqslant 1$ при $k \geqslant 1$ и $\|u(x_k) - u(x_j)\| \geqslant 1/2$ при любом $j > k$. Это снова приводит к противоречию, и поэтому существует наименьший такой номер m, что $F_{k+1} = F_k$ при $k \geqslant m$.

Докажем, далее, что $N_n \cap F_n = \{0\}$. Если $y \in F_n \cap N_n$, то существует такая точка $x \in E$, что $y = v_n(x)$, и, с другой стороны, $v_n(y) = 0$. Но отсюда следует, что $v_{2n}(x) = 0$, поэтому $x \in N_{2n} = N_n$ и $y = v_n(x) = 0$.

По определению мы имеем $F_m \subset F_n$ и $v(F_m) = F_m$. Докажем, что $F_n = F_m$. В противном случае мы имели бы $m > n$. Пусть точка z выбрана так, что $z \in F_{m-1} \subset F_n$ и $z \notin F_m$. Так как $v(z) \in F_m = v(F_m)$, то существует точка $t \in F_m$, для которой $v(z) = v(t)$, т. е. $z - t \in N_1 \subset N_n$. Но поскольку $z - t \in F_n$, мы заключаем, что $z = t$, и наше исходное предположение мы привели к противоречию.

Для каждой точки $x \in E$ мы имеем $v_n(x) \in F_n = F_m$, и [так как по определению m $v_n(F_n) = F_n$] существует такая точка $y \in F_n$, что $v_n(x) = v_n(y)$, поэтому $x - y \in N_n$ и, следовательно, $E = F_n + N_n$. Эта последняя сумма является прямой, так как $F_n \cap N_n = \{0\}$. Подпространство F_n замкнуто, а N_n — конечномерно, следовательно, (5.9.3), E есть топологическая прямая сумма подпространств F_n и N_n. Наконец, сужение оператора v на F_n является отображением на все F_n, и его ядром является $F_n \cap N_1 \subset F_n \cap N_n = \{0\}$, значит, оно и взаимно однозначно. В силу (11.3.2. 4°)) это сужение есть линейный гомеоморфизм подпространства F_n на себя, и это завершает доказательство.

(11.3.4) *При тех же предположениях, что и в* (11.3.2), *если отображение v инъективно* [*т. е. если* $v^{-1}(0) = \{0\}$], *то v и сюръективно и, следовательно, представляет собой линейный гомеоморфизм пространства E на себя.*

В самом деле, из предположений следует, что $N_k = \{0\}$ при каждом k. Следовательно, $n = 1$ и N_1 сводится к 0. Таким образом, в силу (11.3.3) $F_1 = E$, и требуемый результат следует из (11.3.3).

Задачи

1. Пусть E и F — два банаховых пространства и f — непрерывное линейное отображение пространства E в F, такое, что $f(E)=F$ и что[1]) существует такое число $m>0$, что для любой точки $y\in F$ найдется точка $x\in E$, для которой $f(x)=y$ и $\|x\|\leqslant m\|y\|$.

a) Покажите, что если (y_n) — последовательность точек пространства F, сходящаяся к точке b, то из нее можно выделить такую подпоследовательность (y_{n_k}) и найти такую последовательность (x_k) точек пространства E, сходящуюся к некоторой точке a, что при каждом k будет выполнено равенство $f(x_k)=y_{n_k}$.

[Выберите (y_{n_k}) таким образом, чтобы ряд с общим членом $\|y_{n_{k+1}}-y_{n_k}\|$ сходился.]

b) Пусть u — вполне непрерывное отображение пространства E в F и пусть $v=f-u$. Покажите, что образ $v(E)$ замкнут в F и имеет в F конечную коразмерность.

[Доказательство должно следовать той же схеме, что и доказательство теоремы (11.3.2); нужно воспользоваться задачей a).]

c) Определим по индукции $F_1=v(E)$ и $F_{k+1}=v(f^{-1}(F_k))$ при $k\geqslant 1$. Покажите, что существует такой номер n, что $F_{k+1}=F_k$ при $k\geqslant n$.

[Тот же метод.]

d) Предположим, что $E=F$ — сепарабельное гильбертово пространство, и пусть $(e_n)_{n\geqslant 1}$ — ортонормальный базис в E. Определим f и u так, чтобы $f(e_n)=e_{n-3}$ при $n\geqslant 4$, $f(e_n)=0$ при $n\leqslant 3$, $u(e_n)=e_{n-2}/n$ при $n\geqslant 6$, $u(e_1)=u(e_3)=0$, $u(e_2)=-e_2$, $u(e_4)=e_1$ и $u(e_5)=e_2+(e_3/5)$. По индукции определим $N_1=v^{-1}(0)$ и $N_{k+1}=v^{-1}(f(N_k))$ при $k\geqslant 1$. Покажите, что все подпространства N_k различны и конечномерны.

2. Пусть E и F — два нормированных пространства, f — линейный гомеоморфизм пространства E на замкнутое подпространство $f(E)$ пространства F и u — вполне непрерывное отображение пространства E в F и пусть $v=f-u$.

a) Покажите, что подпространство $v^{-1}(0)$ конечномерно, а $v(E)$ замкнуто в F. Кроме того, если $v^{-1}(0)=\{0\}$, то v есть линейный гомеоморфизм пространства E на $v(E)$.

[Нужно следовать тому же методу, что и в (11.3.2).]

b) Определим по индукции $N_1=v^{-1}(0)$ и $N_{k+1}=v^{-1}(f(N_k))$ при $k\geqslant 1$. Покажите, что существует такой номер n, что $N_{k+1}=N_k$ при $k\geqslant n$.

c) Приведите пример, когда если $F_1=v(E)$ и $F_{k+1}=v(f^{-1}(F_k))$ при $k\geqslant 1$, то все подпространства F_k различны.

[В качестве $E=F$ возьмите сепарабельное гильбертово пространство, а в качестве f и u отображения, сопряженные (11.5) отображениям, обозначенным буквами f и u в задаче 1, d).]

---

[1]) Можно показать, что это условие является следствием того, что $f(E)=F$, если E и F — банаховы пространства; см. Н. Бурбаки [6].

3. Пусть E — банахово пространство и g — непрерывное линейное отображение пространства E в себя, удовлетворяющее условию $\|g\| < 1/2$. Тогда $f = 1 - g$ есть линейный гомеоморфизм пространства E на себя (8.3.2.1). Пусть u — вполне непрерывный оператор в E и пусть $v = f - u$. Тогда все утверждения теорем (11.3.2) и (11.3.3) справедливы.

[Сначала докажите следующий результат, соответствующий лемме (11.3.1): если $M \subset L$, $M \neq L$ и $v(L) \subset M$, то существует такая точка $a \in L \cap \complement M$, что $\|a\| \leqslant 1$ и что для любой точки $x \in M$, для которой $\|x\| \leqslant 1$, выполняется неравенство $\|u(a) - u(x)\| \geqslant (1 - 2\|g\|)/2$.]

4. Пусть f — автоморфизм пространства $E = l^1$ (задача 1 § 5.7; мы сохраняем обозначения этой задачи), такой, что $f(e_{2k}) = e_{2k+2}$ $(k \geqslant 0)$, $f(e_1) = e_0$ и $f(e_{2k+1}) = e_{2k-1}$ при $k \geqslant 1$, и пусть u — вполне непрерывное отображение, такое, что $u(e_n) = 0$ при $n \neq 1$ и $u(e_1) = e_0$. Покажите, что если $v = f - u$ и F_k и N_k определены, как в (11.3.3), то $N_{k+1} \neq N_k$ и $F_{k+1} \neq F_k$ при каждом k.

4. Спектр вполне непрерывного оператора

(11.4.1) *Пусть u — вполне непрерывный оператор в комплексном нормированном пространстве E. Тогда:*

1°). *Спектр S оператора u есть не более чем счетное компактное множество в $\mathbf{C}$, каждая точка которого (с возможным исключением точки 0) изолирована. Если E бесконечномерно, то 0 принадлежит S.*

2°). *Каждое число $\lambda \neq 0$, принадлежащее спектру, есть собственное значение оператора u.*

3°). *Для каждого $\lambda \neq 0$, принадлежащего спектру S, существует единственное разложение пространства E в топологическую прямую сумму двух подпространств $F(\lambda)$ и $N(\lambda)$ [обозначаемых также символами $F(\lambda; u)$ и $N(\lambda; u)$], такое, что:*

(i) *$F(\lambda)$ замкнуто, а $N(\lambda)$ конечномерно;*

(ii) *$u(F(\lambda)) \subset F(\lambda)$ и сужение оператора $u - \lambda \cdot 1$ на $F(\lambda)$ есть линейный гомеоморфизм этого пространства на себя;*

(iii) *$u(N(\lambda)) \subset N(\lambda)$, и существует такое наименьшее целое число $k = k(\lambda)$, называемое кратностью λ [и обозначаемое также символом $k(\lambda; u)$], что сужение оператора $(u - \lambda \cdot 1)^k$ на $N(\lambda)$ равно 0.*

4°). *Собственное пространство $E(\lambda)$ оператора u, соответствующее собственному значению $\lambda \neq 0$, содержится в $N(\lambda)$ (и поэтому конечномерно).*

5°). *Если λ и μ — две различные точки спектра S, отличные от 0, то $N(\mu) \subset F(\lambda)$.*

6°). *Если E — банахово пространство, то тогда функция $\zeta \to (u - \zeta \cdot 1)^{-1}$, которая определена и аналитична в $\mathbf{C} \setminus S$, имеет в каждой точке $\lambda \neq 0$ спектра S полюс порядка $k(\lambda)$.*

Пусть $\lambda \neq 0$ — произвольное комплексное число. Так как оператор $\lambda^{-1} u$ вполне непрерывный, то к нему можно применить теорию Рисса (11.3). В силу (11.3.4) если λ не есть собственное значение оператора u, то оператор $1 - \lambda^{-1} u$ является линейным гомеоморфизмом пространства E на себя. Это же верно, конечно, для оператора $u - \lambda \cdot 1 = -\lambda(1 - \lambda^{-1} u)$, т. е. λ есть регулярное значение оператора u, что доказывает 2°).

Предположим, напротив, что λ — собственное значение оператора u. Тогда существование разложения $F(\lambda) + N(\lambda)$ пространства E со свойствами (i), (ii) и (iii) следует, как и утверждение 4°), из (11.3.3) [$E(\lambda)$ есть ядро, обозначаемое в (11.3.3) буквой N_1]. Чтобы закончить доказательство утверждения 3°), нам нужно только доказать единственность подпространств $F(\lambda)$ и $N(\lambda)$. Предположим, что существует второе разложение $E = F' + N'$, обладающее теми же свойствами, и положим $v = u - \lambda \cdot 1$. Тогда для любой точки $x \in N'$ мы можем написать $x = y + z$, где $y \in F(\lambda)$ и $z \in N(\lambda)$. По предположению существует такое $h > 0$, что $v^h(x) = 0$, и поэтому $v^h(y) = 0$. Так как сужение оператора v^h на $F(\lambda)$ есть, по предположению, гомеоморфизм, то $y = 0$ и $x \in N(\lambda)$. Это доказывает, что $N' \subset N(\lambda)$, и точно такое же рассуждение доказывает, что $N(\lambda) \subset N'$. Далее, если $x = y + z \in F'$, где $y \in F(\lambda)$ и $z \in N(\lambda)$, то мы имеем $v^k(x) = v^k(y)$; следовательно, $v^k(F') \subset F(\lambda)$. Но, поскольку $v(F') = F'$, отсюда вытекает, что $F' \subset F(\lambda)$, а включение $F(\lambda) \subset F'$ доказывается аналогично.

Обозначим через u_1 и u_2 сужения оператора u соответственно на $F(\lambda)$ и на $N(\lambda)$. Из соотношения $(u_2 - \lambda \cdot 1)^k = 0$ на основании линейной алгебры следует, что в $N(\lambda)$ существует такой базис, что матрица оператора $u_2 - \lambda \cdot 1$ по отношению к этому базису является треугольной, причем по диагонали стоят 0. Если $d = \dim(N(\lambda))$, то определитель оператора $u_2 - \zeta \cdot 1$, таким образом, равен $(\lambda - \zeta)^d$, и это доказывает, что оператор $u_2 - \zeta \cdot 1$ при $\zeta \neq \lambda$ обратим. Докажем, с другой стороны, что при достаточно малом $\zeta - \lambda$ обратим оператор $u_1 - \zeta \cdot 1$. Мы можем написать $u_1 - \zeta \cdot 1 = v_1 + (\lambda - \zeta) \cdot 1$, где $v_1 = u_1 - \lambda \cdot 1$. Из 3°) мы знаем, что оператор v_1 обратим. В силу (5.7.4) мы, таким образом, имеем $\|v_1^{-1}(x)\| \leqslant \|v_1^{-1}\| \cdot \|x\|$ в $F(\lambda)$, что можно также записать в виде $\|v_1(x)\| \geqslant c \cdot \|x\|$, где $c = \|v_1^{-1}\|^{-1}$. Если бы теперь было $\zeta \neq 0$ и оператор $u_1 - \zeta \cdot 1$ не был бы обратим, то в силу 2°) [примененного к подпространству $F(\lambda)$ и оператору u_1 с учетом (11.2.7)] в $F(\lambda)$ нашлась бы такая точка $x \neq 0$, что $u_1(x) = \zeta x$ и, следовательно, $|\zeta - \lambda| \cdot \|x\| = \|v_1(x)\| \geqslant c \cdot \|x\|$, что невозможно, если $|\zeta - \lambda| < c$. Это показывает, что если $\zeta \neq 0$, $\zeta \neq \lambda$ и $|\zeta - \lambda| < c$, то оператор $u - \zeta \cdot 1$ обратим (поскольку обратимы его

сужения на $F(\lambda)$ и на $N(\lambda)$), т. е. что ζ не принадлежит S. Таким образом, все точки $\lambda \neq 0$ спектра S изолированы, и спектр S не более чем счетен. В силу 2°) для каждого числа $\lambda \neq 0$, принадлежащего S, в E существует такая точка $x \neq 0$, что $u(x) = \lambda x$ и, значит, в силу (5.7.4) $|\lambda| \cdot \|x\| \leqslant \|u\| \cdot \|x\|$ и $|\lambda| \leqslant \|u\|$, что доказывает, что множество S компактно. Предположим, чтобы закончить доказательство утверждения 1°), что E бесконечномерно. Если бы оператор u был гомеоморфизмом пространства E на себя, то образ $u(B)$ шара $B: \|x\| \leqslant 1$ был бы окрестностью точки 0 в E и, так как он относительно компактен в E, это нарушало бы теорему Рисса (5.9.4).

Если μ — точка множества S, отличная от 0 и от λ, и если $x \in N(\mu)$, то мы можем написать $x = y + z$, где $y = F(\lambda)$ и $z \in N(\lambda)$. Мы уже видели выше, что сужение оператора $w = u - \mu \cdot 1$ на $N(\lambda)$ есть гомеоморфизм. Так как $w^h(x) = 0$ при достаточно большом h и $w^h(y) \in F(\lambda)$, а $w^h(z) \in N(\lambda)$, то мы должны иметь $w^h(y) = w^h(z) = 0$, что доказывает утверждение 5°).

Займемся теперь доказательством утверждения 6°). Если E — банахово пространство, то аналитичность функции $(u - \zeta \cdot 1)^{-1}$ в $\mathbf{C} \setminus S$ следует из (11.1.2). При тех же обозначениях, что и выше, λ не принадлежит спектру оператора u_1. Поэтому [в силу (11.2.7)] функция $(u_1 - \zeta \cdot 1)^{-1}$ является аналитической в некоторой окрестности точки λ. В частности, существуют такие числа $\rho > 0$ и $M > 0$, что при $x \in F(\lambda)$ и $|\zeta - \lambda| \leqslant \rho$ выполняется неравенство $\|(u_1 - \zeta \cdot 1)^{-1}(x)\| \leqslant M \cdot \|x\|$. С другой стороны, мы можем написать $u_2 - \zeta \cdot 1 = (\lambda - \zeta) \cdot 1 + v_2$, где $v_2 = u_2 - \lambda \cdot 1$, и мы знаем, что при $\zeta \neq \lambda$ оператор $u_2 - \zeta \cdot 1$ обратим. Кроме того, так как $v_2^k = 0$,

$$(11.4.1.1) \qquad (u_2 - \zeta \cdot 1)^{-1} = -\sum_{h=1}^{k} (\zeta - \lambda)^{-h} v_2^{h-1}.$$

Отсюда следует существование такого числа $M' > 0$, что для любой точки $x \in N(\lambda)$ при $|\zeta - \lambda| < \rho$ и $\zeta \neq \lambda$ выполняется неравенство $|\zeta - \lambda|^k \cdot \|(u_2 - \zeta \cdot 1)^{-1}(x)\| \leqslant M' \cdot \|x\|$. Далее, для любой точки $x \in E$ мы можем написать $x = y + z$, где $y \in F(\lambda)$ и $z \in N(\lambda)$, и существует такая константа $a > 0$, что $\|y\| \leqslant a\|x\|$ и $\|z\| \leqslant a\|x\|$ (5.9.3). Таким образом, мы видим, что для любой точки $x \in E$ при $|\zeta - \lambda| \leqslant \rho$ и $\zeta \neq \lambda$ выполняется неравенство $|\zeta - \lambda|^k \|(u - \zeta \cdot 1)^{-1}(x)\| \leqslant a(M\rho^k + M')\|x\|$. Иными словами, мы имеем $|\zeta - \lambda|^k \cdot \|(u - \zeta \cdot 1)^{-1}\| \leqslant a(M\rho^k + M')$ при $\zeta \neq \lambda$ и $|\zeta - \lambda| \leqslant \rho$. На основании (9.15.2) отсюда следует, что λ есть полюс порядка $\leqslant k$ функции $(u - \zeta \cdot 1)^{-1}$. Но по определению существует такая точка $x \in N(\lambda)$, что $v_2^{k-1}(x) \neq 0$; следовательно, функция $(\zeta - \lambda)^{k-1}\big((u - \zeta \cdot 1)^{-1}(x)\big)$, когда $\zeta \neq \lambda$ стремится к λ, не ограничена, и это доказывает, что λ есть полюс порядка k. Доказательство теоремы (11.4.1) завершено.

Мы будем называть размерность пространства $N(\lambda)$ *алгебраической кратностью* собственного значения λ оператора u, а размерность собственного пространства $E(\lambda)$ — его *геометрической кратностью*. Они совпадают в том и только в том случае, если $k(\lambda)=1$; в случае, когда E — банахово пространство, это условие эквивалентно утверждению, что λ есть простой полюс функции $(u-\zeta\cdot 1)^{-1}$.

(11.4.2). *Пусть E — банахово пространство, E_0 — подпространство, плотное в E, u — вполне непрерывный оператор в E_0 и $\tilde{u}$ — единственное его непрерывное продолжение на E. Тогда спектры операторов u и $\tilde{u}$ совпадают, а для каждого собственного значения $\lambda\neq 0$ оператора u имеют место равенства $N(\lambda; u)=N(\lambda; \tilde{u})$, $E(\lambda; u)=E(\lambda; \tilde{u})$ и $k(\lambda; u)=k(\lambda; \tilde{u})$.*

Из (11.2.9) мы знаем, что оператор $\tilde{u}$ вполне непрерывен и что он отображает E в E_0. Если $\lambda\neq 0$ — собственное значение оператора $\tilde{u}$, то любой собственный вектор x, соответствующий λ, обладает тем свойством, что $x=\lambda^{-1}\tilde{u}(x)\in E_0$; поэтому λ есть собственное значение оператора u и $E(\lambda; \tilde{u})\subset E(\lambda; u)$. Так как обратное включение очевидно, то $S(\tilde{u})=S(u)$ и $E(\lambda; u)=E(\lambda; \tilde{u})\subset E_0$ для каждого собственного значения $\lambda\neq 0$. Аналогично, рассматривая ядра оператора $(u-\lambda\cdot 1)^k$ и его продолжения $(\tilde{u}-\lambda\cdot 1)^k$, убеждаемся, что они равны. Следовательно, $k(\lambda; u)=k(\lambda; \tilde{u})$ и $N(\lambda; u)=$ $=N(\lambda; \tilde{u})\subset E_0$.

Задачи

1. Пусть E — комплексное банахово пространство и u — вполне непрерывный оператор в E. Сохраним обозначения теоремы (11.4.1) и, кроме того, обозначим через p_λ (или $p_{\lambda, u}$) и $q_\lambda=1-p_\lambda$ проекции пространства E на $N(\lambda)$ и на $F(\lambda)$ в разложении пространства E в прямую сумму $F(\lambda)+$ $+N(\lambda)$.

a) Покажите, что для каждого $\lambda\in S(u)$, такого, что $\lambda\neq 0$, вычет мероморфной функции $(u-\zeta\cdot 1)^{-1}$ в полюсе λ равен $-p_\lambda$.

b) Покажите, что если $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ — различные точки спектра $S(u)$, то проекции p_{λ_j} $(1\leqslant j\leqslant r)$ коммутируют, и что $p_{\lambda_1}+\ldots+p_{\lambda_r}$ есть проекция пространства E на $N(\lambda_1)+\ldots+N(\lambda_r)$ в разложении пространства E в прямую сумму этого подпространства и подпространства $F(\lambda_1)\cap F(\lambda_2)\cap\ldots$ $\ldots\cap F(\lambda_r)$.

2. Пусть E — бесконечномерное комплексное банахово пространство, u — вполне непрерывный оператор в E и $(u_n)_{n\geqslant 1}$ — последовательность вполне непрерывных операторов в E, сходящаяся к u в банаховом пространстве $\mathscr{L}(E)$.

a) Докажите, что для любого ограниченного множества $B \subset E$ объединение $\bigcup_n u_n(B)$ относительно компактно в E.

[Покажите, что оно вполне ограничено.]

b) Покажите, что если $\lambda \in \mathbf{C}$ не принадлежит $S(u)$, то существуют такой открытый шар D с центром λ и такой номер n_0, что при $n \geqslant n_0$ пересечение $S(u_n) \cap D = \varnothing$ [воспользуйтесь (8.3.2.1)] и что при $\zeta \in D$ последовательность $(u_n - \zeta \cdot 1)^{-1}$ равномерно сходится к $(u - \zeta \cdot 1)^{-1}$.

c) Пусть (μ_n) — последовательность комплексных чисел, для которой $\mu_n \in S(u_n)$ при каждом n; такая последовательность всегда ограничена. Покажите, что если λ — предельная точка последовательности (μ_n), то $\lambda \in S(u)$.

[Можно предполагать, что $\lambda = \lim_{n \to \infty} \mu_n \neq 0$. Тогда существует такая точка $x_n \in E$, что $\|x_n\| = 1$ и $u_n(x_n) = \lambda_n x_n$; затем воспользуйтесь задачей a).]

d) Обратно, пусть $\lambda \neq 0$ принадлежит $S(u)$. Покажите, что для каждого n существует по крайней мере одно такое число $\mu_n \in S(u_n)$, что $\lambda = \lim_{n \to \infty} \mu_n$.

[В противном случае можно считать (выделяя, если потребуется, из (u_n) подходящую подпоследовательность), что существует открытый шар D с центром λ и радиусом r, такой, что $D \cap S(u) = \{\lambda\}$ и $D \cap S(u_n) = \varnothing$. Пусть тогда γ — путь $t \to \lambda + re^{it}$, определенный в промежутке $[0, 2\pi]$. Рассмотрите интеграл $\int_\gamma (u_n - \zeta \cdot 1)^{-1} (\zeta - \lambda)^{-1} \, d\zeta = 0$ и с помощью задачи b) получите противоречие.]

e) Пусть $\lambda \neq 0$ принадлежит $S(u)$ и пусть D — открытый шар с центром λ и радиусом r, такой, что $D \cap S(u) = \{\lambda\}$. Существует такой номер n_0, что при $n \geqslant n_0$ пересечение спектра $S(u_n)$ с окружностью $|\zeta - \lambda| = r$ пусто.

[Воспользуйтесь c).]

Пусть $\mu_1, \ldots, \mu_r$ — точки пересечения $D \cap S(u_n)$; положим $k_n = \sum_{j=1}^{r} k(\mu_j; u_n)$. Покажите, что существует такое n_1, что $k_n \geqslant k(\lambda; u)$ при $n \geqslant n_1$.

[Используйте тот же метод, что и в задаче d), умножив $(u_n - \zeta \cdot 1)^{-1}$ на подходящий многочлен относительно ζ степени k_n.]

Приведите пример, когда $k_n > k(\lambda; u)$ при каждом n.

f) Пусть, в обозначениях задачи e), $p = p_{\lambda, u}$ и $p_n = \sum_{j=1}^{r} p_{\mu_j, u_n}$. Покажите, что в банаховом пространстве $\mathscr{L}(E)$ предел $\lim_{n \to \infty} p_n = p$.

[Воспользуйтесь задачами b) и 1.]

Выведите из этого результата, что существует такое n_2, что при $n \geqslant n_2$ подпространство $N_n = N(\mu_r; u_n) + \ldots + N(\mu_r; u_n)$ есть алгебраическое дополнение в E подпространства $F(\lambda; u)$.

[Предположим, что n таково, что $\|p - p_n\| \leqslant 1/2$. Если бы нашлась точка $x_n \in F(\lambda) \cap N_n$, для которой $\|x_n\| = 1$, то соотношения $p(x_n) = 0$ и $p_n(x_n) = x_n$ противоречили бы предыдущему неравенству. Подобным же образом докажите, что пересечение $N(\lambda; u)$ и подпространства $F(\mu_1; u_n) \cap \ldots \cap F(\mu_r; u_n)$ сводится к 0.]

3. Пусть u — вполне непрерывный оператор в бесконечномерном комплексном банаховом пространстве E и пусть $P(\zeta)$ — многочлен без свободного члена; положим $v = P(u)$. Покажите, что спектр $S(v)$ тождествен с множеством чисел $P(\lambda)$, где $\lambda \in S(u)$. Далее, для каждого $\mu \in S(v)$ пространство $N(\mu; v)$ есть (прямая) сумма подпространств $N(\lambda_k; u)$, для которых $P(\lambda_k) = \mu$, а $F(\mu, v)$ — пересечение соответствующих подпространств $F(\lambda_k; u)$.

[Пусть V — замкнутое подпространство пространства E, такое, что $u(V) \subset V$, и пусть u_V — сужение оператора u на V. Покажите, что существует такая константа M, не зависящая ни от V, ни от n, что $\|(P(u_V))^n\| \leqslant M^n \|u_V^n\|$. Примените это замечание и задачу 1 § 11.1, взяв в качестве V подходящее пересечение конечного числа подпространства вида $F(\lambda; u)$.]

4. Пусть E — сепарабельное гильбертово пространство и $(e_n)_{n \geqslant 0}$ — ортонормальный базис в E. Покажите, что оператор u, определенный условием $u(e_n) = e_{n+1}/(n+1)$ при $n \geqslant 0$, вполне непрерывен и что $S(u)$ сводится к 0 (точнее, u не имеет собственных значений).

5. Пусть u — непрерывный оператор в комплексном банаховом пространстве E. *Риссовская точка* оператора u есть точка λ, принадлежащая спектру $S(u)$ и такая, что: 1°) точка λ изолирована в $S(u)$; 2°) E есть прямая сумма замкнутого подпространства $F(\lambda)$ и конечномерного подпространства $N(\lambda)$, обладающих такими четырьмя свойствами: $u(F(\lambda)) \subset F(\lambda)$; $u(N(\lambda)) \subset N(\lambda)$; сужение оператора $u - \lambda \cdot 1$ на $F(\lambda)$ есть линейный гомеоморфизм; сужение оператора $u - \lambda \cdot 1$ на $N(\lambda)$ нильпотентно.

a) Покажите, что если λ и μ — две различные риссовские точки в $S(u)$, то $N(\mu) \subset F(\lambda)$ и $F(\lambda)$ есть прямая сумма $N(\mu)$ и $F(\lambda) \cap F(\mu)$.

b) *Риссовский оператор* u, по определению, есть непрерывный оператор, у которого в с е точки (исключая 0) спектра $S(u)$ являются риссовскими точками. Для любого $\varepsilon > 0$ множество точек $\lambda \in S(u)$, для которых $|\lambda| \geqslant \varepsilon$, есть тогда конечное множество $\{\mu_1, \ldots, \mu_r\}$. Пусть p_i — проекция пространства E на $N(\mu_i)$ в разложении пространства E в прямую сумму $N(\mu_i) + F(\mu_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$, и пусть $v = u - \sum_{i=1}^{r} u \circ p_i$. Покажите, что $S(v)$ содержится в шаре $|\zeta| \leqslant \varepsilon$ и что поэтому (задача 1 § 11.1) $\lim_{n \to \infty} \|v^n\|^{1/n} \leqslant \varepsilon$.

c) Пусть $\mathscr{K}$ — замкнутое (11.2.10) подпространство банахова пространства $\mathscr{L}(E)$, состоящее из всех вполне непрерывных операторов. Покажите,

что для того, чтобы оператор $u \in \mathscr{L}(E)$ был риссовским, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} (d(u^n, \mathscr{K}))^{1/n} = 0$.

[Чтобы доказать, что условие необходимо, заметьте, что $u^n = v^n + w_n$, где w_n — оператор конечного ранга, и, значит, вполне непрерывный, и воспользуйтесь задачей b). Чтобы доказать, что условие достаточно, воспользуйтесь результатом задачи 3 § 11.3, который можно интерпретировать следующим образом: если $\|g\| < 1/2$, то либо точка $\lambda = 1$ не принадлежит $S(g+u)$, либо же является риссовской точкой для $g+u$.]

5. Вполне непрерывные операторы в гильбертовых пространствах

Пусть E — предгильбертово пространство и u — оператор в E. Мы будем говорить, что u имеет *сопряженный оператор*, если в E существует такой оператор u^* (он и называется *сопряженным*), что для любой пары x, y точек пространства E

(11.5.1) $$(u(x) \mid y) = (x \mid u^*(y)).$$

Сразу видим, что оператор u^* является единственным (если он существует) и что [в силу 6.1(V)] в этом случае оператор $(u^*)^*$ существует и равен u. Подобным же образом убеждаемся в том, что если u и v имеют сопряженные операторы, то сопряженные операторы имеют $u+v$, λu и uv и они соответственно равны u^*+v^*, $\bar{\lambda} u^*$ и v^*u^*.

(11.5.2) *Если оператор u непрерывен и имеет сопряженный оператор, то оператор u^* непрерывен и в $\mathscr{L}(E)$ выполняется равенство $\|u^*\| = \|u\|$. Если E — гильбертово пространство, то каждый непрерывный оператор в E имеет сопряженный оператор.*

Из (11.5.1) и неравенства Коши — Шварца (6.2.4) заключаем, что для любой пары точек x и y

$$|(x \mid u^*(y))| \leqslant \|u(x)\| \cdot \|y\| \leqslant \|u\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|.$$

Полагая $x = u^*(y)$, получаем $\|u^*(y)\| \leqslant \|u\| \cdot \|y\|$ для любой точки $y \in E$, откуда следует непрерывность оператора u^* и неравенство $\|u^*\| \leqslant \|u\|$.

Обратное неравенство будет доказано, если в рассуждении поменять местами u и u^*.

Если E — гильбертово пространство и оператор u непрерывен, то для любой точки $y \in E$ линейная форма $x \to (u(x) \mid y)$ непрерывна, и в силу (6.3.2) существует единственный такой вектор $u^*(y)$, для которого имеет место равенство (11.5.1). Из единственности $u^*(y)$

заключаем, что отображение u^* линейно, и потому u^* есть оператор, сопряженный u.

Второе утверждение теоремы (11.5.2) не переносится на предгильбертовы пространства.

Оператор u в предгильбертовом пространстве E называется *самосопряженным* (или *эрмитовым*), если он имеет сопряженный оператор и если $u^* = u$. Отображение $(x, y) \to (u(x) \mid y) = \overline{(u(y) \mid x)}$ есть тогда эрмитова форма в E. Самосопряженный оператор u называется *положительным* (соответственно *невырождающимся*), если соответствующая эрмитова форма положительна (соответственно положительна и не вырождается). В этом случае пишут $u \geqslant 0$ (соответственно $u > 0$). Для любого оператора, имеющего сопряженный оператор, $u + u^*$ и $i(u - u^*)$ являются самосопряженными операторами.

Если P — ортогональная проекция пространства E на полное векторное подпространство F (6.3), то при $x \in E$ и $y \in E$ имеем $(Px \mid y - Py) = 0$, следовательно, $(Px \mid y) = (Px \mid Py) = (x \mid Py)$, и это доказывает, что P есть положительный эрмитов оператор.

(11.5.3) *Если непрерывный оператор u в предгильбертовом пространстве E имеет сопряженный оператор, то u^*u и uu^* являются самосопряженными положительными операторами и $\|u^*u\| = \|uu^*\| = \|u\|^2 = \|u^*\|^2$. В частности, если u — самосопряженный оператор, то $\|u^2\| = \|u\|^2$.*

Тот факт, что операторы u^*u и uu^* являются самосопряженными, следует из соотношений $(u^*)^* = u$ и $(uv)^* = v^*u^*$. Кроме того, $(u^*u(x) \mid x) = (u(x) \mid u(x)) \geqslant 0$ для любой точки $x \in E$, и точно так же доказывается, что положителен оператор uu^*. Далее, это последнее равенство в силу неравенства Коши — Шварца показывает, что $\|u(x)\|^2 \leqslant \|u^*u(x)\| \, \|x\|$. Поэтому [ввиду (5.7.4)] $\|u\|^2 \leqslant \|u^*u\|$. С другой стороны, в силу (5.7.5) и (11.5.2) $\|u^*u\| \leqslant \|u^*\| \cdot \|u\| = \|u\|^2$, и это завершает доказательство.

(11.5.4) *Если E — гильбертово пространство, то оператор, сопряженный вполне непрерывному оператору u в E, сам является вполне непрерывным.*

Так как E — полное пространство, достаточно доказать, что образ $u^*(B)$ шара $B: \|y\| \leqslant 1$ вполне ограничен. Пусть $F = \overline{u(B)}$; тогда F — компактное множество в E. Рассмотрим в пространстве $\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(F)$ (7.2) множество H сужений на F линейных непрерывных отображений $x \to (x \mid y)$ пространства E в $\mathbf{C}$, где $y \in B$. Мы докажем, что H относительно компактно в $\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(F)$. Действительно, в силу неравенства Коши — Шварца мы имеем $|(x - x' \mid y)| \leqslant \|x - x'\|$, поскольку $\|y\| \leqslant 1$. Это показывает, что множество H равностепенно непрерывно. С другой стороны, F содержится в шаре $\|x\| \leqslant \|u\|$; поэтому для любой точки $y \in B$ и любой точки $x \in F$ выполняется

неравенство $|(x \mid y)| \leqslant \|u\|$, и остается лишь воспользоваться теоремой Асколи (7.5.7).

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное число таких точек y_j $(1 \leqslant j \leqslant m)$ из B, что, какова бы ни была точка $y \in B$, существует такой номер j, что неравенство $|(u(x) \mid y - y_j)| \leqslant \varepsilon$ имеет место сразу для всех точек $x \in B$. Но в силу (11.5.1) это последнее неравенство можно записать в виде $|(x \mid u^*(y) - u^*(y_j))| \leqslant \varepsilon$, и потому либо $u^*(y) = u^*(y_j)$, либо же мы можем взять $x = z/\|z\|$, где $z = u^*(y) - u^*(y_j)$. Отсюда мы заключаем, что $\|u^*(y) - u^*(y_j)\| \leqslant \varepsilon$, и это завершает доказательство.

Заметим, что доказательство того, что образ $u^*(B)$ вполне ограничен, сохраняет силу и в случае, когда пространство E не является полным. Но может случиться, что вполне непрерывный оператор в предгильбертовом пространстве E имеет сопряженный оператор, не являющийся вполне непрерывным.

(11.5.5.) *Пусть u — вполне непрерывный оператор в комплексном предгильбертовом пространстве E, имеющий вполне непрерывный сопряженный оператор u^*. Тогда:*

1°). *Спектр $S(u^*)$ является образом спектра $S(u)$ при отображении $\xi \to \bar{\xi}$.*

2°). *Для любого числа $\lambda \neq 0$, принадлежащего $S(u)$, имеем $k(\lambda;\ u) = k(\bar{\lambda};\ u^*)$.*

3°). *Если $v = u - \lambda \cdot 1$, то $v^*(E)$ есть ортогональное дополнение* (6.3) *подпространства $v^{-1}(0) = E(\lambda;\ u)$ и размерности собственных пространств $E(\lambda;\ u)$ и $E(\bar{\lambda};\ u^*)$ совпадают.*

4°). *Подпространство $F(\bar{\lambda};\ u^*)$ является ортогональным дополнением подпространства $N(\lambda;\ u)$ и размерности подпространств $N(\lambda;\ u)$ и $N(\bar{\lambda};\ u^*)$ совпадают.*

Мы имеем $v^* = u^* - \bar{\lambda} \cdot 1$; поэтому в силу (11.5.1) $(v(x) \mid y) = (x \mid v^*(y))$, и, следовательно, из соотношения $v(x) = 0$ вытекает, что вектор x ортогонален подпространству $v^*(E)$. Применяя теорему (11.4.1) к оператору u^*, получаем, что $v^*(E)$ есть топологическая прямая сумма $F(\bar{\lambda};\ u^*)$ и подпространства $v^*(N(\bar{\lambda};\ u^*))$ пространства $N(\bar{\lambda};\ u^*)$, а из линейной алгебры следует, что коразмерность подпространства $v^*(E)$ равна размерности подпространства $v^{*-1}(0) = E(\bar{\lambda};\ u^*)$. Поэтому мы имеем $\dim E(\lambda;\ u) \leqslant \dim E(\bar{\lambda};\ u^*)$. Но $u = (u^*)^*$, и, таким образом, мы имеем $\dim E(\lambda;\ u) = \dim E(\bar{\lambda},\ u^*)$.

Далее, ортогональное дополнение подпространства $E(\lambda;\ u)$ содержит $v^*(E)$ и имеет ту же коразмерность, что и $v^*(E)$; значит, они совпадают, что доказывает утверждение 3°). Это также показывает, что для любого собственного значения $\lambda \neq 0$ оператора u

число $\bar{\lambda}$ является собственным значением оператора u^*, и так как обратное следует из равенства $u=(u^*)^*$, то мы доказали и 1°).

Точно такое же рассуждение можно применить к последовательным итерациям v^h оператора v. Оно покажет, что образ пространства E при $v^{*h}=(v^h)^*$ является ортогональным дополнением ядра отображения v^h. Пользуясь (11.3.2), (11.4.1) и равенством $u=(u^*)^*$, тогда немедленно доказываем 2°) и 4°).

Теоремы (11.4.1) и (11.5.5) можно превратить в критерий для решения уравнения $u(x)-\lambda x=y$.

(11.5.6) *При предположениях теоремы* (11.5.5):

(i) *если λ не принадлежит спектру оператора u, то уравнение $u(x)-\lambda x=y$ имеет в E для каждого вектора $y\in E$ единственное решение;*

(ii) *если λ принадлежит спектру оператора u, то, для того чтобы при $y\in E$ уравнение $u(x)-\lambda x=y$ имело в E решение, необходимо и достаточно, чтобы вектор y был ортогонален решениям уравнения $u^*(x)-\bar{\lambda}x=0$.*

Для конечномерного пространства этот критерий сводится к классическому критерию существования решения системы скалярных линейных алгебраических уравнений.

(11.5.7) *Пусть u — вполне непрерывный самосопряженный оператор в комплексном гильбертовом пространстве E. Тогда:*

1°). *Каждый элемент спектра $S(u)$ является действительным числом, и для каждого собственного значения $\lambda\neq 0$ оператора u имеем $k(\lambda)=1$.*

2°). *Если λ и μ — два различных собственных значения оператора u, то собственные подпространства $E(\lambda)$ и $E(\mu)$ ортогональны.*

3°). *Пусть (μ_n) — строго убывающая (конечная или бесконечная) последовательность собственных значений >0, а (ν_n) — строго возрастающая (конечная или бесконечная) последовательность собственных значений <0. Для каждого k, для которого определено значение μ_k (соответственно ν_k), пусть F'_k (соответственно F''_k) — ортогональное дополнение подпространства $E(\mu_1)+\ldots+E(\mu_{k-1})$ (соответственно $E(\nu_1)+\ldots+E(\nu_{k-1})$). Тогда μ_k (соответственно ν_k) есть наибольшее (соответственно наименьшее) значение функции $x\to(u(x)\mid x)$ на сфере $\|x\|=1$ в F'_k (соответственно F''_k), и точки этой сферы, в которых $(u(x)\mid x)=\mu_k$ (соответственно $(u(x)\mid x)=\nu_k$), суть точки, принадлежащие подпространству $E(\mu_k)$ (соответственно $E(\nu_k)$). Кроме того, $\|u\|=\sup(\mu_1,-\nu_1)$.*

4°). *Пространство E является гильбертовой суммой* (6.4) *подпространств* $E(\mu_n)$, $E(\nu_n)$ *и* $E(0)=u^{-1}(0)$.

(Может случиться, что либо значения μ_n, либо значения ν_n, отсутствуют. Но из 3°) следует, что единственный случай, когда нет отличных от нуля собственных значений, есть случай $u=0$.)

Для любого собственного значения $\lambda\neq 0$ оператора u мы имеем $(u(x)\mid x)=\lambda(x\mid x)$, где x — собственный вектор, соответствующий λ. Но число $(u(x)\mid x)=(x\mid u(x))=\overline{(u(x)\mid x)}$ для любого $x\in E$ действительно. Поэтому, так как число $(x\mid x)$ действительно и $\neq 0$, λ действительно. Если $v=u-\lambda\cdot 1$, то мы, таким образом, имеем $v^*=v$ и, значит, в силу (11.5.4) $v(E)$ есть ортогональное дополнение подпространства $E(\lambda)=v^{-1}(0)$. Отсюда следует, что сужение оператора v на $v(E)$ взаимно однозначно. Поэтому по определению [см. (11.3.3)] $N(\lambda)=E(\lambda)$, $F(\lambda)=v(E)$ и, следовательно, $k(\lambda)=1$. Это доказывает утверждение 1°), а так как для любого собственного значения $\mu\neq\lambda$ в силу (11.4.1) $E(\mu)=N(\mu)\subset F(\lambda)$, то мы доказали и 2°).

Сначала мы докажем последнюю часть утверждения 3°). Пусть $\rho=\sup(\mu_1,-\nu_1)$. Тогда в силу (11.1.2) отображение $\zeta\to(u-\zeta\cdot 1)^{-1}$ при $|\zeta|>\rho$ является аналитическим, откуда сразу следует, что отображение $\xi\to(1-\xi u)^{-1}$ является аналитическим при $|\xi|<1/\rho$. Если теперь ξ принадлежит достаточно малой окрестности точки 0, то степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\xi^n u^n$ сходится в $\mathscr{L}(E)$ к $(1-\xi u)^{-1}$ (8.3.2.1). В силу (9.9.4) этот степенной ряд сходится при каждом ξ, для которого $|\xi|<1/\rho$.

Далее, если M — максимум нормы $\|(1-\xi u)^{-1}\|$ при $|\xi|=r$, где r — произвольное число, удовлетворяющее условию $0<r<1/\rho$, то неравенства Коши (9.9.5) дают $\|u^n\|\leqslant M/r^n\leqslant M\rho^n$. В частности, если мы воспользуемся (11.5.3), то мы отсюда получим $\|u\|^{2^n}\leqslant M\rho^{2^n}$ при каждом $n\geqslant 1$. Беря корень 2^n-й степени и устремляя n к $+\infty$, на основании (4.3) получаем $\|u\|\leqslant\rho$. С другой стороны, мы в силу (11.1.3) имеем $\rho\leqslant\|u\|$ и, значит, $\|u\|=\rho$.

Обозначим теперь через (ρ_n) строго возрастающую последовательность абсолютных величин собственных значений оператора u, так что $\rho_1=\rho=\sup(\mu_1,-\nu_1)$, и пусть G_n равно сумме подпространств $E(\lambda)$, для которых $|\lambda|=\rho_n$ (конечно, существует только одно или же два таких собственных значения λ). Пусть, далее, F_n — ортогональное дополнение подпространства $G_1+\ldots+G_{n-1}$. В силу 1°) имеем $u(F_n)\subset F_n$. Докажем, что сужение u_n оператора u на F_n удовлетворяет условию $\|u_n\|<\rho_{n-1}$. В противном случае по только что доказанному [и по теореме (11.2.7)] в F_n нашелся бы такой собственный вектор x, что $u(x)=\lambda x$, где $|\lambda|\geqslant\rho_{n-1}$. Но это противоречит определению F_n.

Напишем теперь $x = y + z$ для каждого вектора $x \in F_n$, где $y \in F_{n+1}$ и $z \in G_n$. По неравенству Коши — Шварца

$$-\|u_{n+1}\| \cdot \|y\|^2 + (u(z) \mid z) \leqslant (u(x) \mid x) \leqslant \|u_{n+1}\| \cdot \|y\|^2 + (u(z) \mid z).$$

Допустим, что $\rho_n = \mu_h = -\nu_k$, и в соответствии с этим напишем $z = z_1 + z_2$, где $z_1 \in E(\mu_h)$ и $z_2 \in E(\nu_k)$. Это дает $(u(z) \mid z) = \rho_n(\|z_1\|^2 - \|z_2\|^2)$. Так как $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z_1\|^2 + \|z_2\|^2$, то, пользуясь предыдущим неравенством и неравенством $\|u_{n+1}\| < \rho_n$, сразу видим, что наибольшее значение функции $(u(x) \mid x)$ на сфере $\|x\| = 1$ в F_n равно ρ_n и что оно достигается только в точках подпространства $E(\mu_h)$, а наименьшее значение равно $-\rho_n$ и оно достигается только в точках подпространства $E(\nu_k)$. Этот же результат получается аналогично и проще, если нет такого k, что $\rho_n = -\nu_k$, или же такого h, что $\rho_n = \mu_h$. Наконец, если мы заметим, что $F'_h = F_n + E(\nu_1) + \ldots + E(\nu_s)$, если $\mu_h = \rho_n$ и s — наибольшее значение k, для которого $\rho_n < -\nu_k$, и точно так же $F''_k = F_n + E(\mu_1) + \ldots + E(\mu_r)$, если $\nu_k = -\rho_n$ и r — наибольшее значение h, для которого $\rho_n < \mu_h$, то почти тождественное рассуждение завершает доказательство утверждения 3°).

Пусть теперь F_∞ — замкнутое подпространство, являющееся пересечением всех F_n. По определению $u(F_\infty) \subset F_\infty$, и у сужения оператора u на F_∞ не может быть собственных значений $\neq 0$. В силу 3°) отсюда следует, что $u(x) = 0$ в F_∞. Далее, если вектор $x \in E$ ортогонален F_∞ и всем $E(\mu_k)$ и $E(\nu_k)$, то по определению он ортогонален всем G_n и поэтому принадлежит F_∞. Поскольку он ортогонален и F_∞, он равен 0. Это [на основании (6.3.1)] доказывает, что алгебраическая сумма подпространств $E(\mu_k)$, $E(\nu_k)$ и F_∞ плотна в E. Следовательно, в силу (6.4.2) E есть гильбертова сумма этих пространств. Любой вектор $x \in E$ может, таким образом, единственным способом быть записан в виде $x = \sum_k x'_k + \sum_k x''_k + x_0$, где x'_k, x''_k и x_0 — ортогональные проекции вектора x соответственно на $E(\mu_k)$, $E(\nu_k)$ и F_∞, а суммы, когда множество индексов бесконечно, представляют собой ряды, сходящиеся в E (*каноническое разложение* x). Отсюда мы заключаем, что $u(x) = \sum_k \mu_k x'_k + \sum_k \nu_k x''_k$, и ввиду единственности этого представления мы видим, что из $u(x) = 0$ следует $x \in F_\infty$. Иными словами, $F_\infty = u^{-1}(0)$, и тем самым завершено доказательство последнего утверждения 4°) теоремы (11.5.7).

Замечания. (**11.5.8**) Пусть E_0 — предгильбертово пространство, являющееся плотным подпространством некоторого гильбертова пространства E. [Можно доказать, что для любого предгильбертова пространства E_0 существует гильбертово пространство E, обладающее этим свойством; в (6.6.2) мы доказали эту теорему в частном случае, когда E_0 сепарабельно.] Пусть u — вполне непрерывный самосопря-

женный оператор в E_0. Тогда утверждения 1°), 2°) и 3°) теоремы (11.5.7) без изменения остаются справедливыми и для u.

В самом деле, из принципа продолжения тождеств следует, что единственное непрерывное продолжение $\tilde{u}$ оператора u на пространство E является самосопряженным, и легко проверить, что $\|\tilde{u}\| = \|u\|$. Наше утверждение тогда следует из (11.4.2) и из следующего факта: если F_0 — конечномерное подпространство пространства E_0, G_0 — его ортогональное дополнение в E_0 и G — его ортогональное дополнение в E, то G_0 плотно в G. Этот факт вытекает из того, что если $v = 1 - P_{F_0}$ в $\mathscr{L}(E)$ [обозначения см. в 6.3], то отображение v непрерывно, причем $v(E) = G$ и $v(E_0) = G_0$ [см. (3.11.3)].

Относительно же утверждения 4°) теоремы (11.5.7) можно сказать следующее. Ясно, что ядро оператора u является пересечением пространства E_0 с ядром оператора $\tilde{u}$, и поэтому оно есть подпространство векторов из E_0, ортогональных всех собственным пространствам $E(\lambda)$ с $\lambda \neq 0$. Но если мы рассмотрим каноническое разложение $x = \sum_k x'_k + \sum_k x''_k + x_0$ элемента $x \in E_0$, то суммы в правой части и элемент x_0 не обязаны принадлежать E_0.

(11.5.9) *Если* $x = \sum_k x'_k + \sum_k x''_k + x_0$ *и* $y = \sum_k y'_k + \sum_k y''_k + y_0$ — *канонические разложения двух векторов* x *и* y *пространства* E, *то*

$$(u(x) \mid y) = \sum_k \mu_k (x'_k \mid y'_k) + \sum_k \nu_k (x''_k \mid y''_k),$$

причем ряды в правой части равенства абсолютно сходятся (6.4).

Эта формула показывает, что *самосопряженный оператор* u *положителен в том и только в том случае, если у него нет отрицательных собственных значений* ν_k, *и что он не вырождается в том и только в том случае, если* $u^{-1}(0) = \{0\}$. Если оператор u не вырождается и если в каждом собственном пространстве $E(\lambda)$ $(\lambda \neq 0)$ мы возьмем некоторый ортонормальный базис B_λ (состоящий из конечного числа векторов), то объединение всех B_λ есть счетное множество, составляющее тотальную ортонормальную систему в E (6.5).

(11.5.10) Нужно заметить, что при предположениях, сделанных в (11.5.8), вполне может случиться, что самосопряженный оператор u в пространстве E_0 будет невырождающимся, а его непрерывное продолжение $\tilde{u}$ на пространство E будет вырождающимся (иными словами, ядро оператора u не обязательно плотно в ядре оператора $\tilde{u}$). Это возможно даже если u — положительный самосопряженный оператор.

Для вполне непрерывных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве E теорема (11.5.7) дает формулу для решения в E уравнения $u(x)-\lambda x=y$.

(11.5.11) *Пусть* $y=\sum_k y'_k+\sum_k y''_k+y_0$ — *каноническое разложение вектора* y *в* E. *Тогда*:

1°). *Если* λ *не принадлежит спектру* $S(u)$, *то единственное решение* x *уравнения* $u(x)-\lambda x=y$ *дается его каноническим разложением*

$$x=\sum_k \frac{1}{\mu_k-\lambda}y'_k+\sum_k \frac{1}{\nu_k-\lambda}y''_k-\frac{1}{\lambda}y_0. \tag{11.5.11.1}$$

2°). *Если* λ — *одно из собственных значений* μ_k (*соответственно* ν_k), *то, для того чтобы уравнение* $u(x)-\lambda x=y$ *имело решение, необходимо и достаточно, чтобы было* $y'_k=0$ (*соответственно* $y''_k=0$). *В этом случае решения даются формулой* (11.5.11.1), *в которой член, соответствующий* μ_k (*соответственно* ν_k), *нужно заменить произвольным элементом пространства* $E(\mu_k)$ (*соответственно* $E(\nu_k)$).

3°). *Для того чтобы уравнение* $u(x)=y$ *имело решение, необходимо и достаточно, чтобы* $y_0=0$ *и чтобы ряды* $\sum_k \|y'_k\|^2/\mu_k^2$ *и* $\sum_k \|y''_k\|^2/\nu_k^2$ *были сходящимися. В этом случае решения даются формулой*

$$x=\sum_k \frac{1}{\mu_k}y'_k+\sum_k \frac{1}{\nu_k}y''_k+x_0, \tag{11.5.11.2}$$

где x_0 — *произвольный элемент пространства* $u^{-1}(0)$.

Утверждения 1°) и 2°) сразу следуют из (11.5.7) и (11.5.6), причем формулы получаются, если воспользоваться единственностью канонического разложения. Точно такое же рассуждение доказывает, что если существуют решения уравнения $u(x)=y$, то они необходимо даются формулой (11.5.11.2), откуда следует необходимость условий. Если же эти условия выполняются, то правая часть формулы (11.5.11.2) является [в силу (6.4)] элементом пространства E, удовлетворяющим уравнению $u(x)=y$.

Задачи

1. Пусть E — векторное пространство всех бесконечно дифференцируемых комплексных функций в промежутке $[0, 1]\subset\mathbf{R}$ (8.12). С помощью эрмитовой формы

$$(x\mid y)=\int_0^1 x(t)\,\overline{y(t)}\,dt$$

E превращается в предгильбертово пространство. Пусть u — линейное отображение пространства E в себя, удовлетворяющее условию $u(x) = ix'$. Покажите, что u самосопряженно, но не непрерывно в E.

[Рассмотрите последовательность (x_n), где $x_n(t) = (\sin nt)/n$.]

2. Пусть F — сепарабельное гильбертово пространство, $(e_n)_{(n \geqslant 1)}$ — ортонормальный базис в F и v — вполне непрерывный оператор в F, такой, что $v(e_n) = (e_1 + e_n)/n$ (задача 3 § 11.2). Пусть $E = v(F)$ и пусть u — сужение оператора v на F, удовлетворяющее условию $u(E) \subset E$. Покажите, что u — вполне непрерывный оператор в предгильбертовом пространстве E, не имеющий сопряженного.

3. a) Пусть E — комплексное гильбертово пространство и f — непрерывная эрмитова форма в $E \times E$. Покажите, что существует такая константа c, что $|f(x, y)| \leqslant c\|x\| \cdot \|y\|$ [ср. с (5.5.1)]. Покажите также, что существует единственный непрерывный эрмитов оператор U в E, для которого $f(x, y) = (Ux \mid y)$.

b) Предположим, что E сепарабельно, и пусть $(e_n)_{n \geqslant 1}$ — ортонормальный базис в E. Пусть V — непрерывный линейный оператор в E, определяемый условиями $Ve_1 = \sum_{n=1}^{\infty} e_n/n$ и $Ve_i = 0$ при $i > 1$, и пусть $W = VV^*$. Пусть E_0 — подпространство пространства E, состоящее из всех (конечных) линейных комбинаций элементов e_n, и пусть f — сужение на $E_0 \times E_0$ отображения $(x, y) \to (Wx \mid y)$. Покажите, что f есть непрерывная эрмитова форма в $E_0 \times E_0$, но что не существует линейного оператора U в E_0, для которого в $E_0 \times E_0$ выполнялось бы равенство $f(x, y) = (Ux \mid y)$.

c) Покажите, что если u — оператор, определенный в задаче 1, то эрмитова форма $(x, y) \to (u(x) \mid y)$ не непрерывна в $E \times E$.

4. Пусть E — комплексное гильбертово пространство и u — эрмитов оператор в E. Докажите, что u обязательно непрерывен.

[Предположите противное и покажите, что тогда можно по индукции определить последовательность (x_n) точек пространства E, для которых $\|x_n\| = 1$ при каждом n, и ортонормальную последовательность (e_n) так, чтобы: 1°) элемент x_n был ортогонален $u(e_1), \ldots, u(e_{n-1})$; 2°) если y_n — ортогональная проекция элемента $u(x_n)$ на подпространство V_n, ортогональное элементам $e_1, \ldots, e_{n-1}$, то $\|y_n\| \geqslant 2n^3$ и $\|y_n\| \geqslant 2n^2 \left| \left(u\left(\sum_{k=1}^{n-1} x_k/k^2 \right) \middle| e_n \right) \right|$; 3°) $e_n = y_n/\|y_n\|$. Затем рассмотрите точку $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n/n^2$ в E и получите противоречие, показав, что при каждом n имеет место неравенство $|(u(x) \mid e_n)| \geqslant n$. Для этого разложите x в сумму $x'_n + (x_n/n^2) + x''_n$, где $x'_n = \sum_{k=1}^{n-1} x_k/k^2$ и $x''_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k/k^2$ и всюду используйте тождество $(u(y) \mid z) = (y \mid u(z))$ (метод скользящего горба). Ср. с задачей 3, c).]

5. Пусть E — комплексное предгильбертово пространство. Если U и V — два эрмитовых оператора в E, то мы пишем $U \geqslant V$, когда эрмитов оператор $U - V$ положителен, т. е. когда $(Ux \mid x) \geqslant (Vx \mid x)$ для любой точки $x \in E$.

a) Предположим, что E — гильбертово пространство и что существует такое число $m > 0$, что $U \geqslant m \cdot 1$. Покажите, что U есть линейный гомеоморфизм пространства E на себя.

[Сначала заметьте, что для любого элемента $x \in E$ выполняется неравенство $\|Ux\| \geqslant m\|x\|$, и поэтому (задача 4) U есть линейный гомеоморфизм пространства E на некоторое его замкнутое подпространство M. Затем убедитесь в том, что если $x \in E$ ортогонален M, то $x = 0$.]

b) Пусть F — подпространство предгильбертова пространства E, определенного в задаче 1, состоящее из сужений на промежутке $[0, 1]$ всех многочленов с комплексными коэффициентами. Пусть U — оператор, ставящий каждому многочлену $x \in F$ в соответствие многочлен $(1+t)\,x(t)$. Покажите, что U есть непрерывный эрмитов оператор в F, удовлетворяющий условию $U \geqslant 1$, но что образ $U(F)$ плотен в F и отличен от F.

6. a) Покажите, что если U — положительный эрмитов оператор в комплексном предгильбертовом пространстве E, то для любой точки $x \in E$

$$\|Ux\|^4 \leqslant (Ux \mid x)\,(U^2x \mid Ux).$$

[Рассмотрите положительную эрмитову форму $(x, y) \to (Ux \mid y)$ и воспользуйтесь (6.2.1).]

b) Предположим, кроме того, что оператор U непрерывен [ср. с задачами 3, c) и 4)]. Выведите из a), что $\|U\| = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} (Ux \mid x)$.

7. Пусть F и G — два сепарабельных комплексных гильбертовых пространства, (a_n) (соответственно (b_n)) $(n \geqslant 1)$ — ортонормальный базис в F (соответственно в G) и L — гильбертова сумма (6.4) пространств F и G. Пусть v — непрерывный оператор в L, определяемый условиями $v(a_n) = 0$ и $v(b_n) = a_n/n$, и пусть $E = v(G) + v^*(v(G))$. Пусть u — сужение оператора v на пространстве E. Покажите, что оператор u вполне непрерывен и имеет сопряженный оператор, но u^* не является вполне непрерывным.

[Заметьте, что образ $v(G)$ плотен в F, но не замкнут в F. Покажите, что если (x_n) — ограниченная последовательность точек из $v(G)$, сходящаяся к некоторой точке из F, но не из $v(G)$, то последовательность $(u^*(x_n))$ сходится к точке, принадлежащей L, но не принадлежащей E; при этом воспользуйтесь тем фактом, что сужение оператора v^* на F взаимно однозначно.]

8. Обозначения и предположения те же, что и в (11.5.7). Пусть (λ_n) — убывающая последовательность чисел > 0, такая, что для каждого k количество индексов n, для которых $\lambda_n = \mu_k$, равно $\dim(E(\mu_k))$. Пусть (a_n) — такая ортонормальная система в E, что для индексов n, для которых $\lambda_n = \mu_k$, элементы a_n образуют базис подпространства $E(\mu_k)$. Мы будем говорить, что (λ_n) есть *полная последовательность* строго положительных собственных значений оператора u.

a) Покажите, что λ_n есть максимальное значение функции $(u(x) \mid x)$, когда x меняется на подмножестве пространства E, определяемом условиями $\|x\| = 1$ и $(x \mid a_k) = 0$ при $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Покажите, далее, что это максимальное значение достигается при $x = a_n$.

[Воспользуйтесь (11.5.7, 4°)).]

b) Пусть $z_1, \ldots, z_{n-1}$ — произвольные векторы в E, и обозначим через $\rho_u(z_1, \ldots, z_{n-1})$ верхнюю грань функции $(u(x) \mid x)$, когда x меняется в подмножестве пространства E, определяемом условиями $\|x\| = 1$ и $(x \mid z_k) = 0$ при $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Покажите, что $\lambda_n = \rho_u(a_1, \ldots, a_{n-1}) \leqslant \rho_u(z_1, \ldots, z_{n-1})$ (минимаксный принцип).

[Возьмите x в подпространстве, порожденном элементами $a_1, \ldots, a_n$, так, чтобы при $1 \leqslant k \leqslant n-1$ выполнялись соотношения $(x \mid z_k) = 0$.]

c) Пусть u' и u'' — два компактных самосопряженных оператора и пусть $u = u' + u''$. Пусть $(\lambda_n)'$ и $(\lambda_n)''$ — полные последовательности строго положительных собственных значений соответственно операторов u' и u'', а (a'_n) и (a''_n) — соответствующие ортонормальные системы. Покажите, что если определены λ'_p, λ''_q и λ_{p+q-1}, то $\lambda_{p+q-1} \leqslant \lambda'_p + \lambda''_q$.

[Рассмотрите $\rho_u(a'_1, \ldots, a'_{p-1}, a''_1, \ldots, a''_{q-1})$.]

Если последовательность (λ''_n) конечна и имеет N элементов и если определены λ'_p и λ_{p+N}, то $\lambda_{p+N} \leqslant \lambda'_p$.

[Тот же метод; заметьте, что $(u''(x) \mid x) \leqslant 0$, если $(x \mid a''_j) = 0$ при $1 \leqslant j \leqslant N$.]

d) При тех же предположениях, что и в c), покажите, что если определены λ'_p и λ_p, то $|\lambda_p - \lambda'_p| \leqslant \|u''\|$.

[Воспользуйтесь соотношением $\lambda_p = \rho_u(a_1, \ldots, a_{p-1})$.]

Далее, если $u'' \geqslant 0$ (соответственно $u'' \leqslant 0$), то $\lambda_p \geqslant \lambda'_p$ (соответственно $\lambda_p \leqslant \lambda'_p$).

e) Для случая, когда E конечномерно, выскажите результаты задач b), c) и d) на языке эрмитовых форм на $E \times E$ (см. задачу 3). Примените их к следующей задаче. Пусть f_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — простые функции в компактном промежутке $I = [a, b]$ и пусть $I' = [c, d]$ — промежуток, содержащийся в I. Пусть $\Delta = \det\left(\int_a^b f_i \bar{f}_j \, dt\right)$ и $\Delta' = \det\left(\int_c^d f_i \bar{f}_j \, dt\right)$ — определители Грама, соответствующие I и I'. Покажите, что $\Delta' \leqslant \Delta$, выразив определители Грама как произведение собственных значений.

9. a) Пусть u — вполне непрерывный самосопряженный оператор в комплексном гильбертовом пространстве E. Пусть H — замкнутое подпространство E и p — ортогональная проекция пространства E на H (6.3). Покажите, что сужение v оператора $p \circ u$ (или $p \circ u \circ p$) на H вполне непрерывно и самосопряженно и что $(v(y) \mid y) = (u(y) \mid y)$ при $y \in H$.

[Воспользуйтесь соотношением $p^* = p$.]

Пусть (λ_n) и (μ_n) — полные последовательности строго положительных собственных значений соответственно операторов u и v. Покажите, что если определены λ_n и μ_n, то $\mu_n \leqslant \lambda_n$.

[Воспользуйтесь задачей 8, b).]

b) Предположим, кроме того, что оператор u положителен. Покажите, что для любой конечной последовательности $(x_n)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ точек пространства E имеем $\det((u(x_i) \mid x_j)) \leqslant \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n \det((x_i \mid x_j))$

[Примените задачу a) к подпространству H, порожденному элементами $x_1, \ldots, x_n$.]

10. a) Пусть u — эрмитов оператор в комплексном предгильбертовом пространстве E. Покажите, что для любого целого $n > 0$ и любой точки $x \in E$ имеет место неравенство $\| u^n(x) \|^2 \leqslant \| u^{n-1}(x) \| \cdot \| u^{n+1}(x) \|$.

[Воспользуйтесь неравенством Коши — Шварца.]

b) Предположим, что E — гильбертово пространство, а u — вполне непрерывный самосопряженный оператор. Покажите, что если $u(x) \neq 0$, то $u^n(x) \neq 0$ для любого целого $n > 0$ и что последовательность положительных чисел $\alpha_n = \| u^{n+1}(x) \| / \| u^n(x) \|$ убывает и стремится к пределу, равному абсолютной величине некоторого собственного значения оператора u. Охарактеризуйте это собственное значение в терминах канонического разложения вектора x. Когда последовательность векторов $u^n(x)/\| u^n(x) \|$ имеет в E предел?

[Воспользуйтесь (11.5.7).]

11. Пусть u — вполне непрерывный самосопряженный оператор в комплексном гильбертовом пространстве E и пусть f — комплексная функция, определенная и непрерывная на спектре $S(u)$. Покажите, что существует единственный непрерывный оператор v такой, что [в обозначениях теоремы (11.5.7)] сужение оператора v на $E(\mu_k)$ (соответственно на $E(\nu_k)$, на $E(0)$) есть гомотетическое отображение $y \to f(\mu_k) y$ (соответственно $y \to f(\nu_k) y$, $y \to 0$). Этот оператор обозначается символом $f(u)$. Имеем $(f(u))^* = \overline{f}(u)$. Если g — вторая функция, непрерывная в $S(u)$, и $h = f + g$ (соответственно $h = fg$), то $h(u) = f(u) + g(u)$ (соответственно $h(u) = f(u)\, g(u)$). Покажите, что для того, чтобы оператор $f(u)$ был самосопряженным (соответственно положительным и самосопряженным), необходимо и достаточно, чтобы функция $f(\zeta)$ была на $S(u)$ действительной (соответственно чтобы на $S(u)$ выполнялось неравенство $f(\zeta) \geqslant 0$). Для того чтобы оператор $f(u)$ был вполне непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы $f(0) = 0$.

12. Пусть u — вполне непрерывный положительный эрмитов оператор в комплексном гильбертовом пространстве E. Покажите, что существует единственный вполне непрерывный положительный эрмитов оператор v в E, такой, что $v^2 = u$. Оператор v называется *квадратным корнем* из оператора u.

13. Пусть E — сепарабельное комплексное гильбертово пространство и $(e_n)_{n \geqslant 1}$ — ортонормальный базис в E. Пусть u — вполне непрерывный оператор в E, определяемый условиями $u(e_1) = 0$ и $u(e_n) = e_{n-1}/n$ при

$n > 1$. Покажите, что в E не существует непрерывного оператора v, такого, что $v^2 = u$.

[Заметьте сначала, что $H = \overline{u^*(E)}$ есть замкнутая гиперплоскость, ортогональная e_1, и что она содержится в $H' = \overline{v^*(E)}$. Так как H' ортогонально $x_1 = v(e_1)$, то отсюда с необходимостью заключаем, что $x_1 = 0$. Затем рассмотрите элемент $x_2 = v(e_2)$ и заметьте, что $u(v(e_2)) = 0$, поэтому необходимо $x_2 = \lambda e_1$, где λ — скаляр. Но отсюда следует, что $x_2 = 0$, и, значит, $u(e_2) = 0$, что и приводит к противоречию.]

14. Пусть E — сепарабельное комплексное гильбертово пространство, $(e_n)_{n \geqslant 0}$ — ортонормальный базис и u — вполне непрерывный положительный эрмитов оператор в E, определяемый условиями $u(e_0) = 0$ и $u(e_n) = e_n/n$ при $n \geqslant 1$. Точка $a = \sum_{n=1}^{\infty} (e_n/n)$ не принадлежит $u(E)$. Пусть E_0 — подпространство, плотное в E, являющееся прямой суммой подпространства $u(E)$ и одномерного подпространства $\mathbf{C}(e_0 + a)$. Покажите, что сужение v оператора u на E_0 есть вполне непрерывный положительный эрмитов оператор, который не вырождается, хотя его непрерывное продолжение $\tilde{v} = u$ на E вырождается. Кроме того, покажите, что в каноническом разложении (11.5.8) вектора $(e_0 + a) \in E_0$ не все слагаемые принадлежат E_0.

15. a) Пусть U — вполне непрерывный оператор в комплексном гильбертовом пространстве E. Обозначим через R и L квадратные корни (задача 12) вполне непрерывных положительных эрмитовых операторов U^*U и UU^*. Покажите, что существует единственный непрерывный оператор V в пространстве E, сужение которого на подпространстве $F = \overline{R(E)}$ есть изометрия на подпространстве $\overline{U(E)}$, сужение которого на ортогональном дополнении F' подпространства F равно 0 и который обладает тем свойством, что $U = VR$.

[Заметьте, что $\|Ux\| = \|Rx\|$ для каждой точки $x \in E$.]

Докажите, что $R = V^*U = RV^*V$ и $L = VRV^*$.

b) Пусть (α_n) — полная последовательность строго положительных собственных значений оператора R и (a_n) — соответствующая ортонормальная система (задача 8). Покажите, что если $b = Va_n$, то (b_n) есть ортонормальная система, и что для любой точки $x \in E$ имеем $Ux = \sum_n \alpha_n (x \mid a_n) b_n$, где ряд в правой части сходится.

[Обозначив $R_n x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (x \mid a_k) a_k$, покажите, пользуясь доказательством теоремы (11.5.7), что $\lim_{n \to \infty} \|R - R_n\| = 0$, и примените a).]

Выведите из этого результата, что (α_n) является также полной последовательностью строго положительных собственных значений оператора L и что (b_n) есть соответствующая ортонормальная система. Последовательность (α_n) называется также *полной последовательностью особых значений* оператора U.

c) Пусть (μ_n) — последовательность различных собственных значений $\neq 0$ оператора U, расположенных в таком порядке, что $|\mu_n| \geqslant |\mu_{n+1}|$ для каждого n, для которого определено μ_{n+1}. Пусть d_n — размерность пространства $N(\mu_n)$ и пусть (λ_n) — последовательность, такая, что $\lambda_1 = \mu_1$, $|\lambda_n| \geqslant |\lambda_{n+1}|$ для каждого n, для которого определено λ_{n+1}, а для каждого k, для которого определено μ_k, индексы n, для которых $\lambda_n = \mu_k$, образуют промежуток в $\mathbf{N}$, имеющий d_k элементов. Покажите, что для каждого индекса n, для которого определены λ_n и α_n, выполняется неравенство $\prod_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leqslant \prod_{i=1}^{n} \alpha_i$.

[Пусть V — (прямая) сумма подпространств $N(\mu_k)$ при $1 \leqslant k \leqslant r$ и пусть U_V — сужение оператора U на V. Покажите, что в V существует такой ортонормальный базис $(e_j)_{1 \leqslant j \leqslant m}$, что $(U(e_j) \mid e_k) = 0$ при $k > j$. Пусть W_n — подпространство пространства V, имеющее своим базисом элементы $e_1, \ldots, e_n$, где $n \leqslant m$, пусть U_n — сужение оператора U на W_n и пусть P_n — ортогональная проекция пространства E на W_n. Покажите, что произведение $\prod_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2$ равно определителю оператора $U_n^* U_n = P_n U^* U P_n$, и примените задачу 9, a).]

d) Пусть T — произвольный непрерывный оператор в E и пусть (γ_n) (соответственно (δ_n)) — полная последовательность особых значений оператора UT (соответственно TU). Покажите, что $\gamma_n \leqslant \alpha_n \|T\|$ (соответственно $\delta_n \leqslant \alpha_n \|T\|$) для всех значений n, для которых определены α_n, γ_n и δ_n.

[Заметьте, что если $S = TU$, то $S^*S \leqslant \|T\|^2 U^*U$, и воспользуйтесь задачей 8, d).]

e) Предположим, что оператор T, кроме того, вполне непрерывен, и пусть (β_n) — полная последовательность его особых значений. Покажите, что $\prod_{j=1}^{n} \gamma_j \leqslant \left(\prod_{j=1}^{n} \alpha_j\right)\left(\prod_{j=1}^{n} \beta_j\right)$ для всех значений n, для которых определены α_n, β_n и γ_n.

[Примените задачу 9, b).]

16. Пусть E — комплексное гильбертово пространство, (a_n) — последовательность точек пространства E и (λ_n) — последовательность действительных чисел. Покажите, что если ряд $u(x) = \sum_n \lambda_n (x \mid a_n) a_n$ сходится в E для каждой точки $x \in E$, то u есть эрмитов оператор в E. Условие сходимости всегда выполняется, если абсолютно сходится ряд с общим членом $\lambda_n \|a_n\|^2$. Если, вдобавок, (a_n) есть ортонормальная система, то условие сходимости выполняется, если последовательность (λ_n) ограничена. Если все $\lambda_n \geqslant 0$ и выполняется условие сходимости, то u есть положительный эрмитов оператор.

17. Пусть E — бесконечномерное комплексное гильбертово пространство. Для положительного эрмитова оператора T в пространстве E эквивалентны следующие условия: 1°) образ $T(E)$ плотен в E; 2°) $T^{-1}(0) = \{0\}$;

3°) $(Tx \mid x) > 0$ для любой точки $x \neq 0$ [примените к $(Tx \mid y)$ неравенство Коши — Шварца]; 4°) оператор T не вырождается. Мы будем говорить, что вполне непрерывный оператор U в E *квазиэрмитов*, если существует такой невырождающийся положительный эрмитов оператор T, что $TU = U^*T$.

a) Покажите, что если $U \neq 0$, то $TU^2 \neq 0$.

[Заметьте, что $(TU^2x \mid x) = (TUx \mid Ux)$.]

Покажите, далее, что для любого целого $p > 0$ справедливо неравенство $\|TU^{2p}\|^2 \leqslant \|TU^{2p-2}\| \, \|TU^{2p+2}\|$.

[Воспользуйтесь неравенством Коши — Шварца.]

Заключите отсюда, что если $U \neq 0$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n TU^n$ не может сходиться для каждого числа $\zeta \in \mathbf{C}$ и, следовательно, спектр оператора U не может сводиться к 0.

b) Покажите, что если λ — собственное значение оператора U, то $T(N(\lambda; U)) \subset N(\lambda; U^*)$ и $T(E(\lambda; U)) \subset E(\lambda; U^*)$. Выведите из этих включений, что λ — действительное число и что $k(\lambda; U) = 1$, следовательно, $N(\lambda; U) = E(\lambda; U)$.

[Воспользуйтесь (11.5.5) и тем фактом, что из $(Tx \mid x)$ следует $x = 0$.]

Покажите, далее, что $T(E(\lambda; U)) = E(\lambda; U^*)$.

c) Пусть P — ортогональная проекция пространства E на $F(\lambda; U)$. Покажите, что PUP есть квазиэрмитов вполне непрерывный оператор в $F(\lambda; U)$.

[Заметьте, что $PUP = UP$ в $F(\lambda; U)$ и что PTP есть невырождающийся положительный эрмитов оператор в $F(\lambda; U)$.]

d) Пусть (λ_n) — последовательность различных собственных значений оператора U, такая, что $|\lambda_n| \geqslant |\lambda_{n+1}|$ при каждом n, и предположим, что эта последовательность бесконечна. Покажите, что пересечение G замкнутых подпространств $F(\lambda_n; U)$ равно $U^{-1}(0)$.

[Заметьте, что если P — ортогональная проекция пространства E на G, то PUP есть квазиэрмитов компактный оператор в G, и воспользуйтесь a).]

Обозначим через P_n ортогональную проекцию пространства E на $F(\lambda_n; U)$. Покажите, что E есть гильбертова сумма G и подпространства $E(\lambda_n; P_nU^*P_n)$. Заключите отсюда, что сумма G и подпространств $E(\lambda_n; U)$ (являющаяся прямой в алгебраическом смысле) плотна в E. Покажите, далее, что если H есть сумма подпространств $E(\lambda_n; U)$, то $G \cap \overline{H} = \{0\}$.

[Заметьте, что подпространство пространства E, ортогональное $\overline{H}$, есть ядро $G' = (U^*)^{-1}(0)$, и что $T(G) \subset G'$, и используйте тот факт, что из $(Tx \mid x) = 0$ следует $x = 0$.]

e) Обратно, пусть U — вполне непрерывный оператор в E, такой, что: 1°) все собственные значения λ_n оператора U действительны и $k(\lambda_n; U) = 1$ для каждого n; 2°) если H есть сумма подпространств $E(\lambda_n; U)$, то сумма $G = U^{-1}(0)$ и $\overline{H}$ является прямой и плотной в E. Покажите, что в таком случае U и U^* — квазиэрмитовы вполне непрерывные операторы (и, следовательно, оператор, сопряженный квазиэрмитову оператору, квазиэрмитов).

[Так как $G' = (U^*)^{-1}(0)$ есть подпространство, ортогональное $\overline{H}$, а сумма H' подпространств $E(\lambda_n; U^*)$ такова, что $\overline{H'}$ есть подпространство,

ортогональное G, то U^* удовлетворяет тем же условиям, что и U. Рассмотрите эрмитов оператор T в E, такой, что $Tx = \sum_n \alpha_n (x \mid b_n) b_n$, где $\alpha_n > 0$, а (b_n) образуют тотальное подмножество пространства E (5.4) и являются собственными векторами оператора U^*; ср. с задачей 16.]

6. Интегральное уравнение Фредгольма

Теперь мы применим предыдущую теорию к примеру (11.2.8). Мы рассмотрим здесь предгильбертово пространство G непрерывных комплексных функций в промежутке $I = [a, b]$ с скалярным произведением $(f \mid g) = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$ и оператор U, такой, что Uf есть функция

$$t \to \int_a^b K(s, t) f(s) ds.$$

Мы будем говорить, что оператор U определяется *ядром* K.

(11.6.1) ***Вполне непрерывный оператор U в G имеет вполне непрерывный сопряженный оператор, определяемый ядром K^*, где $K^*(s, t) = \overline{K(t, s)}$.***

Докажем при $a \leqslant x \leqslant b$ тождество

$$(11.6.1.1) \quad \int_a^x \overline{g(t)}dt \int_a^b K(s, t) f(s) ds = \int_a^b f(s) ds \overline{\int_a^x \overline{K(s, t)} g(t) dt},$$

которое при $x = b$ в соответствии с определением даст требуемый результат. Обе части равенства (11.6.1.1) являются дифференцируемыми функциями от x в промежутке $[a, b]$ в силу (8.7.3) и правила Лейбница (8.11.2). Обе они обращаются в нуль при $x = a$, и их производные равны в силу (8.7.3) и (8.11.2) в каждой точке $x \in [a, b]$. Поэтому они равны всюду в $[a, b]$ (8.6.1).

Мы предоставляем читателю сформулировать критерий (11.5.6) для этого частного случая (альтернатива Фредгольма).

Если $\overline{K(t, s)} = K(s, t)$ (в этом случае ядро K называется *эрмитовым*), то вполне непрерывный оператор U является самосопряженным. Так как предгильбертово пространство G сепарабельно [(7.4.3) или (7.4.4)], то его можно рассматривать как плотное подпространство гильбертова пространства $\overline{G}$ (6.6.2) и, таким образом, мы можем применить к оператору U результаты, описанные в (11.5.8). Обозначим через (λ_n) последовательность (положительных или отрицательных) собственных значений оператора U, каждое из которых повто-

рено столько раз, какова его *кратность*, и которые упорядочены так, чтобы $|\lambda_n| \geqslant |\lambda_{n+1}|$. Обозначим, далее, через (φ_n) такую ортонормальную систему в G, что если значениями n, для которых $\lambda_n = \mu_k$ (соответственно $\lambda_n = \nu_k$) являются $m, m+1, \ldots, m+r$, то функции $\varphi_m, \varphi_{m+1}, \ldots, \varphi_{m+r}$ составляют базис собственного пространства $E(\mu_k)$ (соответственно $E(\nu_k)$). Таким образом, $U(\varphi_n) = \lambda_n \varphi_n$ при каждом n. Функции φ_n называются *собственными функциями* ядра K.

(11.6.2) *Если K — эрмитово ядро, то ряд $\sum_n \lambda_n^2$ сходится и*

$$\sum_n \lambda_n^2 \leqslant \int_a^b dt \int_a^b |K(s, t)|^2 ds.$$

Действительно, если мы применим к функции $s \to K(s, t)$ и ортонормальной системе (φ_n) неравенство Бесселя (6.5.2), то получим для любого N

$$\sum_{n=1}^{N} \left| \int_a^b K(s, t) \varphi_n(s) ds \right|^2 \leqslant \int_a^b |K(s, t)|^2 ds,$$

т. е.

$$\sum_{n=1}^{N} \lambda_n^2 |\varphi_n(t)|^2 \leqslant \int_a^b |K(s, t)|^2 ds \tag{11.6.2.1}$$

для каждой точки $t \in I$. Интегрируя обе части равенства на промежутке I и пользуясь равенствами $(\varphi_n | \varphi_n) = 1$ и (11.6.1.1), получаем требуемый результат.

Каноническое разложение в $\bar{G}$ любой функции $f \in G$ (11.5.7) может здесь быть записано в виде $f = \sum_n c_n \varphi_n + f_0$, где $c_n = (f | \varphi_n) = \int_a^b f(t) \overline{\varphi_n(t)} dt$. Но, как уже было замечено, f_0 может не принадлежать G. С другой стороны, ряд $\sum_n c_n \varphi_n$ сходится в гильбертовом пространстве $\bar{G}$, но, вообще говоря, не сходится в банаховом пространстве $E = \mathscr{C}_{\mathbf{C}}(I)$ $\left(\text{иными словами, ряд } \sum_n c_n \varphi_n(t) \text{ не обязательно сходится в каждой точке } t \in I\right)$. Однако

(11.6.3) *Если K — эрмитово ядро и $f = Ug$ для некоторой функции $g \in G$ $\left(\text{т. е. } f(t) = \int_a^b K(s, t) g(s) ds\right)$, то ряд $\sum_n c_n \varphi_n(t)$ сходится абсолютно и равномерно к $f(t)$ в промежутке I.*

Мы имеем в $\overline{G}$ каноническое разложение $g=\sum_n d_n\varphi_n+g_0$. Так как U — непрерывное линейное отображение пространства G в $E=\mathscr{C}_{\mathbb{C}}(I)$ (11.2.8) и так как $Ug_0=0$, то $f=Ug=\sum_n \lambda_n d_n\varphi_n$, где уже сходимость рассматривается в E, т. е. ряд $\sum_n \lambda_n d_n\varphi_n(t)$ равномерно сходится к $f(t)$ в промежутке I. Так как $c_n=(f\mid\varphi_n)=(Ug\mid\varphi_n)=(g\mid U\varphi_n)=\lambda_n(g\mid\varphi_n)=\lambda_n d_n$, то теорема (11.6.3) доказана, если не считать утверждения относительно абсолютной сходимости. Но для любого номера N по неравенству Коши — Шварца (для конечномерных пространств) имеем

$$\left(\sum_{n=1}^{N}|c_n\varphi_n(t)|\right)^2\leqslant\left(\sum_{n=1}^{N}|d_n|^2\right)\left(\sum_{n=1}^{N}\lambda_n^2|\varphi_n(t)|^2\right),$$

и правая часть в силу неравенства Бесселя (6.5.2) и неравенства (11.6.2.1) ограничена числом, не зависящим от N.

(11.6.4) *Если ядро K эрмитово и число λ не принадлежит спектру оператора U, то единственным решением f уравнения $Uf-\lambda f=g$ для любой функции $g\in G$ является функция $f(t)=-\frac{1}{\lambda}g(t)+\sum_n(\lambda_n/\lambda(\lambda_n-\lambda))d_n\varphi_n(t)$, где ряд абсолютно и равномерно сходится в промежутке I, а $d_n=(g\mid\varphi_n)$.*

Мы знаем, что, поскольку $g\in G$, единственное решение уравнения $Uf-\lambda f=g$ в $\overline{G}$ принадлежит G (11.5.6), а в силу (11.5.11) мы имеем $c_n=(f\mid\varphi_n)=1/(\lambda_n-\lambda)$. Так как $g+\lambda f=Uf$, то мы можем применить теорему (11.6.3), и это доказывает наше утверждение.

(11.6.5) *При тех же предположениях, что и в* (11.6.4), *единственное решение уравнения $Uf-\lambda f=g$ может быть записано в виде $f(t)=-\frac{1}{\lambda}g(t)+\int_a^b R(s,t;\lambda)g(s)\,ds$, где $R(s,t;\lambda)=-\frac{1}{\lambda^2}K(s,t)+\sum_n(\lambda_n^2/\lambda(\lambda_n-\lambda))\overline{\varphi_n(s)}\varphi_n(t)$, и ряд абсолютно и равномерно сходится при $(s,t)\in I\times I$.*

Из доказательства теоремы (11.6.3) следует, что $\sum_n\lambda_n d_n\varphi_n(t)=Ug(t)$, где ряд абсолютно и равномерно сходится в I. Так как

$$\frac{1}{\lambda(\lambda_n-\lambda)}+\frac{1}{\lambda^2}=\frac{\lambda_n}{\lambda(\lambda_n-\lambda)},$$

то формула из (11.6.4) дает

$$f(t) = -\frac{1}{\lambda} g(t) - \frac{1}{\lambda^2} \int_a^b K(s, t) g(s)\, ds + \\ + \sum_n \frac{\lambda_n^2}{\lambda(\lambda_n - \lambda)} \varphi_n(t) \int_a^b g(s) \overline{\varphi_n(s)}\, ds.$$

Наша теорема будет доказана, коль скоро будет установлена равномерная сходимость ряда $\sum_n \lambda_n^2 |\varphi_n(s)|^2$. Действительно, существует такое $\delta > 0$, что для всех n выполняется неравенство $|\lambda_n - \lambda| \geqslant \delta$. Поэтому в силу неравенства Коши — Шварца

$$\sum_{n=p}^{q} \frac{\lambda_n^2}{|\lambda| \cdot |\lambda_n - \lambda|} |\varphi_n(s) \varphi_n(t)| \leqslant \frac{1}{\delta |\lambda|} \sum_{n=p}^{q} \lambda_n^2 |\varphi_n(s) \varphi_n(t)| \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{\delta |\lambda|} \sqrt{\left(\sum_{n=p}^{q} \lambda_n^2 |\varphi_n(s)|^2\right) \left(\sum_{n=p}^{q} \lambda_n^2 |\varphi_n(t)|^2\right)},$$

и это доказывает, что ряд $\sum_n \left(\lambda_n^2 / \lambda(\lambda_n - \lambda)\right) \overline{\varphi_n(s)} \varphi_n(t)$ абсолютно и равномерно сходится в $I \times I$. Требуемое заключение тогда следует из (8.7.8).

Рассмотрим теперь функцию $H(s, t) = \int_a^b K(u, s) K(t, u)\, du$. Для каждой фиксированной точки $t \in I$ мы можем применить к ней теорему (11.6.3). Мы видим, что $H(s, t) = \sum_n \lambda_n^2 \varphi_n(s) \overline{\varphi_n(t)}$, где ряд сходится для любой пары $(s, t) \in I \times I$. В частности, $H(s, s) = \sum_n \lambda_n^2 |\varphi_n(s)|^2$ для всех $s \in I$ и функция $H(s, s)$ непрерывна. По теореме Дини (7.2.2) этот ряд равномерно сходится в промежутке I, ч. т. д.

(11.6.6) *Если ядро K эрмитово, то*

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b \left| K(s, t) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \overline{\varphi_k(s)} \varphi_k(t) \right|^2 dt = 0$$

равномерно при $s \in I$.

В обозначениях доказательства теоремы (11.6.5) имеем

$$\lim_{n \to \infty} \left(H(s, s) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \overline{\varphi_k(s)} \varphi_k(s) \right) = 0 \tag{11.6.6.1}$$

равномерно при $s \in I$. Если мы преобразуем интеграл, о котором говорится в (11.6.6), пользуясь тем, что φ_k являются собственными

функциями оператора U, и тем, что они ортогональны, то мы получим выражение, стоящее под знаком предела в левой части равенства (11.6.6.1), откуда и следует наше утверждение.

Вообще говоря, ряд $\sum_n \lambda_n \overline{\varphi_n(s)} \varphi_n(t)$ не будет сходиться для всех пар $(s, t) \in I \times I$. Но имеется результат частного характера:

(11.6.7) (Теорема Мерсера) *Предположим, что вполне непрерывный оператор U, определяемый эрмитовым ядром $K(s, t)$, положителен. Тогда имеет место формула*

$$K(s, t) = \sum_n \lambda_n \overline{\varphi_n(s)} \varphi_n(t),$$

где ряд абсолютно и равномерно сходится в $I \times I$.

Напомним, что в нашем случае $\lambda_n > 0$ для каждого n (11.5.9). Докажем сначала, что для каждой точки $s \in I$ ряд $\sum_n \lambda_n |\varphi_n(s)|^2$ сходится. Для любой точки $s \in I$ имеем $K(s, s) \geqslant 0$. Действительно, в противном случае нашлась бы такая окрестность V точки s в I, что при $(s, t) \in V \times V$ выполнялось бы неравенство $\Re K(s, t) \leqslant -\delta < 0$, где δ — некоторое число. Пусть φ — непрерывное отображение промежутка I в промежуток $[0, 1]$, равное 1 в точке s и 0 в $I \setminus V$ (4.5.2). Тогда мы имеем в силу (8.5.3)

$$\int_a^b \overline{\varphi(t)}\, dt \int_a^b K(s, t) \varphi(s)\, ds \leqslant -\delta \left(\int_a^b \varphi(t)\, dt \right)^2 < 0.$$

Но левая часть есть $(U\varphi | \varphi)$, и это неравенство противоречит предположению о том, что U — положительный оператор.

Заметим теперь, что для любого конечного числа собственных значений λ_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ функция $K_n(s, t) = K(s, t) - \sum_{k=1}^n \lambda_k \overline{\varphi_k(s)} \varphi_k(t)$ является ядром для положительного оператора U_n. В самом деле,

$$(U_n f | f) = (Uf | f) - \sum_{k=1}^n \lambda_k |(f | \varphi_k)|^2.$$

Но правая часть этого равенства, как легко проверить, может быть записана в виде $(Ug | g)$, где $g = f - \sum_{k=1}^n (f | \varphi_k) \varphi_k$, и поэтому положительна по предположению. Из того, что $K_n(s, s) \geqslant 0$, на основании (5.3.1) тогда следует, что ряд $\sum_n \lambda_n |\varphi_n(s)|^2$ сходится, и мы имеем $\sum_n \lambda_n |\varphi_n(s)|^2 \leqslant K(s, s)$ при всех $s \in I$.

В силу неравенства Коши — Шварца отсюда мы заключаем, что

$$(11.6.7.1)\quad \sum_{n=p}^{q}\lambda_n|\varphi_n(s)\varphi_n(t)|\leqslant\sqrt{\left(\sum_{n=p}^{q}\lambda_n|\varphi_n(s)|^2\right)\left(\sum_{n=p}^{q}\lambda_n|\varphi_n(t)|^2\right)}\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{K(t,t)\left(\sum_{n=p}^{q}\lambda_n|\varphi_n(s)|^2\right)}$$

для всех $(s, t)\in I\times I$. Следовательно, так как функция $K(t, t)$ ограничена в I, при фиксированном $s\in I$ ряд $\sum_n\lambda_n\overline{\varphi_n(s)}\varphi_n(t)$ равномерно сходится в I. Тогда из (11.6.6), (8.7.8) и (8.5.3) мы заключаем, что $\sum_n\lambda_n\overline{\varphi_n(s)}\varphi_n(t)=K(s, t)$ для всех $(s, t)\in I\times I$, так как функция $t\to\left|K(s, t)-\sum_n\lambda_n\overline{\varphi_n(s)}\varphi_n(t)\right|^2$ непрерывна в I, а интеграл от нее по промежутку I равен 0. В частности, имеем $K(s, s)=\sum_n\lambda_n|\varphi_n(s)|^2$. Таким образом, по теореме Дини (7.2.2) ряд $\sum_n\lambda_n|\varphi_n(s)|^2$ равномерно сходится в I, а неравенство (11.6.7.1) показывает, что ряд $\sum_n\lambda_n\overline{\varphi_n(s)}\varphi_n(t)$ абсолютно и равномерно сходится в $I\times I$, что и завершает доказательство.

Замечания. **(11.6.8)** Теорема (11.6.7) останется справедливой, если только предположить, что U имеет конечное число собственных значений $\nu_k<0$ $(1\leqslant k\leqslant m)$. Действительно, утверждение (11.5.7, 3°)) показывает, что в этом случае сужение оператора U на подпространстве F'_{m+1}, являющемся ортогональным дополнением подпространства $E(\nu_1)+\ldots+E(\nu_m)$ в G, положительно. Применяя тогда теорему (11.6.7) к этому оператору, соответствующему, как легко проверить, ядру $K(s, t)-\sum_h\lambda_h\overline{\varphi_h(s)}\varphi_h(t)$, где h пробегает все индексы (в конечном числе), для которых $\lambda_h<0$, немедленно получаем требуемое заключение.

(11.6.9) Мы можем рассмотреть оператор U в большем предгильбертовом пространстве, именно пространстве F_+ простых функций (7.6), непрерывных справа (т. е. удовлетворяющих условию $f(t+)=f(t)$ при $a\leqslant t<b$) и таких, что $f(b)=0$. Для таких функций соотношение $\int_a^b|f(t)|^2dt=0$ влечет за собой $f(t)=0$ всюду в промежутке $I=[a, b]$, ибо из него следует, что $f(t)=0$ всюду, за исключением точек некоторого счетного множества D [в силу (8.5.3)], а каждая точка t промежутка $[a, b]$ является пределом убывающей последовательности точек из $I\setminus D$.