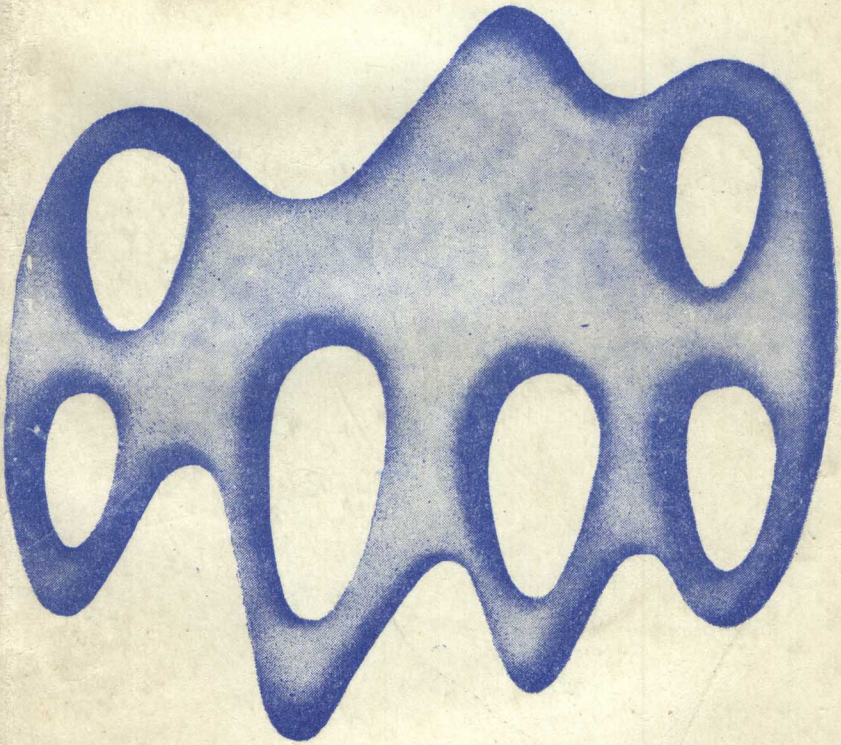
ДЖ. МИЛНОР

А. УОЛЛЕС

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
ПОПУЛЯРНАЯ СЕРИЯ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ТОПОЛОГИЯ

НАЧАЛЬНЫЙ КУРС



ИЗДАТЕЛЬСТВО МИР

TOPOLOGY FROM THE DIFFERENTIABLE VIEWPOINT

by
JOHN W. MILNOR
Princeton University

Based on notes
by
DAVID W. WEAVER

The University Press of Virginia
Charlottesville
1965

▲

DIFFERENTIAL TOPOLOGY

First Steps

by
ANDREW H. WALLACE
University of Pennsylvania

W. A. Binjamin
New York · Amsterdam
1968

«СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА»
Популярная серия

Дж. МИЛНОР | А. УОЛЛЕС

Дифференциальная топология

НАЧАЛЬНЫЙ КУРС

Перевод с английского
А. А. Блохина

Перевод с английского
С. Ю. Аракелова

Под редакцией
Д. В. Аносова

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва 1972

УДК 513.83

Книга составлена из двух небольших и хорошо дополняющих одно другое сочинений известных американских ученых. Она может служить для первоначального ознакомления с новой математической дисциплиной, интерес к которой за последние годы очень возрос. Идеи дифференциальной топологии оказались чрезвычайно плодотворными в геометрии, в анализе, в теории дифференциальных уравнений, а также в различных приложениях математики. Авторы излагают начальные понятия этой дисциплины, иллюстрируя их большим количеством примеров.

Книгу следует рекомендовать всем, начинающим изучать современную математику. Она доступна для студентов младших курсов университетов и педагогических институтов, но будет также интересна как специалистам, так и всем, кто желает получить представление о математике наших дней.

Редакция литературы по математическим наукам

инд. 2-2-3
38-72

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Книга, предлагаемая вниманию читателя, является переводом двух отдельных книг: Дж. Милнора «Топология с дифференциальной точки зрения» и А. Уоллеса «Дифференциальная топология. Первые шаги» (название, которое вполне подошло бы и к книжке Милнора). Они почти не перекрываются и весьма удачно дополняют друг друга. Вместе взятые, они дают введение в основные понятия дифференциальной топологии, весьма наглядное и доступное широкому кругу читателей, начиная со студентов младших курсов. Авторы излагают некоторые из основных геометрических методов дифференциальной топологии. Алгебраические средства остаются в стороне, но читатель подводится к пониманию того, как возникает необходимость в использовании этих средств. Он сможет понять, в чем состоят некоторые из недавних достижений дифференциальной топологии, но еще не будет в состоянии усвоить полные доказательства. Знакомство с некоторыми из более простых и более старых вещей будет включать и доказательства.

Книга Уоллеса входит в серию «Математических монографий», издаваемую под редакцией Р. Ганнинга и Х. Росси, которая специально предназначена для студентов младших курсов[1]). Ее вполне можно отнести к научно-популярной литературе (если, конечно, не считать, что под это название подпадают только брошюры типа «Отчего бывает день и ночь»).

Местами, особенно к концу, Уоллес не доказывает, а рассказывает — для научно-популярной литературы это вполне естественно (часто даже неизбежно), нужно лишь четко различать, что доказано, а что нет.

В книге Милнора по сравнению с первой изложение является заметно более сжатым, что в известной

---

[1]) Ранее у нас была переведена еще одна из книг этой серии: М. Спивак, Анализ на многообразиях, изд-во «Мир», 1968.

мере связано с ее происхождением. Она основана на записях курса лекций, к тому же весьма небольшого курса, в который Милнор тем не менее сумел включить достаточно содержательный материал. Однако никакого предварительного знакомства читателя с предметом Милнор также не предполагает. Проработав книгу Милнора, читатель сможет заделать почти все дыры в первых семи параграфах книги Уоллеса.

В соответствии с элементарным характером изложения материал первых четырех параграфов у Уоллеса и первых трех параграфов у Милнора еще не относится собственно к дифференциальной топологии: сообщаемые здесь начальные сведения о гладких многообразиях нужны везде, где гладкие многообразия встречаются. Ленг удачно назвал подобный материал «ничьей землей, лежащей между обычным курсом анализа, с одной стороны, и тремя великими дифференциальными теориями — дифференциальной топологией, дифференциальной геометрией и дифференциальными уравнениями — с другой». Этот материал Милнор и Уоллес излагают по-разному.

Милнор ограничивается гладкими многообразиями, расположенными в евклидовом пространстве, а у Уоллеса гладкое многообразие определяется как топологическое пространство с определенной дополнительной структурой (и a priori не предполагается куда-либо вложенным). Преимуществом первого подхода является простота и наглядность, а также резкое сокращение расхода времени на обсуждение оснований (последнее, вероятно, и определило выбор Милнора). Зато абстрактный подход является более гибким, ибо он избавляет от необходимости всякий раз, когда вводится то или иное многообразие, обсуждать, как его расположить в евклидовом пространстве и не зависят ли те или иные свойства от особенностей такого расположения. Другое различие состоит в том, что Милнор подробно останавливается на «приведении в общее положение посредством малых шевелений» (круг вопросов, связанный с теоремой Сарда), тогда как Уоллес этого не касается.

Параграфы 4, 5, 6 книги Милнора посвящены степени отображения и ее применениям. С точки зрения «высокой науки» степень отображения является простым приложением теории гомологий, которая сама является всего лишь самой простой частью алгебраической топологии. Однако несомненно, что многим хотелось бы ознакомиться только со степенью отображения, по возможности избегая всего остального. Книга Милнора предоставляет такую возможность[1]).

Во многом книга Милнора близка к первым двум главам и части третьей главы монографии Л. С. Понтрягина ([29] в списке литературы), по которой учились многие советские математики. За 15 лет эта монография, вышедшая небольшим тиражом, стала довольно редкой; к тому же она по своему характеру труднее для начинающего, ибо ее основная цель не была учебной, а состояла в том, чтобы дать изложение результатов Понтрягина о гомотопических группах сфер, полученных с использованием открытой им связи между задачами гомотопической и дифференциальной топологии. Милнор посвятил этой связи § 7. В конце он иллюстрирует ее на простейшем примере (теорема Хопфа) и сообщает, что теперь эти идеи, если можно так выразиться, работают в другую сторону — не от многообразий к гомотопиям, а наоборот. На этом книжка Милнора естественным образом заканчивается — чтобы идти дальше, требуется аппарат алгебраической топологии в изрядном объеме.

---

[1]) Не зависящее от теории гомологий определение степени отображения дает известные преимущества при преподавании, позволяя строить теорию гомологий сразу для клеточных разбиений.

В чисто логическом отношении более простым следовало бы признать не гладкое, а комбинаторное (но не опирающееся на гомологии) определение степени, ибо таковое можно дать, используя только элементы линейной алгебры и простейшие свойства непрерывных функций. (Непрерывные отображения при этом аппроксимируются не гладкими, а кусочно-линейными.) Однако, хотя формально эти «элементарные» средства и проще, чем анализ, практически последний уже с младших курсов становится не менее привычным; доказательства же при «гладкой» трактовке степени отображения получаются короче и изящнее (что, впрочем, зависит от вкуса).

Основная часть книги Уоллеса посвящена критическим точкам функций и связанным с ними геометрическим операциям (сферическим перестройкам, или перестройкам Морса), которые можно использовать для исследования структуры гладких многообразий. Представление о таком использовании дают приводимые Уоллесом теоремы о двумерных и трехмерных многообразиях. Последний § 8 содержит некоторые указания о том, как эти методы могут применяться в менее элементарной обстановке; подчеркивается, что при этом необходимо сочетать их с методами алгебраической топологии, и до некоторой степени разъясняется, почему необходимо такое сочетание.

При переводе было добавлено несколько литературных ссылок, а во всех случаях, когда та или иная работа имеется на русском языке, ссылка дается на русский перевод или на первоначальную русскую публикацию. Однако там, где авторы, говоря о вещах, входящих в обычные университетские курсы, ссылаются на американские учебники, мне казалось ненужным делать примечание об их русских аналогах. Естественно предполагать, что читатель достаточно хорошо знаком с подобными вещами, а при необходимости освежить свою память сам выберет из многочисленных пособий то, которое ему больше нравится.

Указания о дальнейшем изучении предмета, имеющиеся в конце обеих книг, при переводе были сведены в один (заключительный раздел с рекомендуемой литературой); естественно, что при этом слиянии их пришлось отредактировать и они были расширены.

Ссылки на книги, составляющие настоящее издание, делаются так: см. Милнор, стр. . . . . Ссылки на другую литературу указываются номерами, заключенными в квадратные скобки. Номера относятся к общему списку, приведенному в конце.

Большим достоинством обеих книг является наличие в них упражнений. Я позволил себе добавить еще несколько упражнений к книге Милнора; как и добавленные литературные ссылки, они отмечены звездочкой.

Д. В. Аносов

А. УОЛЛЕС

Дифференциальная топология. Первые шаги

ПРЕДИСЛОВИЕ

Что изучает дифференциальная топология? Если бы этот вопрос задал достаточно продвинувшийся учащийся с хорошей подготовкой по алгебраической топологии, то ему можно было бы дать довольно исчерпывающий ответ. Но этот ответ был бы техническим. Цель настоящей книги — ответить на этот вопрос студенту, находящемуся на гораздо более ранней стадии обучения. Мы попытались сделать это, создавая у читателей интуитивное понимание некоторых сторон предмета, причем мы сводим к минимуму необходимые предварительные знания и избегаем тонкостей и технически трудных мест.

Круг идей, излагаемых в книге, ограничен методом сферических перестроек и изучением критических точек функций на многообразиях. Эти идеи, с одной стороны, допускают простое геометрическое описание, а с другой — являются мощным инструментом для изучения структуры многообразий. Простым примером этого служит проведенная с их помощью в § 7 классификация двумерных многообразий.

Дальнейшее продвижение в изучении многообразий — а это является главной целью дифференциальной топологии — требует добавления к описанным здесь геометрическим методам более мощного алгебраического аппарата. Кое-какие указания о необходимых для этого идеях можно найти в § 8.

Короче говоря, в книге описаны только первые шаги дифференциальной топологии. Как и в любом разделе топологии, они должны быть геометрическими, при изучении дальнейших или технически более сложных шагов необходимо иметь интуитивное геометрическое понимание предмета и исходить из него.

От читателя предполагается знакомство с анализом, включая некоторые свойства дифференциальных

уравнений, а также с поведением квадратичных форм при линейной замене переменных. Никакого предварительного знания топологии не требуется. Все нужные сведения из общей топологии изложены в первом параграфе, а студенты, которые уже усвоили понятия открытого и замкнутого множества и непрерывного отображения, могут спокойно начать со второго параграфа.

Параграфы 2 и 3 знакомят читателя с понятиями гладкого многообразия и гладкого отображения. В § 4 изучается один из центральных вопросов дифференциальной топологии — теория критических точек функций на гладком многообразии. Это изучение продолжается в § 5, где исследуются многообразия уровня данной функции. В результате в § 6 мы естественно приходим к определению сферической перестройки. В § 7 развитые в предыдущих главах понятия применяются к задаче о классификации поверхностей. Параграф 8 содержит некоторые указания по поводу дальнейшего изучения предмета.

А. Уоллес

Филадельфия, Пенсильвания

§ 1. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

1.1. Окрестности

Общую, или теоретико-множественную топологию, можно охарактеризовать как абстрактное изучение понятий близости и непрерывности. Для этого надо прежде всего отыскать в элементарной геометрии те свойства близости, которые представляются основными, и принять их за аксиомы. Пусть E есть n-мерное евклидово пространство, и пусть p — его точка. Окрестность точки p по идее должна была бы состоять из точек, близких к p, и целиком окружать p.

Уточняя это рассуждение, определим окрестность точки p как произвольное множество U, содержащее открытый шар[1]) с центром в точке p. Согласно этому определению, множество U на рис. 1.1 является окрестностью точки p на плоскости, поскольку оно содержит открытый круг с центром в этой точке. Но для множеств U, изображенных на рис. 1.2 и 1.3, любой круг с центром в точке p будет содержать точки, лежащие вне U, так что в этих случаях U не является окрестностью точки p. Определение окрестности формулируется так, чтобы по возможности освободиться от понятий размера и формы, не играющих никакой роли в топологии.

Используя данное определение окрестности точки в евклидовом пространстве, легко проверить следующие свойства:

---

[1]) Обратите внимание на различие между *шаром* и *сферой*: замкнутый (соответственно открытый) шар радиуса r состоит из тех точек, расстояние которых до центра не превосходит r (соответственно строго меньше r), а сфера — из точек, отстоящих от центра ровно на r. В некоторых разделах математики часто «шар» называют «сферой», но лучше этого избегать, особенно в геометрии, где нужны и шары, и сферы. Забегая вперед, замечу, что позднее под «сферой» часто будет пониматься любое многообразие, диффеоморфное сфере (смысл этого выяснится в § 2).— *Прим. ред.*

1) точка p принадлежит любой своей окрестности.

2) если U — окрестность точки p, а $V \supset U$, то V — тоже окрестность точки p;

3) если U и V — окрестности точки p, то их пересечение $U \cap V$ — тоже окрестность точки p;

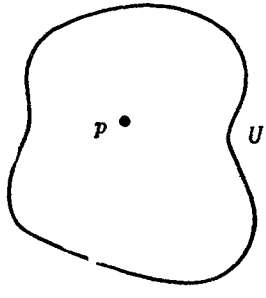


Рис. 1.1.

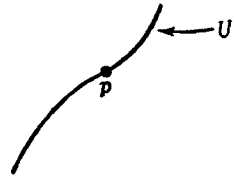


Рис. 1.2.

Рис. 1.3.

4) если U — окрестность точки p, то можно найти такую окрестность V точки p, что $V \subset U$ и V является окрестностью каждой из своих точек.

Упражнение 1.1. Докажите свойства 1—4.

Детальный разбор тех свойств окрестностей и непрерывности, которые встречаются, например, в курсе математического анализа, показывает, что все эти свойства можно вывести из четырех выписанных выше. Поэтому при абстрактном подходе разумно принять свойства 1—4 за аксиомы. Это приводит к следующему определению.

Определение 1.1. *Топологическое пространство* — это множество E, каждая точка p которого

снабжена набором подмножеств E, называемых *окрестностями точки* p и удовлетворяющих четырем приведенным выше условиям.

Примеры. 1.1. Евклидово пространство с окрестностями, определенными выше, является топологическим пространством.

1.2. Пусть S — сфера (скажем, единичная сфера в трехмерном пространстве с центром в начале координат). Назовем множество U окрестностью точки p в S, если для некоторого ε оно содержит все точки S, удаленные от p на расстояние, меньшее ε. Следует проверить, что все аксиомы для окрестностей выполняются. Таким образом, S является топологическим пространством.

1.3. Случай других поверхностей разбирается так же, как случай сферы. Например, можно превратить в топологическое пространство тор — поверхность, заметаемую окружностью радиуса 1 с центром в точке $(2, 0, 0)$ при вращении плоскости (x, y) вокруг оси y. Кроме того, сферы больших размерностей превращаются в топологические пространства тем же способом, что и двумерная сфера в примере 1.2.

Заметим, что в примерах 1.2 и 1.3 объемлющее евклидово пространство играет лишь вспомогательную роль. В обоих случаях рассматриваемое топологическое пространство является подмножеством, и для определения топологии существенны лишь точки этого подмножества. Любое подмножество евклидова пространства тем же способом можно превратить в топологическое пространство. На самом деле то же самое можно сделать с подмножеством любого топологического пространства. Точнее, пусть E — топологическое пространство, а F — его подмножество. Пусть p — точка множества F. Назовем подмножество U множества F *окрестностью точки* p *в* F, если $U = F \cap V$, где V — окрестность точки p в E. Проверьте в качестве упражнения, что определенные так окрестности в F удовлетворяют аксиомам окрестностей.

Определение 1.2. Множество F, превращенное в топологическое пространство таким способом, называется *подпространством* пространства E.

Пример 1.4. В примерах 1.2 и 1.3 сфера и тор являются подпространствами трехмерного евклидова пространства.

Заметим, что во всех построенных выше примерах топологические пространства появлялись как подпространства евклидова пространства. Тем не менее отнюдь не все топологические пространства обладают этим свойством. Например, пусть E — множество всех ограниченных функций, заданных на единичном интервале I и принимающих действительные значения. Объявим множество U окрестностью функции p в E, если оно содержит все функции q в E, для которых $\sup\limits_{x \in I} |p(x) - q(x)|$ меньше, чем некоторое ε. Легко видеть, что аксиомы окрестностей выполняются. Можно показать (но это не так уж просто), что E не может быть подпространством никакого евклидова пространства. Впрочем, после того как это замечание сделано, о нем можно забыть на время чтения данной книги, поскольку все пространства, с которыми нам придется иметь дело, будут подпространствами евклидовых пространств.

Заметим еще, что под *окрестностью подмножества* A в E понимают любое множество, являющееся окрестностью каждой точки из A.

1.2. Открытые и замкнутые множества

Два вида подмножеств в топологическом пространстве оказываются особенно важными.

Определение 1.3. Пусть E — топологическое пространство, а U — его подмножество. Множество U называется *открытым в* E (или просто *открытым*, когда нет опасности путаницы), если U является окрестностью для любой точки $p \in U$.

Определение 1.4. Пусть E — топологическое пространство, а F — его подмножество. Множество F

называется *замкнутым в* E (или просто *замкнутым*), если множество $E \setminus F$ открыто.

Примеры. 1.5. Пусть E — плоскость, а U — открытый круг в E. Тогда U — открытое множество. Докажите это в качестве упражнения.

1.6. Пусть E — плоскость, а F — замкнутый круг. Тогда F — замкнутое множество.

1.7. Аналогично в евклидовом пространстве любой размерности открытый шар той же размерности является открытым множеством, а замкнутый — замкнутым.

1.8. Множество точек $(x_1, \ldots, x_n)$ в n-мерном евклидовом пространстве, координаты которых при фиксированных a_i и b_i удовлетворяют неравенствам $a_i < x_i < b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, открыто. Множество точек, для которых $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$, замкнуто.

Очень существенным является описываемое следующей теоремой поведение открытых и замкнутых множеств относительно операций объединения и пересечения:

Теорема 1.1.

1) *Объединение любой совокупности открытых множеств открыто.*

2) *Пересечение конечного числа открытых множеств открыто.*

3) *Пересечение любой совокупности замкнутых множеств замкнуто.*

4) *Объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.*

Доказательство. 1) Пусть дана совокупность открытых множеств пространства E, члены которой мы обозначим через U_i (i пробегает какое-то множество индексов). Положим $U = \bigcup U_i$ и возьмем точку p в U. Тогда для некоторого i точка p лежит в U_i, так что U_i есть окрестность точки p. Но $U \supset U_i$, откуда U — окрестность точки p (аксиома 2). Поэтому U является окрестностью каждой своей точки и, следовательно, открытым множеством (определение 1.3).

2) Пусть U_1 и U_2 — открытые множества, и пусть $p \in U_1 \cap U_2$. Так как U_1 и U_2 оба открыты и содержат точку p, они являются окрестностями точки p (определение 1.3). Следовательно, $U_1 \cap U_2$ есть окрестность точки p. Таким образом, множество $U_1 \cap U_2$ является окрестностью каждой своей точки и потому открыто (определение 1.3).

Утверждение пунктов 3) и 4) получается из утверждений 1) и 2) взятием дополнений.

Заметим, что доказательство пункта 2) не проходит для пересечения бесконечного числа открытых множеств. Например, если E — действительная прямая, а U_n — интервал $\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, то каждое множество U_n открыто, но пересечение всех U_n состоит из одной точки 0 и не является открытым множеством.

Пусть теперь A — любое множество в топологическом пространстве E. По теореме 1 объединение $\operatorname{Int} A$ всех открытых множеств, содержащихся в A, открыто. Ясно, что это «наибольшее» открытое множество, содержащееся в A.

Определение 1.5. $\operatorname{Int} A$ называется *внутренностью множества* A (Int — сокращенное «interior»).

Двойственным образом пересечение $\bar{A}$ всех замкнутых подмножеств, содержащих A, замкнуто и является «наименьшим» замкнутым множеством, содержащим A.

Определение 1.6. $\bar{A}$ называется *замыканием множества* A.

Определение 1.7. $\operatorname{Fr} A = \bar{A} \cap \overline{\complement A}$ называется *границей множества* A (Fr — сокращенное «frontier»).

Пример 1.9. Пусть E — плоскость, а A — открытый круг, к которому добавлены точки верхней полуокружности. Тогда $\operatorname{Int} A$ есть открытый круг, $\bar{A}$ — замкнутый круг, а $\operatorname{Fr} A$ — окружность.

Упражнения. 1.2. Пусть A — множество в топологическом пространстве. Докажите, что точка p лежит в $\operatorname{Int} A$ тогда и

только тогда, когда она имеет окрестность, целиком содержащуюся в A. Докажите также, что p лежит в $\bar{A}$ тогда и только тогда, когда каждая окрестность точки p пересекает A.

1.3. Покажите, что для любых двух множеств A и B в топологическом пространстве $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ и $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$.

1.4. Пусть E — топологическое пространство, а F — подпространство. Покажите, что множество U, лежащее в F, открыто в F тогда и только тогда, когда $U = V \cap F$, где V — открытое множество в E.

1.3. Непрерывные отображения

Пусть E и F — топологические пространства, и пусть f — отображение пространства E в F. Последнее обозначают так:

$$f : E \to F.$$

Идея непрерывности состоит просто в том, что точки, близкие друг к другу в E, отображаются в точки, близкие друг к другу в F. Это уточняется следующим образом:

Определение 1.8. Отображение f: $E \to F$ *непрерывно в точке* p, если для любой окрестности V точки $f(p)$ в F существует такая окрестность U точки p в E, что $f(U) \subset V$. Отображение f *непрерывно*, если оно непрерывно в каждой точке пространства E.

Упражнения. 1.5. Пусть в определении 1.8 как E, так и F является действительной прямой. В этом случае обычное определение непрерывности функции f в точке x состоит в следующем: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если $|x' - x| < \delta$, то $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$. Докажите, что это эквивалентно определению 1.8.

1.6. Пусть дано отображение $f: E \to F$. Докажите, что f непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз любого открытого в F множества открыт в E. Используйте это для доказательства того, что композиция непрерывных отображений непрерывна.

1.7. Пусть E является объединением двух замкнутых множеств A и B, и пусть дано отображение $f: E \to F$. Предположим, что ограничения отображения f на множества A и B являются непрерывными отображениями этих множеств в F. Покажите, что f также непрерывно. Постройте пример, показывающий, что если множества A и B не замкнуты, то отображение f не обязано быть непрерывным.

Особое значение имеют те непрерывные отображения, у которых существуют непрерывные обратные отображения.

Определение 1.9. Пусть f — взаимно однозначное отображение пространства E в F. Таким образом, существует обратное отображение g пространства F в E. Если и f, и обратное к нему отображение непрерывны, то f называется *гомеоморфизмом*, и тогда говорят, что пространства E и F *гомеоморфны*.

С точки зрения общей топологии гомеоморфные пространства не отличаются друг от друга. Таким образом, можно сказать, что нас интересуют те свойства, которые, будучи верными для одного пространства, верны и для всех гомеоморфных ему пространств. Сформулируем это иначе. Заметим, что гомеоморфизм между E и F устанавливает взаимно однозначное соответствие между окрестностями в E и окрестностями в F, а также между открытыми множествами в E и открытыми множествами в F. Следовательно, любое свойство, формулируемое только с помощью окрестностей и открытых множеств, является топологическим свойством. Вскоре у нас появятся примеры таких свойств.

1.4. Топологические произведения

В этом разделе описывается метод, который часто используется для получения новых пространств из уже имеющихся.

Пусть E и F — топологические пространства. Множество $E \times F$ определяется как множество пар (p, q), где $p \in E$, а $q \in F$. Оно превращается в топологическое пространство следующим образом: если $(p, q) \in E \times F$, то окрестность точки (p, q) — это любое множество, содержащее множество вида $U \times V$, где U — окрестность точки p в E, а V — окрестность q в F. Нетрудно видеть, что аксиомы 1—4 для таких окрестностей выполняются.

Определение 1.10. Множество $E \times F$, превращенное в топологическое пространство только что описанным способом, называется *топологическим произведением пространств E и F*.

Примеры. 1.10. Если $E = F =$ действительная прямая, то $E \times F$ — плоскость с обычной топологией двумерного евклидова пространства.

1.11. Если E — двумерное евклидово пространство, а F — действительная прямая, то $E \times F$ — трехмерное евклидово пространство. Этот факт обобщается очевидным образом: топологическое произведение евклидовых пространств размерностей m и n есть евклидово пространство размерности $m + n$.

1.12. Если E — интервал на действительной прямой, а F — окружность, то $E \times F$ — цилиндр.

1.13. Позже мы увидим со всеми подробностями, что тор является топологическим произведением окружности на себя.

1.5. Связность

В этом и следующем разделе мы опишем два важных топологических свойства. Первое из них, связность, есть, так сказать, свойство состоять из одного куска.

Определение 1.11. Пространство E *связно*, если его нельзя представить в виде объединения двух непустых непересекающихся множеств, открытых в E. Множество в топологическом пространстве *связно*, если оно связно как подпространство.

Примеры. 1.14. Пусть E — пространство, которое состоит из двух точек — a и b и в котором окрестностями точки a являются множества $\{a\}$ и $\{a, b\}$, а окрестности точки b — это $\{b\}$ и $\{a, b\}$. Легко видеть, что аксиомы окрестностей выполняются. Кроме того, множества $\{a\}$ и $\{b\}$ открыты; таким образом, E является объединением двух открытых непересекающихся множеств. Следовательно, пространство E не связно.

1.15. Пусть A — объединение двух открытых непересекающихся кругов на плоскости. Тогда A не связно.

Намного труднее дать пример связного пространства [1]) (за исключением некоторых тривиальных случаев, вроде пространства, состоящего из одной точки). Один из наиболее важных примеров — это интервал на прямой. Интуитивно совершенно ясно, что он состоит из одного куска и должен быть связным, но это, конечно, нужно доказать.

Теорема 1.2. *Пусть A — открытый интервал на прямой, скажем, множество таких действительных чисел x, что $0 < x < 1$. Тогда A связно.*

Доказательство. Предположим, что A не связно. Тогда по определению $A = B \cup C$, где B и C — некоторые непустые непересекающиеся множества, открытые в A и, следовательно, на прямой. Поскольку B и C непусты, найдется точка $b \in B$ и точка $c \in C$. Предположим для определенности, что $b < c$. Теперь определим D как множество тех точек x в B, для которых $x < c$. Множество D непусто, поскольку оно содержит точку b. Пусть d — наименьшая верхняя грань чисел из D. Покажем, что d не может лежать ни в B, ни в C. Поскольку тем не менее d заключено между b и c, оно заведомо лежит в A, а значит, либо в B, либо в C. Это противоречие покажет, что A на самом деле связно.

Итак, предположим, что $d \in B$. Так как все x из D удовлетворяют неравенству $x < c$, то $d \leqslant c$, а раз d лежит в B, то в действительности $d < c$. Множество B открыто, и поэтому существует открытый интервал U, содержащий d и лежащий в B. Если взять длину U меньше, чем $c - d$, то U будет содержаться в D. Но тогда и правый конец U лежал бы в D и был бы больше, чем d, что невозможно, ибо d — верхняя грань чисел из D. Поэтому d не может лежать в B.

---

[1]) Точнее связность приходится доказывать — нельзя же перебрать в уме одно за другим все возможные представления E в виде объединения двух открытых подмножеств и убедиться, что эти два подмножества всегда пересекаются. — *Прим. ред.*

Предположим теперь, что $d \in C$. Тогда, поскольку C открыто, найдется интервал U, содержащий точку d и лежащий в C. Но это означает, что для некоторого $\varepsilon < 0$ не существует точек множества B (а стало быть, и D), заключенных между $d - \varepsilon$ и d. Это противоречит тому факту, что d есть точная верхняя грань чисел из D. Следовательно, $d \notin C$.

Таким образом, d не лежит ни в B, ни в C, что и приводит к требуемому противоречию, как это уже объяснялось выше. Доказательство окончено.

Ясно, что тем же способом с небольшими изменениями можно доказать связность интервалов, содержащих один или оба конца, а также интервалов, бесконечных в одном или обоих направлениях.

Теорема 1.2 допускает обращение, которое довольно тривиально.

Теорема 1.3. *Если множество действительных чисел A связно, то A есть интервал (конечный или бесконечный, с включенными или не включенными концами).*

Доказательство. Пусть a и b — две точки из A, причем $a < b$. Надо показать, что A содержит все числа c, лежащие между a и b. Предположим, что существует число c, заключенное между a и b, но не принадлежащее A. Пусть B — множество всех чисел из A, меньших c, а C — множество всех чисел из A, больших c. Тогда $A = B \cup C$, причем B и C оба открыты в A, не пересекаются и непусты. Это противоречит предположению о связности A, и поэтому такого числа c не существует. Следовательно, A — интервал.

Теперь уже довольно легко строить другие примеры связных пространств. Следующая теорема дает общий метод получения новых связных пространств из уже имеющихся.

Теорема 1.4. *Пусть $f\colon E \to F$ — непрерывное отображение связного пространства E на пространство F. Тогда F связно.*

Доказательство. Предположим, что теорема не верна. Тогда $F = A \cup B$, где A и B непусты, не пересекаются и открыты. Но при этом $E = f^{-1}(A) \cup \cup f^{-1}(B)$, причем $f^{-1}(A)$ и $f^{-1}(B)$ непусты, не пересекаются и, согласно упражнению 1.6, открыты. Это противоречит связности E, так что F обязано быть связным.

Из этой теоремы, в частности, следует, что если пространство E связно, а F гомеоморфно E, то F связно, так что связность является топологическим свойством. Вот другой пример использования теоремы 1.4. Существует непрерывное отображение единичного отрезка действительных чисел $0 \leqslant x \leqslant 1$ на окружность, а именно отображение, переводящее точку x в точку $(\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ на плоскости. Поэтому окружность связна.

Теорема 1.5. *Если E и F — связные пространства, то произведение $E \times F$ также связно.*

Доказательство. Как обычно, проводим доказательство от противного. Предположим, что $E \times F$ не связно. Тогда $E \times F = A \cup B$, где множества A и B открыты, не пересекаются и непусты. Возьмем точку (x, y) в A. Множество $E \times \{y\}$ гомеоморфно пространству E и потому связно. Отсюда следует, что $E \times \{y\}$ содержится в A. В противном случае его пересечения с A и B давали бы разложение на открытые и не пересекающиеся непустые множества. Но теперь аналогичное рассуждение показывает, что для любого x' из E слой $\{x'\} \times F$ должен содержаться в A. Выходит, что всё $E \times F$ содержится в A, значит, B должно быть пусто. Это и дает требуемое противоречие, поскольку B предполагалось непустым. Поэтому $E \times F$ связно.

Пример 1.16. Мы уже видели, что открытый интервал I на прямой связен. Отсюда следует, что квадрат $I^2 = I \times I$ связен. По индукции заключаем, что n-мерный куб I^n связен. Аналогично, поскольку действительная прямая связна, n-мерное евклидово пространство также связно.

Упражнения. 1.8. Пусть A — связное множество в топологическом пространстве E. Пусть множество B таково, что $A \subset B \subset \bar{A}$. Докажите, что тогда B связно.

1.9. Пусть A и B — связные множества в пространстве E, и пусть $A \cap \bar{B}$ непусто. Докажите, что $A \cup B$ связно.

Примеры. 1.17. Пример 1.16 показывает, что открытый круг (гомеоморфный квадрату I^2) связен. Теперь из упражнения 1.8 следует, что связным будет и множество, полученное добавлением к кругу всех или только некоторых точек на окружности. Аналогичный пример можно построить для бо́льших размерностей.

1.18. Обыкновенную сферу можно представить в виде объединения двух замкнутых кругов с непустым пересечением. Поэтому, согласно упражнению 1.9, эта поверхность связна. Аналогично n-мерная сфера будет связной при любом $n \geqslant 1$.

1.6. Компактность

Понятие компактности обобщает свойство быть замкнутым и ограниченным множеством в евклидовом пространстве. Сначала мы наложим на рассматриваемые пространства аксиому отделимости Хаусдорфа. В общей топологии ее выполнение предполагается не всегда, однако нас эта аксиома устраивает, поскольку для всех пространств, которыми мы интересуемся, она так или иначе выполняется.

Определение 1.12. Будем называть топологическое пространство *хаусдорфовым*, если оно обладает следующим свойством: каковы бы ни были две различные точки p и q, существует такая окрестность U точки p и такая окрестность V точки q, что $U \cap V = \varnothing$.

Примеры. 1.19. Любое евклидово пространство является хаусдорфовым.

1.20. Любое подпространство евклидова пространства хаусдорфово. На самом деле любое подпространство любого хаусдорфова пространства хаусдорфово.

Прежде чем определять компактность, нужно дать несколько предварительных определений.

Определение 1.13. *Покрытие* топологического пространства E — это набор множеств из E, объединение которых дает все пространство E. Оно называется *открытым покрытием*, если каждое множество в наборе открыто.

Определение 1.14. Пусть дано покрытие топологического пространства. *Подпокрытие* — это покрытие, все множества которого принадлежат данному покрытию.

Определение 1.15. *Компактное пространство* (или *компакт*) — это хаусдорфово пространство, обладающее тем свойством, что каждое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие, т. е. подпокрытие, состоящее из конечного числа множеств. Множество в топологическом пространстве называется *компактным*, если оно является компактным подпространством.

Примеры. 1.21. Теорема Бореля — Лебега из анализа показывает, что замкнутое ограниченное множество в евклидовом пространстве является компактным (см. [16]).

1.22. Действительная прямая не компактна. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим набор открытых интервалов вида $(n-1, n+1)$ с целыми n. Это открытое покрытие действительной прямой, однако никакой конечный набор этих интервалов, очевидно, не может покрыть всей прямой. Аналогичное рассуждение показывает, что n-мерное евклидово пространство не компактно и что на самом деле не компактно любое неограниченное подмножество евклидова пространства.

Упражнения. 1.10. Покажите, что n-мерная сфера компактна при любом n.

1.11. Докажите, что замкнутое подмножество компакта компактно и что компактное множество в любом хаусдорфовом пространстве замкнуто.

Заметим теперь, что компактное подмножество евклидова пространства должно быть замкнутым (упр. 1.11) и ограниченным (пример 1.22). Мы получаем теорему, обратную к теореме Бореля — Лебега. Существует общая теорема, утверждающая, что топологическое произведение компактных пространств компактно (см. [10]). Здесь мы не будем доказывать ее. Однако нам понадобится один ее частный случай, а именно когда перемножаемые компактные пространства A и B лежат в евклидовых пространствах размерностей m и n. Тогда их произведение есть подпространство в $(n+m)$-мерном пространстве. Так как пространства A и B компактны, они замкнуты и ограничены, согласно только что сделанному замечанию. Поэтому их произведение является замкнутым и ограниченным подмножеством евклидова пространства (проверьте это!). Следовательно, $A \times B$ компактно по теореме Бореля — Лебега.

Компактность является топологическим свойством, поскольку она определяется в терминах открытых множеств. В действительности она сохраняется при любом непрерывном отображении.

Теорема 1.6. *Пусть f: $E \to F$ — непрерывное отображение компактного пространства E на хаусдорфово пространство F. Тогда пространство F является компактным.*

Доказательство. Пусть дано открытое покрытие пространства F, открытые множества которого обозначены через U_i, где i пробегает некоторое множество индексов. Тогда множества $f^{-1}(U_i)$ образуют покрытие пространства E, причем, согласно упражнению 1.6, это открытое покрытие. Так как E компактно, найдется конечный набор, скажем $f^{-1}(U_1), \ldots, f^{-1}(U_n)$, его покрывающий. Но в таком случае множества $U_1, \ldots, U_n$ образуют конечное подпокрытие данного покрытия пространства F. Поскольку F, кроме того, предполагается хаусдорфовым, то F является компактным.

1.7. Пространства со счетной базой [1])

(При первом чтении этот раздел можно опустить.) Пусть E — топологическое пространство и $\{U_\alpha\}$ — совокупность некоторых его открытых подмножеств. Она называется *базой* пространства E, если любое открытое подмножество пространства E можно представить как объединение некоторых U_α. В дальнейшем встречаются исключительно топологические пространства *со счетной базой.*

Примеры. 1.23. n-мерное евклидово пространство имеет счетную базу, состоящую из шаров, у которых центры находятся в точках $(x_1, \ldots, x_n)$ с рациональными координатами и радиусы рациональны (докажите, что это база!).

1.24. Если E — топологическое пространство со счетной базой $\{U_n\}$ и F — его подпространство, то F тоже имеет счетную базу, а именно в качестве таковой годится $\{U_n \cap F\}$ (проверьте!).

Упражнение 1.12. В топологическом пространстве со счетной базой из всякого открытого покрытия можно выбрать счетное подпокрытие. (*Схема доказательства.* Пусть $\{U_n\}$ — счетная база, а $\{V_\alpha\}$ — открытое покрытие. Представив каждое V_α как объединение некоторых U_n, возьмем все U_n, которые при этом встретятся (при всевозможных α); пусть это будут U_{n_1}, $U_{n_2}, \ldots$. Докажите, что $\{U_{n_i}\}$ — счетное покрытие E, и вспомните, что каждое U_{n_i} содержится в некотором V_α.)

§ 2. ГЛАДКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

2.1. Введение

Во многих из приведенных выше примеров топологические пространства обладают тем свойством, что на них можно ввести координаты, по крайней мере локально, в окрестности каждой точки. Для евклидова пространства это совершенно очевидно и вытекает прямо из определения. Действительно, каждая точка на самом деле является набором из n действи-

[1]) Добавлено редактором перевода. — *Прим. ред.*

тельных чисел — это и есть ее координаты. С другой стороны, рассмотрим двумерную сферу, например единичную сферу $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ в трехмерном пространстве. Возьмем точку на полусфере $z > 0$. Здесь $z = (1 - x^2 - y^2)^{1/2}$, так что в действительности точка определяется значениями координат x и y. Таким образом, пару (x, y) можно считать координатами точки на сфере. Но они являются лишь локальными координатами в том смысле, что они однозначно определяют точки только в некотором открытом множестве, а именно в полусфере $z > 0$. Заметим, что отображение, переводящее точку (x, y, z) на сфере в точку $(x, y, 0)$ на плоскости, есть гомеоморфизм полусферы $z > 0$ на открытый единичный круг, и в качестве координат мы на самом деле используем координаты образа точки при этом отображении (рис. 2.1).

С нашей точки зрения интересная особенность этого примера состоит в том, что сферу можно покрыть шестью полусферами с аналогичными свойствами, а именно полусферами $z > 0$, $z < 0$, $y > 0$, $y < 0$, $x > 0$, $x < 0$. Каждая из этих полусфер гомеоморфно отображается на открытый круг, и координаты точек на круге можно использовать как координаты точек на соответствующей полусфере. Например, в полусфере $x > 0$ можно взять за координаты (y, z) и т. д. В таком случае говорят, что сфера покрыта шестью координатными окрестностями (окрестностями, в которых можно ввести локальные координаты).

Можно произвести аналогичный разбор для тора (см. рис. 2.2), хотя сделать все это в явном виде уже несколько труднее. Возьмем тор [1]), который получен вращением вокруг оси y окружности $(x - 2)^2 + y^2 = 1$, лежащей на плоскости (x, y). Тогда, например, в окрестности точки $(0, 0, 3)$ можно взять за локальные координаты (x, y).

Упражнение 2.1. Постройте полную систему координатных окрестностей, покрывающих тор.

---

[1]) Отметим для дальнейшего, что область, заключенную внутри тора, называют сплошным тором. — *Прим. ред.*

Заметим, что предыдущие примеры обладали следующим свойством: если (x_1, x_2) и (y_1, y_2) — локальные координаты точки в двух перекрывающихся ко-

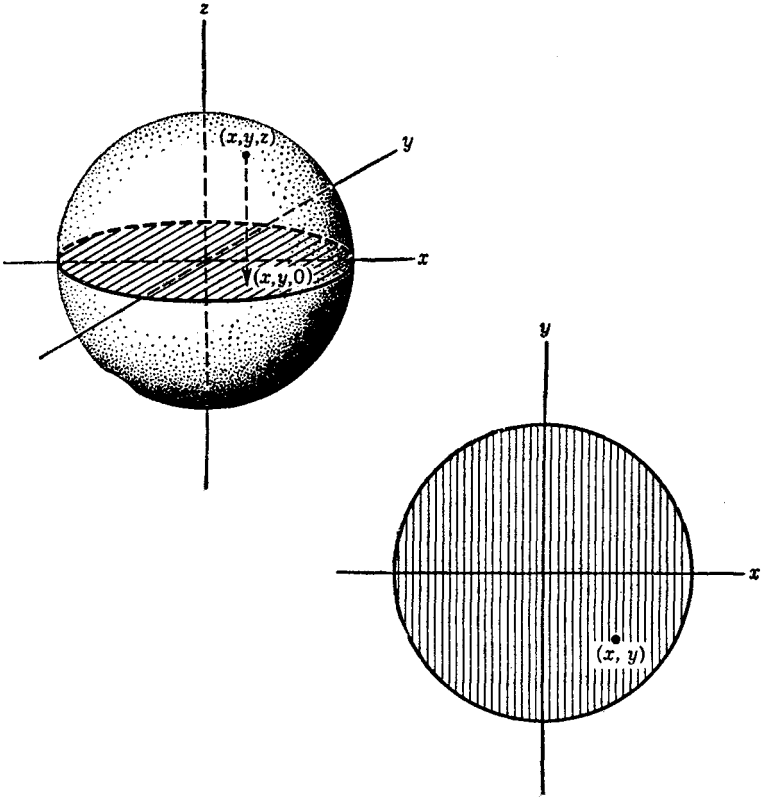


Рис. 2.1. Отождествление верхней полусферы с кругом в плоскости (x, y) посредством проекции.

ординатных окрестностях, то y_1 и y_2 являются дифференцируемыми функциями от x_1, x_2, и наоборот. В случае сферы, например, рассмотрим, как и раньше, системы координат в полусферах $z > 0$ и $x > 0$. Пусть точка имеет в первой из этих окрестностей координаты (x_1, x_2), а во второй (y_1, y_2). Это

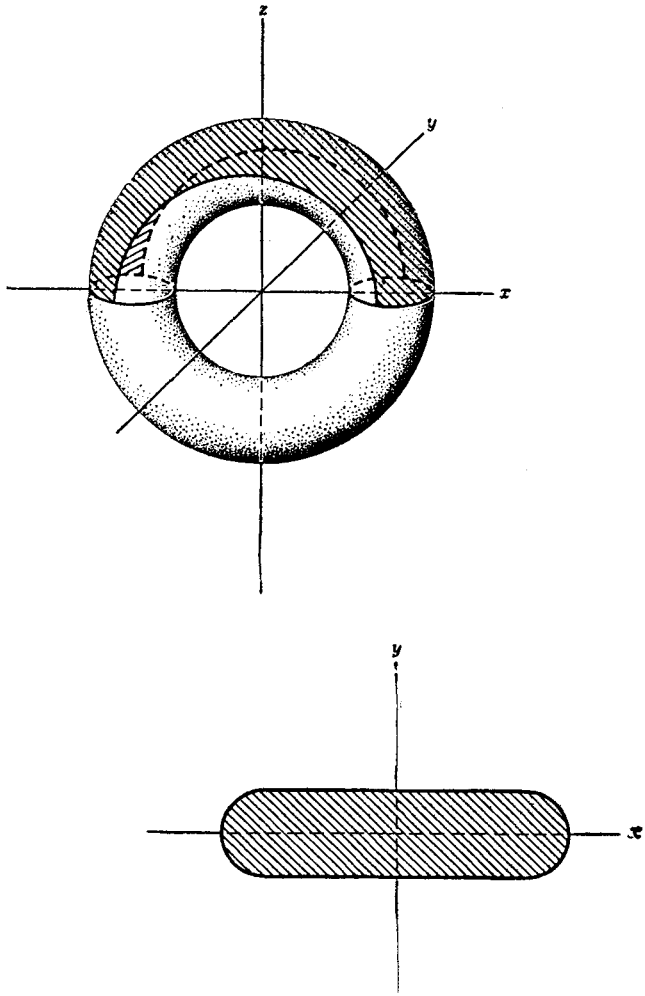


Рис. 2.2. Отождествление «верхней части» тора (заштрихована) с заштрихованной областью в плоскости (x, y).

означает, что если (x, y, z) — ее координаты в объемлющем евклидовом пространстве, то $x_1 = x$, $x_2 = y$, $y_1 = y$, $y_2 = z$. Так как на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, то

$$y_1 = x_2,$$
$$y_2 = (1 - x_1^2 - x_2^2)^{1/2}.$$

Ясно, что функции, стоящие в правой части этих уравнений, обладают частными производными всюду в общей части обеих полусфер [1]). Аналогично

$$x_1 = (1 - y_1^2 - y_2^2)^{1/2},$$
$$x_2 = y_1,$$

и снова функции в правой части можно дифференцировать в любой точке множества $z > 0$, $x > 0$. Кроме того, легко проверить, что на этом множестве определитель

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

не равен нулю.

Предыдущие примеры, особенно только что описанные свойства локальных систем координат на сфере, дают обоснование для определения того типа пространств, который нас интересует, — гладких многообразий. Сначала мы приведем несколько предварительных определений.

2.2. Гладкие функции и гладкие отображения

Определение 2.1. Пусть U — открытое множество в n-мерном евклидовом пространстве E, и пусть f — функция, определенная в U и принимающая действительные значения. Будем называть функцию f *гладкой*, если в каждой точке из U она имеет

[1]) Точнее, они имеют частные производные при всех тех (x_1, x_2), которые являются координатами точек из общей части этих полусфер. — *Прим. ред.*

непрерывные частные производные всех порядков, которые берутся по координатам в E[1]).

Примеры. 2.1. Многочлен от координат в E является гладким в любом открытом подмножестве пространства E. В этом случае, конечно, все производные достаточно большого порядка обращаются в нуль.

2.2. Функция $|1-x^2-y^2|^{1/2}$ (символ $|\ |$ обозначает абсолютную величину числа) на двумерном евклидовом пространстве не будет гладкой ни в каком открытом множестве, содержащем хоть одну точку окружности $x^2+y^2=1$, в любом же открытом множестве, не содержащем точек окружности, она будет гладкой.

2.3. Рассмотрим функцию на действительной прямой, определенную следующим образом:

$$f(x)=\exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right) \quad \text{при} \quad -1<x<1,$$
$$f(x)=0 \quad \text{при} \quad 1\leqslant x \text{ или } x\leqslant -1.$$

В качестве упражнения проверить, что эта функция имеет производные всех порядков во всех точках прямой. Таким образом, f — гладкая функция на всей прямой. (Напомним, что $\frac{1}{t^n}e^{-1/t}\to 0$, когда t стремится к 0, пробегая положительные значения.)

2.4. Последний пример можно использовать для построения других примеров в пространствах бо́льших размерностей. Пусть $r^2=\sum x_i^2$ есть квадрат расстояния до нуля в евклидовом n-мерном пространстве. Определим тогда функцию f следующим образом:

$$f(p)=\exp\left(\frac{1}{r^2-1}\right) \quad \text{при} \quad r<1,$$
$$f(p)=0 \quad \text{при} \quad r\geqslant 1.$$

[1]) Точнее, такие функции называются гладкими функциями *класса гладкости* C^∞. Если у f имеются непрерывные частные производные до порядка n включительно, то f — *класса гладкости* C^n. Функции класса C^0 — это просто непрерывные функции. Поскольку у Уоллеса встречаются только функции класса C^∞, он опускает упоминание о классе гладкости и говорит просто «гладкая функция». — *Прим. ред.*

Снова получается гладкая функция во всем n-мерном пространстве.

Заметим, что только что построенная функция обладает следующими свойствами: она гладкая во всем евклидовом пространстве, равна нулю вне некоторого открытого множества (единичного шара) и не обращается в нуль внутри этого множества. Функции с такими свойствами будут полезны нам в дальнейшем.

Упражнение 2.2. Методом, аналогичным использованному в последнем примере, постройте функцию, гладкую во всем n-мерном пространстве, равную 1 на замкнутом шаре $\sum x_i^2 \leqslant 1$ и нулю вне шара $\sum x_i^2 < 4$.

Иногда встречаются функции, заданные на множествах, которые не являются открытыми, и в таких случаях определение 2.1 необходимо дополнить.

Определение 2.2. Пусть f — функция, заданная на множестве A в n-мерном евклидовом пространстве и принимающая действительные значения. Будем называть функцию f *гладкой на множестве* A, если ее можно так продолжить на открытое множество U, содержащее A, что она будет гладкой в U.

Вот естественное обобщение понятия гладкости на отображения евклидовых пространств друг в друга.

Определение 2.3. Пусть A — множество в евклидовом m-мерном пространстве, и пусть даны n гладких на A функций $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Определим отображение f множества A в n-мерное евклидово пространство, беря в качестве образа $f(x)$ точки $x \in A$ точку с координатами $(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$. В этом случае f называется *гладким отображением множества A в n-мерное пространство.*

Заметим, что для $n = 1$ гладкое отображение превращается просто в гладкую функцию на A в смысле определения 2.2.

В изучении гладких отображений большую роль играет матрица, составленная из первых частных производных функций f_i (в обозначениях определения 2.3).

Определение 2.4. Матрица, у которой на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит $\partial f_i/\partial x_j$, называется *матрицей Якоби* гладкого отображения. Если $n = m$, то ее определитель называется *якобианом* отображения [1]).

Упражнения. 2.3. Пусть f — гладкое отображение открытого множества A, лежащего в m-мерном евклидовом пространстве, в n-мерное пространство, и пусть g — гладкое отображение открытого множества, содержащего $f(A)$, в p-мерное пространство. Докажите, что композиция gf есть гладкое отображение множества A в p-мерное пространство. Докажите также, что если F — значение матрицы Якоби отображения f в точке x, а G — значение матрицы Якоби для g в точке $f(x)$, то значение матрицы Якоби для gf в точке x равно GF.

2.4. Пусть f — гладкое отображение открытого множества U, лежащего в n-мерном евклидовом пространстве, в n-мерное пространство, и пусть f имеет гладкое обратное отображение. Покажите, что якобиан отображения f отличен от нуля во всех точках множества U.

Справедливо утверждение, обратное к результату упражнения 2.4. Оно называется теоремой об обратной функции и формулируется следующим образом:

Теорема 2.1. *Пусть f — гладкое отображение открытого множества U, лежащего в n-мерном пространстве, в n-мерное пространство, и пусть p — точка множества U. Предположим, что якобиан отображения f не равен нулю в точке p. Тогда существует такая окрестность V точки p и такая окрестность W точки $f(p)$, что f гомеоморфно отображает V на W и что обратное к f отображение является гладким отображением окрестности W на V.*

---

[1]) Заметим, что если множество A не является открытым, то матрица Якоби гладкого отображения $f: A \to E$ (E есть n-мерное пространство), вообще говоря, может не определяться однозначно самим отображением f, а зависеть от конкретного выбора продолжений функций f_i на содержащее A открытое множество. — *Прим. ред.*

Доказательство этого результата можно найти в [16] или в [18].

Заметим, что эта теорема дает лишь локальное обращение отображения f. В общем случае больше ничего сказать нельзя. Например, пусть U — плоскость (x, y) с выкинутым началом координат. Используя комплексную переменную $z = x + iy$, определим отображение множества U на себя формулой $f(z) = e^z$. Если записать действительные координаты точки $f(z)$ как (u, v), то отображение f с помощью действительных функций можно выразить формулами:

$$u = e^x \cos y,$$
$$v = e^x \sin y.$$

Легко видеть, что это гладкое отображение множества U на себя и что якобиан не равен нулю ни в одной точке этого множества. Конечно, по теореме 2.1 отображение f можно обратить локально. И в самом деле, обратное отображение задается формулой $z = \log(u + iv)$ в любом множестве, не окружающем целиком начало координат. Но f не будет взаимно однозначным во всем U, ибо, если изменить y, добавив к нему целое кратное 2π, то значение $f(z)$ не изменится.

2.3. Гладкие многообразия

После всех приготовлений, сделанных в предыдущем параграфе, мы теперь в состоянии сформулировать определение того типа пространств, которые нас интересуют, — гладких многообразий.

Определение 2.5. *n-мерное гладкое многообразие M* есть хаусдорфово топологическое пространство, покрытое счетным числом открытых множеств $U_1, U_2, \ldots,$ удовлетворяющих следующим условиям:

1) Для каждого U_i имеется гомеоморфизм φ_i: $U_i \to V_i$, где V_i — открытая клетка [1]) в евклидовом пространстве.

---

[1]) *Замкнутая n-мерная клетка* — это множество W в евклидовом пространстве, гомеоморфное замкнутому шару $D^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1\}$, причем гомеоморфизмы

2) Если $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, то гомеоморфизм $\varphi_{ji} = \varphi_j \varphi_i^{-1}$ множества $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ на $\varphi_j(U_i \cap U_j)$, полученный композицией отображений φ_i^{-1} и φ_j, является гладким отображением[1]).

Число n называют *размерностью* многообразия M (обозначение: $\dim M$).

$f: D^n \longrightarrow W$ и $f^{-1}: W \longrightarrow D^n$ являются гладкими отображениями. (Позднее такие гомеоморфизмы получат название диффеоморфизмов. Они будут определены для многообразий, и тогда можно будет говорить о клетках не только в евклидовом пространстве, но и в гладком многообразии.) *Открытая клетка* — это часть некоторой замкнутой клетки, которая при указанном гомеоморфизме соответствует внутренности шара.

Обычно в определении гладкого многообразия требуется лишь, чтобы V_i было открытым множеством в евклидовом пространстве, но не обязательно клеткой. Оба варианта определения в действительности эквивалентны — при необходимости можно добиться, уменьшая U_i и увеличивая их число, чтобы все V_i стали клетками. — *Прим. ред.*

[1]) Говорят также, что покрытие U_i и гомеоморфизмы φ_i задают (определяют, вводят) *гладкость* (или *гладкую структуру*) на исходном топологическом пространстве.

Следует иметь в виду, что гладкое многообразие — это не просто хаусдорфово пространство, допускающее такое покрытие с такими гомеоморфизмами, как в определении 2.5, а хаусдорфово топологическое пространство *вместе* с таким покрытием и такими гомеоморфизмами. Ради краткости покрытие $\{U_i\}$ и набор гомеоморфизмов φ_i (удовлетворяющих приведенным условиям) часто называют *атласом*, а пару (U_i, φ_i) — *картой*.

Возникает вопрос: когда одно и то же хаусдорфово пространство с двумя различными атласами следует считать одним и тем же гладким многообразием (т. е. когда эти атласы определяют одну и ту же гладкую структуру), а когда — нет? (Чуть ниже, в примере 2.6 описан атлас на сфере S^2, состоящий из шести карт (U_i, φ_i). Но можно взять другой атлас, состоящий из двух карт (U_1', φ_1'), (U_2', φ_2'), где U_1' получается из сферы выбрасыванием северного полюса, U_2' — выбрасыванием южного полюса, а φ_i' определяются с помощью стереографической проекции (см. Милнор, рис. 3). Естественно считать, что хотя эти два атласа и разные, гладкое многообразие в данном случае одно и то же.) Следующие соображения подсказывают ответ.

Роль карты (U_i, φ_i) состоит в том, что при помощи гомеоморфизма φ_i вводится некоторая система координат в открытом множестве U_i: если $x \in U_i$, то $\varphi_i(x)$ — это точка евклидова пространства, т. е. набор чисел; их мы и принимаем за координаты точки x. Условие 2) в определении 2.5 означает, что карты одного

Заметим, что отображение φ_{ji} в условии 2) автоматически имеет обратное, а именно φ_{ij}. Поэтому его якобиан будет отличен от нуля во всех точках множества $\varphi_i(U_i \cap U_j)$. Условие счетности, включенное

и того же атласа согласуются друг с другом в том смысле, что координаты точки x в карте φ_j суть гладкие функции координат той же точки в карте φ_i. Но мы можем и для карт двух разных атласов говорить об их согласованности (или несогласованности) в том же самом смысле. Эти соображения мотивируют следующее определение.

Определение 2.5′. Два разных атласа $\{(U_i, \varphi_i)\}$ и $\{(U'_k, \varphi'_k)\}$, заданные на одном и том же топологическом пространстве, называются *согласованными или совместимыми друг с другом* при выполнении такого условия:

если $U_i \cap U'_k \neq \varnothing$, то, во-первых, гомеоморфизм $\varphi'_{ki} = \varphi'_k \varphi_i^{-1}$ множества $\varphi_i(U_i \cap U'_k)$ на $\varphi'_k(U_i \cap U'_k)$, полученный композицией φ_i^{-1} и φ'_k, является гладким отображением; во-вторых, гомеоморфизм $\varphi'_{ik} = \varphi_i(\varphi'_k)^{-1}: \varphi'_k(U_i \cap U'_k) \to \varphi_i(U_i \cap U'_k)$ тоже является гладким отображением. (Можно дать более сжатую формулировку: совокупность всех карт обоих атласов снова образует атлас.)

По определению считают, что два атласа тогда и только тогда задают одну и ту же гладкую структуру, когда они совместимы.

(Легко видеть, что в приведенном примере со сферой оба атласа действительно согласованы. А вот пример несовместимых атласов на прямой R. Оба атласа состоят всего из одной карты, так что $U_1 = U'_1 = R$. Гомеоморфизм $\varphi_1: R \to R$, как и в примере 2.5, тождественный, а гомеоморфизм $\varphi'_1: R \to R$ переводит x в x^3. Отображение φ'_{11} не будет гладким.)

В определении 2.5 от отображений φ_{ji} можно потребовать гладкости класса C^n (см. прим. ред. на стр. 33); тогда получится определение *гладкой структуры* или *гладкого многообразия класса* C^n. (Согласно этой терминологии, «гладкие многообразия» Уоллеса имеют класс C^∞. Многообразия класса C^0, естественно, называют уже не гладкими, а *топологическими*.) Аналогичные изменения можно сделать и в других определениях, например из определения 2.5′ получится определение «C^n-согласованности» атласов. В топологии существенным является только различие между C^0 и всеми остальными C^n, $1 \leqslant n \leqslant \infty$: сравнительно несложно доказать, что на многообразии класса C^n, $n \geqslant 1$, существует атлас, превращающий его в многообразие класса C^∞ и C^n-эквивалентный исходному атласу (см. [18]), в то же время недавно было доказано, что существуют топологические многообразия, на которых невозможно ввести гладкую структуру. — *Прим. ред.*

в это определение, для наших рассмотрений не будет играть никакой роли [1]). Вообще же оно налагается, чтобы исключить некоторые патологические случаи.

Примеры. 2.5. n-мерное евклидово пространство удовлетворяет условиям этого определения очевидным образом. Действительно, за открытое покрытие можно взять покрытие, которое состоит только из одного множества U_1 — всего пространства; за V_1 также можно взять все n-мерное пространство, а за φ_1 — тождественное отображение.

2.6. Возвращаясь к разд. 2.1, мы видим, что двумерная сфера S^2 удовлетворяет условиям определения 2.5. Действительно, шесть полусфер, которые там описаны, образуют открытое покрытие сферы и выполняют роль множеств U_i. Если за U_1 взять, например, полусферу $z > 0$, то φ_1 будет отображением, переводящим точку (x, y, z) множества U_1 в точку (x, y); за V_1 берется единичный круг с центром в начале координат. Аналогично если U_2 — полусфера $x > 0$, то $\varphi_2(x, y, z) = (y, z)$. Отображение φ_{12} задается формулой $\varphi_{12}(y, z) = ((1 - y^2 - z^2)^{1/2}, y)$ и является гладким. Случай других φ_{ij} разбирается аналогично.

Упражнения. 2.5. Действуя по аналогии с рассуждениями предыдущего примера, докажите, что n-мерная сфера S^n является гладким n-мерным многообразием.

2.6. *Проективная плоскость* P^2 получается из двумерной сферы S^2 отождествлением диаметрально противоположных точек. Таким образом, точка из P^2 — это пара диаметрально противоположных точек на сфере. Для точки из P^2, определяемой парой точек p_1, p_2 на сфере S^2, рассмотрим открытый круг U_1 на S^2 с центром в точке p_1 и открытый круг U_2 с центром в p_2, точки которого противоположны точкам круга U_1. Назовем совокупность пар точек, лежащих внутри пары окрестностей U_1 и U_2, окрестностью точки p в P^2. Определим топологию в P^2, объявив окрестностью точки p любое множество, содержащее окрестность

[1]) Точнее, оно не существенно для простейшего материала этого параграфа и начала следующего; в дальнейшем же многообразия обычно предполагаются компактными, что позволяет считать атласы не только счетными, но и конечными. Поэтому при первом чтении на условие счетности можно просто не обращать внимания. При более детальном изучении рекомендуется доказать самостоятельно, что это условие эквивалентно тому, что топологическое пространство M имеет счетную базу (см. разд. 1.7). — *Прим. ред.*

только что описанного вида. Докажите, что P^2 является двумерным гладким многообразием.

2.7. Обобщите предыдущее упражнение, определив *проективное пространство* P^n как пространство, полученное отождествлением диаметрально противоположных точек n-мерной сферы. Окрестности определяются так же, как в упражнении 2.6. Докажите, что P^n — гладкое многообразие.

2.8. Пусть X — множество наборов из $n+1$ действительных чисел, исключая набор из $n+1$ нулей. Определим отношение $\sim$, сказав, что $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \sim (cx_0, cx_1, \ldots, cx_n)$, где c — любое действительное число, отличное от нуля. Покажите, что $\sim$ является отношением эквивалентности[1]) в X и что классы эквивалентности находятся во взаимно однозначном соответствии с точками проективного пространства P^n, построенного в упражнении 2.7. Пусть U_i — множество точек в P^n, представители которых в X имеют $x_i \neq 0$. Тогда каждая точка из U_i имеет представитель вида $(x_0, x_1, \ldots, 1, \ldots, x_n)$ с 1 на i-м месте. Пусть φ_i — отображение множества U_i в n-мерное пространство, переводящее точку с представителем $(x_0, x_1, \ldots, 1, \ldots, x_n)$ в точку $(x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$. Покажите, что полученные таким образом множества U_i и отображения φ_i обладают теми свойствами, о которых говорится в определении 2.5, и превращают P^n в гладкое многообразие.

2.9. Упражнение 2.8 приводит к следующей конструкции: пусть Z — множество наборов $(z_0, z_1, \ldots, z_n)$ из $n+1$ комплексных чисел, исключая набор из $n+1$ нулей. Напишем $(z_0, z_1, \ldots, z_n) \sim (cz_0, cz_1, \ldots, cz_n)$, где c — любое ненулевое комплексное число. Проверьте, что $\sim$ есть отношение эквивалентности в Z. Пусть CP^n — множество классов эквивалентности. Пусть U_i — множество элементов CP^n, имеющих представителей вида $(z_0, z_1, \ldots, 1, \ldots, z_n)$ с единицей на i-м месте, и пусть отображение φ_i переводит элемент такого вида в точку с координатами $(z_0, z_1, \ldots, z_{i-1}, z_{i+1}, \ldots, z_n)$ в n-мерном комплексном пространстве, которое топологически эквивалентно $2n$-мерному евклидову пространству. Покажите, что на CP^n можно ввести топологию так, чтобы все U_i стали открытыми множествами, а φ_i — гомеоморфизмами и чтобы после этого множества U_i и отображения φ_i превратили CP^n в $2n$-мерное гладкое многообразие. CP^n называется *n-мерным комплексным проективным пространством.*

2.10. Докажите, что тор (см. § 2.1) является двумерным гладким многообразием.

2.4. Локальные координаты и гладкие функции

Идея вводимого ниже понятия неявно содержится уже в определении 2.5. А именно, гомеоморфизм φ_i отождествляет множество U_i с V_i, так что евклидовы

[1]) Определение см. в книге: Р. Фор, А. Кофман, М. Дени-Папен, Современная математика, «Мир», М., 1966, стр. 34. — *Прим. ред.*

координаты на V_i можно использовать для того, чтобы задавать («нумеровать») ими соответствующие точки в U_i. Таким образом, можно считать, что отображение φ_i вводит в множестве U_i систему координат или, по крайней мере, локальную систему координат. Слово «локальная» означает, что координаты введены только в открытом множестве U_i, а не на всем многообразии. Это приводит к мысли, что можно было бы определить понятие гладкой функции на многообразии, используя дифференцирование по координатам, определяемым отображениями φ_i. Основной момент — проверить, что, определяя это понятие при помощи различных φ_i, мы не придем к противоречию.

Для проверки этого рассмотрим функцию f с действительными значениями, определенную на открытом множестве U гладкого многообразия M. Возьмем точку p из U и предположим, что она попадает в множество U_i того открытого покрытия, которое участвует в определении M. Рассмотрим функцию $f\varphi_i^{-1}$, определенную на множестве $\varphi_i(U \cap U_i)$. Эту функцию можно представлять себе как функцию f, выраженную через локальные координаты в U_i, определяемые отображением φ_i. Если точка p попадет также в другое открытое множество покрытия, скажем U_j, то точно так же функция $f\varphi_j^{-1}$ определена в окрестности точки $\varphi_j(p)$.

Лемма 2.1. *Функция $f\varphi_i^{-1}$ будет гладкой в окрестности точки $\varphi_i(p)$ тогда и только тогда, когда $f\varphi_j^{-1}$ будет гладкой в окрестности точки $\varphi_j(p)$.*

Доказательство. Это устанавливается мгновенно, поскольку $f\varphi_i^{-1}$ можно записать как $f\varphi_j^{-1}\varphi_j\varphi_i^{-1} = f\varphi_j^{-1}\varphi_{ji}$. Если функция $f\varphi_j^{-1}$ гладкая, то такой же будет и $f\varphi_i^{-1} = f\varphi_j^{-1}\varphi_{ji}$ как композиция гладких функций (упражнение 2.3).

Лемма, таким образом, утверждает, что если функция f, будучи выражена через координаты, определенные при помощи отображения φ_i, окажется

гладкой, то гладкой она будет и при выражении через координаты, определяемые отображением φ_j (и наоборот).

Определение 2.6. Будем называть функцию f *гладкой в окрестности точки* p в том и только в том случае, когда в предыдущих обозначениях функция $f\varphi_i^{-1}$ будет гладкой в некоторой окрестности точки $\varphi_i(p)$.

Лемма утверждает, что сформулированное здесь условие не зависит от того, какое из отображений φ_i используется для проверки гладкости.

Назовем функцию f *гладкой в открытом множестве* U, если она является гладкой в окрестности каждой точки из U. Назовем ее *гладкой в произвольном множестве* A, если она гладкая в некотором открытом множестве, содержащем A.

Упражнения. 2.11. Пусть M — сфера $x^2+y^2+z^2=1$ в трехмерном пространстве. Докажите, что каждая из евклидовых координат x, y, z является гладкой функцией на M.

2.12. Докажите то же, что и в упражнении 2.11, для тора из § 2.1.

2.13. Пусть M — гладкое многообразие и p — точка на M. Покажите, что существует окрестность U точки p и гладкая функция f на M, которая положительна на U и равна нулю в каждой точке вне U. (*Указание*: возьмите за U окрестность с локальными координатами, которая отображается на открытое множество V в евклидовом пространстве. Затем надо уменьшить U до некоторой окрестности U', которой соответствует шар V' в евклидовом пространстве с замыканием $\overline{V'} \subset V$. Выберите масштаб и начало координат так, чтобы V' стал шаром единичного радиуса с центром в начале координат. После этого воспользуйтесь примером 2.4.)

2.14. Пусть A — компактное множество в гладком многообразии M, а U — открытое множество, содержащее A. Используя подходящее конечное покрытие множества A окрестностями такого типа, как в предыдущем упражнении, постройте гладкую на M функцию f, которая положительна на A и равна 0 вне U.

Добавив к имеющемуся покрытию множества A новые координатные окрестности, получите вторую функцию g, которая равна f на A и не обращается в нуль в окрестности замыкания множества тех точек, где $f \neq 0$. Рассматривая частное f/g, постройте гладкую на M функцию, которая равна 1 на множестве A, нулю вне U и принимает значения, заключенные между 0 и 1.

Заметим, что если V_i — одна из открытых клеток в определении 2.5, то каждая евклидова координата на V_i является гладкой функцией на соответствующем множестве U_i в M. Другими словами, в каждом множестве U_i имеется набор из n гладких функций, значения которых в точке можно взять за координаты этой точки (локально в U_i). Это наводит на мысль расширить понятие локальной системы координат, беря в качестве координат в некоторой окрестности (не обязательно в одной из U_i) значения n функций, гладких в этой окрестности. Конечно, для того чтобы эти координаты соответствовали гомеоморфизму окрестности на евклидову клетку, на них необходимо наложить некоторые условия.

Итак, пусть $f_1, f_2, \ldots, f_n$ — функции, гладкие в некоторой окрестности точки p на M, и пусть p лежит в U_i (в обозначениях определения 2.5). Тогда $f_1\varphi_i^{-1}, f_2\varphi_i^{-1}, \ldots, f_n\varphi_i^{-1}$ — функции, гладкие в смысле определения 2.2 в окрестности точки $\varphi_i(p) \in V_i$. Предположим, что якобиан этих функций, вычисленный в евклидовых координатах на V_i, отличен от нуля в точке $\varphi_i(p)$. Отобразим тогда окрестность точки $\varphi_i(p)$ в n-мерное евклидово пространство, переводя точку x в точку с координатами $(f_1\varphi_i^{-1}(x), f_2\varphi_i^{-1}(x), \ldots, f_n\varphi_i^{-1}(x))$. Обозначим полученное отображение через f. По теореме 2.1 найдется такая окрестность V точки $f\varphi_i(p)$ (которую всегда можно сделать клеткой) и такая окрестность U' точки $\varphi_i(p)$, что f гомеоморфно отображает окрестность U' на V, причем обратное отображение тоже гладкое. Наконец, положим $U = \varphi_i^{-1}(U')$ и $\varphi = f\varphi_i$. Таким образом, φ отображает точку $q \in U$ в точку с координатами $(f_1(q), f_2(q), \ldots, f_n(q))$. Ясно, что φ является гомеоморфизмом окрестности U на V.

Определение 2.7. Гомеоморфизм φ мы будем называть *локальной системой координат в окрестности U точки p*.

Множество U называется *координатной окрестностью*, соответствующей этой системе [1]).

Это определение мотивировано тем, что точки из U определяются координатами их образов при отображении φ. Заметим, что множества U_i с отображениями φ_i автоматически являются локальными системами координат в смысле этого определения.

Упражнения. 2.15. Покажите, что определение локальных координат в окрестности точки не зависит от выбора отображения φ_i, участвующего в построении.

2.16. Пусть φ и ψ — произвольные локальные системы координат в точке p, отображающие окрестности точки p на открытые клетки V и W соответственно и лежащие в n-мерных евклидовых пространствах. Покажите, что $\varphi\psi^{-1}$ является гладким отображением открытого множества в W на открытое множество в V и что якобиан этого отображения отличен от нуля.

Результат упражнения 2.16 означает, что можно добавлять к координатным окрестностям U_i, участвующим в определении гладкого многообразия, любые координатные окрестности в смысле определения 2.7, и расширенный таким образом набор локальных систем координат по-прежнему будет удовлетворять условию (2) определения 2.5.

2.17. Пусть p — точка на гладком многообразии M, и пусть φ — локальная система координат в окрестности U точки p в

---

[1]) Уоллес заинтересован главным образом в координатах, введенных возле точки p, т. е. в некоторой ее окрестности — безразлично, насколько малой. Поэтому он дает определение применительно к рассмотренному в предыдущем абзаце случаю, в котором, напомним, $U \subset U_i$. Общее же определение таково: Пусть $U \subset M$ — открытое множество и $\varphi: U \to V$ — гомеоморфизм множества U на открытое подмножество V евклидова пространства, и пусть выполняется условие: если $U \cup U_i \neq \varnothing$, то отображения

$$\varphi\varphi_i^{-1}: \varphi_i(U \cap U_i) \to \varphi(U \cap U_i), \quad \varphi_i\varphi^{-1}: \varphi(U \cap U_i) \to \varphi_i(U \cap U_i)$$

гладкие. Тогда φ будем называть (*локальной*) *системой координат в координатной окрестности* U (а пару (U, φ) — *картой*).

Читатель легко проверит, что если (U, φ) и (U', φ') — две карты в этом общем смысле и $U \cap U' \neq \varnothing$, то для них выполняется условие согласованности (аналогичное уже встречавшимся в определениях 2.5 и 2.5′, а также в предыдущем абзаце): отображения

$$\varphi'\varphi^{-1}: \varphi(U \cap U') \to \varphi'(U \cap U'), \quad \varphi(\varphi')^{-1}: \varphi'(U \cap U') \to \varphi(U \cap U')$$

гладкие. — *Прим. ред.*

смысле определения 2.7. Пусть f — гладкая функция в окрестности точки p (определение 2.6). Покажите, что $f\varphi^{-1}$ является гладкой функцией в окрестности точки $\varphi(p)$ в V (обозначения взяты из определения 2.7).

Смысл этого результата состоит в том, что хотя понятие гладкой функции определяется только при помощи координатных окрестностей U_i, участвующих в определении многообразия, однако оно допускает точно такое же описание в терминах дополнительных локальных систем координат, введенных в определении 2.7.

2.18. Рассмотрим плоскость (x, y) как гладкое многообразие. Покажите, что полярные координаты (r, θ), определенные равенствами $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, можно взять за локальные координаты в любом открытом круге, не содержащем начало координат.

2.19. Аналогично покажите, что сферические координаты, определенные равенствами $x = r\sin\varphi\cos\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\varphi$, можно взять за локальные координаты трехмерного пространства в любом открытом шаре, не пересекающем оси z.

2.20. Сферические координаты в предыдущем упражнении можно ограничить на единичную сферу, положив $r = 1$. Покажите, что (θ, φ) можно взять в качестве локальных координат на сфере в любом круге, не содержащем точку с евклидовыми координатами $(0, 0, \pm 1)$.

2.5. Гладкие отображения

В разделе 2.2 мы видели, что, рассматривая наборы гладких функций на открытом множестве в евклидовом пространстве, можно определить понятие гладкого отображения. Сейчас нам предстоит сделать то же самое в более общей ситуации, чтобы определить гладкое отображение одного многообразия в другое. В теории гладких многообразий гладкие отображения играют ту же роль, какую играют непрерывные отображения в общей теории топологических пространств. Идея приводимого ниже определения — использовать локальные системы координат для того, чтобы перенести уже знакомое нам определение 2.3 на гладкие многообразия.

Определение 2.8. Пусть M, N — гладкие многообразия размерностей m и n соответственно, U — открытое множество в M, а f — отображение многообразия U в многообразие N. Пусть p — точка из U, и пусть φ — локальная система координат на N в

окрестности W точки $f(p)$; таким образом, φ является гомеоморфизмом множества W на открытую клетку V в некотором евклидовом пространстве размерности n. Тогда композиция φf является отображением окрестности точки p в клетку V, которое можно описать с помощью функций, рассматривая каждую координату на V как функцию, определенную в окрестности точки p. Если все эти функции гладкие, то мы будем говорить, что отображение f *гладкое в окрестности точки* p. Отображение f будем называть *гладким в* U, если оно гладкое в окрестности каждой точки из U.

Заметим, что определение 2.8 можно также сформулировать следующим образом. Пусть ψ — локальная система координат в окрестности U_0 точки p, про которую мы предполагаем, что $U_0 \subset U$. Таким образом, отображение ψ есть гомеоморфизм окрестности U_0 на открытую клетку V_0 в n-мерном евклидовом пространстве. В этом случае композиция $\varphi f \psi^{-1}$ является отображением множества V_0 в V. В определении 2.8 говорится, что если это отображение гладкое, то f — гладкое отображение в окрестности точки p. Другой момент, который следовало бы отметить (и проверить в качестве упражнения!), — то, что определение гладкости отображения не зависит от того, какая система координат выбирается в окрестности точки $f(p)$. Другими словами, если сформулированное условие выполняется для одной локальной системы координат, то оно выполняется и для любой другой системы.

Определение 2.8 следующим образом обобщается на отображения, заданные на произвольных множествах.

Определение 2.9. Пусть M и N — два гладких многообразия, A — подмножество в M, а f — отображение A в многообразие N. Будем называть f *гладким*, если его можно продолжить до гладкого отображения $U \to N$, где U — открытое множество, содержащее A.

Примеры. 2.7. Заметим, что если взять в качестве M и N евклидовы пространства, то определения 2.8 и 2.9 сводятся к определению 2.3.

2.8. Любая гладкая функция на подмножестве U гладкого многообразия M (определение 2.6) является гладким отображением в одномерное евклидово пространство. Более общо, если $f_1, f_2, \ldots, f_r$ — гладкие функции на U, то отображение, переводящее точку p в точку с координатами $(f_1(p), f_2(p), \ldots, f_r(p))$, есть гладкое отображение множества U в r-мерное евклидово пространство.

Упражнения. 2.21. Пусть M — тор в трехмерном пространстве, и пусть (l, m, n) — направляющие косинусы внешней нормали к M в точке p. Тогда, поскольку $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, тройку (l, m, n) можно рассматривать как координаты точки на двумерной единичной сфере в трехмерном пространстве. Возьмем эту точку за $f(p)$. Докажите, что f есть гладкое отображение многообразия M в сферу S^2.

2.22. Положение точки q на торе в трехмерном пространстве можно задавать следующим образом. Пусть тор задан тем же способом, что и в разд. 2.1. Возьмем точку на окружности $(x-2)^2 + y^2 = 1$ в плоскости (x, y), для которой луч, направленный к ней из центра окружности, образует угол θ с положительным направлением оси x. Проведем через эту точку окружность, параллельную плоскости (x, z) и лежащую на торе, а затем возьмем точку, смещенную на угловое расстояние φ по этой окружности (рис. 2.3). Тогда положение точки q можно задавать парой (θ, φ). Заметим, что это не есть система координат на всем торе, так как для данной точки q углы θ и φ определены только с точностью до целого кратного 2π. Покажите, что (θ, φ) тем не менее можно принять за локальные координаты в подходящих открытых подмножествах тора. Возьмем теперь точку p с координатами (x, y) на плоскости, и пусть $f(p)$ — точка на торе с угловыми координатами (в только что указанном смысле) $\theta = x$, $\varphi = y$. Докажите, что f — гладкое отображение двумерного евклидова пространства на тор.

Заметим, что если отображение f ограничить на квадрат $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant y \leqslant 2\pi$, то оно будет взаимно однозначным внутри этого квадрата, а точки на сторонах, лежащие друг против друга, отобразятся в одну точку. Для наглядности говорят, что тор получается из квадрата отождествлением пар противоположных сторон.

Другая интерпретация этого упражнения получится, если принять каждый из углов θ, φ за угловую координату на окружности. Тогда тор представится в виде топологического произведения двух окружностей.

2.23. Пусть M, N и P — гладкие многообразия, и пусть $f: M \to N$ и $g: N \to P$ — гладкие отображения. Покажите, что композиция gf является гладким отображением.

2.24. Пусть p — точка на двумерной сфере S^2, а $f(p)$ — точка на проективной плоскости P^2, полученная отождествлением p

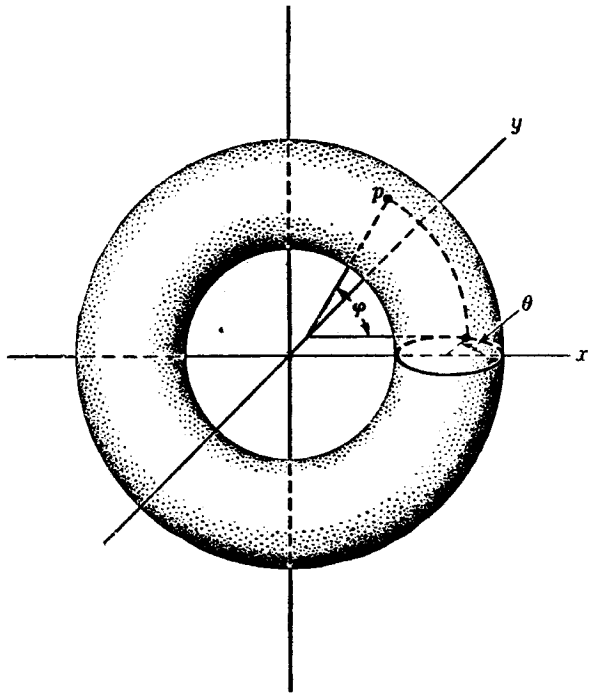


Рис. 2.3. Точки тора «задаются» с помощью углов θ, φ.

с диаметрально противоположной точкой (см. упражнение 2.6). Покажите, что f — гладкое отображение сферы S^2 на P^2.

В общей топологии мы рассматриваем гомеоморфные пространства как одинаковые. В нашем случае, для того чтобы два гладких многообразия считались одинаковыми, должно выполняться более сильное условие диффеоморфности.

Определение 2.10. Пусть M и N — гладкие многообразия, а f — такое взаимно однозначное отображение многообразия M на N, что обратное ото-

бражение тоже является гладким. Тогда f называется *диффеоморфизмом*, а многообразия M и N — *диффеоморфными* [1]).

Упражнение. 2.25. Пусть f — взаимно однозначное отображение гладкого многообразия M на N. Пусть φ — локальная система координат в окрестности точки p на M, а ψ — локальная система координат в окрестности $f(p)$ на N, так что $\psi f \varphi^{-1}$ есть гладкое отображение одной n-мерной клетки на другую. Предположим, что якобиан этого отображения, записанного в евклидовых координатах, не равен нулю в окрестности точки $\varphi(p)$. Пусть это условие выполнено для любой точки p. Докажите, что f — диффеоморфизм.

Заметим, что это упражнение дает другой способ формулировать определение 2.10. Отметим также, что диффеоморфные многообразия автоматически имеют одну и ту же размерность (почему?).

2.6. Ранг гладкого отображения

Естественность определения, которое мы здесь введем, вытекает из следующего наблюдения: гладкое отображение, определенное на многообразии, может привести к падению размерности. Рассмотрим,

---

[1]) Говорят также, что диффеоморфны гладкие структуры, заданные на M и N. Допуская вольность речи, о двух диффеоморфных многообразиях часто говорят как об одном и том же многообразии.

В примечании на стр. 38 указаны два несовместимых атласа (U_1, φ_1) и (U_1', φ_1') на прямой линии R. Прямая с атласом (U_1, φ_1) и она же с атласом (U_1', φ_1') — это, строго говоря, две разные гладкие структуры на R, два разных гладких многообразия. Но ясно, что они диффеоморфны (отображение $\psi: x \to x^3$ является диффеоморфизмом второго из них на первое). Легко видеть, что на самом деле на R можно ввести континуум различных гладких структур, однако можно доказать, что все они диффеоморфны друг другу. Последнее часто выражают словами: «на прямой существует только одна гладкая структура», опуская оговорку: «с точностью до диффеоморфизма».

Часто можно прочитать примерно следующее: «Выделение дифференциальной топологии в самостоятельный раздел науки можно датировать моментом открытия Милнором различных гладких структур на семимерной сфере [20]». С учетом некоторой патетики этой фразы, как вам кажется — подразумевается ли в ней вышеупомянутая оговорка? — *Прим. ред.*

например, отображение f плоскости в себя, переводящее точку (x, y) в точку $(x, 0)$. Здесь отображение f задано на чем-то двумерном, а его образ имеет размерность 1. Хотя это понадобится нам лишь в следующей главе, отметим, что в только что приведенном примере якобиан отображения всюду равен нулю. С другой стороны, если бы этот якобиан был всюду ненулевым, то отображение f имело бы локальное обратное и потому следовало бы ожидать, что его образ будет двумерным. Тем самым падение размерности должно быть как-то связано с рангом матрицы Якоби отображения f.

Определение 2.11. Пусть M и N — гладкие многообразия, и пусть $f\colon M \to N$ — гладкое отображение. Пусть $p \in M$, и пусть $\varphi\colon U \to V$ и $\psi\colon U' \to V'$ — локальные системы координат в окрестностях точек p и $f(p)$ соответственно. Таким образом, $\psi f \varphi^{-1}$ есть гладкое отображение евклидова открытого множества V в множество V'. В этом случае *ранг отображения f в точке p* определяется как ранг матрицы Якоби отображения $\psi f \varphi^{-1}$ в точке $\varphi(p)$. Если во всех точках ранг равен r, то говорят, что f *имеет ранг r*.

Упражнения. 2.26. Проверьте, что определение 2.11 не зависит от выбора локальных координат в окрестностях точек p и $f(p)$.

2.27. Проверьте, что отображение f плоскости в себя, определенное формулой $f(x, y) = (x, 0)$, имеет всюду ранг 1.

2.28. Пусть $f\colon M \to N$ — гладкое отображение ранга $m = \dim M \leqslant n = \dim N$. Покажите, что в подходящих локальных координатах $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ в окрестности точки p и $(y_1, \ldots, y_n)$ в окрестности $f(p)$ отображение f локально записывается формулами

$$y_i = x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$
$$y_i = f_i(x_1, \ldots, x_m) \quad (i = m + 1, \ldots, n),$$

где f_i — гладкие функции своих аргументов.

2.7. Многообразия с краем

Существует важное обобщение понятия гладкого многообразия, определенного в разд. 2.3. Пример замкнутого круга D показывает естественность этого обобщения. Внутренняя точка круга p имеет окрест-