

Пространство G можно отождествить с подпространством пространства F_+ , изменяя значение непрерывной функции $f \in G$ в точке b . Легко доказать [пользуясь (7.6.1)], что G плотно в F_+ . Рассуждение, проведенное в примере (11.2.8), тогда показывает, что U есть вполне непрерывное отображение пространства F_+ в банахово пространство $E = \mathcal{E}_C(I)$ (и тем более вполне непрерывное отображение предгильбертова пространства F_+ в себя). Все результаты, доказанные для оператора U в G , остаются справедливыми (вместе с их доказательствами), если G заменить на F_+ .

Задачи

1. Распространите результаты § 11.6 [за исключением теоремы (11.6.7)] на случай, когда $K(s, t)$ удовлетворяет предположениям задачи 4 § 8.11. [Воспользуйтесь этой задачей, а также задачей 5 § 11.2.]

2. Пусть (f_n) — тотальная ортонормальная система (6.5) в предгильбертовом пространстве G (11.6). Пусть $K_n(s, t) = \sum_{k=1}^n f_k(s) \overline{f_k(t)}$ и пусть $H_n(s) = \int_a^b |K_n(s, t)| dt$ (n -я лебегова функция ортонормальной системы (f_n)). Для любой функции $g \in G$ пусть $s_n(g) = \sum_{k=1}^n (g | f_k) f_k$, так что $s_n(g)(x) = \int_a^b K_n(x, t) g(t) dt$ для любой точки $x \in I$.

а) Докажите, что если для некоторой точки $x_0 \in I$ не ограничена последовательность $(H_n(x_0))$, то существует функция $g \in G$, для которой не ограничена последовательность $(s_n(g)(x_0))$.

[Допустите противное и покажите, что в этом случае можно определить строго возрастающую последовательность натуральных чисел (n_k) и последовательность (g_k) функций из G , обладающие следующими свойствами:

1°). Пусть $c_h = \sup_n \left| \int_a^b K_n(x_0, t) g_h(t) dt \right|$ (число, которое по предположению конечно), пусть $d_k = c_1 + c_2 + \dots + c_{k-1}$, пусть $m_k = \int_a^b |K_{n_k}(x_0, t)| dt$ и пусть $q_k = \max(m_1, \dots, m_{k-1})$; тогда $m_k \geq 2^{k+1}(q_k + 1)(d_k + k)$.

2°). Пусть φ_k — непрерывная функция, удовлетворяющая условиям $\varphi_k(a) = \varphi_k(b) = 0$, $|\varphi_k(t)| \leq 1$ в I и $\left| \int_a^b K_{n_k}(x_0, t) \varphi_k(t) dt \right| \geq m_k/2$ (см. задачу 8 § 8.7); тогда $g_k = \varphi_k/2^k(q_k + 1)$.

Затем покажите, что функция $g = \sum_{k=1}^{\infty} g_k$ непрерывна в I , что противоречит предположению. Чтобы оценить интеграл $\int_a^b K_{n_k}(x_0, t) g(t) dt$, разложите функцию g в сумму $\sum_{i < k} g_i + g_k + \sum_{i > k} g_i$, проминорируйте второй интеграл и промажорируйте два других (метод скользящего горба).]

b) Покажите, что для тригонометрической системы (6.5) на промежутке $I = [-1, 1]$ n -я лебегова функция есть постоянная h_n и что $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = +\infty$.

$$\left[\text{Заметьте, что } \int_{(k-1)/n}^{k/n} \left| \frac{\sin n\pi t}{\sin \pi t} \right| dt \geq 2/k\pi \text{ при } 2 \leq k \leq n. \right]$$

Заключите отсюда, что для любой точки $x_0 \in I$ существует такая непрерывная функция g в промежутке I , что $g(-1) = g(1) = 0$ и что частичные суммы $\sum_{k=-n}^n \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^1 g(t) e^{-ik\pi t} dt \right) e^{ik\pi x}$ ряда Фурье* функции g при $x = x_0$ не ограничены.

3. Пусть g — непрерывная комплексная функция в промежутке $I = [-1, 1]$, удовлетворяющая условиям $g(-1) = g(1) = 0$. Функцию g можно продолжить в непрерывную функцию периода 2 в \mathbb{R} . Пусть $K(s, t)$ — сужение функции $g(s-t)$ на $I \times I$. Если $g(-t) = \overline{g(t)}$, то вполне непрерывный оператор U , определенный ядром $K(s, t)$, является самосопряженным. Покажите, что функции $\varphi_n(t) = e^{n\pi i t} / \sqrt{2}$ являются собственными векторами оператора U , причем соответствующее собственное значение есть «коэффи-

циент Фурье» $a_n = \int_{-1}^1 g(t) e^{-n\pi i t} dt$ функции g .

Пользуясь этим результатом и задачей 2, приведите пример эрмитова ядра K , для которого ряд с общим членом $\lambda_n \overline{\varphi_n(s)} \varphi_n(t)$ имеет частичные суммы, неограниченные при некоторых значениях s и t , и пример положительного эрмитова ядра K , для которого существует такая функция $f \in G$, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (f | \varphi_n) \varphi_n(t)$ имеет частичные суммы, неограниченные при некоторых значениях t .

4. Пусть $I = [-2\pi, 2\pi]$ и пусть ядро $K(s, t)$ в $I \times I$ при $0 \leq s \leq 2\pi$, $0 \leq t \leq 2\pi$ равно сумме абсолютно сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin ns \cdot \sin nt$, а при остальных значениях $(s, t) \in I \times I$ равно 0. Приведите пример функ-

ции $f \in G$, в каноническом разложении которой функция f_0 не принадлежит G .

[Собственными функциями ядра K являются функции φ_n , определяемые следующим образом: $\varphi_n(t) = 0$ при $-2\pi \leq t \leq 0$ и $\varphi_n(t) = (\sin nt)/\sqrt{\pi}$ при $0 \leq t \leq 2\pi$. Возьмите в качестве f функцию, непрерывную в I и равную

$2\pi - t$ в промежутке $[0, 2\pi]$, и покажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (f | \varphi_n) \varphi_n(t)$ сходится всюду в I , но имеет разрывную сумму.]

5. Пусть в обозначениях 11.6 K есть эрмитово ядро, определенное в $I \times I$, и пусть U — соответствующий самосопряженный вполне непрерывный оператор в G . Покажите, что для каждого $h > 0$ оператор U^h соответствует эрмитово ядру K_h , которое индуктивно определяется условиями: $K_1 = K$ и

$$K_h(s, t) = \int_a^b K_{h-1}(s, u) K(u, t) du.$$

Докажите, что при $h \geq 2$ имеем $K_h(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{h-1} \overline{\varphi_n(s)} \varphi_n(t)$, где ряд абсолютно и равномерно сходится в $I \times I$. Покажите, кроме того, что $A_h = \int_a^b ds \int_a^b |K_h(s, t)|^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 h$ и что последовательность (A_{h+1}/A_h) возрастаает и имеет предел, равный $|\lambda_1|^2$, где λ_1 — собственное значение ядра K , имеющее максимальную абсолютную величину.

[Воспользуйтесь неравенством Коши — Шварца.]

6. Пусть в обозначениях 11.6 K — произвольное непрерывное ядро в $I \times I$ и пусть U — соответствующий вполне непрерывный оператор в G . Пусть M — конечномерное подпространство пространства G , для которого $U(M) \subset M$, и пусть $(\psi_h)_{1 \leq h \leq n}$ — ортонормальный базис пространства M .

Положим $U\psi_h = \sum_{k=1}^n a_{hk} \psi_k$. Покажите, что $\sum_{h, k} |a_{hk}|^2 \leq \int_a^b dt \int_a^b |K(s, t)|^2 ds$.

[Для каждой точки $t \in I$ примените к функции $s \rightarrow K(s, t)$ и ортонормальной системе (ψ_h) в G неравенство Бесселя (6.5.2).]

Пусть (λ_n) — последовательность, определенная (для оператора U) в задаче 15, с) § 11.5. Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2$ сходится и что $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 \leq$

$$\leq \int_a^b dt \int_a^b |K(s, t)|^2 ds.$$

[Примените предыдущий результат к любой сумме подпространств $N(\mu_k)$ в обозначениях задачи 15, с) § 11.5.]

7. Приведите пример такого эрмитова ядра $K(s, t)$, чтобы, если U — соответствующий вполне непрерывный оператор в G и V — квадратный

корень из U^2 (задача 12 § 11.5), не существовало эрмитова ядра, которому соответствует вполне непрерывный оператор V .

[Если бы такое ядро существовало, то к нему была бы применима теорема Мерсера (11.6.7). Возьмите тогда в качестве K ядро из первого примера задачи 3.]

8. Ядро $K(s, t)$, определенное в $I \times I$ (где $I = [a, b]$) и удовлетворяющее предположениям задачи 4 § 8.11, называется **ядром Вольтерра**, если $K(s, t) = 0$ при $s > t$. Пусть $M = \sup_{(s, t) \in I \times I} |K(s, t)|$. Покажите, что если U — вполне непрерывный оператор в G , соответствующий K (задача 1), то оператор U^n соответствует ядру Вольтерра K_n , удовлетворяющему условию $|K_n(s, t)| \leq M^n (t - s)^{n-1}/(n-1)!$ при $n > 1$ и $s \leq t$.

[Проведите индукцию по n .]

Выполните из этого утверждения, что спектр оператора U сводится к 0 и что для любого числа $\zeta \in \mathbb{C}$ имеем оценку $\|(1 - \zeta U)^{-1} - 1\| \leq M |\zeta| e^{M(b-a)} |\zeta|$.

7. Задача Штурма — Лиувилля

Рассмотрим в компактном промежутке $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$(11.7.1) \quad y'' - q(x)y + \lambda y = f(x),$$

где $q(x)$ — действительная непрерывная функция в I , $f(x)$ — комплексная простая функция в I , непрерывная всюду, за исключением конечного числа внутренних точек, и λ — комплексное число. Под *решением* уравнения (11.7.1) понимают непрерывно дифференцируемую комплексную функцию $y(x)$, производная $y'(x)$ которой является первообразной некоторой простой функции, имеющей лишь конечное число точек разрыва, и для которой соотношение

$$y''(x) - q(x)y(x) + \lambda y(x) = f(x)$$

выполняется в дополнении в \tilde{I} некоторого конечного подмножества \tilde{I} .

Задача Штурма — Лиувилля состоит в нахождении решения, удовлетворяющего, кроме того, двум *граничным условиям*

$$(11.7.2) \quad h_1 y(a) + k_1 y'(a) = 0, \quad h_2 y(b) + k_2 y'(b) = 0,$$

где h_1 , k_1 , h_2 и k_2 — действительные числа, причем h_i и k_i одновременно не равны 0 ($i = 1, 2$).

Мы будем в дальнейшем предполагать известной элементарную теорию линейных дифференциальных уравнений [см. (10.8)]. Сначала

мы рассмотрим однородное уравнение, получающееся из (11.7.1) при $f(x) = 0$:

$$(11.7.3) \quad y'' - q(x)y + \lambda y = 0.$$

Заметим, что вторая производная y'' любого решения этого уравнения непрерывна в I .

(11.7.4) *Существует такое число $r > 0$, что если число λ действительно и $\lambda \leq -r$, то единственное решение уравнения (11.7.3), удовлетворяющее граничным условиям (11.7.2), есть 0.*

Так как q , λ и все h_i и k_i действительны, то ясно, что если какое-либо решение уравнения (11.7.3) удовлетворяет условиям (11.7.2), то его действительная и мнимая части также являются решениями, удовлетворяющими тем же граничным условиям. Таким образом, мы можем ограничиться действительными решениями.

Предположим сперва, что $k_1 k_2 \neq 0$, так что мы можем считать $k_1 = k_2 = -1$. Тогда можно считать, что $y(a) \neq 0$, так как в противном случае мы имели бы $y'(a) = 0$, и в силу теоремы существования наша теорема была бы доказана. Умножая, если потребуется, y на подходящую константу, мы можем, таким образом, предполагать, что $y(a) = 1$ и $y'(a) = h_1$.

Если мы положим $z = y'/y$ при $y(x) \neq 0$, то получим уравнение

$$(11.7.4.1) \quad z' = q(x) - \lambda - z^2.$$

Пусть $M = \sup_{x \in I} |q(x)|$ и допустим, что $\lambda \leq -M - h_1^2 - 1$. Тогда

мы будем иметь $z'(a) = q(a) - \lambda - h_1^2 \geq 1$ и, следовательно, функция z строго возрастает в некоторой окрестности точки a в I . Убедимся, что $y(x) \neq 0$ в I и что $z(x) > h_1$ во всех точках $x > a$. Допустим сначала, что $y(x)$ обращается в промежутке I в 0, и пусть x_1 — наименьшее решение $x > a$ уравнения $y(x) = 0$. Тогда $y(x) > 0$ при $a \leq x < x_1$, и поэтому производная $y'(x_1) < 0$ (она не может быть равна 0, так как иначе функция y была бы тождественно равна 0 в промежутке I). Поскольку при всех $x \in I$ выполняется неравенство $q(x) - \lambda > 0$ при $a \leq x < x_1$, мы в силу (11.7.3) имеем $y''(x) > 0$. Поэтому производная y' при $a \leq x < x_1$ убывает и, значит, на этом промежутке она < 0 . Отсюда следует, что когда $x < x_1$ стремится к x_1 , то $z(x)$ стремится к $-\infty$. Так как функция z при $a \leq x < x_1$ непрерывна, на этом промежутке должно найтись наименьшее такое число $x_2 > a$, что $z(x_2) = h_1$ и $h_1 < z(x)$ при $a < x < x_2$. Отсюда вытекает, что $z'(x_2) \leq 0$. Но $z'(x_2) = -q(x_2) + \lambda + h_1^2 \geq 1$, и мы пришли к противоречию, которое доказывает оба наших утверждения. Точно так же мы убеждаемся в том, что если $\lambda \leq -M - h_2^2 - 1$, то $z(x) \leq h_2$ в I . Итак, функция z должна в I удовлетворять условию $|z(x)| \leq c = \max(|h_1|, |h_2|)$, где c не зависит от λ .

Теперь из (11.7.4.1) мы находим $z'(x) \geq -M - \lambda - c^2 = \mu$; поэтому по теореме о среднем значении $h_2 - h_1 = z(b) - z(a) \geq \mu(b-a)$. Если мы выберем λ так, чтобы

$$\lambda \leq -M - c^2 - \frac{|h_2 - h_1|}{b-a} - 1,$$

то мы приедем к противоречию, и это завершает доказательство теоремы (11.7.4) в случае, когда $k_1 k_2 \neq 0$.

Предположим теперь, что $k_1 = 0$, а $k_2 \neq 0$ (поэтому мы можем считать, что $k_2 = -1$). В этом случае (умножая, если потребуется, y на подходящую константу) мы можем предполагать, что $y(a) = 0$ и $y'(a) = 1$. Тогда если $x > a$ стремится к a , то z стремится к $+\infty$. Допустим, что $\lambda \leq -M - 2$. Прежде всего покажем, что $y'(x) \geq 1$ в I . Так как в силу (11.7.3) в некоторой окрестности точки a при $x > a$ выполняется неравенство $y''(x) > 0$, то в этой окрестности при $x > a$ мы будем иметь $y'(x) > 1$. Допустим, что $y'(x) = 1$ для некоторых $x > a$, и пусть x_1 — наименьшее решение этого уравнения. Тогда при $a < x \leq x_1$ будет $y'(x) \geq 1$. Следовательно, $y(x) > 0$ на этом промежутке, и, значит, в силу (11.7.3) $y''(x) > 0$. Но, с другой стороны, мы должны иметь $y''(x_1) \leq 0$, что приводит к противоречию. Таким образом, мы видим, что функция y строго возрастает в промежутке I , и поэтому функция z при $a < x \leq b$ конечна.

Далее, убедимся, что $z(x) > \sqrt{-M - \lambda - 1}$. В противном случае нашлось бы наименьшее x_2 , для которого $z(x_2) = \sqrt{-M - \lambda - 1}$, и в этой точке мы должны были бы иметь $z'(x_2) \leq 0$. Но из (11.7.4.1) следует, что $z'(x_2) \geq -M - \lambda - z^2(x_2) \geq 1$, и мы снова приходим к противоречию. Если теперь мы предположим, что λ выбрано так, что $h_2^2 < -M - \lambda - 1$, то найдем, что равенство $z(b) = h_2$ будет невозможно. Поэтому теорема доказана.

Случай, когда $k_2 = 0$, а $k_1 \neq 0$, рассматривается аналогично. Наконец, если $k_1 = k_2 = 0$, то снова мы можем считать, что $y(a) = 0$ и $y'(a) = 1$, и только что проведенное рассуждение показывает, что при $\lambda \leq -M - 2$ функция y строго возрастает на промежутке I . Но это, конечно, находится в противоречии с условием $y(b) = 0$. Теорема полностью доказана.

Заменяя, если необходимо, $q(x) + r$, а λ на $\lambda + r$, мы можем, начиная с этого момента, считать, что при $\lambda \leq 0$ не существует нетривиальных решений уравнения (11.7.3), удовлетворяющих обоим граничным условиям (11.7.2).

Мы будем пользоваться следующим тождеством:

$$(11.7.5) \quad \int_a^b (u''v - v''u) dt = (u'(b)v(b) - u(b)v'(b)) - \\ - (u'(a)v(a) - u(a)v'(a)).$$

немедленно вытекающим из частного случая $p = 2$ формулы (8.14.1) (предполагается, что u'' и v'' — простые функции в I).

(11.7.6) Для любого t , такого, что $a < t < b$, существует действительная функция $x \rightarrow K_t(x)$, непрерывная в промежутке I и обладающая следующими свойствами:

1°). В каждом из промежутков $a \leq x < t$ и $t < x \leq b$ функция K_t дважды непрерывно дифференцируема и является решением уравнения $y'' - q(x)y = 0$.

2°). Функция K_t удовлетворяет граничным условиям (11.7.2).

3°). В точке $x = t$ производная $K'_t(x)$ имеет предел справа и предел слева и $K'_t(t+) - K'_t(t-) = -1$.

На основании элементарной теории линейных дифференциальных уравнений существует решение $u_1 \neq 0$ (соответственно $u_2 \neq 0$) уравнения $y'' - q(x)y = 0$, удовлетворяющее условию $h_1 u_1(a) + k_1 u'_1(a) = 0$ (соответственно $h_2 u_2(b) + k_2 u'_2(b) = 0$), причем u_1 и u_2 не пропорциональны (в противном случае нашлось бы нетривиальное решение уравнения (11.7.3) при $\lambda = 0$, удовлетворяющее обоим граничным условиям (11.7.2)). Поэтому любое решение уравнения $y'' - q(x)y = 0$ единственным способом может быть записано в виде $y = c_1 u_1 + c_2 u_2$, где c_1 и c_2 — постоянные коэффициенты, а функция $u_1(x)u'_2(x) - u_2(x)u'_1(x)$ [в силу (8.14.1)] является постоянной $d \neq 0$. Нам нужно теперь только выбрать константы c_1 и c_2 так, чтобы функция K_t , равная $c_1 u_1$ при $a \leq x \leq t$ и $c_2 u_2$ при $t \leq x \leq b$, была определена и непрерывна в точке t и удовлетворяла условию 3°). Это дает нам соотношения

$$c_1 u_1(t) - c_2 u_2(t) = 0; \quad c_1 u'_1(t) - c_2 u'_2(t) = 1$$

и, следовательно, в качестве решения нашей задачи можно выбрать числа $c_1 = -u_2(t)/d$ и $c_2 = -u_1(t)/d$.

Мы будем говорить (нарушая принятое словоупотребление), что K_t есть *элементарное (фундаментальное) решение* уравнения $y'' - q(x)y = 0$, соответствующее особенности t . Функция $(t, x) \rightarrow K_t(x)$ обозначается также через $K(t, x)$ и называется *функцией Грина*, соответствующей рассматриваемой задаче Штурма — Лиувилля. Она определена только при $a < t < b$ и $a \leq x \leq b$ и равна $-u_2(t)u_1(x)/d$ при $x \leq t$ и $-u_1(t)u_2(x)/d$ при $x \geq t$, а поэтому непрерывна. Ее можно по непрерывности продолжить на $t = a$ и $t = b$, полагая $K(a, x) = -u_1(a)u_2(x)/d$ и $K(b, x) = -u_2(b)u_1(x)/d$. Кроме того, как сразу следует из определяющих ее формул, она обладает свойством симметрии

$$(11.7.7) \quad K(t, x) = K(x, t).$$

(11.7.8) Для того чтобы функция $y(x)$ была решением уравнения $y'' - q(x)y = f(x)$ и удовлетворяла граничным условиям (11.7.2), необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство $y(x) = - \int_a^b K(t, x)f(t)dt$ (где f — комплексная простая функция в промежутке I , непрерывная всюду, за исключением конечного числа точек промежутка I).

Достаточность. Так как

$$y(x) = \frac{u_1(x)}{d} \int_x^b u_2(t)f(t)dt + \frac{u_2(x)}{d} \int_a^x u_1(t)f(t)dt,$$

то проверка того, что функция y удовлетворяет дифференциальному уравнению (в точках, в которых функция f непрерывна) и граничным условиям, сводится к простому вычислению производных [и применению теоремы (8.7.3)].

Необходимость. Применим тождество (11.7.5) к обоим промежуткам $a \leq t \leq x$ и $x \leq t \leq b$, взяв $u(t) = y(t)$ и $v(t) = K_x(t)$.

Тогда равенство $y(x) = - \int_a^b K(t, x)f(t)dt$ сразу будет следовать из свойств (11.7.6) функции Грина.

Из (11.7.8) следует, что любое решение задачи Штурма — Лиувилля является решением интегрального уравнения Фредгольма с эрмитовым ядром

$$(11.7.9) \quad y(x) - \lambda \int_a^b K(t, x)y(t)dt = g(x),$$

где

$$g(x) = - \int_a^b K(t, x)f(t)dt,$$

и обратно. Числа λ_n , обратные собственным значениям $\neq 0$ оператора U в предгильбертовом пространстве G [определенном в (11.2.8)], соответствующего ядру K , называются *собственными значениями* задачи Штурма — Лиувилля.

Теперь мы можем сформулировать следующую теорему, дающую решение задачи Штурма — Лиувилля в каждом из возможных случаев.

(11.7.10) Для любой действительной непрерывной функции $q(x)$ в компактном промежутке $I = [a, b]$:

1°). Задача Штурма — Лиувилля имеет бесконечную строго возрастающую последовательность (λ_n) собственных значений. Все собственные значения являются действительными числами, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty$ и ряд $\sum_n 1/\lambda_n^2$ сходится.

2°). Для каждого собственного значения λ_n однородная задача Штурма — Лиувилля имеет действительное решение $\varphi_n(x)$, удовлетворяющее условию $\int_a^b \varphi_n^2(x) dx = 1$, и всякое другое решение получается из φ_n умножением на постоянное число.

3°). Последовательность (φ_n) является тотальной ортонормальной системой в предгильбертовом пространстве G (11.6).

4°). Пусть w — комплексная непрерывная функция в промежутке I , являющаяся первообразной простой функции w' , такая, что:

(i) функция w' непрерывна всюду в I , за исключением конечного числа внутренних точек;

(ii) функция w' в каждом промежутке, в котором она непрерывна, имеет непрерывную производную w'' ;

(iii) функция w удовлетворяет граничным условиям (11.7.2).

Тогда имеем $w(x) = \sum_n c_n \varphi_n(x)$, где $c_n = (w | \varphi_n) = \int_a^b w(t) \varphi_n(t) dt$.

и ряд абсолютно и равномерно сходится в I .

5°). Если λ не есть ни одно из собственных значений λ_n , то для каждой простой функции f , непрерывной всюду в промежутке I , за исключением конечного числа точек, задача Штурма — Лиувилля имеет единственное решение w , коэффициенты $c_n = (w | \varphi_n)$ которого задаются формулой $c_n = d_n / (\lambda - \lambda_n)$,

где $d_n = \int_a^b f(t) \varphi_n(t) dt$.

6°). При $\lambda = \lambda_n$ необходимое и достаточное условие того, чтобы задача Штурма — Лиувилля имела решение, состоит в том, чтобы $\int_a^b f(t) \varphi_n(t) dt = 0$. В этом случае для любого решения w коэффициент $c_n = (w | \varphi_n)$ произволен, а при $t \neq n$ коэффициенты c_m задаются той же формулой, что и в 5°).

Однородная задача Штурма — Лиувилля не может иметь двух линейно независимых решений, так как в противном случае она имела бы решение u , у которого $u(a)$ и $u'(a)$ были бы произвольны, что невозможно; это доказывает 2°).

Тот факт, что все собственные значения λ_n действительны, следует из (11.7.7) и (11.7.5). Кроме того, из (11.7.4) следует, что

не более чем конечное число из λ_n отрицательно. По теореме Мерсера [(11.6.7) и (11.6.8)] для функции Грина имеем

$$(11.7.10.1) \quad K(t, x) = \sum_n \frac{1}{\lambda_n} \varphi_n(t) \varphi_n(x),$$

где ряд абсолютно и равномерно сходится в $I \times I$ (предполагается, и это вполне законно, что 0 не есть ни одно из λ_n).

Заметим, что 4°) будет следовать из (11.6.3) и (11.7.8), если сделать дополнительное предположение, что w и w' непрерывны в I . Чтобы доказать 4°) в общем случае, обозначим через t_i ($1 \leq i \leq m$) точки промежутка I , в которых w' имеет разрыв, и пусть $a_i =$

$$= w'(t_i+) - w'(t_i-). \text{ Тогда функция } v = w + \sum_{i=1}^m \alpha_i K_{t_i} \text{ удовлетворяет всем условиям 4°) и, кроме того, в силу (11.7.6) имеет непрерывную производную. Пользуясь (11.7.10.1), получаем доказательство 4°).}$$

Из того, что тождественное отображение пространства $E = \mathcal{C}_c(I)$ в G непрерывно, следует, что для функций w , удовлетворяющих условиям 4°), мы можем также писать $w = \sum c_n \varphi_n$, где ряд сходится в предгильбертовом пространстве G (11.2.8). Поэтому, чтобы доказать 3°), достаточно показать, что множество P таких функций w плотно в G . Для этой цели для любой функции $u \in G$ рассмотрим непрерывную функцию w_m , где m — целое число > 0 , равную u в промежутке $[a + (1/m), b - (1/m)]$, 0 в промежутках $[a, a + (1/2m)]$ и $[b - (1/2m), b]$ и линейной функции в каждом из промежутков $[a + (1/2m), a + (1/m)]$ и $[b - (1/m), b - (1/2m)]$. Тогда ясно, что в промежутках $[a, a + (1/m)]$ и $[b - (1/m), b]$ выполняется неравенство $|u(x) - w_m(x)| \leq 2 \|u\|$ и, значит, в силу теоремы о среднем значении норма $\|u - w_m\|_2$ сколь угодно мала. Кроме того, функция w_m удовлетворяет граничным условиям (11.7.2). Взяв теперь, пользуясь равномерной непрерывностью функции u , кусочно линейную непрерывную в I функцию v , равную w_m на промежутках $[a, a + (1/m)]$ и $[b - (1/m), b]$ и достаточно мало отличающуюся по модулю от функции u на промежутке $[a + (1/m), b - (1/m)]$, получим, что норма $\|u - v\|_2$ произвольно мала, а функция v удовлетворяет всем условиям, перечисленным в 4°), что доказывает наше утверждение.

Поскольку 3°), таким образом, доказано, ясно, что тотальная последовательность (φ_n) должна быть бесконечной, и [учитывая (11.6.2)] полностью доказано и утверждение 1°).

Наконец, 5°) и 6°) сразу следуют из (11.5.11).

Замечание. Относительно φ_n и λ_n можно получить значительно более точную информацию и, в частности, доказать, что отношение λ_n/n^2 стремится к конечному пределу (см. задачи 3 и 4).

Задачи

1. Пусть $I = [a, b]$ — компактный промежуток в \mathbb{R} и пусть H_0 — действительное векторное пространство всех действительных непрерывно дифференцируемых функций в промежутке I . Вводя скалярное произведение

$$(x | y) = \int_a^b (x' y' + xy) dt,$$

превращаем H_0 в действительное предгильбертово пространство.

а) Покажите, что H_0 сепарабельно (производную функции $x \in H_0$ аппроксимируйте многочленами (7.4.1)). Таким образом, H_0 является всюду плотным подпространством некоторого сепарабельного гильбертова пространства H (6.6.2).

б) Покажите, что если (x_n) — последовательность Коши в предгильбертовом пространстве H_0 , то последовательность (x_n) равномерно сходится в I к некоторой непрерывной функции v , и что если (y_n) — другая последовательность Коши в H_0 , имеющая в H тот же самый предел, то последовательность (y_n) равномерно сходится в I к той же функции v . Элементы пространства H , таким образом, могут быть отождествлены с некоторыми непрерывными функциями в I , которые, однако, не обязаны быть дифференцируемыми в каждой точке промежутка I .

[Заметьте, что для каждой функции $x \in H_0$ в I выполняется неравенство

$$|x(t) - x(a)| \leq \sqrt{t-a} \left(\int_a^b x'^2 dt \right)^{1/2}. \quad]$$

Покажите, что для любой функции $z \in H_0$, дважды непрерывно дифференцируемой в I и удовлетворяющей условию $z'(a) = z'(b) = 0$, справедливо

$$\text{равенство } (v | z) = - \int_a^b v z'' dt + \int_a^b v z dt.$$

с) Пусть α и β — два действительных числа и q — непрерывная функция в I . Покажите, что в H_0 функция $x \rightarrow \Phi(x) = \int_a^b (x'^2 + qx^2) dt - \alpha(x(a))^2 - \beta(x(b))^2$ непрерывна. Пусть A — множество в H , состоящее из функций x , для которых $\int_a^b x^2 dt = 1$ (заметим, что A не является ограниченным множеством в гильбертовом пространстве H). Покажите, что нижняя грань функции $\Phi(x)$ на пересечении $A \cap H_0$ конечна.

[Нужно только рассмотреть случай, когда $\alpha > 0$ и $\beta > 0$. Предположим, что в $A \cap H_0$ существует такая последовательность (x_n) , что $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(x_n) = -\infty$.

и $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = +\infty$, где $\gamma_n = \left(\int_a^b |x'|^2 dt \right)^{1/2}$. Рассмотрите последовательность

функций $y_n = x_n / \gamma_n$ и приведите к противоречию тот факт, что, с одной

стороны, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b y_n^2 dt = 0$, а, с другой, существуют такой промежуток $[a, c] \subset I$

и такое число $\rho > 0$, что $|y_n(t)| \geq \rho$ при каждом n и для каждой точки $t \in [a, c]$.

d) Пусть μ_1 — нижняя грань функции $\Phi(x)$ на $A \cap H_0$. Покажите, что если (x_n) — последовательность в $A \cap H_0$, для которой $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(x_n) = \mu_1$, то

последовательность (x_n) ограничена в H .

[Тот же метод, что и в с).]

Выведите из этого результата, что, выделяя подходящую подпоследовательность, мы можем считать, что последовательность (x_n) равномерно сходится в I к некоторой функции u (которая, однако, *a priori* не обязана принадлежать H).

[Воспользуйтесь теоремой Асколи (7.5.7).]

e) Покажите, что $\Phi(x)$ есть квадратичная форма в H_0 , т. е. имеет место равенство $\Phi(x+y) = \Phi(x) + \Phi(y) + 2\Psi(x, y)$, где функция Ψ билинейна. Для любой функции z , дважды непрерывно дифференцируемой в I и удовлетворяющей условию $z'(a) = z'(b) = z(a) = z(b) = 0$, имеем $\Psi(x, z) =$

$= - \int_a^b x z'' dt + \int_a^b q x z dt$. Этой же формулой функция $\Psi(v, z)$ может быть

определенна для любой функции v , непрерывной в I . Покажите, что для любой такой функции z и любого действительного числа ξ имеет место неравен-

ство $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(x_n + \xi z) \geq \mu_1 \int_a^b (x_n + \xi z)^2 dt$, и выведите из этого результата, что

$$\int_a^b (uz'' - quz + \mu_1 uz) dt = 0.$$

Поэтому если w — дважды непрерывно дифференцируемая функция, для которой $w'' = qu - \mu_1 u$, то с помощью интегрирования по частям полу-

чаем $\int_a^b (u - w) z'' dt = 0$. Заключите отсюда, что $u - w$ есть многочлен

степени ≤ 1 (заметьте, что если вычесть из $u - w$ подходящий многочлен p степени 1, то найдется такая функция z , что $z'' = u - w - p$ и $z(a) = z(b) = z'(a) = z'(b) = 0$). Следовательно, функция u дважды непрерывно диф-

дифференцируема, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$u'' - qu + \mu_1 u = 0$$

и условию $\int_a^b u^2 dt = 1$. Кроме того, $u'(a) = -\alpha u(a)$ и $u'(b) = \beta u(b)$.

[Чтобы доказать это последнее утверждение, выразите тот факт, что для любой функции $z \in H_0$, каково бы ни было действительное число ξ ,

выполняется неравенство $\Phi(u + \xi z) \geq \mu_1 \int_a^b (u + \xi z)^2 dt.$]

2. а) Предположим сначала [в обозначениях теоремы (11.7.10)], что $k_1 k_2 \neq 0$, и пусть $\alpha = h_1/k_1$ и $\beta = -h_2/k_2$. Покажите, что функции φ_n могут быть (вплоть до знака) определены следующими условиями: 1°) функция φ_1 такова, что на сфере A : $(y|y) = 1$ в G функция Φ (определенная в задаче 1, с) достигает своего минимума при $y = \varphi_1$ и этот минимум равен λ_1 ; 2°) при $n > 1$ пусть A_n есть пересечение сферы A и гиперплоскостей $(y|\varphi_k) = 0$ для $1 \leq k \leq n-1$; тогда функция φ_n такова, что на A_n функция Φ достигает своего минимума при $y = \varphi_n$ и этот минимум равен λ_n .

[Это описание функции φ_1 сразу следует из результатов задачи 1; чтобы охарактеризовать функции φ_n , проведите рассуждение такого же характера.]

б) Докажите аналогичные утверждения для случая, когда $k_1 = 0$ и $k_2 \neq 0$, заменяя в определении функции Φ число α на 0, но заменяя и сферу A ее пересечением с гиперплоскостью в G , определяемой условием $y(a) = 0$. Подобным же образом поступите в случае, когда $k_1 \neq 0$ и $k_2 = 0$ или когда $k_1 = k_2 = 0$.

с) При предположениях задачи а) пусть z_1, \dots, z_{n-1} есть $n-1$ произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция в I и пусть $B(z_1, \dots, z_{n-1})$ — пересечение сферы A и $n-1$ гиперплоскостей $(y|z_k) = 0$ ($1 \leq k \leq n-1$). Покажите, что в некоторой точке множества $B(z_1, \dots, z_{n-1})$ функция Φ достигает своего минимума $\rho(z_1, \dots, z_{n-1})$ на этом множестве и что λ_n есть верхняя грань чисел $\rho(z_1, \dots, z_{n-1})$, когда z_i меняются на множестве дважды непрерывно дифференцируемых в промежутке I функций (минимаксный принцип).

[Для доказательства существования минимума примените метод задачи а); неравенство доказывается тем же методом, что и в задаче 8 § 11.5.]

Распространите этот результат на случай, когда $k_1 k_2 = 0$.

3. а) Рассмотрим на одном и том же промежутке I два линейных дифференциальных уравнения второго порядка $y'' - q_1 y + \lambda y = 0$ и $y'' - q_2 y + \lambda y = 0$ с одними и теми же граничными условиями (11.7.2). Пусть $(\lambda_n^{(1)})$ и $(\lambda_n^{(2)})$ — две строго возрастающие последовательности собственных значений этих двух задач Штурма — Лиувилля. Покажите, что если $q_1 \leq q_2$, то $\lambda_n^{(1)} \leq \lambda_n^{(2)}$ при каждом n , а если $|q_1(t) - q_2(t)| \leq M$ в I , то $|\lambda_n^{(1)} - \lambda_n^{(2)}| \leq M$ при каждом n .

[Воспользуйтесь минимаксным принципом.]

b) Заключите из а), что существует такая константа c , что при каждом n

$$\left| \lambda_n - \frac{n^2\pi^2}{l^2} \right| \leq c,$$

где $l = b - a$.

[Изучите задачу Штурма — Лиувилля для частного случая, когда функция q постоянна.]

4. а) Пусть y — произвольное решение уравнения (11.7.3) в промежутке $I = [a, b]$ при $\lambda > 0$. Покажите, что существуют такие две постоянные A и ω , что y есть решение интегрального уравнения

$$(*) \quad y(t) = A \sin \sqrt{\lambda} (t + \omega) + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_a^t q(s) y(s) \sin \sqrt{\lambda} (t - s) ds.$$

Покажите, что существует такая постоянная B , не зависящая от λ , что $A^2 \leq B(y | y)$.

[С помощью неравенства Коши — Шварца мажорируйте интеграл в правой части равенства (*).]

б) Выведите из а), что если в задаче Штурма — Лиувилля $k_1 k_2 \neq 0$ или же $k_1 = k_2 = 0$, то существуют такие две постоянные C_0 и C_1 , что для каждого n и каждой точки $t \in I$

$$\left| \varphi_n(t) - \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \sqrt{\lambda_n} t \right| \leq \frac{C_0}{n}$$

и

$$\left| \varphi'_n(t) - \sqrt{\frac{2}{l}} \sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} t \right| \leq C_1,$$

где $l = b - a$.

[Воспользуйтесь задачей а) и утверждением из задачи 3, б).]

Каков соответствующий результат, когда только одна из постоянных k_1 и k_2 равна 0?

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ahlfors L., *Complex Analysis*, New York, 1953.
- [2] Bachmann H., *Transfinite Zahlen*, Berlin, 1955.
- [3] Бурбаки Н., Элементы математики, кн. I, Теория множеств, Мир, М., готовится к изданию.
- [4] Бурбаки Н., Элементы математики, кн. II, Алгебра (Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра), Физматгиз, М., 1962.
- [5] Бурбаки Н., Элементы математики, кн. III,
 - Общая топология (Основные структуры), Физматгиз, М., 1958.
 - Общая топология (Числа и связанные с ними группы и пространства), Физматгиз, М., 1959.
- [6] Бурбаки Н., Элементы математики, кн. V, Топологические векторные пространства, ИЛ, М., 1959.
- [7] Картан Э., Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения, Изд-во МГУ, М., 1962.
- [8] Cartan H., *Séminaire de l'Ecole Normale Supérieure*, 1951—1952. *Fonctions analytiques et faisceaux analytiques*.
- [9] Шевалле К., Теория групп Ли, ИЛ, М., т. 1, 1948, т. 2, 1958, т. 3, 1959.
- [10] Коддингтон Э., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, М., 1959.
- [11] Курант Р. и Гильберт Д., Методы математической физики, т. 1, Гостехиздат, М.—Л., 1951.
- [12] де Рам Ж., Дифференцируемые многообразия, ИЛ, М., 1956.
- [13] Данфорд Н. и Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория, ИЛ, М., 1962.
- [14] Халмос П., Конечномерные векторные пространства, Физматгиз, М., 1963.
- [15] Айнс Э., Обыкновенные дифференциальные уравнения, ГНТИУ, Харьков, 1939.
- [16] Jacobson N., *Lectures in Abstract Algebra: II, Linear Algebra*, New York, 1953.
- [17] Kamke E., *Differentialgleichungen reeller Funktionen*, Leipzig, 1930.
- [18] Kelley J., *General Topology*, New York, 1955.
- [19] Ландау Э., Основы анализа, ИЛ, М., 1948.
- [20] Люмис Л., Введение в абстрактный гармонический анализ, ИЛ, М., 1956.

-
- [21] Спрингер Дж., Введение в теорию римановых поверхностей, ИЛ, М., 1960.
 - [22] Steenrod N., Colloquium Lectures, to appear.
 - [23] Taylor A., Introduction to Functional Analysis, New York, 1958.
 - [24] Вейль А., Введение в теорию кэллеровских многообразий, ИЛ, М. 1961.
 - [25] Weyl H., Die Idee der Riemannschen Fläche, Stuttgart, 1955.
 - [26] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа. Основные операции анализа, Физматгиз, М., ч. I, 1962, ч. II, 1963.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

В нижеследующем указателе первая цифра указывает главу, в которой можно найти данный термин, а вторая — параграф в этой главе.

- Абеля лемма 9.1
— теорема 9.3, задача 1
Абсолютная величина действительного числа 2.2
Абсолютно суммируемое подмножество, семейство 5.3
— сходящийся ряд 5.3
Адамара теорема о лакунах 9.15,
задача 7
— — о трех окружностях 9.5,
задача 10
Аксиома Архимеда 2.1
— Бореля — Лебега 3.16
— выбора 1.4
— о вложенных промежутках 2.1
Алгебраическая кратность собственного значения 11.4
Альтернатива Фредгольма 11.6
Аналитическая функция 9.3
— —, вычет 9.15
— —, главная часть в точке 9.15
— —, естественная граница 9.15,
задача 7
— — мероморфная 9.17
— —, множество единственности 9.4
— —, нуль 9.15
— —, особая граничная точка 9.15,
задача 7
— —, особая изолированная точка 9.15
— —, полюс 9.15
— —, порядок в точке 9.15
— —, правильная граничная точка 9.15,
задача 7
— —, теорема Коши 9.6
— —, условия Коши — Римана 9.10
— — целая 9.3
— — — трансцендентная 9.15, за-
дacha 3
Аналитическое отображение, см. Аналитическая функция
— продолжение 9.4
Аргумент комплексного числа 9.5,
задача 8
Архимеда аксиома 2.1
Архimedово упорядоченное поле 2.1
Асколи теорема 7.5
Ассоциативность абсолютно сходя-
щихся рядов 5.3

База открытых множеств метрическо-
го пространства 3.9
Базис векторного пространства 5.9,
задача 2
— ортонормальный 6.5
Базисное действительное векторное
пространство 5.1
Банаха пространства 5.3, задача 5;
5.7, задача 1; 8.9, задача 2
Банахово пространство 5.1
Бесконечно дифференцируемое ото-
бражение 8.12
Бесконечное произведение метриче-
ских пространств 3.20, задача 7; 8.9,
задача 2
Бесконечные точки 3.3
Бесконечный путь 9.12, задача 3
Бесселя неравенство 6.5
Биективное отображение 1.6
Билинейная симметричная форма 6.1
Билинейное отображение 6.1
Блоха постоянная 10.3, задача 5
Более сильная норма 5.6
— — топология 3.12
— — сильное расстояние 3.12
Больцано теорема 3.19
Бореля — Лебега аксиома 3.16
— — теорема 3.17
Брауэра теорема 10.2, задача 3

- Вейерштрасса подготовительная теорема 9.17, задача 4
 — теорема об аппроксимации 7.4
 — о существенных особенностях 9.15, задача 2
Вектор изотропный 6.1
 — ортогональный множеству 6.1
 — собственный 11.1
Векторное подпространство 5.4
 — пространство действительное, комплексное 5.1
 —, его базис 5.9, задача 2
Векторы ортогональные 6.1
Верхняя грань множества, функции (отображения) 2.3
Вершина решетки 9Д.4, задача 4
Взаимно непрерывное отображение 3.12
 — однозначное отображение 1.6
Включение 1.1
Вложение 1.6
 — естественное 1.6
Внешняя точка множества 3.7
Внутренность множества 3.7
Внутренняя точка множества 3.7
Возрастающая справа (слева) функция 8.5, задача 1
 — функция 4.2
Вольтерра ядро 11.6, задача 8
Вполне интегрируемое уравнение 10.9
 — непрерывный оператор 11.2
 — несвязное множество 3.19
 — ограниченное множество 3.17
 — — пространство 3.16
Всюду плотное множество 3.9
Вторая теорема о среднем значении 8.7, задача 2
Вырождающаяся эрмитова форма 6.1
Вычет 9.15
- Гамма-функция** 9.12, задача 2
Геометрическая кратность собственного значения 11.4
Гильбертова сумма гильбертовых пространств 6.4
Гильбертово пространство 6.2
 — — последовательностей 6.5
Гиперплоскость 5.8
 — однородная, опорная, параллельная 5.8, задача 3
Главная часть аналитической функции в точке 9.15
Главное значение логарифма 9.5, задача 8
Гомеоморфизм 3.12
Гомеоморфные метрические пространства 3.12
- Гомотетическое отображение 5.1
Гомотопия 9.6; 10.2, задача 6
Гомотопные траектории, петли 9.6; 10.2, задача 6
Грама определитель 6.6, задача 3
Граница множества 3.8
Границчная точка множества 3.8
 — — особая для аналитической функции 9.15, задача 7
 — — правильная для аналитической функции 9.15, задача 7
Границные условия для задачи Штурма — Лиувилля 11.7
Грань верхняя 2.3
 — нижняя 2.3
График отношения 1.3
 — отображения 1.4
 — функциональный 1.4
Грина функция 11.7
Гурса теорема 9.10, задача 1
- Действительная ограниченная функция** 2.3
 — отрицательная полупрямая 9.5, задача 8
 — плоскость 3.2
 — прямая 3.2
 — — расширенная 3.3
 — часть комплексного числа 4.4
Действительное векторное пространство 5.1
 — число 2.1
 — —, его абсолютная величина 2.2
 — —, его отрицательная и положительная части 2.2
Декартово произведение множеств 1.3
Диагональ 1.4
Диагональная нумерация 1.9
 — подпоследовательность 9.13
Динамик множества 3.4
Дини теорема 7.2
Дирихле функция 3.11
Дискретное метрическое пространство 3.2; 3.12
Дистрибутивность 1.2
Дифференциальное уравнение обыкновенное 10.4
 — — — линейное 10.6
 — — —, резольвента 10.8
 — — — однородное 10.8
 — — —, максимальное, минимальное решение 10.5, задача 7
 — — —, приближенное ϵ -решение 10.5
 — — —, решение 10.4; 11.7
 — — с частными производными 10.9

- Дифференциальный линейный оператор 8.13
 Дифференцируемое отображение 8.1
 Длина промежутка 2.2
 Дополнение множества 1.2
 — ортогональное 6.3
 — топологическое 5.4
 Дуга простая 9Д.4
- Единичная окружность 9.5
 — —, обойденная n раз 9.8
 Естественная граница аналитической функции 9.15, задача 7
 Естественное вложение 1.6
 — упорядочение 2.2
- Жордана теорема** 9Д.4
- Задача Штурма — Лиувилля 11.7
 Замена переменных в интеграле 8.7
 Замкнутое кольцо 9.14
 — множество 3.8
 Замкнутый квадрат решетки 9Д.4,
 задача 4
 — полицилиндр 9.1
 — промежуток 2.1
 — шар 3.4
 Замыкание множества 3.8
 Звездообразная область 9.7
 Значение графика отображения 1.4
 — непрерывного оператора 11.1
- Изолированная особая точка 9.15
 — точка множества 3.9, задача 2; 9.15
 Изометрические пространства 3.3
 Изометрия 3.3
 Изоморфизм предгильбертовых про-
 странств 6.2; 6.6
 Изотропный вектор 6.1
 Индекс точки относительно контура,
 контура относительно точки 9.8
 — — петли 9Д.1
 Индуцированное расстояние 3.10
 Интеграл 8.7
 — вдоль пути 9.6
 — замена переменных в нем 8.7
 — несобственный 9.12, задача 3
 Интегрирование по частям 8.7
 Инъективное отображение 1.6
- Каноническое разложение вектора от-
 носительно эрмитова вполне непре-
 рывного оператора 11.5; 11.6
- Канторово троичное множество 4.2,
 задача 2
 Касательные отображения 8.1
 Квадратный корень из положительно-
 го эрмитова вполне непрерывного
 оператора 11.5, задача 12
 Квазидифференцируемая функция 8.4,
 задача 4
 Квазипроизводная 8.4, задача 4
 Квазиэрмитов оператор 11.5, задача 17
 Колебание функции 3.14
 Кольцо замкнутое, открытое 9.14
 Коммутативность абсолютно сходя-
 щихся рядов 5.3
 Коммутативно сходящийся ряд 5.3,
 задача 4
 Компактное множество 3.17
 — пространство 3.16
 Комплексное векторное пространство
 5.1
 Комплексное число 4.4
 — —, аргумент 9.5, задача 8
 — —, действительная и мнимая части
 4.4
 — —, модуль 4.4
 — —, сопряженное 4.4
 Конец промежутка 2.1
 — сегмента 5.1, задача 4
 — траектория 9.6
 Конечные элементы расширенной пря-
 мой 3.3
 Контур 9.6
 Координата (n -я) относительно орто-
 нормальной системы 6.5
 Коразмерность линейного многообра-
 зия 5.1, задача 5
 Коши критерий для последовательно-
 стей 3.14
 — — для рядов 5.2
 — неравенства 9.9
 — последовательность 3.14
 Коши — Римана условия для анали-
 тических функций 9.10
 Коши теорема об аналитических функ-
 циях 9.6
 — — существования 10.4
 — формула 9.9
 Коши — Шварца неравенство 6.2
 Коэффициент (n -й) относительно ор-
 тонормальной системы 6.5
 — (n -й) Фурье 6.5; 11.6, задача 3
 Кратность собственного значения 11.4
 Кривая 3.19
 — простая замкнутая 9Д.4
 Кривая Пеано 4.2, задача 5; 9.12,
 задача 5
 Круг 4.4
 Кусочно линейная функция 8.7

- Лагранжа формула 10.2, задача 10
 Лебега свойство 3.16, задача 1
 Лебегова функция (*n*-я) 11.6, задача 2
 Левая производная 8.4
 Лежандра полиномы 6.6; 8.14,
 задача 1
 Лейбница правило 8.11
 — формула 8.13
 Лемма Абеля 9.1
 — Шварца 9.5, задача 7
 Линейная форма 5.8
 Линейное дифференциальное уравнение 10.6
 — многообразие 5.1, задача 5
 — —, коразмерность и размерность 5.1, задача 5
 — отображение 5.7
 Линейный дифференциальный оператор 8.13
 Липшица условие 8.4, задача 7; 10.5
 Липшицевская функция 10.5
 Лиувилля теорема 9.11
 Логарифм 4.3; 9.5, задача 8
 Локально замкнутое множество 3.10,
 задача 3
 — компактное пространство 3.18
 — липшицевская функция 10.4
 — связное пространство 3.19
 Ломаная линия 5.1, задача 4
 Лорана ряд 9.14
- Мажоранта 2.3**
- Мажорируемая функция (отображение), мажорируемое множество 2.3
 Максимальное решение дифференциального уравнения 10.5, задача 7
 Максимум относительный 3.9, задача 6
 — строгий 3.9, задача 6
 Мероморфная функция 9.17
 Мерсера теорема 11.6
 Метод приближений Ньютона 10.2,
 задача 5
 — скользящего горба 11.5, задача 4;
 11.6, задача 6
 Метрические пространства гомеоморфные 3.12
 — изометрические 3.3
 — —, произведения 3.20
 Метрическое пространство 3.1
 — база открытых множеств в нем 3.9
 — дискретное 3.2; 3.12
 — —, подпространство 3.10
 — — сепарабельное 3.9
 Минимаксный принцип 11.5, задача 8; 11.7, задача 2
- Минимальное решение дифференциального уравнения 10.5, задача 7
 Минковского неравенства 6.2
 Миноранта 2.3
 Минорируемая функция (отображение), минорируемое множество 2.3
 Минимая часть комплексного числа 4.4
 Многообразие линейное 5.1, задача 5
 Многочлен тригонометрический 7.4
 — характеристический 11.1
 Множества, декартово произведение 1.3
 — ортогональность 6.1
 — пересечение их семейства 1.8
 — равномощные 1.9
 — разность 1.2
 Множество 1.1
 — внешних точек множества 3.7
 — внутренних точек множества 3.7
 — вполне несвязное 3.19
 — — ограниченное 3.17
 — всюду плотное 3.9
 — граница 3.8
 — диаметр 3.4
 — дополнение 1.2
 — единственности для аналитических функций 9.4
 — замкнутое 3.8
 — , замыкание 3.8
 — индексов 1.8
 — канторово 4.2, задача 2
 — компактное 3.17
 — локально замкнутое 3.10, задача 3
 — мажорируемое, минорируемое 2.3
 — не более чем счетное 1.9
 — ограниченное в метрическом пространстве 3.4
 — в \mathbb{R} 2.3
 — сверху, снизу 2.3
 — ограниченных отображений 3.2
 — отделяющее две точки 9Д.3
 — открытое 3.5
 — относительно компактное 3.17
 — отображений 1.4
 — плотное в пространстве, в другом множестве 3.9
 — подмножество данного множества 1.1
 — пустое 1.1
 — равномерно равностепенно непрерывное 7.5, задача 5
 — равностепенно непрерывное 7.5
 — связное 3.19
 — содержащееся в другом множестве, содержащее другое множество 1.1
 — счетное 1.9
 — тотальное 5.4

- Множество функций, отделяющее точки пространства 7.3
 Множитель первичный 9.12, задача 1
 Модуль комплексного числа 4.4
 Монотонная функция 4.2
 Морера теорема 9.10, задача 2
- Наложение 1.6**
 Начало промежутка 2.1
 — траектории 9.6
 Не более чем счетное множество, семейство 1.9
 Невырождающийся эрмитов оператор 11.5
 Непрерывно дифференцируемое отображение 8.9
 Непрерывное продолжение оператора 11.1, задача 5
 Непрерывность корней уравнения как функций от параметров 3.20, задача 4; 9.17
 — отображения в пространстве, в точке 3.11
 — слева 8.5, задача 1
 — справа 11.6
 Неравенство Бесселя 6.5
 — Коши 9.9
 — Коши — Шварца 6.2
 — Минковского 6.2
 — треугольника 3.1
 — ультраметрическое 3.8, задача 4
 Несобственно интегрируемая функция вдоль бесконечного пути, несобственный интеграл 9.12, задача 3
 Несущественное отображение 9Д.2
 Нижняя грань множества, функции (отображения) 2.3
 Норма 5.1
 — более сильная 5.6
 — эрмитова 9.5, задача 7
 Нормально сходящийся ряд, нормально суммируемое семейство 7.1
 Нормированное пространство 5.1
 —, подпространство 5.4
 Нормированные пространства, их произведения 5.4
 Нормы эквивалентные 5.6
 Нуль аналитической функции 9.15
 Ньютона метод приближений 10.2, задача 5
- Область звездообразная 9.7**
 — односвязная 9.7; 10.2, задача 6
 Образ 1.5
 Обратное отображение 1.6
 Объединение двух множеств 1.2
- Объединение семейства множеств 1.8
 Обыкновенные дифференциальные уравнения 10.4; 10.9
 Ограниченнная действительная функция 2.3
 Ограниченнное множество в метрическом пространстве 3.4
 — множество в \mathbb{R} 2.3
 — отображение 7.1
 — сверху множество, ограниченная сверху функция (отображение) 2.3
 — снизу множество, ограниченная снизу функция (отображение) 2.3
 Однородная гиперплоскость 5.8, задача 3
 Однородное линейное дифференциальное уравнение 10.8
 Односвязная область 9.7; 10.2, задача 6
 Односторонний предел 7.6
 Окрестность 3.6
 — открытая 3.6
 Оператор 11.1
 — вполне непрерывный 11.2
 — квази-эрмитов 11.5, задача 17
 — линейный дифференциальный 8.13
 —, непрерывное продолжение 11.1, задача 5
 —, регулярное значение 11.1
 — риссокский 11.4, задача 5
 — самосопряженный 11.5
 —, собственное значение 11.1
 —, собственный вектор 11.1
 —, сопряженный 11.5
 —, спектр 11.1
 —, спектральное значение 11.1
 — эрмитов, см. Эрмитов оператор
 Опорная гиперплоскость 5.8, задача 3
 Определитель Грама 6.6, задача 3
 Ортогональная проекция 6.3
 — система 6.5
 Ортогональное дополнение 6.3
 Ортогональные векторы 6.1
 — множества 6.1
 Ортонормализация 6.6
 Ортонормальная система 6.5
 —, n -й коэффициент относительно нее 6.5
 — Хаара 8.7, задача 7
 Ортонормальный базис 6.5
 Основная теорема алгебры 9.11
 Особая граничная точка аналитической функции 9.15, задача 7
 — изолированная точка 9.15
 Остаток (n -й) ряда 5.2
 Открытая окрестность 3.6

- Открытое кольцо 9.14
 — множество 3.5
 — покрытие 3.16
 — — точечно-конечное 3.16, задача 2
 Открытый квадрат решетки 9Д.4,
 задача 4
 — полицилиндр 9.1
 — промежуток 2.1
 — шар 3.4
 Относительно компактное множество
 3.17
 Относительный максимум 3.9, задача 6
 — строгий 3.9, задача 6
 Отношение 1.1
 — его график 1.3
 — функциональное 1.4
 Отображение 1.4, см. Функция
 — аналитическое, см. Аналитическая
 функция
 — бесконечно дифференцируемое 8.12
 — биективное 1.6
 — билинейное 6.1
 — взаимно непрерывное 3.12
 — — однозначное 1.6
 — возрастающее 4.2
 — — слева, справа 8.5, задача 1
 — гомотетическое 5.1
 —, график 1.4
 —, дифференцируемое 8.1
 — — дважды, ..., p раз 8.12
 — — по n -й переменной 8.9
 — значение 1.4
 — инъективное 1.6
 — касательное в точке 8.1
 — квазидифференцируемое 8.4, за-
 дача 4
 — кусочно-линейное 8.7
 — линейное 5.7
 — монотонное 4.2
 — непрерывно дифференцируемое 8.9
 — непрерывное 3.11
 — несущественное 9Д.2
 —, обратное к биективному 1.6
 — ограниченное 2.3, 7.1
 — — сверху, снизу 2.3
 — постоянное 1.4
 —, продолжение 1.4
 — равномерно непрерывное 3.11
 — симметрическое 6.1
 — сложное 1.7
 — строго убывающее, строго возрас-
 тающее, строго монотонное 4.2
 — существенное 9Д.2
 — сюръективное 1.4
 — тождественное 1.4
 — убывающее 4.2
 — четное 8.14, задача 6
 — ядро 11.6
- Отрицательная действительная полу-
 прямая 9.5, задача 8
 — часть действительного числа 2.2
 Отрицательное число 2.2
- Параллельная гиперплоскость 5.8,
 задача 3
 Пара упорядоченная 1.3
 Парсевали равенство 6.5
 — тождество 6.5
 Пеано кривая 4.2, задача 5; 9.12,
 задача 5
 Пеано теорема 10.5, задача 4
 Первичный множитель 9.12, задача 1
 Первообразная 8.7
 Перенесенное расстояние 3.3
 Пересечение двух множеств 1.2
 — семейства множеств 1.8
 Петельная гомотопия 9.6; 10.2,
 задача 6
 Петля 9.6; 10.2, задача 6
 — простая 9Д.4
 Пикара теорема 10.3, задача 8
 Пифагора теорема 6.2
 Подготовительная теорема Вейер-
 штрасса 9.17, задача 4
 Подмножество 1.1
 — абсолютно суммируемое 5.3
 —, отделяющее точки пространства
 7.3; 9Д.3
 — пустое 1.1
 Подпоследовательность 3.13
 — диагональная 9.13
 — полная 11.5, задача 8
 Подпространство векторного про-
 странства 5.4
 — метрического пространства 3.10
 — нормированного пространства 5.4
 — собственное, соответствующее дан-
 ному собственному значению 11.1
 Подсемейство 1.8
 Подстановка степенного ряда в сте-
 пенной ряд 9.2
 Показательная функция 4.3; 9.5
 Покрытие множества 1.8
 — открытое 3.16
 — точечно-конечное открытое 3.16,
 задача 2
 Поле 2.1
 — комплексных чисел 4.4
 — упорядоченное 2.1
 — — архimedово 2.1
 Полиномы Лежандра 6.6; 8.14,
 задача 1
 Полицилиндр замкнутый, открытый
 9.1
 — его центр, его радиус 9.1

- Полная последовательность 11.5,
задача 8
— — особых значений вполне непрерывного оператора 11.5, задача 15
— — положительных собственных значений 11.5, задача 8
— производная 8.1
Полное пространство 3.14
Положительная часть действительного числа 2.2
— эрмитова форма 6.2
Положительное число 2.2
Положительно определенная эрмитова форма 6.2
Положительный эрмитов оператор 11.5
Полуоткрытый промежуток 2.1
Полюс аналитической функции 9.15
Порядок аналитической функции в точке 9.15
— линейного дифференциального оператора 8.13
— полюса 9.15
Последовательность 1.8
— Коши 3.14
— предел 3.13
— предельная точка 3.13
— просто сходящаяся 7.1
— равномерно сходящаяся 7.1
— сходящаяся 3.13
Постоянная Блоба 10.3, задача 5
Постоянное отображение 1.4
Правая производная 8.4
Правило Лейбница 8.11
Правильная граничная точка аналитической функции 9.15, задача 7
Предгильбертово пространство 6.2
Предел односторонний 7.6
— слева, справа 7.6
— функции, последовательности 3.13
Предельная точка последовательности 3.13
Приближенное ε -решение дифференциального уравнения 10.5
Принадлежность 1.1
Принцип аналитического продолжения 9.4
— изолированности нулей 9.1
— максимума 9.5
— минимаксный 11.5, задача 8; 11.7, задача 2
— продолжения неравенства 3.15
— тождество 3.15
— Фрагмена — Линделефа 9.5, задача 16
Продолжение аналитическое 9.4
— непрерывного оператора 11.1, задача 5
Продолжение отображения 1.4
Проекция в произведении 1.4
— в прямой сумме 5.4
— ортогональная 6.3
— первая, вторая, ..., n -я 1.3
Произведение метрических пространств 3.20; 3.20, задача 7
— множеств 1.3
— нормированных пространств 5.4
— скалярное 6.2
Производная функции в открытом множестве, в точке 8.1; 8.4
— — вторая, ..., r -я 8.12
— — левая, правая 8.4
— — относительно множества 8.4
— — промежутка 8.12
— — полная 8.1
— — частная 8.9
Промежуток, длина, конец, начало 2.1
— замкнутый, открытый, полуоткрытый 2.1
Прообраз 1.5
Простая дуга, простая замкнутая кривая, простая петля, простая траектория 9.4
— функция 7.6
Просто сходящаяся последовательность, просто сходящийся ряд 7.1
Пространство базисное 5.1
— Банаха 5.3, задача 5; 5.7, задача 1; 8.9, задача 2
— банахово 5.1
— векторное, см. Векторное пространство
— вполне ограниченное 3.16
— гильбертово 6.2
— компактное 3.16
— локально компактное 3.18
— — связное 3.19
— метрическое, см. Метрическое пространство
— непрерывных линейных отображений 5.7
— нормированное 5.1
— ограниченных отображений 6.1
— полное 3.14
— предгильбертово 6.2
— связное 3.19
— сепарабельное 3.9
Противоположная траектория 9.6
Процесс ортогонализации 6.6
Прямоугольник 5.5, задача 4
Пустое множество 1.1
Путь 9.6
— бесконечный 9.12, задача 3

- Равенство 1.1**
 — Парсеваля 6.5
Равномерно непрерывная функция (отображение) 3.11
 — равностепенно непрерывное множество 7.5, задача 5
 — сходящаяся последовательность, равномерно сходящийся ряд 7.1
 — эквивалентные расстояния 3.14
Равномощные множества 1.9
Равностепенная непрерывность в точке, равностепенная непрерывность 7.5
Радиус сходимости степенного ряда 9.1, задача 1
 — шара 3.4
Радиусы полицилиндра 9.1
Размерность линейного многообразия 5.1, задача 5
Разность двух множеств 1.2
Разрез плоскости 9Д.3
Ранг линейного отображения 10.3
Расстояние 3.1
 — более сильное 3.12
 — индуцированное 3.10
 — между двумя множествами 3.4
 — — — элементами множества 3.1
 — — — точкой и множеством 3.4
 — p -адическое 3.2
 — перенесенное 3.3
 — хаусдорфово 3.16, задача 3
 — евклидово 3.2
Расстояния равномерно эквивалентные 3.14
 — топологически эквивалентные 3.12
 — эквивалентные 3.12
Расширенная действительная прямая 3.3
Рациональное число 2.2
Регуляризация 8.12, задача 2
Регулярное значение оператора 11.1
Резольвента линейного дифференциального уравнения 10.8
Решение обыкновенного дифференциального уравнения 10.4; 11.7
 — — — линейного 10.8
 — — — — максимальное, минимальное 10.5, задача 7
 — — — — ε -приближенное 10.5
 — фундаментальное (элементарное) задачи Штурма — Лиувилля 11.7
Решетка 9Д.4
Римана суммы 8.7, задача 1
Рисса теорема 5.9
 — теория 11.3
Риссовская точка 11.4, задача 5
Риссовский оператор 11.4, задача 5
Ролля теорема 8.2, задача 4
- Руже теорема 9.17**
Ряд 5.2
 — абсолютно сходящийся 5.3
 — — — ассоциативность и коммутативность 5.3
 — — — производная 5.3
 — коммутативно сходящийся 5.3, задача 4
 — Лорана 9.14
 — n -я частичная сумма, n -й член, n -й остаток 5.2
 — просто сходящийся 7.1
 — равномерно сходящийся 7.1
 — степенной 9.1
 — — — радиус сходимости 9.1, задача 1
 — — — сумма 5.2
 — сходящийся 5.2
 — — — нормально 7.1
 — Фурье 11.6, задача 2
- Самосопряженный оператор 11.5**
Свойство Лебега 3.16, задача 1
Связное множество, пространство 3.19
Сдвиг 5.1
Сегмент 5.1, задача 4; 8.5
Семейство абсолютно суммируемое 1.8
 — не более чем счетное 1.9
 — нормально суммируемое 7.1
 — счетное 1.9
 — элементов 1.8
Сепарабельное метрическое пространство 3.9
Симметрическая билинейная форма 6.1
Симметричное отображение 6.1
Симпсона формула 8.14, задача 10
Система линейных дифференциальных уравнений 10.6
 — окрестностей фундаментальная 3.6
 — ортогональная 6.5
 — ортонормальная 6.5
 — тригонометрическая 6.5
Скаляр 9.1
Скалярное произведение 6.2
Сложное отображение 1.7
Собственная функция ядра 11.6
Собственное значение задачи Штурма — Лиувилля 11.7
 — — — оператора 11.1
 — подпространство, соответствующее данному собственному значению 11.1
Собственный вектор оператора 11.1
Соединение двух траекторий 9.6
Сопряженное комплексное число 4.4
Сопряженный оператор 11.5
Спектральное значение оператора 11.1

- Спектр оператора 11.1
 Степенная функция 4.3
 Степенной ряд 9.1
 Стоуна — Вейерштрасса теорема 7.3
 Строгий относительный максимум 3.9,
 задача 6
 Строгое отрицательное, строгое положительное число 2.2
 — убывающее, строго возрастающее, строго монотонное отображение 4.2
 Ступенчатая функция 7.6
 Сужение отображения 1.4
 Сумма абсолютно суммируемого семейства 5.3
 — гильбертова 6.4
 — прямая 5.4
 — Римана 8.7, задача 1
 — ряда 5.2
 — топологическая прямая 5.4
 Существенно особая точка, существенная особенность 9.15
 Существенное отображение 9Д.2
 Сфера 3.4
 Сходящаяся последовательность 3.13
 Сходящийся ряд 5.2
 Счетное множество, семейство 1.9
 Сюръективное отображение 1.6
- Таубера теорема 9.3, задача 2
 Тейлора формула 8.14
 Теорема Абеля 9.3, задача 1
 — Адамара о лакунах 9.15, задача 7
 — — о трех окружностях 9.5,
 задача 10
 — Асколи 7.5
 — Больцано 3.19
 — Бореля — Лебега 3.17
 — Брауэра 10.2, задача 3
 — Вейерштрасса об аппроксимации 7.4
 — — о существенных особенностях 9.15, задача 2
 — — подготовительная 9.17, задача 4
 — Гурса 9.10, задача 1
 — Дини 7.2
 — Жордана 9Д.4
 — Коши 9.6
 — Лиувилля 9.11
 — Мерсера 11.6
 — Морера 9.10, задача 2
 — о вычетах 9.16
 — о конформном отображении 10.3,
 задача 4
 — о неподвижной точке 10.1
 — о неявной функции 10.2
 — о ранге 10.3
 — о среднем значении 8.5
- Теорема о среднем значении вторая 8.7, задача 2
 — Пеано 10.5, задача 4
 — Пикара 10.3, задача 8
 — Пифагора 6.2
 — Рисса 5.9
 — Ролля 8.2, задача 4
 — Руше 9.17
 — Стоуна — Вейерштрасса 7.3
 — существование Коши 10.4
 — Таубера 9.3, задача 2
 — Титце — Урысона 4.5
 — Фробениуса 10.9
 — Хартогса 9.9, задача 3
 — Шенфлиса 9Д.4, задача 9
 — Шоттки 10.3, задача 6
 — Янишевского 9Д.3
 Теория Рисса 11.3
 Титце — Урысона теорема о продолжении 4.5
 Тождественное отображение 1.4
 Тождество Парсеваля 6.5
 Топологическая прямая сумма, топологическое прямое слагаемое 5.4
 Топологически эквивалентные расстояния 3.12
 Топологическое дополнение 5.4
 — понятие 3.12
 Топология 3.12
 — более сильная 3.12
 Тотальное множество (семейство) 5.4
 Точечно-конечное открытое покрытие 3.16, задача 2
 Точка 3.4
 — бесконечная 3.3
 — внешняя 3.7
 — внутренняя 3.7
 — граничная 3.8
 — изолированная 3.9, задача 2; 9.15
 — конденсация 3.9, задача 4
 — особая изолированная 9.15
 — — граничная 9.15, задача 7
 — правильная граничная 9.15,
 задача 7
 — предельная 3.13
 — прикосновения множества 3.8
 — риссовская 11.4, задача 5
 — существенно особая 9.15
 Точки, соединенные ломаной линией 5.1, задача 4
 Траектории гомотопные 9.6; 10.2,
 задача 6
 Траектория 9.6; 10.2, задача 6
 —, ее конец, ее начало 9.6
 — прямая 9Д.4
 — противоположная 9.6
 —, сводящаяся к точке 9.6

- Трансцендентная целая функция 9.15,
задача 3
- Тригонометрическая система 6.5
- Тригонометрические многочлены 7.4
- Убывающая функция** 4.2
- Ультраметрическое неравенство 3.8,
задача 4
- Упорядоченная пара 1.3
- Упорядоченное поле 2.1
— архимедово поле 2.1
- Уравнение вполне интегрируемое
10.9
- гиперплоскости 5.8
- дифференциальное, см. Дифферен-
циальное уравнение
- с частными производными 10.9
- Фредгольма 11.6
- Условие Липшица 8.4, задача 7; 10.5
- Условия Коши — Римана 9.10
- Фактор-размерность**, см. Коразмер-
ность
- Форма линейная 5.8
— симметрическая билинейная 6.1
- эрмитова; см. Эрмитова форма
- Формула Коши 9.9
— Лагранжа 10.2, задача 10
- Лейбница 8.13
- Симпсона 8.14, задача 10
- Тейлора 8.14
- Фрагмена — Линделефа принцип 9.5,
задача 16
- Фредгольма альтернатива 11.6
— уравнение 11.6
- Фробениуса теорема 10.9
- Фундаментальная матрица решений
10.8
— система окрестностей 3.6
- Фундаментальное решение 11.7
- Функции, совпадающие на подмноже-
стве 1.4
- Функциональное отношение 1.4
- Функциональный график 1.4
- Функция, см. Отображение
— Грина для задачи Штурма — Лиу-
виля 11.7
— Дирихле 3.11
— ее колебание 3.14
- лебегова (n -я) 11.6, задача 2
- липшицевская 10.5
- люкально липшицевская 10.4
- мажорируемая 2.3
- мероморфная 9.17
- минорируемая 2.3
- Функция несобственно интегрируе-
мая вдоль бесконечного пути 9.12
задача 3
- показательная 4.3, 9.5
- простая 7.6
- собственная 11.6
- с ограниченной вариацией 7.6,
задача 3
- степенная 4.3
- ступенчатая 7.6
- трансцендентная целая 9.15,
задача 3
- целая 9.3
- Фурье коэффициент (n -й) 6.5; 11.6,
задача 3
- ряд 11.6, задача 2
- Хаара ортонормальная система** 8.7,
задача 7
- Характеристический многочлен 11.1
- Хартогса теорема 9.9, задача 3
- Хаусдорфово расстояние между дву-
мя множествами 3.16, задача 3
- Целая функция** 9.3
— трансцендентная функция 9.15,
задача 3
- Целое число** 2.2
- Центр полицилиндра 9.1
— шара 3.4
- Частичная сумма** (n -я) ряда 5.2
- Частная производная 8.9
- Четное отображение 8.14, задача 6
- Число действительное, см. Действи-
тельное число
- дробное, отрицательное, положи-
тельное 2.2
- комплексное, см. Комплексное
число
- рациональное 2.2
- строго отрицательное, строго полу-
жительное 2.2
- целое 2.2
- чисто мнимое 4.4
- Шаг решетки** 9Д.4, задача 4
- Шар, его радиус, его центр 3.4
— замкнутый, открытый 3.4
- Шаровой слой 9.11, задача 5
- Шварца лемма 9.5, задача 7
- Шенфлиса теорема 9Д.4, задача 9
- Шоттки теорема 10.3, задача 6
- Штурма — Лиувилля задача 11.7

-
- Эвклидово расстояние 3.2
 - Эйленберга критерий 9.3
 - Эйлера постоянная 9.12, задача 2
 - Эквивалентные нормы 5.6
 - пути 9.6
 - расстояния 3.12
 - Экспоненты 4.3
 - Элементарное (фундаментальное) решение задачи Штурма — Лиувилля 11.7
 - Элемент 1.1
 - наибольший, наименьший 2.2
 - принадлежащий множеству 1.1
 - Эрмитов оператор 11.5
 - невырождающийся 11.5
 - положительный 11.5
 - Эрмитова норма 9.5, задача 7
 - форма 6.1
 - вырождающаяся 6.1
 - положительная 6.2
 - положительно-определенная 6.2
 - Ядро Вольтерра 11.6, задача 8
 - отображения 11.6
 - Янишевского теорема 9Д.3

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Обозначения	8
Глава 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ	13
1. Элементы и множества. 2. Булевская алгебра. 3. Произведение двух множеств. 4. Отображения. 5. Образы и прообразы. 6. Сюръективные, инъективные и биективные отображения. 7. Композиция отображений. 8. Семейства элементов. Объединение и пересечение семейств множеств. 9. Счетные множества.	
Глава 2. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА	28
1. Аксиомы действительных чисел. 2. Порядковые свойства действительных чисел. 3. Верхняя и нижняя грани.	
Глава 3. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА	40
1. Расстояния и метрические пространства. 2. Примеры расстояний. 3. Изометрия. 4. Шары, сферы, диаметр. 5. Открытые множества. 6. Окрестности. 7. Внутренность множества. 8. Замкнутые множества, точки прикосновения, замыкание множества. 9. Плотные подмножества; сепарабельные пространства. 10. Подпространства метрического пространства. 11. Непрерывные отображения. 12. Гомеоморфизмы. Эквивалентные расстояния. 13. Пределы. 14. Последовательности Коши. Полные пространства. 15. Элементарные теоремы о продолжении. 16. Компактные пространства. 17. Компактные множества. 18. Локально компактные пространства. 19. Связные пространства и связные множества. 20. Произведение двух метрических пространств.	
Глава 4. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПРЯМОЙ	94
1. Непрерывность алгебраических операций. 2. Монотонные функции. 3. Логарифмы и показательная функция. 4. Комплексные числа. 5. Теорема Титце — Урысона о продолжении.	

Г л а в а 5. НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА	108
1. Нормированные пространства и банаховы пространства. 2. Ряды в нормированном пространстве. 3. Абсолютно сходящиеся ряды.	
4. Подпространства и конечные произведения нормированных пространств. 5. Критерий непрерывности полилинейного отображения.	
6. Эквивалентные нормы. 7. Пространства непрерывных полилинейных отображений. 8. Замкнутые гиперплоскости и непрерывные линейные формы. 9. Конечномерные нормированные пространства.	
10. Сепарабельные нормированные пространства.	
Г л а в а 6. ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА	136
1. Эрмитовы формы. 2. Положительные эрмитовы формы. 3. Ортогональная проекция на полное подпространство. 4. Гильбертова сумма гильбертовых пространств. 5. Ортонормальные системы.	
6. Ортонормализация.	
Г л а в а 7. ПРОСТРАНСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ	152
1. Пространства ограниченных функций. 2. Пространства ограниченных непрерывных функций. 3. Теорема Стоуна — Вейерштрасса об аппроксимации. 4. Приложения. 5. Равностепенно непрерывные множества. 6. Простые функции.	
Г л а в а 8. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ	170
1. Производная непрерывного отображения. 2. Формальные правила дифференцирования. 3. Производные в пространствах непрерывных линейных функций. 4. Производные функций одной переменной. 5. Теорема о среднем значении. 6. Приложения теоремы о среднем значении. 7. Первообразные и интегралы. 8. Приложение: число e . 9. Частные производные. 10. Якобианы. 11. Производная интеграла, зависящего от параметра. 12. Производные высшего порядка. 13. Дифференциальные операторы. 14. Формула Тейлора.	
Г л а в а 9. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ	225
1. Степенные ряды. 2. Подстановка степенных рядов в степенной ряд. 3. Аналитические функции. 4. Принцип аналитического продолжения. 5. Примеры аналитических функций; показательная функция. Число π . 6. Интегрирование вдоль пути. 7. Первообразная аналитической функции в односвязной области. 8. Индекс точки относительно контура. 9. Формула Коши. 10. Критерий аналитичности функций комплексных переменных. 11. Теорема Лиувилля. 12. Сходящиеся последовательности аналитических функций.	

13. Равностепенно непрерывные множества аналитических функций.	
14. Ряд Лорана. 15. Изолированные особые точки; полюсы; нули; вычеты. 16. Теорема о вычетах. 17. Мероморфные функции.	
Добавление к главе 9. ПРИЛОЖЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ К ТОПОЛОГИИ ПЛОСКОСТИ	289
1. Индекс точки относительно петли. 2. Существенные отображения в единичную окружность. 3. Разрезы плоскости. 4. Простые дуги и простые замкнутые кривые.	
Глава 10. ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ	304
1. Метод последовательных приближений. 2. Неявные функции. 3. Теорема о ранге. 4. Дифференциальные уравнения. 5. Сравнение решений дифференциальных уравнений. 6. Линейные дифференциальные уравнения. 7. Зависимость решения от параметров. 8. Зависимость решения от начальных условий. 9. Теорема Фробениуса.	
Глава 11. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ	361
1. Спектр непрерывного оператора. 2. Вполне непрерывные операторы. 2. Теория Ф. Рисса. 4. Спектр вполне непрерывного оператора. 5. Вполне непрерывные операторы в гильбертовых пространствах. 6. Интегральное уравнение Фредгольма. 7. Задача Штурма — Лиувилля.	
Литература	415
Предметный указатель	417