Пространство $G$ можно отождествить с подпространством пространства $F_+$, изменяя значение непрерывной функции $f \in G$ в точке $b$. Легко доказать [пользуясь (7.6.1)], что $G$ плотно в $F_+$. Рассуждение, проведенное в примере (11.2.8), тогда показывает, что $U$ есть вполне непрерывное отображение пространства $F_+$ в банахово пространство $E = \mathscr{C}_{\mathbf{C}}(I)$ (и тем более вполне непрерывное отображение предгильбертова пространства $F_+$ в себя). Все результаты, доказанные для оператора $U$ в $G$, остаются справедливыми (вместе с их доказательствами), если $G$ заменить на $F_+$.

## Задачи

1. Распространите результаты § 11.6 [за исключением теоремы (11.6.7)] на случай, когда $K(s, t)$ удовлетворяет предположениям задачи 4 § 8.11. [Воспользуйтесь этой задачей, а также задачей 5 § 11.2.]

2. Пусть $(f_n)$ — тотальная ортонормальная система (6.5) в предгильбертовом пространстве $G$ (11.6). Пусть $K_n(s, t) = \sum_{k=1}^{n} f_k(s)\overline{f_k(t)}$ и пусть $H_n(s) = \int_a^b |K_n(s, t)|\,dt$ (*n-я лебегова функция* ортонормальной системы $(f_n)$). Для любой функции $g \in G$ пусть $s_n(g) = \sum_{k=1}^{n} (g \mid f_k) f_k$, так что $s_n(g)(x) = \int_a^b K_n(x, t)\, g(t)\, dt$ для любой точки $x \in I$.

а) Докажите, что если для некоторой точки $x_0 \in I$ не ограничена последовательность $(H_n(x_0))$, то существует функция $g \in G$, для которой не ограничена последовательность $(s_n(g)(x_0))$.

[Допустите противное и покажите, что в этом случае можно определить строго возрастающую последовательность натуральных чисел $(n_k)$ и последовательность $(g_k)$ функции из $G$, обладающие следующими свойствами:

1°). Пусть $c_h = \sup_n \left| \int_a^b K_n(x_0, t)\, g_h(t)\, dt \right|$ (число, которое по предположению конечно), пусть $d_k = c_1 + c_2 + \ldots + c_{k-1}$, пусть $m_k = \int_a^b |K_{n_k}(x_0, t)|\,dt$ и пусть $q_k = \max(m_1, \ldots, m_{k-1})$; тогда $m_k \geqslant 2^{k+1}(q_k + 1)(d_k + k)$.

2°). Пусть $\varphi_k$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условиям $\varphi_k(a) = \varphi_k(b) = 0$, $|\varphi_k(t)| \leqslant 1$ в $I$ и $\left| \int_a^b K_{n_k}(x_0, t)\, \varphi_k(t)\, dt \right| \geqslant m_k/2$ (см. задачу 8 § 8.7); тогда $g_k = \varphi_k/2^k(q_k + 1)$.

Затем покажите, что функция $g=\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ непрерывна в $I$, что противоречит предположению. Чтобы оценить интеграл $\int_a^b K_{n_k}(x_0, t)\, g(t)\, dt$, разложите функцию $g$ в сумму $\sum_{i<k} g_i + g_k + \sum_{i>k} g_i$, проминорируйте второй интеграл и промажорируйте два других (метод скользящего горба).]

b) Покажите, что для тригонометрической системы (6.5) на промежутке $I=[-1, 1]$ $n$-я лебегова функция есть постоянная $h_n$ и что $\lim_{n\to\infty} h_n = +\infty$.

$$\left[\text{Заметьте, что } \int_{(k-1)/n}^{k/n} \left|\frac{\sin n\pi t}{\sin \pi t}\right| dt \geqslant 2/k\pi \text{ при } 2 \leqslant k \leqslant n.\right]$$

Заключите отсюда, что для любой точки $x_0 \in I$ существует такая непрерывная функция $g$ в промежутке $I$, что $g(-1)=g(1)=0$ и что частичные суммы $\sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1} g(t)\, e^{-ik\pi t}\, dt\right) e^{ik\pi x}$ „ряда Фурье" функции $g$ при $x=x_0$ не ограничены.

3. Пусть $g$ — непрерывная комплексная функция в промежутке $I=[-1, 1]$, удовлетворяющая условиям $g(-1)=g(1)=0$. Функцию $g$ можно продолжить в непрерывную функцию периода 2 в $\mathbf{R}$. Пусть $K(s, t)$ — сужение функции $g(s-t)$ на $I\times I$. Если $g(-t)=\overline{g(t)}$, то вполне непрерывный оператор $U$, определенный ядром $K(s, t)$, является самосопряженным. Покажите, что функции $\varphi_n(t)=e^{n\pi i t}/\sqrt{2}$ являются собственными векторами оператора $U$, причем соответствующее собственное значение есть „коэффициент Фурье" $a_n=\int_{-1}^{1} g(t)\, e^{-n\pi i t}\, dt$ функции $g$.

Пользуясь этим результатом и задачей 2, приведите пример эрмитова ядра $K$, для которого ряд с общим членом $\lambda_n \overline{\varphi_n(s)}\, \varphi_n(t)$ имеет частичные суммы, неограниченные при некоторых значениях $s$ и $t$, и пример положительного эрмитова ядра $K$, для которого существует такая функция $f \in G$, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (f \mid \varphi_n)\, \varphi_n(t)$ имеет частичные суммы, неограниченные при некоторых значениях $t$.

4. Пусть $I=[-2\pi, 2\pi]$ и пусть ядро $K(s, t)$ в $I\times I$ при $0 \leqslant s \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ равно сумме абсолютно сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin ns \cdot \sin nt$, а при остальных значениях $(s, t) \in I\times I$ равно 0. Приведите пример функ-

ции $f \in G$, в каноническом разложении которой функция $f_0$ не принадлежит $G$.

[Собственными функциями ядра $K$ являются функции $\varphi_n$, определяемые следующим образом: $\varphi_n(t) = 0$ при $-2\pi \leqslant t \leqslant 0$ и $\varphi_n(t) = (\sin nt)/\sqrt{\pi}$ при $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Возьмите в качестве $f$ функцию, непрерывную в $I$ и равную $2\pi - t$ в промежутке $[0, 2\pi]$, и покажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (f \mid \varphi_n)\varphi_n(t)$ сходится всюду в $I$, но имеет разрывную сумму.]

5. Пусть в обозначениях 11.6 $K$ есть эрмитово ядро, определенное в $I \times I$, и пусть $U$ — соответствующий самосопряженный вполне непрерывный оператор в $G$. Покажите, что для каждого $h > 0$ оператор $U^h$ соответствует эрмитову ядру $K_h$, которое индуктивно определяется условиями: $K_1 = K$ и

$$K_h(s, t) = \int_a^b K_{h-1}(s, u) K(u, t)\, du.$$

Докажите, что при $h \geqslant 2$ имеем $K_h(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^h \overline{\varphi_n(s)}\, \varphi_n(t)$, где ряд абсолютно и равномерно сходится в $I \times I$. Покажите, кроме того, что $A_h = \int_a^b ds \int_a^b |K_h(s, t)|^2\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^{2h}$ и что последовательность $(A_{h+1}/A_h)$ возрастает и имеет предел, равный $|\lambda_1|^2$, где $\lambda_1$ — собственное значение ядра $K$, имеющее максимальную абсолютную величину.

[Воспользуйтесь неравенством Коши — Шварца.]

6. Пусть в обозначениях 11.6 $K$ — произвольное непрерывное ядро в $I \times I$ и пусть $U$ — соответствующий вполне непрерывный оператор в $G$. Пусть $M$ — конечномерное подпространство пространства $G$, для которого $U(M) \subset M$, и пусть $(\psi_h)_{1 \leqslant h \leqslant n}$ — ортонормальный базис пространства $M$. Положим $U\psi_h = \sum_{k=1}^{n} a_{hk}\psi_k$. Покажите, что $\sum_{h,k} |a_{hk}|^2 \leqslant \int_a^b dt \int_a^b |K(s, t)|^2\, ds$.

[Для каждой точки $t \in I$ примените к функции $s \to K(s, t)$ и ортонормальной системе $(\psi_h)$ в $G$ неравенство Бесселя (6.5.2).]

Пусть $(\lambda_n)$ — последовательность, определенная (для оператора $U$) в задаче 15, c) § 11.5. Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2$ сходится и что $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 \leqslant$
$\leqslant \int_a^b dt \int_a^b |K(s, t)|^2\, ds$.

[Примените предыдущий результат к любой сумме подпространств $N(\mu_k)$ в обозначениях задачи 15, c) § 11.5.]

7. Приведите пример такого эрмитова ядра $K(s, t)$, чтобы, если $U$ — соответствующий вполне непрерывный оператор в $G$ и $V$ — квадратный

корень из $U^2$ (задача 12 § 11.5), не существовало эрмитова ядра, которому соответствует вполне непрерывный оператор $V$.

[Если бы такое ядро существовало, то к нему была бы применима теорема Мерсера (11.6.7). Возьмите тогда в качестве $K$ ядро из первого примера задачи 3.]

8. Ядро $K(s, t)$, определенное в $I \times I$ (где $I = [a, b]$) и удовлетворяющее предположениям задачи 4 § 8.11, называется *ядром Вольтерра*, если $K(s, t) = 0$ при $s > t$. Пусть $M = \sup\limits_{(s, t) \in I \times I} |K(s, t)|$. Покажите, что если $U$ — вполне непрерывный оператор в $G$, соответствующий $K$ (задача 1), то оператор $U^n$ соответствует ядру Вольтерра $K_n$, удовлетворяющему условию $|K_n(s, t)| \leqslant M^n (t-s)^{n-1}/(n-1)!$ при $n > 1$ и $s \leqslant t$.

[Проведите индукцию по $n$.]

Выведите из этого утверждения, что спектр оператора $U$ сводится к 0 и что для любого числа $\zeta \in \mathbf{C}$ имеем оценку $\|(1-\zeta U)^{-1} - 1\| \leqslant \leqslant M|\zeta| e^{M(b-a)|\zeta|}$.

## 7. Задача Штурма — Лиувилля

Рассмотрим в компактном промежутке $I = [a, b] \subset \mathbf{R}$ линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' - q(x)y + \lambda y = f(x), \tag{11.7.1}$$

где $q(x)$ — действительная непрерывная функция в $I$, $f(x)$ — комплексная простая функция в $I$, непрерывная всюду, за исключением конечного числа внутренних точек, и $\lambda$ — комплексное число. Под *решением* уравнения (11.7.1) понимают непрерывно дифференцируемую комплексную функцию $y(x)$, производная $y'(x)$ которой является первообразной некоторой простой функции, имеющей лишь конечное число точек разрыва, и для которой соотношение

$$y''(x) - q(x)y(x) + \lambda y(x) = f(x)$$

выполняется в дополнении в $\mathring{I}$ некоторого конечного подмножества $\check{I}$.

*Задача Штурма — Лиувилля* состоит в нахождении решения, удовлетворяющего, кроме того, двум *граничным условиям*

$$h_1 y(a) + k_1 y'(a) = 0, \quad h_2 y(b) + k_2 y'(b) = 0, \tag{11.7.2}$$

где $h_1$, $k_1$, $h_2$ и $k_2$ — действительные числа, причем $h_i$ и $k_i$ одновременно не равны 0 ($i = 1, 2$).

Мы будем в дальнейшем предполагать известной элементарную теорию линейных дифференциальных уравнений [см. (10.8)]. Сначала

мы рассмотрим однородное уравнение, получающееся из (11.7.1) при $f(x)=0$:

**(11.7.3)** $$y''-q(x)y+\lambda y=0.$$

Заметим, что вторая производная $y''$ любого решения этого уравнения непрерывна в $I$.

**(11.7.4)** *Существует такое число $r>0$, что если число $\lambda$ действительно и $\leqslant -r$, то единственное решение уравнения* (11.7.3), *удовлетворяющее граничным условиям* (11.7.2), *есть* 0.

Так как $q$, $\lambda$ и все $h_i$ и $k_i$ действительны, то ясно, что если какое-либо решение уравнения (11.7.3) удовлетворяет условиям (11.7.2), то его действительная и мнимая части также являются решениями, удовлетворяющими тем же граничным условиям. Таким образом, мы можем ограничиться действительными решениями.

Предположим сперва, что $k_1k_2\neq 0$, так что мы можем считать $k_1=k_2=-1$. Тогда можно считать, что $y(a)\neq 0$, так как в противном случае мы имели бы $y'(a)=0$, и в силу теоремы существования наша теорема была бы доказана. Умножая, если потребуется, $y$ на подходящую константу, мы можем, таким образом, предполагать, что $y(a)=1$ и $y'(a)=h_1$.

Если мы положим $z=y'/y$ при $y(x)\neq 0$, то получим уравнение

(11.7.4.1) $$z'=q(x)-\lambda-z^2.$$

Пусть $M=\sup\limits_{x\in I}|q(x)|$ и допустим, что $\lambda\leqslant -M-h_1^2-1$. Тогда мы будем иметь $z'(a)=q(a)-\lambda-h_1^2\geqslant 1$ и, следовательно, функция $z$ строго возрастает в некоторой окрестности точки $a$ в $I$. Убедимся, что $y(x)\neq 0$ в $I$ и что $z(x)>h_1$ во всех точках $x>a$. Допустим сначала, что $y(x)$ обращается в промежутке $I$ в 0, и пусть $x_1$ — наименьшее решение $>a$ уравнения $y(x)=0$. Тогда $y(x)>0$ при $a\leqslant x<x_1$, и поэтому производная $y'(x_1)<0$ (она не может быть равна 0, так как иначе функция $y$ была бы тождественно равна 0 в промежутке $I$). Поскольку при всех $x\in I$ выполняется неравенство $q(x)-\lambda>0$ при $a\leqslant x<x_1$, мы в силу (11.7.3) имеем $y''(x)>0$. Поэтому производная $y'$ при $a\leqslant x<x_1$ убывает и, значит, на этом промежутке она $<0$. Отсюда следует, что когда $x<x_1$ стремится к $x_1$, то $z(x)$ стремится к $-\infty$. Так как функция $z$ при $a\leqslant x<x_1$ непрерывна, на этом промежутке должно найтись наименьшее такое число $x_2>a$, что $z(x_2)=h_1$ и $h_1<z(x)$ при $a<x<x_2$. Отсюда вытекает, что $z'(x_2)\leqslant 0$. Но $z'(x_2)=q(x_2)-\lambda-h_1^2\geqslant 1$, и мы пришли к противоречию, которое доказывает оба наших утверждения. Точно так же мы убеждаемся в том, что если $\lambda\leqslant -M-h_2^2-1$, то $z(x)\leqslant h_2$ в $I$. Итак, функция $z$ должна в $I$ удовлетворять условию $|z(x)|\leqslant c=\max(|h_1|,\ |h_2|)$, где $c$ не зависит от $\lambda$.

Теперь из (11.7.4.1) мы находим $z'(x) \geqslant -M-\lambda-c^2=\mu$; поэтому по теореме о среднем значении $h_2-h_1=z(b)-z(a) \geqslant \mu(b-a)$. Если мы выберем $\lambda$ так, чтобы

$$\lambda \leqslant -M-c^2-\frac{|h_2-h_1|}{b-a}-1,$$

то мы придем к противоречию, и это завершает доказательство теоремы (11.7.4) в случае, когда $k_1k_2 \neq 0$.

Предположим теперь, что $k_1=0$, а $k_2 \neq 0$ (поэтому мы можем считать, что $k_2=-1$). В этом случае (умножая, если потребуется, $y$ на подходящую константу) мы можем предполагать, что $y(a)=0$ и $y'(a)=1$. Тогда если $x>a$ стремится к $a$, то $z$ стремится к $+\infty$. Допустим, что $\lambda \leqslant -M-2$. Прежде всего покажем, что $y'(x) \geqslant 1$ в $I$. Так как в силу (11.7.3) в некоторой окрестности точки $a$ при $x>a$ выполняется неравенство $y''(x)>0$, то в этой окрестности при $x>a$ мы будем иметь $y'(x)>1$. Допустим, что $y'(x)=1$ для некоторых $x>a$, и пусть $x_1$ — наименьшее решение этого уравнения. Тогда при $a<x \leqslant x_1$ будет $y'(x) \geqslant 1$. Следовательно, $y(x)>0$ на этом промежутке, и, значит, в силу (11.7.3) $y''(x)>0$. Но, с другой стороны, мы должны иметь $y''(x_1) \leqslant 0$, что приводит к противоречию. Таким образом, мы видим, что функция $y$ строго возрастает в промежутке $I$, и поэтому функция $z$ при $a<x \leqslant b$ конечна.

Далее, убедимся, что $z(x)>\sqrt{-M-\lambda-1}$. В противном случае нашлось бы наименьшее $x_2$, для которого $z(x_2)=\sqrt{-M-\lambda-1}$, и в этой точке мы должны были бы иметь $z'(x_2) \leqslant 0$. Но из (11.7.4.1) следует, что $z'(x_2) \geqslant -M-\lambda-z^2(x_2) \geqslant 1$, и мы снова приходим к противоречию. Если теперь мы предположим, что $\lambda$ выбрано так, что $h_2^2<-M-\lambda-1$, то найдем, что равенство $z(b)=h_2$ будет невозможно. Поэтому теорема доказана.

Случай, когда $k_2=0$, а $k_1 \neq 0$, рассматривается аналогично. Наконец, если $k_1=k_2=0$, то снова мы можем считать, что $y(a)=0$ и $y'(a)=1$, и только что проведенное рассуждение показывает, что при $\lambda \leqslant -M-2$ функция $y$ строго возрастает на промежутке $I$. Но это, конечно, находится в противоречии с условием $y(b)=0$. Теорема полностью доказана.

Заменяя, если необходимо, $q(x)$ на $q(x)+r$, а $\lambda$ на $\lambda+r$, мы можем, начиная с этого момента, считать, что при $\lambda \leqslant 0$ не существует нетривиальных решений уравнения (11.7.3), удовлетворяющих обоим граничным условиям (11.7.2).

Мы будем пользоваться следующим тождеством:

$$\textbf{(11.7.5)} \qquad \int_a^b (u''v-v''u)\,dt=(u'(b)v(b)-u(b)v'(b))-$$
$$-(u'(a)v(a)-u(a)v'(a)),$$

немедленно вытекающим из частного случая $p=2$ формулы (8.14.1) (предполагается, что $u''$ и $v''$ — простые функции в $I$).

**(11.7.6)** *Для любого $t$, такого, что $a<t<b$, существует действительная функция $x \to K_t(x)$, непрерывная в промежутке $I$ и обладающая следующими свойствами:*

1°). *В каждом из промежутков $a \leqslant x < t$ и $t < x \leqslant b$ функция $K_t$ дважды непрерывно дифференцируема и является решением уравнения $y''-q(x)y=0$.*

2°). *Функция $K_t$ удовлетворяет граничным условиям* (11.7.2).

3°). *В точке $x=t$ производная $K_t'(x)$ имеет предел справа и предел слева и $K_t'(t+)-K_t'(t-)=-1$.*

На основании элементарной теории линейных дифференциальных уравнений существует решение $u_1 \neq 0$ (соответственно $u_2 \neq 0$) уравнения $y''-q(x)y=0$, удовлетворяющее условию $h_1u_1(a)+k_1u_1'(a)=0$ (соответственно $h_2u_2(b)+k_2u_2'(b)=0$), причем $u_1$ и $u_2$ не пропорциональны (в противном случае нашлось бы нетривиальное решение уравнения (11.7.3) при $\lambda=0$, удовлетворяющее обоим граничным условиям (11.7.2)). Поэтому любое решение уравнения $y''-q(x)y=0$ единственным способом может быть записано в виде $y=c_1u_1+c_2u_2$, где $c_1$ и $c_2$ — постоянные коэффициенты, а функция $u_1(x)u_2'(x)-u_2(x)u_1'(x)$ [в силу (8.14.1)] является постоянной $d \neq 0$. Нам нужно теперь только выбрать константы $c_1$ и $c_2$ так, чтобы функция $K_t$, равная $c_1u_1$ при $a \leqslant x \leqslant t$ и $c_2u_2$ при $t \leqslant x \leqslant b$, была определена и непрерывна в точке $t$ и удовлетворяла условию 3°). Это дает нам соотношения

$$c_1u_1(t)-c_2u_2(t)=0; \quad c_1u_1'(t)-c_2u_2'(t)=1$$

и, следовательно, в качестве решения нашей задачи можно выбрать числа $c_1=-u_2(t)/d$ и $c_2=-u_1(t)/d$.

Мы будем говорить (нарушая принятое словоупотребление), что $K_t$ есть *элементарное* (*фундаментальное*) *решение* уравнения $y''-q(x)y=0$, соответствующее особенности $t$. Функция $(t, x) \to K_t(x)$ обозначается также через $K(t, x)$ и называется *функцией Грина*, соответствующей рассматриваемой задаче Штурма — Лиувилля. Она определена только при $a<t<b$ и $a \leqslant x \leqslant b$ и равна $-u_2(t)u_1(x)/d$ при $x \leqslant t$ и $-u_1(t)u_2(x)/d$ при $x \geqslant t$, а поэтому непрерывна. Ее можно по непрерывности продолжить на $t=a$ и $t=b$, полагая $K(a, x)=-u_1(a)u_2(x)/d$ и $K(b, x)=-u_2(b)u_1(x)/d$. Кроме того, как сразу следует из определяющих ее формул, она обладает свойством симметрии

**(11.7.7)** $$K(t, x)=K(x, t).$$

**(11.7.8)** *Для того чтобы функция $y(x)$ была решением уравнения $y''-q(x)y=f(x)$ и удовлетворяла граничным условиям* (11.7.2), *необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство $y(x)=-\int_a^b K(t, x)f(t)\,dt$ (где $f$ — комплексная простая функция в промежутке $I$, непрерывная всюду, за исключением конечного числа точек промежутка $\mathring{I}$).*

Достаточность. Так как

$$y(x)=\frac{u_1(x)}{d}\int_x^b u_2(t)f(t)\,dt+\frac{u_2(x)}{d}\int_a^x u_1(t)f(t)\,dt,$$

то проверка того, что функция $y$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (в точках, в которых функция $f$ непрерывна) и граничным условиям, сводится к простому вычислению производных [и применению теоремы (8.7.3)].

Необходимость. Применим тождество (11.7.5) к обоим промежуткам $a\leqslant t\leqslant x$ и $x\leqslant t\leqslant b$, взяв $u(t)=y(t)$ и $v(t)=K_x(t)$. Тогда равенство $y(x)=-\int_a^b K(t, x)f(t)\,dt$ сразу будет следовать из свойств (11.7.6) функции Грина.

Из (11.7.8) следует, что любое решение задачи Штурма — Лиувилля является решением интегрального уравнения Фредгольма с эрмитовым ядром

$$\textbf{(11.7.9)}\qquad y(x)-\lambda\int_a^b K(t, x)y(t)\,dt=g(x),$$

где

$$g(x)=-\int_a^b K(t, x)f(t)\,dt,$$

и обратно. Числа $\lambda_n$, обратные собственным значениям $\neq 0$ оператора $U$ в предгильбертовом пространстве $G$ [определенном в (11.2.8)], соответствующего ядру $K$, называются *собственными значениями* задачи Штурма — Лиувилля.

Теперь мы можем сформулировать следующую теорему, дающую решение задачи Штурма — Лиувилля в каждом из возможных случаев.

**(11.7.10)** *Для любой действительной непрерывной функции $q(x)$ в компактном промежутке $I=[a, b]$:*

1°). *Задача Штурма — Лиувилля имеет бесконечную строго возрастающую последовательность* $(\lambda_n)$ *собственных значений. Все собственные значения являются действительными числами,* $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=+\infty$ *и ряд* $\sum\limits_n 1/\lambda_n^2$ *сходится.*

2°). *Для каждого собственного значения* $\lambda_n$ *однородная задача Штурма — Лиувилля имеет действительное решение* $\varphi_n(x)$, *удовлетворяющее условию* $\int\limits_a^b \varphi_n^2(x)\,dx=1$, *и всякое другое решение получается из* $\varphi_n$ *умножением на постоянное число.*

3°). *Последовательность* $(\varphi_n)$ *является тотальной ортонормальной системой в предгильбертовом пространстве* $G$ (11.6).

4°). *Пусть* $w$ — *комплексная непрерывная функция в промежутке* $I$, *являющаяся первообразной простой функции* $w'$, *такая, что:*

(i) *функция* $w'$ *непрерывна всюду в* $I$, *за исключением конечного числа внутренних точек;*

(ii) *функция* $w'$ *в каждом промежутке, в котором она непрерывна, имеет непрерывную производную* $w''$;

(iii) *функция* $w$ *удовлетворяет граничным условиям* (11.7.2).

*Тогда имеем* $w(x)=\sum\limits_n c_n\varphi_n(x)$, *где* $c_n=(w|\varphi_n)=\int\limits_a^b w(t)\,\varphi_n(t)\,dt$, *и ряд абсолютно и равномерно сходится в* $I$.

5°). *Если* $\lambda$ *не есть ни одно из собственных значений* $\lambda_n$, *то для каждой простой функции* $f$, *непрерывной всюду в промежутке* $I$, *за исключением конечного числа точек, задача Штурма — Лиувилля имеет единственное решение* $w$, *коэффициенты* $c_n=(w|\varphi_n)$ *которого задаются формулой* $c_n=d_n/(\lambda-\lambda_n)$, *где* $d_n=\int\limits_a^b f(t)\varphi_n(t)\,dt$.

6°. *При* $\lambda=\lambda_n$ *необходимое и достаточное условие того, чтобы задача Штурма — Лиувилля имела решение, состоит в том, чтобы* $\int\limits_a^b f(t)\varphi_n(t)\,dt=0$. *В этом случае для любого решения* $w$ *коэффициент* $c_n=(w|\varphi_n)$ *произволен, а при* $m\neq n$ *коэффициенты* $c_m$ *задаются той же формулой, что и в* 5°).

Однородная задача Штурма — Лиувилля не может иметь двух линейно независимых решений, так как в противном случае она имела бы решение $y$, у которого $y(a)$ и $y'(a)$ были бы произвольны, что невозможно; это доказывает 2°).

Тот факт, что все собственные значения $\lambda_n$ действительны, следует из (11.7.7) и (11.7.5). Кроме того, из (11.7.4) следует, что

не более чем конечное число из $\lambda_n$ отрицательно. По теореме Мерсера [(11.6.7) и (11.6.8)] для функции Грина имеем

$$K(t, x) = \sum_n \frac{1}{\lambda_n} \varphi_n(t) \varphi_n(x), \tag{11.7.10.1}$$

где ряд абсолютно и равномерно сходится в $I \times I$ (предполагается, и это вполне законно, что 0 не есть ни одно из $\lambda_n$).

Заметим, что 4°) будет следовать из (11.6.3) и (11.7.8), если сделать дополнительное предположение, что $w$ и $w'$ непрерывны в $I$. Чтобы доказать 4°) в общем случае, обозначим через $t_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ точки промежутка $I$, в которых $w'$ имеет разрыв, и пусть $\alpha_i = w'(t_i+) - w'(t_i-)$. Тогда функция $v = w + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i K_{t_i}$ удовлетворяет всем условиям 4°) и, кроме того, в силу (11.7.6) имеет непрерывную производную. Пользуясь (11.7.10.1), получаем доказательство 4°).

Из того, что тождественное отображение пространства $E = \mathscr{C}_{\mathbf{C}}(I)$ в $G$ непрерывно, следует, что для функций $w$, удовлетворяющих условиям 4°), мы можем также писать $w = \sum_n c_n \varphi_n$, где ряд сходится в предгильбертовом пространстве $G$ (11.2.8). Поэтому, чтобы доказать 3°), достаточно показать, что множество $P$ таких функций $w$ плотно в $G$. Для этой цели для любой функции $u \in G$ рассмотрим непрерывную функцию $w_m$, где $m$ — целое число $> 0$, равную $u$ в промежутке $[a+(1/m), b-(1/m)]$, 0 в промежутках $[a, a+(1/2m)]$ и $[b-(1/2m), b]$ и линейной функции в каждом из промежутков $[a+(1/2m), a+(1/m)]$ и $[b-(1/m), b-(1/2m)]$. Тогда ясно, что в промежутках $[a, a+(1/m)]$ и $[b-(1/m), b]$ выполняется неравенство $|u(x) - w_m(x)| \leqslant 2\|u\|$ и, значит, в силу теоремы о среднем значении норма $\|u - w_m\|_2$ сколь угодно мала. Кроме того, функция $w_m$ удовлетворяет граничным условиям (11.7.2). Взяв теперь, пользуясь равномерной непрерывностью функции $u$, кусочно линейную непрерывную в $I$ функцию $v$, равную $w_m$ на промежутках $[a, a+(1/m)]$ и $[b-(1/m), b]$ и достаточно мало отличающуюся по модулю от функции $u$ на промежутке $[a+(1/m), b-(1/m)]$, получим, что норма $\|u-v\|_2$ произвольно мала, а функция $v$ удовлетворяет всем условиям, перечисленным в 4°), что доказывает наше утверждение.

Поскольку 3°), таким образом, доказано, ясно, что тотальная последовательность $(\varphi_n)$ должна быть бесконечной, и [учитывая (11.6.2)] полностью доказано и утверждение 1°).

Наконец, 5°) и 6°) сразу следуют из (11.5.11).

Замечание. Относительно $\varphi_n$ и $\lambda_n$ можно получить значительно более точную информацию и, в частности, доказать, что отношение $\lambda_n/n^2$ стремится к конечному пределу (см. задачи 3 и 4).

### Задачи

1. Пусть $I=[a, b]$ — компактный промежуток в $\mathbf{R}$ и пусть $H_0$ — действительное векторное пространство всех действительных непрерывно дифференцируемых функций в промежутке $I$. Вводя скалярное произведение

$$(x \mid y)=\int_a^b (x'y'+xy)\,dt,$$

превращаем $H_0$ в действительное предгильбертово пространство.

a) Покажите, что $H_0$ сепарабельно (производную функции $x \in H_0$ аппроксимируйте многочленами (7.4.1)). Таким образом, $H_0$ является всюду плотным подпространством некоторого сепарабельного гильбертова пространства $H$ (6.6.2).

b) Покажите, что если $(x_n)$ — последовательность Коши в предгильбертовом пространстве $H_0$, то последовательность $(x_n)$ равномерно сходится в $I$ к некоторой непрерывной функции $v$, и что если $(y_n)$ — другая последовательность Коши в $H_0$, имеющая в $H$ тот же самый предел, то последовательность $(y_n)$ равномерно сходится в $I$ к той же функции $v$. Элементы пространства $H$, таким образом, могут быть отождествлены с некоторыми непрерывными функциями в $I$, которые, однако, не обязаны быть дифференцируемыми в каждой точке промежутка $I$.

[Заметьте, что для каждой функции $x \in H_0$ в $I$ выполняется неравенство

$$|x(t)-x(a)| \leqslant \sqrt{t-a}\left(\int_a^b x'^2\,dt\right)^{1/2}.\ ]$$

Покажите, что для любой функции $z \in H_0$, дважды непрерывно дифференцируемой в $I$ и удовлетворяющей условию $z'(a)=z'(b)=0$, справедливо равенство $(v \mid z)=-\int_a^b vz''\,dt+\int_a^b vz\,dt$.

c) Пусть $\alpha$ и $\beta$ — два действительных числа и $q$ — непрерывная функция в $I$. Покажите, что в $H_0$ функция $x \to \Phi(x)=\int_a^b (x'^2+qx^2)\,dt-\alpha(x(a))^2-\beta(x(b))^2$ непрерывна. Пусть $A$ — множество в $H$, состоящее из функций $x$, для которых $\int_a^b x^2\,dt=1$ (заметим, что $A$ не является ограниченным множеством в гильбертовом пространстве $H$). Покажите, что нижняя грань функции $\Phi(x)$ на пересечении $A \cap H_0$ конечна.

[Нужно только рассмотреть случай, когда $\alpha>0$ и $\beta>0$. Предположим, что в $A \cap H_0$ существует такая последовательность $(x_n)$, что $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi(x_n)=-\infty$

и $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n=+\infty$, где $\gamma_n=\left(\int\limits_a^b x'^2\,dt\right)^{1/2}$. Рассмотрите последовательность функций $y_n=x_n/\gamma_n$ и приведите к противоречию тот факт, что, с одной стороны, $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b y_n^2\,dt=0$, а, с другой, существуют такой промежуток $[a, c]\subset I$ и такое число $\rho>0$, что $|y_n(t)|\geqslant\rho$ при каждом $n$ и для каждой точки $t\in[a, c]$.]

d) Пусть $\mu_1$ — нижняя грань функции $\Phi(x)$ на $A\cap H_0$. Покажите, что если $(x_n)$ — последовательность в $A\cap H_0$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty}\Phi(x_n)=\mu_1$, то последовательность $(x_n)$ ограничена в $H$.

[Тот же метод, что и в c).]

Выведите из этого результата, что, выделяя подходящую подпоследовательность, мы можем считать, что последовательность $(x_n)$ равномерно сходится в $I$ к некоторой функции $u$ (которая, однако, *a priori* не обязана принадлежать $H$).

[Воспользуйтесь теоремой Асколи (7.5.7).]

e) Покажите, что $\Phi(x)$ есть квадратичная форма в $H_0$, т. е. имеет место равенство $\Phi(x+y)=\Phi(x)+\Phi(y)+2\Psi(x, y)$, где функция $\Psi$ билинейна. Для любой функции $z$, дважды непрерывно дифференцируемой в $I$ и удовлетворяющей условию $z'(a)=z'(b)=z(a)=z(b)=0$, имеем $\Psi(x, z)=$ $=-\int\limits_a^b xz''\,dt+\int\limits_a^b qxz\,dt$. Этой же формулой функция $\Psi(v, z)$ может быть определена для любой функции $v$, непрерывной в $I$. Покажите, что для любой такой функции $z$ и любого действительного числа $\xi$ имеет место неравенство $\lim\limits_{n\to\infty}\Phi(x_n+\xi z)\geqslant\mu_1\int\limits_a^b(x_n+\zeta z)^2\,dt$, и выведите из этого результата, что

$$\int\limits_a^b(uz''-quz+\mu_1uz)\,dt=0.$$

Поэтому если $w$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, для которой $w''=qu-\mu_1u$, то с помощью интегрирования по частям получаем $\int\limits_a^b(u-w)\,z''\,dt=0$. Заключите отсюда, что $u-w$ есть многочлен степени $\leqslant 1$ (заметьте, что если вычесть из $u-w$ подходящий многочлен $p$ степени 1, то найдется такая функция $z$, что $z''=u-w-p$ и $z(a)=z(b)=$ $=z'(a)=z'(b)=0$). Следовательно, функция $u$ дважды непрерывно диф-

ференцируема, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$u'' - qu + \mu_1 u = 0$$

и условию $\int_a^b u^2\,dt = 1$. Кроме того, $u'(a) = -\alpha u(a)$ и $u'(b) = \beta u(b)$.

[Чтобы доказать это последнее утверждение, выразите тот факт, что для любой функции $z \in H_0$, каково бы ни было действительное число $\xi$, выполняется неравенство $\Phi(u + \xi z) \geqslant \mu_1 \int_a^b (u + \xi z)^2\,dt$.]

2. a) Предположим сначала [в обозначениях теоремы (11.7.10)], что $k_1 k_2 \neq 0$, и пусть $\alpha = h_1/k_1$ и $\beta = -h_2/k_2$. Покажите, что функции $\varphi_n$ могут быть (вплоть до знака) определены следующими условиями: 1°) функция $\varphi_1$ такова, что на сфере $A$: $(y \mid y) = 1$ в $G$ функция $\Phi$ (определенная в задаче 1, c)) достигает своего минимума при $y = \varphi_1$ и этот минимум равен $\lambda_1$; 2°) при $n > 1$ пусть $A_n$ есть пересечение сферы $A$ и гиперплоскостей $(y \mid \varphi_k) = 0$ для $1 \leqslant k \leqslant n-1$; тогда функция $\varphi_n$ такова, что на $A_n$ функция $\Phi$ достигает своего минимума при $y = \varphi_n$ и этот минимум равен $\lambda_n$.

[Это описание функции $\varphi_1$ сразу следует из результатов задачи 1; чтобы охарактеризовать функции $\varphi_n$, проведите рассуждение такого же характера.]

b) Докажите аналогичные утверждения для случая, когда $k_1 = 0$ и $k_2 \neq 0$, заменяя в определении функции $\Phi$ число $\alpha$ на 0, но заменяя и сферу $A$ ее пересечением с гиперплоскостью в $G$, определяемой условием $y(a) = 0$. Подобным же образом поступите в случае, когда $k_1 \neq 0$ и $k_2 = 0$ или когда $k_1 = k_2 = 0$.

c) При предположениях задачи a) пусть $z_1, \ldots, z_{n-1}$ есть $n-1$ произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция в $I$ и пусть $B(z_1, \ldots, z_{n-1})$ — пересечение сферы $A$ и $n-1$ гиперплоскостей $(y \mid z_k) = 0$ $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$. Покажите, что в некоторой точке множества $B(z_1, \ldots, z_{n-1})$ функция $\Phi$ достигает своего минимума $\rho(z_1, \ldots, z_{n-1})$ на этом множестве и что $\lambda_n$ есть верхняя грань чисел $\rho(z_1, \ldots, z_{n-1})$, когда $z_i$ меняются на множестве дважды непрерывно дифференцируемых в промежутке $I$ функций (минимаксный принцип).

[Для доказательства существования минимума примените метод задачи a); неравенство доказывается тем же методом, что и в задаче 8 § 11.5.]

Распространите этот результат на случай, когда $k_1 k_2 = 0$.

3. a) Рассмотрим на одном и том же промежутке $I$ два линейных дифференциальных уравнения второго порядка $y'' - q_1 y + \lambda y = 0$ и $y'' - q_2 y + \lambda y = 0$ с одними и теми же граничными условиями (11.7.2). Пусть $(\lambda_n^{(1)})$ и $(\lambda_n^{(2)})$ — две строго возрастающие последовательности собственных значений этих двух задач Штурма — Лиувилля. Покажите, что если $q_1 \leqslant q_2$, то $\lambda_n^{(1)} \leqslant \lambda_n^{(2)}$ при каждом $n$, а если $|q_1(t) - q_2(t)| \leqslant M$ в $I$, то $|\lambda_n^{(1)} - \lambda_n^{(2)}| \leqslant M$ при каждом $n$.

[Воспользуйтесь минимаксным принципом.]

b) Заключите из a), что существует такая константа $c$, что при каждом $n$

$$\left|\lambda_n - \frac{n^2\pi^2}{l^2}\right| \leqslant c,$$

где $l = b - a$.

[Изучите задачу Штурма — Лиувилля для частного случая, когда функция $q$ постоянна.]

4. a) Пусть $y$ — произвольное решение уравнения (11.7.3) в промежутке $I = [a, b]$ при $\lambda > 0$. Покажите, что существуют такие две постоянные $A$ и $\omega$, что $y$ есть решение интегрального уравнения

$$(*) \qquad y(t) = A \sin \sqrt{\lambda}\,(t + \omega) + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_a^t q(s)\, y(s) \sin \sqrt{\lambda}\,(t - s)\, ds.$$

Покажите, что существует такая постоянная $B$, не зависящая от $\lambda$, что $A^2 \leqslant B\,(y \mid y)$.

[С помощью неравенства Коши — Шварца мажорируйте интеграл в правой части равенства (*).]

b) Выведите из a), что если в задаче Штурма — Лиувилля $k_1 k_2 \neq 0$ или же $k_1 = k_2 = 0$, то существуют такие две постоянные $C_0$ и $C_1$, что для каждого $n$ и каждой точки $t \in I$

$$\left|\varphi_n(t) - \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \sqrt{\lambda_n}\, t\right| \leqslant \frac{C_0}{n}$$

и

$$\left|\varphi_n'(t) - \sqrt{\frac{2}{l}} \sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n}\, t\right| \leqslant C_1,$$

где $l = b - a$.

[Воспользуйтесь задачей a) и утверждением из задачи 3, b).]

Каков соответствующий результат, когда только одна из постоянных $k_1$ и $k_2$ равна 0?

## ЛИТЕРАТУРА


[1] Ahlfors L., Complex Analysis, New York, 1953.

[2] Bachmann H., Transfinite Zahlen, Berlin, 1955.

[3] Бурбаки Н., Элементы математики, кн. I, Теория множеств, Мир, М., готовится к изданию.

[4] Бурбаки Н., Элементы математики, кн. II, Алгебра (Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра), Физматгиз, М., 1962.

[5] Бурбаки Н., Элементы математики, кн. III,
— Общая топология (Основные структуры), Физматгиз, М., 1958.
— Общая топология (Числа и связанные с ними группы и пространства), Физматгиз, М., 1959.

[6] Бурбаки Н., Элементы математики, кн. V, Топологические векторные пространства, ИЛ, М., 1959.

[7] Картан Э., Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения, Изд-во МГУ, М., 1962.

[8] Cartan H., Séminaire de l'Ecole Normale Supérieure, 1951—1952. Fonctions analytiques et faisceaux analytiques.

[9] Шевалле К., Теория групп Ли, ИЛ, М., т. 1, 1948, т. 2, 1958, т. 3, 1959.

[10] Коддингтон Э., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, М., 1959.

[11] Курант Р. и Гильберт Д., Методы математической физики, т. 1, Гостехиздат, М. — Л., 1951.

[12] де Рам Ж., Дифференцируемые многообразия, ИЛ, М., 1956.

[13] Данфорд Н. и Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория, ИЛ, М., 1962.

[14] Халмош П., Конечномерные векторные пространства, Физматгиз, М., 1963.

[15] Айнс Э., Обыкновенные дифференциальные уравнения, ГНТИУ, Харьков, 1939.

[16] Jacobson N., Lectures in Abstract Algebra: II, Linear Algebra, New York, 1953.

[17] Kamke E., Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig, 1930.

[18] Kelley J., General Topology, New York, 1955.

[19] Ландау Э., Основы анализа, ИЛ, М., 1948.

[20] Люмис Л., Введение в абстрактный гармонический анализ, ИЛ, М., 1956.

[21] Спрингер Дж., Введение в теорию римановых поверхностей, ИЛ, М., 1960.
[22] Steenrod N., Colloquium Lectures, to appear.
[23] Taylor A., Introduction to Functional Analysis, New York, 1958.
[24] Вейль А., Введение в теорию кэллеровских многообразий, ИЛ, М. 1961.
[25] Weyl H., Die Idee der Riemannschen Fläche, Stuttgart, 1955.
[26] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа. Основные операции анализа, Физматгиз, М., ч. I, 1962, ч. II, 1963.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

В нижеследующем указателе первая цифра указывает главу, в которой можно найти данный термин, а вторая — параграф в этой главе.

## ОГЛАВЛЕНИЕ