ность, представляющую собой открытый круг, однако точка q на границе имеет окрестность (в круге), которая является полукругом. Таким образом, если считать D гладким многообразием, то необходимо рассматривать два типа координатных окрестностей в соответствии с тем, является ли рассматриваемая точка внутренней или нет.

Определение 2.12. *n-мерное гладкое многообразие с краем* — это топологическое пространство M с подпространством N и счетным открытым покрытием $U_1, U_2, \ldots$ с гомеоморфизмами $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) Если множество U_i данного покрытия содержится в $M \setminus N$, то соответствующий гомеоморфизм φ_i: $U_i \to V_i$ отображает U_i на открытый шар V_i в n-мерном пространстве; в противном случае задан гомеоморфизм φ_i: $U_i \to V_i$, где V_i — полушарие вида $\sum_1^n x_i^2 < 1$, $x_n \geqslant 0$, причем множество $U_i \cap N$ отображается на подмножество в V_i, состоящее из точек, для которых $x_n = 0$.

2) Если U_i и U_j — два множества из данного покрытия, причем $U_i \cap U_j = \varnothing$, а φ_i и φ_j — только что описанные гомеоморфизмы, то $\varphi_i \varphi_j^{-1} = \varphi_{ij}$ есть гладкое отображение множества $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ на $\varphi_i(U_i \cap U_j)$.

Поскольку гомеоморфизмы φ_{ij} должны переводить внутренние точки во внутренние, а граничные в граничные, очевидно, что если ограничить на подмножество N те U_i, которые его пересекают, то они (т. е. множества $U_i \cap N$) образуют покрытие множества N, определяющее на нем структуру гладкого многообразия; оно называется *краем* многообразия M.

Пример 2.9. Шар и сплошной тор есть трехмерные многообразия с краем, причем краями, конечно, являются сфера и тор соответственно.

Легко видеть, что определения, приведенные в предыдущих разделах этого параграфа, переносятся

на гладкие многообразия с краем с незначительными изменениями, учитывающими точки края.

Кроме того, можно показать (но доказательство этого факта трудно и не будет приведено здесь), что если два гладких многообразия с краем имеют диффеоморфные края, то их можно «склеить», отождествив края, и получится новое гладкое многообразие. Этим способом можно, например, склеить два круга так, чтобы получилась сфера. Один круг станет при этом верхней полусферой, другой — нижней, а края отождествятся, образовав экватор.

Более подробно этот процесс можно описать следующим образом. Пусть M_1 и M_2 — гладкие многообразия с краем, N_1 и N_2 — края многообразий M_1 и M_2 соответственно, и пусть $f\colon N_1 \to N_2$ — заданный диффеоморфизм. Построим множество, элементы которого — это точки $M_1 \setminus N_1$, точки $M_2 \setminus N_2$ и пары точек $(p, f(p))$, где $p \in N_1$. Таким образом, M является объединением множеств M_1 и M_2, в котором каждая пара $(p, f(p))$ считается за одну точку, так что пару $(p, f(p))$ можно, не опасаясь двусмысленности, обозначать буквой p. Чтобы превратить M в топологическое пространство, необходимо определить окрестности его точек. Если точка p лежит в $M_1 \setminus N_1$ или в $M_2 \setminus N_2$, то в качестве ее окрестностей в M берутся окрестности этой точки в M_1 или в M_2 соответственно[1]). Если же $p = (p, f(p))$ есть пара отождествленных точек, где точка p лежит в N_1 и $f(p)$ — в N_2, то каждая окрестность точки p в M определяется как объединение некоторой окрестности точки p в M_1 и некоторой окрестности точки $f(p)$ в M_2 с соответствующими отождествлениями точек из N_1 и N_2.

Так, например, на рис. 2.4 две полукруговые окрестности U_1 и U_2 точек p и $f(p)$ склеиваются, образуя окрестность U точки $(p, f(p))$ в M.

Трудный шаг — показать, что M является гладким многообразием. Подробное доказательство этого

---

[1]) А также, конечно, и любые множества в M, содержащие такие окрестности. (О последнем при описании того или иного примера часто даже не упоминают, считая это само собою разумеющимся.) — *Прим. ред.*

см. в [18, § 6][1]). Мы должны сделать следующее: надо показать, что если окрестность U в M получена склеиванием координатных окрестностей U_1 и U_2, а окрестность V — склеиванием V_1 и V_2, то функции замены координат (функции типа φ_{ij} определения

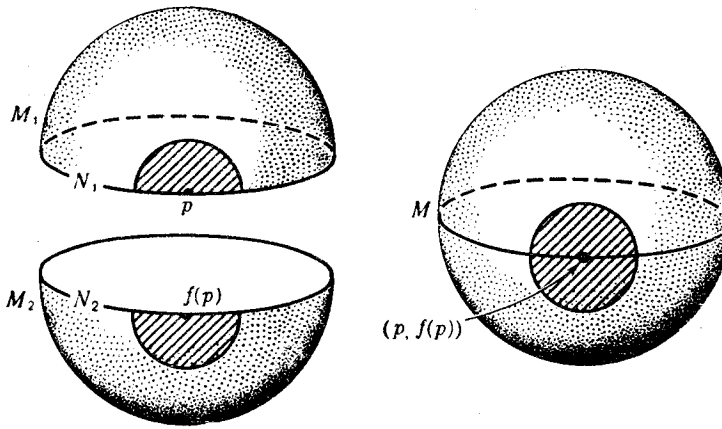

Рис. 2.4.

2.12) на $U_1 \cap V_1$ и на $U_2 \cap V_2$ можно согласовать так, чтобы получившиеся функции замены координат для M оказались гладкими.

§ 3. ПОДМНОГООБРАЗИЯ

3.1. Определение

При изучении гладких многообразий понятие подпространства является слишком общим. Хотелось бы, чтобы для двух многообразий, одно из которых содержится в другом, их локальные системы координат были связаны друг с другом каким-то простым образом. Вот соответствующее определение.

[1]) См. также Милнор [24*, теорема 1.4].

Определение 3.1. Пусть M — гладкое многообразие размерности m, и пусть N — подмножество в M, для которого выполнены следующие условия:

1) N — гладкое многообразие[1]) размерности n.

2) Если p — точка в N, то существует такая координатная окрестность U точки p в M с такой локальной системой координат φ: $U \to V$, где V — открытая клетка в m-мерном евклидовом пространстве, что $\varphi(N \cap U)$ есть подмножество точек клетки V, удовлетворяющих уравнениям $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_m = 0$, а ограничение отображения φ на $U \cap N$ дает локальную систему координат для N в окрестности точки p. Тогда N называется *подмногообразием многообразия* M.

Условие 2) можно выразить менее формально, сказав, что локальные координаты на M в окрестности точки p определены так, что N имеет локальные уравнения $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_m = 0$, в то время как $x_1, x_2, \ldots, x_n$ являются локальными координатами на N в окрестности точки p. Таким образом, локальные системы координат на N получаются из систем координат на M. Условие 2) также обеспечивает, что у N имеется окрестность в M, устроенная вроде «трубчатой» окрестности у гладкой кривой в трехмерном пространстве. Этот момент мы обсудим позднее, а сначала дадим несколько примеров.

Примеры. 3.1. Простейший пример получится, конечно, если взять в качестве M m-мерное евклидово пространство, а в качестве N — евклидово подпространство, заданное уравнениями $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_m = 0$.

3.2. Возьмем в качестве M трехмерное евклидово пространство. Координаты x, y, z в трехмерном пространстве можно принять за локальные координаты в окрестности любой точки. В качестве N возьмем двумерную сферу с уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Мы уже видели, что она является гладким многообразием (пример 2.6). Теперь мы покажем, что выполняется

[1]) То есть оно снабжено соответствующими U_i и φ_i. — *Прим. ред.*

условие 2) определения 3.1 [1]). Возьмем, например, точку p на полусфере $z > 0$ в N. Ясно, что координаты (x, y, z) нельзя принять за локальные координаты

[1]) Полезно иметь в виду, что в определении 3.1 главную роль играет условие 2), и в сущности только его выполнение и нужно проверять, когда мы хотим убедиться в том или ином примере, что имеем дело с подмногообразием. Так как Уоллес в дальнейшем фактически пользуется этим обстоятельством, то остановимся на нем подробнее.

Пусть подмножество $N \subset M$ обладает следующим свойством:

3.1′. Для любой точки $p \in N$ существует такая карта (U, φ) многообразия M, что $p \in U$ и $\varphi(N \cap U)$ состоит из тех и только тех точек клетки $V = \varphi(U)$, для которых $x_{n+1} = \ldots = x_m = 0$.

Тогда можно ввести на N гладкую структуру, приняв всевозможные $U \cap N$ за координатные окрестности, а ограничения $\varphi | U \cap N$ — за локальные системы координат; будучи снабжено этой гладкостью, N будет подмногообразием многообразия M в смысле определения 3.1.

Проверим, что мы действительно получаем атлас для N. Если (U, φ) и (U', φ') — две такие карты на M, как в 3.1′, и $(U \cap N) \cap (U' \cap N) \neq \varnothing$, то мы должны проверить согласованность (в том смысле, как в прим. ред. на стр. 44) двух карт

$$(U \cap N, \varphi | U \cap N) \quad \text{и} \quad (U' \cap N, \varphi' | U' \cap N).$$

Эта согласованность означает, что функции

$$\varphi' \varphi^{-1} (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0) \quad \text{и} \quad \varphi (\varphi')^{-1} (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$$

являются гладкими функциями от $(x_1, \ldots, x_n)$ при всех тех $(x_1, \ldots, x_n)$, при которых они определены. Но это очевидно, ибо $\varphi' \varphi^{-1}$ и $\varphi (\varphi')^{-1}$ гладко зависят от своих аргументов ввиду согласованности карт (U, φ) и (U', φ') многообразия M.

Остаются еще две несущественные детали. Во-первых, Уоллес упорно требует, чтобы координатные окрестности были гомеоморфны открытым шарам. Ясно, что мы достигли бы этого, если бы включили в 3.1′ дополнительное условие:

$$V \cap \{ (x_1, \ldots, x_m) \mid x_{n+1} = \ldots = x_m = 0 \} \text{ — клетка в евклидовом пространстве } (x_1, \ldots, x_n).$$

Но лучше никаких дополнительных условий не включать, а проверить, что при выполнении 3.1′ для любой точки $p \in N$ найдется такая карта (U_1, φ), что $p \in U_1$, $\varphi_1(U_1)$ — клетка,

$$\varphi (N \cap U_1) = \varphi (U_1) \cap \{ (x_1, \ldots, x_m) \mid x_{n+1} = \ldots = x_m = 0 \},$$

и это последнее множество — клетка. Такую карту можно получить, взяв сначала такую карту (U, φ), как в 3.1′, и при необходимости уменьшив U; детали предоставляются читателю.

Во-вторых, в определении 2.5 требовалось, чтобы существовал атлас, состоящий из *счетного* числа карт. У нас же пока каждой

точки p в M так, чтобы выполнялось условие 2). Тем не менее можно ввести новые координаты посредством преобразования

$$X = x,$$
$$Y = y,$$
$$Z = z - (1 - x^2 - y^2)^{1/2}.$$

Функции, стоящие справа, — гладкие, так же как и функции, которыми выражается обратное преобразование, и якобиан $\left|\frac{\partial(X, Y, Z)}{\partial(x, y, z)}\right|$ отличен от нуля в окрестности любой точки на полусфере $z > 0$. Таким образом, (X, Y, Z) допускаются в качестве локальных координат в окрестности точки p (определение 2.7). В этих координатах N имеет уравнение $Z = 0$ в окрестности точки p. Кроме того, в примере 2.6 мы видели, что X и Y можно принять за локальные координаты на N в полусфере $z > 0$. Таким образом, условие 2) определения 3.1 в окрестности точки p выполняется. Аналогичное рассуждение показывает, что это условие выполняется в окрестности любой точки $p \in N$.

В этом примере важным моментом является иллюстрация следующего обстоятельства: в данной системе локальных координат может быть совсем неочевидно, что подмножество в гладком многообразии на самом деле является подмногообразием. Необходимо произвести некоторую подгонку локальных координат, прежде чем мы увидим, что условие 2) выполняется.

точке $p \in N$ сопоставлена некоторая карта (U, φ) многообразия M, а из нее получается карта $(U \cap N, \varphi|U \cap N)$ для N; вполне может оказаться, что различным p сопоставлены различные (U, φ), и различных $(U \cap N, \varphi|U \cap N)$ получится столько же, сколько и различных точек p, т. е. континуум. Мы должны, следовательно, из покрытия топологического пространства N его открытыми подмножествами $U \cap N$ выбрать счетное подпокрытие.

Основным для дальнейшего является тот случай, когда N — компактное множество в M. В этом случае можно выбрать не только счетное, но и конечное подпокрытие. В общем же случае см. прим. ред. на стр. 39 и разд. 1.7. — *Прим. ред.*

3.3. Возьмем в качестве M двумерную сферу $x^2+y^2+z^2=1$ в трехмерном пространстве, и пусть N — окружность, по которой эта сфера пересекает плоскость $z=0$. Так как z всегда можно взять за одну из локальных координат на сфере в окрестности любой точки из N, беря за другую координату либо x, либо y, то легко видеть, что N — подмногообразие в M. Ясно, что этот пример можно распространить на бо́льшие размерности.

3.4. Интересно рассмотреть пример, в котором условие 2) определения 3.1 не выполнено. В упражнении 2.22 был дан пример гладкого отображения φ плоскости E_2 на тор. Пусть L — прямая в E_2, проходящая через начало координат и имеющая иррациональный наклон. Тогда легко видеть, что φ отображает L в тор взаимно однозначно. Возьмем за M тор, а за N — множество $\varphi(L)$; прямая L есть одномерное евклидово пространство и, стало быть, многообразие. Тем не менее его образ $\varphi(L)$ бесконечное число раз «обвивает» тор M, и эта обмотка такова, что если $p \in N$ и U — любая окрестность точки p в M, то $U \cap N$ состоит из бесконечного числа непересекающихся отрезков. Поэтому ни при каком выборе локальных координат на M в окрестности точки p не может выполняться условие 2) определения 3.1. Таким образом, N не является подмногообразием в M [1]).

---

[1]) N называется *иррациональной обмоткой тора*. Стоит заметить, что в дифференциальной геометрии и теории дифференциальных уравнений бывает желательно называть подмногообразиями объекты, подобные N, поэтому часто дается более общее определение гладкого подмногообразия, учитывающее это пожелание ([38], стр. 51). Для целей настоящей книги в таком обобщении нет необходимости.

Вот еще один пример, когда условие 2) определения 3.1 не выполнено. В треугольнике Δ (имеется в виду замкнутая ломаная из трех звеньев, а не ограничиваемая ею часть плоскости) можно ввести гладкую структуру, ибо он гомеоморфен окружности S^1. (Действительно, если $\{(U_i, \varphi_i)\}$ — атлас для S^1, а $\psi: \Delta \to S^1$ — гомеоморфизм, то $\{(\psi^{-1}(U_i), \varphi_i\psi)\}$ — атлас для Δ.) Но гладким подмногообразием плоскости треугольник, конечно, не является: если точка p находится в углу треугольника и U — ее окрестность на плоскости, то ни при каком диффеоморфизме

3.2. Многообразия в евклидовом пространстве

Нам особенно интересен случай, когда объемлющее многообразие есть евклидово пространство. Итак, пусть M — гладкое многообразие размерности n, заданное как подмногообразие в N-мерном евклидовом пространстве E. В формулировке условия 2) определения 3.1 используется некоторая локальная система координат в окрестности точки p. С другой стороны, евклидовы координаты $x_1, \ldots, x_N$ сами могут быть приняты за локальные координаты в окрестности точки p в E, поэтому естественно спросить, во что превращается условие 2) определения 3.1, если его выразить в терминах евклидовых координат. Мы исследуем этот вопрос, делая необходимое преобразование координат в два шага. Результат будет сформулирован как теорема 3.1.

Начнем с локальной системы координат в окрестности точки p в M, для которой выполнено условие 2) определения 3.1. Эта система представляет собой гомеоморфизм φ: $U \to V$, где V — открытая клетка в другом N-мерном евклидовом пространстве E', с координатами $(y_1, y_2, \ldots, y_N)$. Из условия 2), в частности, следует, что ограничение φ на $U \cap M$ есть локальная система координат на M в окрестности точки p и что φ переводит это множество в часть клетки V, выделяемую уравнениями $y_{n+1} = y_{n+2} = \ldots = y_N = 0$. С другой стороны, евклидовы координаты $x_1, \ldots, x_N$ в E годятся, в частности, и в U, поэтому отображение φ^{-1} можно записать формулами:

$$(1) \qquad x_i = \psi_i(y_1, y_2, \ldots, y_N), \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

где ψ_i — гладкие функции, а якобиан

$$\left| \frac{\partial(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_N)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_N)} \right|$$

не обращается в нуль на V.

φ: $U \to R^2 = \{(x_1, x_2)\}$ множество $\Delta \cap U$ не может отображаться в прямую $x_2 = 0$. (В отличие от иррациональной обмотки тора треугольник не является гладким подмногообразием плоскости и в упомянутом выше более широком смысле.) — *Прим. ред.*

В частности, этот якобиан не равен нулю в точке $\varphi(p)$, и поэтому, после подходящей перенумеровки переменных x_i, определитель

$$\left| \frac{\partial(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)} \right|$$

будет отличен от нуля в точке $\varphi(p)$. Поэтому, если определить отображение θ окрестности точки $\varphi(p)$ в третье евклидово пространство E'' с координатами $z_1, z_2, \ldots, z_N$ посредством формул

$$(2)\qquad \begin{aligned} z_1 &= \psi_1(y_1, y_2, \ldots, y_N), \\ &\vdots \\ z_n &= \psi_n(y_1, y_2, \ldots, y_N), \\ z_{n+1} &= y_{n+1}, \\ &\vdots \\ z_N &= y_N, \end{aligned}$$

то якобиан функций в правой части будет отличным от нуля в точке $\varphi(p)$, а стало быть, и в некоторой ее окрестности. По теореме 2.1 отсюда следует, что θ гомеоморфно отображает некоторую окрестность V' точки $\varphi(p)$ на открытую клетку W в пространстве E'', причем отображение θ^{-1}, определенное на W, будет гладким.

Положим теперь $U' = \varphi^{-1}(V')$ и $\chi = \theta\varphi$. Тогда χ есть гомеоморфизм множества U' на W, который с учетом формул (1) и (2) для φ^{-1} и θ должен записываться в следующем виде:

$$(3)\qquad \begin{aligned} z_1 &= x_1, \\ &\vdots \\ z_n &= x_n, \\ z_{n+1} &= \chi_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_N), \\ &\vdots \\ z_N &= \chi_N(x_1, x_2, \ldots, x_N). \end{aligned}$$

Так как χ есть композиция отображений θ и φ, функции в правой части имеют якобиан, отличный от нуля в U' (см. упражнение 2.3), так что χ тоже является локальной системой координат. Обратное отображение χ^{-1} записывается формулами вида

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
x_1 &= z_1,\\
&\vdots\\
x_n &= z_n,\\
x_{n+1} &= \lambda_{n+1}(z_1, z_2, \ldots, z_N),\\
&\vdots\\
x_N &= \lambda_N(z_1, z_2, \ldots, z_N).
\end{aligned}
$$

Теперь мы пришли к следующему. Во-первых, $\chi(U' \cap M)$ есть в точности множество, выделяемое в W уравнениями $z_{n+1} = z_{n+2} = \ldots = z_N = 0$, поэтому из формул (4) следует, что $U' \cap M$ есть множество точек в U', удовлетворяющих уравнениям

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
x_{n+1} &= \lambda_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots, 0),\\
&\vdots\\
x_N &= \lambda_N(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots, 0).
\end{aligned}
$$

Во-вторых, ограничение отображения φ на $U' \cap M$ дает локальную систему координат на M в окрестности $U' \cap M$. Но легко видеть, что отображение χ переводит точку $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ из $U' \cap M$ в точку $(z_1, z_2, \ldots, z_n, 0, 0, \ldots, 0)$, у которой $x_i = z_i$ для $i = 1, 2, \ldots, n$. Таким образом, отображение проектирования множества $U' \cap M$ в подпространство $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_N = 0$ само является локальной системой координат на $U' \cap M$.

Итоги наших обсуждений подводятся в следующей теореме.

Теорема 3.1. *Пусть M есть n-мерное подмногообразие N-мерного евклидова пространства E, и пусть p — точка на M. Тогда при подходящей нумерации*

евклидовых координат $x_1, x_2, \ldots, x_N$ в E проекция на пространство $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_N = 0$ является локальной системой координат на M в окрестности точки p, причем M в этой окрестности есть множество точек, удовлетворяющих уравнениям (полученным из (5) переменой обозначений)

$$
(6) \qquad \begin{aligned} x_{n+1} &= f_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\vdots \\ x_N &= f_N(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{aligned}
$$

в которых f_i — гладкие функции.

Пример 3.5. В случае сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ в трехмерном пространстве мы видели, что в окрестности любой точки две из трех координат x, y, z можно принять за локальные координаты, так что соответствующие проектирования будут отображениями, определяющими локальные системы координат, а третья координата выражается как гладкая функция от этих двух (см. пример 2.6).

Упражнения. 3.1. Докажите следующее обращение теоремы 3.1. Пусть E есть N-мерное евклидово пространство, и пусть M — такое подмножество в E, что каждая точка $p \in E$ имеет окрестность U, для которой пересечение $U \cap M$ либо пусто, либо является множеством точек в U, удовлетворяющих уравнениям, которые при подходящей нумерации координат можно записать в виде

$$
\begin{aligned} x_{n+1} &= f_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\vdots \\ x_N &= f_N(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{aligned}
$$

где f_i — гладкие функции. Докажите, что в этом случае M является подмногообразием в пространстве E.

3.2. Обобщите упражнение 3.1 следующим образом. Сохраняя в предыдущем упражнении остальные условия неизменными, предположим, что каждая точка пространства E имеет такую

окрестность U, что $U \cap M$ либо пусто, либо является множеством точек в U, удовлетворяющих уравнениям

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_N) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где g_i — гладкие функции, матрица Якоби которых по переменным x_j имеет ранг n в каждой точке из U. Докажите, что M является подмногообразием в E.

В двух последних упражнениях описаны ситуации, в которых подмножество M в N-мерном евклидовом пространстве оказывается подмногообразием. Сейчас мы разберем еще одну такую ситуацию. Проверка условия 2) определения 3.1 будет уже немного труднее. Ее идея состоит в том, чтобы взять в качестве подмножества E образ гладкого многообразия при гладком взаимно однозначном отображении.

В примере 3.4 мы видели, что такой образ, вообще говоря, не обязан быть подмногообразием. Однако сейчас мы покажем, что компактности вместе с условием на ранг отображения [1]) уже достаточно для того, чтобы образ являлся подмногообразием в E.

Теорема 3.2. *Пусть M — компактное гладкое многообразие размерности n, и пусть E есть N-мерное евклидово пространство. Пусть $f\colon M \to E$ — взаимно однозначное гладкое отображение многообразия M в пространство E, и пусть ранг f равен n в каждой точке M. Тогда $f(M)$ — подмногообразие в E.*

Доказательство. Применим к отображению f результат упражнения 2.28 и получим, что для каждой точки $p \in M$ существует такая координатная окрестность $U \ni p$ с локальной системой координат φ, отображающей U на открытую клетку V в n-мерном евклидовом пространстве с координатами $y_1, y_2, \ldots, y_n$, в которой отображение $f\varphi^{-1}$ задается

[1]) Условие на ранг также является существенным: легко построить гладкое взаимно однозначное отображение окружности в плоскость, при котором ее образом будет треугольник. В точках окружности, отображающихся в вершины треугольника, ранг падает до нуля. — *Прим. ред.*

формулами

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
x_1 &= y_1,\\
&\vdots\\
x_n &= y_n,\\
x_{n+1} &= f_{n+1}(y_1, y_2, \ldots, y_n),\\
&\vdots\\
x_N &= f_N(y_1, y_2, \ldots, y_n),
\end{aligned}
$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_N$ — координаты в E, а f_i — гладкие функции.

Заметим, что первые n формул отождествляют V с открытой клеткой W в подпространстве $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_N = 0$ пространства E. Поэтому образ $f(U)$ есть множество точек, удовлетворяющих уравнениям

$$
(8)\qquad
\begin{aligned}
x_{n+1} &= f_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n),\\
&\vdots\\
x_N &= f_N(x_1, x_2, \ldots, x_n),
\end{aligned}
$$

где $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in W$, а f_i — гладкие функции.

Теперь, чтобы завершить доказательство, надо убедиться в том, что точка $f(p)$ имеет окрестность, в которой уравнениям (8) удовлетворяют только точки $f(M)$. Для этого рассмотрим меньшую окрестность U' точки p, такую, что $\bar{U}' \subset U$, и положим $V' = \varphi(U')$; пусть, далее, W' — соответствующее подмножество из W. Для любого положительного ε множество $W'(\varepsilon)$, определенное неравенствами

$$
f_{n+i}(x_1, \ldots, x_n) - \varepsilon < x_{n+i} < f_{n+i}(x_1, \ldots, x_n) + \varepsilon,
$$
$$
(x_1, \ldots, x_n) \in W',
$$

является открытой окрестностью точки $f(p)$. Теперь следует показать, что если ε достаточно мало, то в $W'(\varepsilon)$ лежат только те точки из $f(M)$, которые удовлетворяют уравнениям (8) с $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in W'$. С первого взгляда использование двух окрестностей U и U' может показаться ненужным усложнением;

однако на самом деле удобно, работая с U', знать, что уравнения (8) справедливы в бо́льшем множестве U.

Допустим, что доказываемое утверждение неверно. Тогда для заданной убывающей последовательности значений ε мы смогли бы выбрать последовательность точек в M, не лежащих в U', каждая из которых отображалась бы в соответствующее множество $W'(\varepsilon)$. Так как M компактно, из этой последовательности можно было бы выбрать сходящуюся подпоследовательность. Таким образом, перенумеровав члены подпоследовательности и соответствующие значения ε, мы получили бы такую последовательность $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, сходящуюся к нулю, и такую последовательность точек $q_1, q_2, \ldots$, сходящуюся к точке q, что все q_i лежат вне U', но $f(q_i) \in W'(\varepsilon_i)$ при каждом i. На самом деле все точки q_i должны лежать даже вне множества U. Действительно, ни одна точка множества $f(U \setminus U')$ не попадет в $W'(\varepsilon)$ ни для какого ε, потому что все такие точки удовлетворяют уравнениям (8) с $(x_1, \ldots, x_n) \notin W'$. Отсюда следует, что и предельная точка q лежит вне U. Но в силу непрерывности отображения f имеем $f(\lim q_i) = \lim f(q_i)$ и так как ε_i стремится к нулю, $\lim f(q_i)$ лежит в $\overline{f(U')} = f(\overline{U'})$. Иными словами, $f(q)$ лежит в $f(\overline{U'})$. Но так как f взаимно однозначно, это означает, что q лежит в $\overline{U'}$; таким образом, мы пришли к противоречию.

Отсюда следует, что при некотором ε окрестность $W'(\varepsilon)$ точки $f(p)$ удовлетворяет [1]) условию 2) определения 3.1. Такую окрестность можно найти для любой точки из $f(M)$. Поэтому наша теорема полностью доказана [2]).

[1]) Вместе с введенными в ней локальными координатами

$$z_1 = x_1, \ldots, z_n = x_n,$$

$$z_{n+1} = x_{n+1} - f_{n+1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, z_N = x_N - f_N(x_1, \ldots, x_n).$$

— *Прим. ред.*

[2]) Читателю предоставляется самостоятельно доказать, что в теореме 3.2 f диффеоморфно отображает M на $f(M)$, т. е. f является вложением (см. начало следующего раздела) многообразия M в евклидово пространство E. — *Прим. ред.*

3.3. Теорема о вложении

В предыдущем разделе мы рассматривали гладкие многообразия, которые являются подмногообразиями некоторого евклидова пространства. В действительности мы не налагали при этом существенных ограничений, так как любое гладкое многообразие диффеоморфно некоторому подмногообразию евклидова пространства. Здесь мы докажем это только для компактных многообразий; для случая некомпактных многообразий доказать этот факт уже труднее [1]).

Уточним сначала терминологию. Когда говорят о вложении множества A в множество B, то это означает, что A является подмножеством B и что рассматривается отображение $A \to B$, сопоставляющее точке $a \in A$ ту же самую точку, рассматриваемую уже как точка в B. Но применительно к гладким многообразиям этот термин имеет несколько иной смысл.

Определение 3.2. Пусть M, N — гладкие многообразия. *(Гладким) вложением M в N* называется любое отображение f: $M \to N$, образ $f(M)$ которого является гладким подмногообразием в N и которое является диффеоморфизмом многообразия M на $f(M)$.

Если гладкое многообразие M вложено как подмногообразие в евклидово пространство E, то каждую координату x_i пространства E можно рассматривать как гладкую функцию на многообразии M. Поэтому для доказательства того, что многообразие можно вложить в евклидово пространство, естественно попытаться построить набор гладких функций $f_1, f_2, \ldots f_N$ и потом рассмотреть отображение многообразия M в пространство E, переводящее точку $p \in M$ в точку с координатами $(f_1(p), f_2(p), \ldots, f_N(p))$. Если мы хотим, чтобы это отображение было взаимно однозначным, то наш набор функций

---

[1]) См. [30], стр. 32, теорема 5, или [38], стр. 73, теорема 44. Между прочим, наложенное в определении 2.5 условие счетности необходимо для существования вложения в евклидово пространство. — *Прим. ред.*

должен обладать тем свойством, что для любых двух точек $p \neq q$ найдется по крайней мере одна функция f_i, принимающая различные значения в этих точках. В таком случае говорят, что функции f_i *разделяют точки* M. В любой координатной окрестности на M локальные координаты, очевидно, разделяют точки этой окрестности. Наша ближайшая цель теперь состоит в том, чтобы продолжить локальные координаты, заданные пока что в координатных окрестностях, до гладких функций на всем многообразии, с тем чтобы продолженные функции разделяли точки уже на всем многообразии.

Для компактного многообразия M это можно сделать с помощью функций, которые строятся в упражнении 2.13. Итак, построим для каждой точки $p \in M$ окрестность U, лежащую внутри координатной окрестности, и гладкую функцию f на M, которая положительна на U и равна нулю вне U. Так как многообразие M компактно, его можно покрыть конечным множеством $U_1, U_2, \ldots, U_m$ подобных окрестностей, причем каждой U_i соответствует функция f_i. Любое из множеств U_i само, конечно, является координатной окрестностью и имеет координатное отображение φ_i на открытую клетку V_i. Если $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}$ — координаты точки клетки V_i, рассматриваемые как гладкие функции на множестве U_i, то функции[1]) $y_j^{(i)} = x_j^{(i)} \cdot f_i$ являются гладкими

---

[1]) Если быть педантичными, то следовало бы сказать: $y_j^{(i)} = x_j^{(i)} \cdot f_i$ в U_i и $y_j^{(i)} = 0$ на $M \setminus U_i$ (ведь $x_j^{(i)}$ не определены вне U_i, так что выражение $x_j^{(i)} \cdot f_i$ вне U_i, строго говоря, тоже не имеет смысла). Но подобного педантизма никогда не проявляют.

Следующее замечание чуть-чуть существеннее. Коль скоро мы хотим, чтобы функция $y_j^{(i)} = x_j^{(i)} \cdot f_i$ была гладкой функцией на всем M, недостаточно, чтобы функция $x_j^{(i)}$ была гладкой на U_i, а f_i была гладкой на всем M и тождественно равнялась нулю вне U_i. Для гладкости (даже для непрерывности) $y_j^{(i)}$ в точках границы $\mathrm{Fr}\, U_i$ нужно, чтобы $x_j^{(i)}$, так сказать, «хорошо себя вела» возле $\mathrm{Fr}\, U_i$. Проще всего потребовать, чтобы $x_j^{(i)}$ была гладкой функцией не только в U_i, но и в чуть бо́льшем открытом мно-

функциями на всем многообразии M. Рассмотрим теперь набор функций

$$(9)\qquad f_1,\ y_1^{(1)},\ y_2^{(1)},\ \ldots,\ y_n^{(1)},\ f_2,\ y_1^{(2)},\ y_2^{(2)},\ \ldots,\ y_n^{(2)},\ f_3,\ \ldots \\ \ldots,\ f_m,\ y_1^{(m)},\ \ldots,\ y_n^{(m)}.$$

Мы проверим, что это множество функций разделяет точки M.

Возьмем две точки p и q на M. Если, например, p попадает в U_i, а q — нет, то функция f_i равна нулю в точке q и отлична от нуля в точке p. Поэтому функция f_i разделяет точки p и q. Предположим теперь, что точки p и q попали в одно множество U_i. Если $f_i(p) \neq f_i(q)$, то функция f_i разделяет точки p и q. Если же $f_i(p) = f_i(q)$, то, поскольку одна из локальных координат $x_j^{(i)}$ обязательно разделяет p и q, соответствующая ей функция $y_j^{(i)} = f_i \cdot x_j^{(i)}$ тоже разделит эти точки.

Следуя плану, приведенному в начале этого раздела, мы должны были бы теперь использовать функции (9) для того, чтобы построить отображение многообразия M в евклидово пространство. Однако при этом может оказаться, что ранг полученного отображения не будет равен n во всех точках. Чтобы обеспечить выполнение этого условия (и сделать возможным применение теоремы 3.2), необходимо добавить к набору (9) новые функции. Для этого обозначим через $z_j^{(i)}$ функцию, равную $x_j^{(i)} \cdot f_i^2$ на U_i и нулю вне U_i.

жестве $U_i' \supset \overline{U}_i$. А чтобы обеспечить выполнение этого требования, немного уточним выбор U_i. Для каждой точки $p \in M$ имеется окрестность U_p, замыкание которой лежит внутри некоторой координатной окрестности, а в терминах соответствующих координат φ отвечает некоторому шару евклидова пространства с центром в $\varphi(p)$. Так как M компактно, из покрытия $\{U_p\}$ можно выбрать конечное подпокрытие $U_1, \ldots, U_m$. Каждое $\overline{U}_i$ лежит в некоторой координатной окрестности U_i', и соответствующие координаты $x_1^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}$ являются гладкими функциями в последней, чего мы и добивались. Подобные уточнения тоже часто подразумеваются, но в явном виде не высказываются. — *Прим. ред.*

Таким образом, $z_j^{(i)} = y_j^{(i)} \cdot f_i$. Рассмотрим набор, полученный добавлением к набору (9) функций $z_j^{(i)}$ (всего, таким образом, будет $2mn + n$ функций). Обозначим эти функции через $F_1, \ldots, F_N$, $N = 2mn + n$, и рассмотрим отображение F: $M \to E$, переводящее точку p в точку $(F_1(p), F_2(p), \ldots, F_N(p))$. Так как набор F_i включает в себя функции (9), разделяющие точки многообразия M, то отображение F будет взаимно однозначным. Теперь проверим, что оно имеет ранг n в каждой точке. Для этого покажем, что в каждой точке множества U_i хотя бы один из якобианов

$$\left| \frac{\partial\left(y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \ldots, y_n^{(i)}\right)}{\partial\left(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}\right)} \right|, \quad \left| \frac{\partial\left(z_1^{(i)}, z_2^{(i)}, \ldots, z_n^{(i)}\right)}{\partial\left(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}\right)} \right|$$

отличен от нуля.

Вспоминая, что каждая функция f_i задается на множестве U_i явной формулой $f_i = \exp(r_i^2 - 1)^{-1}$, где $r_i^2 = \sum_{j=1}^{n} (x_j^{(i)})^2$, можно путем непосредственных вычислений показать [1]), что первый якобиан обращается в нуль только тогда, когда $r_i^4 - 4r_i^2 + 1 = 0$, а второй — только в случае, когда $r_i^4 - 6r_i^2 + 1 = 0$. Ясно, что ни в одной точке оба эти уравнения одновремен-

---

[1]) Используя, что для производной $f'(t)$ функции $f(t) = \exp\left(\frac{1}{t-1}\right)$ выполняется равенство $f'(t) = -\frac{1}{(t-1)^2} f(t)$, легко найти, что интересующие нас якобианы равны

$$f_i^n \det\left(\delta_j^k - \frac{2x_j^{(i)}x_k^{(i)}}{(r_i^2-1)^2}\right), \quad f_i^{2n} \det\left(\delta_j^k - \frac{4x_j^{(i)}x_k^{(i)}}{(r_i^2-1)^2}\right),$$

где $\delta_j^k = 1$ при $j = k$ и $\delta_j^k = 0$ при $j \neq k$, а $\det(a_{jk})$, естественно, обозначает определитель матрицы n-го порядка с элементами a_{jk}. Далее надо использовать тот факт, что $f_i > 0$ в U_i и что, как нетрудно проверить,

$$\det\left(\delta_j^k - a_j a_k\right) = (-1)^n \left(1 - a_1^2 - \ldots - a_n^2\right).$$

— *Прим. ред.*

но быть справедливыми не могут. Поэтому отображение F имеет ранг n во всех точках U_i для каждого i, а значит, и всюду на M.

Теперь, применяя теорему 3.2, мы можем объединить все сказанное в этом разделе в виде следующей теоремы.

Теорема 3.3. *Если M — компактное гладкое многообразие, то существует вложение F: $M \to E$, где E — евклидово пространство, такое, что $F(M)$ является подмногообразием в E.*

3.4. Вложение многообразия с краем

Чтобы охватить случай многообразий с краем, нужно внести небольшие изменения в предыдущие определения и теоремы. Например, если N — многообразие с краем, то условие 2) определения 3.1 в том виде, как оно там сформулировано, относится только к внутренним точкам N. Если точка p принадлежит краю многообразия N, то соответствующее условие состоит в том, что она имеет координатную окрестность U в M с такой локальной системой координат φ: $U \to V$, что $\varphi(N \cap U)$ является подмножеством множества V, которое выделяется условиями $x_n \geqslant 0$, $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_m = 0$. Образ края многообразия N в U будет выделяться дополнительным условием $x_n = 0$.

Если оба многообразия M и N имеют края и мы хотим определить, что означает выражение «N — подмногообразие в M», то необходима дальнейшая корректировка, учитывающая возможные соотношения между краями.

Доказательство теоремы о вложении из предыдущего параграфа, проведенное с совсем небольшими изменениями, показывает, что если M — многообразие с краем, то существует вложение f: $M \to E$ в евклидово пространство E. Подробное доказательство этого следует провести в качестве упражнения.

Существует некоторое усиление теоремы о вложении многообразия с краем в евклидово пространство, которое нам понадобится в дальнейшем. Мы

Все сказанное можно объединить в лемму (в которой мы сохранили предыдущие обозначения, избавившись только от штрихов):

Лемма 4.2. *Если M — гладкое многообразие, а f — гладкая функция на нем, то M можно вложить как подмногообразие в N-мерное пространство так, чтобы значение функции f в каждой точке было равно координате x_N этой точки, и тогда точка p будет критической для f в том и только том случае, когда гиперплоскость $x_N = f(p)$ является касательной гиперплоскостью к M в точке p.*

Конечно, возможен случай, когда функция f сначала не задана. Нам может быть просто дано подмногообразие M в N-мерном евклидовом пространстве. Тогда, если взять в качестве функции f координату x_N, то утверждение леммы 4.2 будет по-прежнему справедливым: критические точки f — это точки, в которых существует касательная гиперплоскость вида $x_N = \text{const}$.

Пример 4.2. Пусть M — тор, вложенный как подмногообразие в трехмерное евклидово пространство способом, описанным в разд. 2.1. Из рис. 4.2 легко усмотреть, что имеется ровно четыре горизонтальных плоскости (т. е. плоскости вида $z = \text{const}$): H_1, H_2, H_3, H_4, которые являются касательными плоскостями к многообразию M в точках P_1, P_2, P_3, P_4 соответственно. Это соответствует тому факту, что функция z на торе M имеет четыре критических точки P_1, P_2, P_3, P_4.

Упражнение 4.6. Проверьте последнее утверждение (тот факт, что P_i являются критическими точками функции z), выразив z через локальные координаты в окрестностях этих точек.

Заметим, что в предыдущем примере критические точки функции z — это точки, в которых локальными координатами являются x и y, а z нельзя принять за одну из локальных координат ни в какой из этих точек. Но этого и следовало ожидать. Ведь для любой окрестности, в которой z является одной из локаль-

ных координат, $\partial z/\partial z = 1$, так что условие определения 4.4 критической точки выполнено быть не может.

С другой стороны, заметим, что P_1, P_2, P_3, P_4 — это единственные точки, в которых z нельзя принять за одну из локальных координат. Кроме того, если C — сечение тора горизонтальной плоскостью $z = c$, отличной от плоскостей H_1, H_2, H_3, H_4, то в окрестности любой из своих точек C является множеством

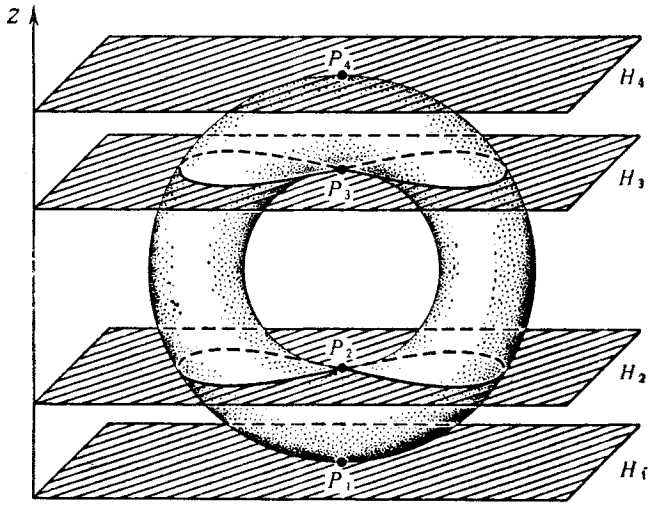

Рис. 4.2. Четыре критические точки функции z на торе.

точек, удовлетворяющих уравнению $z - c = 0$, в котором z, или $z - c$, — одна из локальных координат. Следовательно, C является подмногообразием тора.

Теперь мы сформулируем только что описанные свойства в общей ситуации — для произвольной гладкой функции на гладком многообразии.

Лемма 4.3. *Пусть M — гладкое многообразие размерности n, а f — гладкая функция на M. Пусть p — точка многообразия M, которая не является критической для функции f. Тогда существует такая локальная система координат φ: $U \to V$, где V — открытая*

если в данной системе координат все частные производные обращаются в нуль в точке $\varphi(p)$, то то же самое будет иметь место для любой другой системы координат.

Определение 4.4. Если в предыдущих обозначениях все частные производные функции $f\varphi^{-1}$ по координатам V обращаются в нуль в точке $\varphi(p)$, то мы будем называть p *критической точкой функции* f.

Только что сделанное замечание показывает, что определение 4.4 не зависит от выбора системы координат в окрестности точки p.

Упражнения. 4.4. Если M — плоскость, а f — гладкая функция на M, то все максимумы, минимумы и седловые точки этой функции являются критическими точками.

4.5. Если функция f — та же, что и вначале этого параграфа, но в качестве M теперь взят ее график — поверхность $z=f(x, y)$, — то все максимумы, минимумы и седловые точки на M являются критическими точками функции f, если рассматривать ее как функцию на этой поверхности.

Теперь мы дадим геометрическое описание критических точек с помощью касательных гиперплоскостей. Оно обобщает вводные замечания о поверхности в трехмерном пространстве, приведенные в начале этого раздела.

Пусть M — гладкое многообразие размерности n, а f — гладкая функция на M. По теореме 3.3 мы не теряем общности, считая, что M задано как подмногообразие в евклидовом пространстве E. Пусть размерность E равна $N-1$. Рассмотрим в N-мерном пространстве E' множество точек $(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}, x_N)$, где $x=(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1})$ есть точка из M, а $x_N=f(x)$. Обозначая это множество через M', легко видеть (используя упражнения 3.1), что M' — гладкое подмногообразие пространства E', которое на самом деле диффеоморфно M: диффеоморфизм устанавливает отображение, переводящее точку $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ в точку $(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1})$. Мы добились того, что теперь у нас имеется гладкое подмногообразие M' в E', обладающее тем свойством, что заданная гладкая функция f отождествляется на нем с евклидовой координатой x_N.

Возьмем точку p' на M' с координатами $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_N^0)$, и пусть $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{N-1}^0)$ — соответствующая точка на M. Точка p имеет окрестность U в пространстве E, такую, что $M \cap U$ совпадает с множеством точек U, удовлетворяющих уравнениям, которые при подходящей нумерации координат принимают вид

$$x_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = n+1, \ldots, N-1, \tag{5}$$

где f_i — гладкие функции (см. теорему 3.1). Значит, в окрестности точки p' многообразие M' совпадает с множеством точек, удовлетворяющих уравнениям (5) и уравнению

$$x_N = f(x_1, \ldots, x_n).$$

Здесь $x_1, x_2, \ldots, x_n$ можно использовать как локальные координаты на M или M' в окрестностях точек p или p' соответственно. Уравнения касательного пространства к M' в точке p' имеют вид

$$\begin{aligned} x_i - x_i^0 &= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_p (x_j - x_j^0), \quad i = n+1, \ldots, N-1, \\ x_N - x_N^0 &= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_p (x_j - x_j^0). \end{aligned} \tag{6}$$

Если теперь p — критическая точка функции f на многообразии M, или, что то же самое, p' — критическая точка функции f на M', то последнее из уравнений (6) принимает вид

$$x_N = x_N^0 = f(p). \tag{7}$$

Таким образом, (7) является уравнением касательной гиперплоскости к многообразию M' в точке p'. Обратно, если (7) задает касательную гиперплоскость к M' в точке p', то все коэффициенты правой части последнего из уравнений (6) равны нулю, так что p' — критическая точка функции f.

Заметим, что если M имеет размерность $N-1$, то T тоже имеет размерность $N-1$, и поэтому в точке p имеется единственная касательная гиперплоскость — само пространство T.

Упражнения. 4.1. Найдите касательное пространство к сфере $x^2+y^2+z^2=1$ в точке (x_0, y_0, z_0).

4.2. Пусть M — гладкое многообразие в евклидовом пространстве, и пусть T — касательное пространство к M в точке p. Пусть L — прямая, лежащая в T и проходящая через точку p. Постройте кривую C в M с гладкими параметрическими уравнениями, для которой L является касательной к C в точке p.

Заметим, что лемма 4.1 утверждает только, что пространство T содержит все касательные прямые к M, проходящие через точку p. Теперь же наше упражнение гарантирует, что все прямые в T, проходящие через точку p, являются касательными к многообразию M в точке p.

4.3. Пусть M — гладкое многообразие в евклидовом пространстве, и пусть V — подмногообразие в M. Докажите, что если T_M и T_V — касательные пространства в точке $p \in V$ к M и V соответственно, то $T_V \subset T_M$.

4.2. Критические точки

Здесь мы введем понятие, обобщающее понятие минимума и максимума функции. Если гладкая функция f одной переменной x имеет минимум или максимум[1]) в точке $x=x_0$, то $df/dx=0$ в этой точке. Аналогично если функция двух переменных $f(x, y)$ имеет максимум или минимум в точке (x_0, y_0), то $\partial f/\partial x=\partial f/\partial y=0$ в этой точке. Последнее означает, что касательная плоскость к поверхности $z=f(x, y)$ (графику функции f в трехмерном пространстве) в точке (x_0, y_0) горизонтальна. То же самое условие, очевидно, выполняется для седловой точки — точки p, около которой функция устроена так, что, приближаясь к этой точке по одному пути, мы будем иметь в p_0 максимум (по сравнению со значениями в других точках этого пути), а приближаясь по другому пути — минимум; см. рис. 4.1. Для функций многих переменных в аналогичной ситуации имеется гораздо большее разнообразие возможностей.

[1]) Оговоримся сразу же, что максимумы и минимумы обычно подразумеваются локальными. — *Прим. ред.*

Теперь заметим, что поверхность с уравнением $z = f(x, y)$ можно считать частью гладкого многообразия M, на котором (x, y) образуют локальную систему координат в окрестности точки $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$; тогда f будет гладкой функцией на M, частные производные которой по локальным координатам обращаются в нуль в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Кроме того,

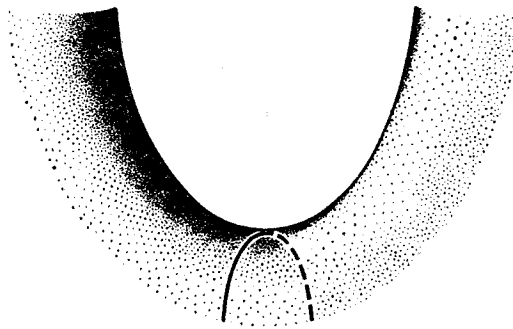

Рис. 4.1. Седловая точка.

геометрически наша ситуация соответствует вложению многообразия M в трехмерное пространство, при котором функция f отождествляется с одной из евклидовых координат, а именно с координатой z, причем горизонтальная плоскость $z = f(x_0, y_0)$ является касательной плоскостью к M в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Эти замечания подводят нас к более общей ситуации, которую мы сейчас и опишем.

Пусть M есть n-мерное гладкое многообразие, f — гладкая функция на M. Рассмотрим координатную окрестность U точки $p \in M$; пусть φ: $U \to V$ — соответствующая система локальных координат, отображающая U на открытую клетку V в n-мерном евклидовом пространстве. Значения первых частных производных функции $f\varphi^{-1}$ по координатам, имеющимся в V, в точке $\varphi(p)$ зависят, конечно, от выбора локальной системы координат и претерпевают линейное преобразование при замене этой системы. Однако

где f_i — гладкие функции, то касательная прямая к C в точке, соответствующей значению параметра t_0, задается уравнениями [1])

$$\frac{x_1 - f_1(t_0)}{f_1'(t_0)} = \frac{x_2 - f_2(t_0)}{f_2'(t_0)} = \ldots = \frac{x_N - f_N(t_0)}{f_N'(t_0)}.$$

Эти уравнения выражают геометрическую идею, согласно которой касательная является пределом секущих, соединяющих точки с параметрами t_1 и t_0, когда t_1 стремится к t_0.

Определение 4.1. Если M — гладкое многообразие, вложенное как подмногообразие в евклидово пространство E, а C — кривая, которая содержится в M и задана гладкими параметрическими уравнениями, то касательная прямая к C в точке p называется *касательной прямой к многообразию M в точке p.*

Пример 4.1. Пусть M — сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ в трехмерном пространстве. Плоскости, проходящие через ось z, высекают на M окружности. Касательные ко всем этим окружностям в точке $(0, 0, 1)$ по определению 4.1 являются касательными прямыми к M. Заметим, что все они лежат в плоскости $z = 1$. Мы сразу же обобщим это замечание.

Лемма 4.1. *Пусть M — гладкое многообразие размерности n, являющееся подмногообразием N-мерного евклидова пространства E, и пусть p — точка на M. Тогда все касательные прямые к многообразию M в точке p содержатся в некотором n-мерном линейном подпространстве T пространства E.*

Доказательство. Используя теорему 3.1, предположим, что координаты пространства E зану-

---

[1]) Разумеется, здесь предполагается, что хотя бы одна из производных $f_i'(t_0) \neq 0$. Когда говорят о гладкой параметризации, то помимо гладкости соответствующих функций подразумевается выполнение и этого свойства для всех t_0. — *Прим. ред.*

мерованы так, что в окрестности точки p многообразие M является множеством точек, удовлетворяющих уравнениям вида

$$(1) \quad x_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad i = n+1, \ldots, N,$$

где φ_i — гладкие функции. Если кривая C имеет гладкие параметрические уравнения $x_i = f_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ и содержится в M, то

$$(2) \quad f_i(t) = \varphi_i(f_1(t), \ldots, f_n(t)), \qquad i = n+1, \ldots, N.$$

Предположим, что C проходит через точку p и что p соответствует значению параметра t_0. Тогда дифференцирование уравнений (2) дает

$$(3) \quad f_i'(t_0) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right)_p f_j'(t_0), \qquad i = n+1, \ldots, N.$$

Но из этих уравнений следует, что каждая касательная прямая к M в точке p лежит в линейном пространстве T, заданном уравнениями

$$(4) \quad x_i - f_i(t_0) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right)_p (x_j - f_j(t_0)), \; i = n+1, \ldots, N.$$

Из вида этих уравнений мы можем заключить, что пространство T не зависит от выбора кривой C и имеет размерность n, что и требовалось.

Определение 4.2. Линейное пространство T, описанное в лемме 4.1, называется *касательным пространством к многообразию M в точке p.*

Следующее определение вводится для удобства терминологии.

Определение 4.3. Если M — гладкое подмногообразие в N-мерном евклидовом пространстве E, а T — касательное пространство к M в точке p, то любая гиперплоскость (линейное подпространство размерности $N-1$) в пространстве E, содержащая T, называется *касательной гиперплоскостью к M в точке p.*

будем иметь дело с таким вложением, при котором край вкладывается в линейное подпространство. Сейчас мы построим такое вложение.

Пусть M — компактное многообразие с краем M_1, и пусть f: $M \to E$ — его вложение в N-мерное пространство. Пусть отображение f переводит точку $p \in M$ в точку $(F_1(p), F_2(p), \ldots, F_N(p))$. Предположим, что можно построить такую гладкую функцию F_{N+1} на M, которая положительна на $M \setminus M_1$ и равна нулю на M_1. Тогда отображение f', переводящее точку $p \in M$ в точку $(F_1(p), F_2(p), \ldots, F_N(p), F_{N+1}(p))$, является гладким отображением многообразия M в $N+1$-мерное евклидово пространство, которое взаимно однозначно отображает M на $f'(M)$, причем $f'(M)$ есть подмногообразие в E'. Кроме того, $f'(M)$ лежит в множестве точек, удовлетворяющих неравенству $x_{N+1} \geqslant 0$, образ края M_1 лежит в множестве $x_{N+1} = 0$, а образ множества $M \setminus M_1$ — в множестве $x_{N+1} > 0$.

Чтобы построить функцию F_{N+1}, построим сначала покрытие многообразия M окрестностями U_i, каждая из которых (так же, как в доказательстве теоремы 3.3) снабжена функцией f_i, положительной на U_i и равной нулю вне U_i. Пусть $U_1, U_2, \ldots, U_k$ — те координатные окрестности, для которых соответствующие локальные системы координат отображают их на полуклетки $V_1, V_2, \ldots, V_k$; иначе говоря, это окрестности, пересекающие край многообразия M. Если $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}$ — координаты на V_i, то для одной из них, скажем для $x_n^{(i)}$, выполняется неравенство $x_n^{(i)} \geqslant 0$ на образе окрестности U_i, а образ множества $M_1 \cap U_i$ выделяется уравнением $x_n^{(i)} = 0$. Функции $x_n^{(i)} \cdot f_i$ для каждого i являются гладкими функциями на M; отсюда функция $\sum_{i=1}^{k} x_n^{(i)} \cdot f_i$ есть гладкая функция на M. Так как все функции $x_n^{(i)} \cdot f_i$ неотрицательны, то $\sum_{i=1}^{k} x_n^{(i)} \cdot f_i$ равна нулю только когда все $x_n^{(i)} \cdot f_i$ равны нулю. Для точки из множества U_i это

означает, что $x_n^{(i)} = 0$, т. е. что точка лежит в M_1. Теперь положим

$$F_{N+1} = \sum_{i=1}^{k} x_n^{(i)} \cdot f_i + \sum_{i>k} f_i,$$

где вторая сумма берется по тем i, для которых окрестность U_i не пересекает M_i. Здесь опять все члены неотрицательны, и легко видеть, что функция F_{N+1} неотрицательна всюду на M и равна нулю только в точках множества M_1.

Теперь, действуя описанным выше способом, мы добавляем F_{N+1} к функциям, задающим вложение многообразия, и получаем следующую теорему:

Теорема 3.4. *Пусть M — гладкое компактное многообразие с краем M_1. Тогда существует такое гладкое вложение $f\colon M \to E_{N+1}$ многообразия M в $N+1$-мерное евклидово пространство, что $f(M)$ есть подмногообразие, лежащее в множестве всех элементов x, для которых $x_{N+1} \geqslant 0$, а $f(M_1)$ является пересечением $f(M)$ с множеством тех x, для которых $x_{N+1} = 0$.*

Упражнения. 3.3. В предыдущих обозначениях проверьте, что $f(M_1)$ является подмногообразием в N-мерном евклидовом пространстве, определенном уравнением $x_{N+1} = 0$.

3.4. Используя метод доказательства теоремы 3.4, покажите, что если M — гладкое многообразие, край которого является несвязным объединением $M_1 \cup M_2$, то существует такое гладкое вложение $f\colon M \to E$ многообразия M в N-мерное евклидово пространство для некоторого N, что $f(M)$ есть подмногообразие, целиком заключенное между гиперплоскостями $x_N = 0$ и $x_N = 1$ и пересекающееся с этими гиперплоскостями по множествам $f(M_1)$ и $f(M_2)$ соответственно.

§ 4. КАСАТЕЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ

4.1. Касательные прямые

Если C — кривая в N-мерном евклидовом пространстве, заданная параметрическими уравнениями

$$x_1 = f_1(t),\ x_2 = f_2(t),\ \ldots,\ x_N = f_N(t),$$

n-мерная клетка с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$, что $f\varphi^{-1} = x_1$. Если же p — критическая точка функции f, то в ее окрестности локальной системы координат с указанным свойством не существует.

Доказательство. Предположим, что p не является критической точкой функции f. Пусть φ': $U' \to V'$ — локальная система координат в окрестности U' точки p. Обозначая через $y_1, y_2, \ldots, y_n$ координаты в V', запишем $f\varphi'^{-1} = g(y_1, \ldots, y_n)$. Тогда, поскольку p не является критической точкой функции f, одна из частных производных, скажем $\partial g/\partial y_1$, будет отлична от нуля в точке $\varphi'(p)$. Но в этом случае функции, определенные равенствами

$$x_1 = g(y_1, \ldots, y_n),$$
$$x_i = y_i, \qquad i = 2, 3, \ldots, n,$$

имеют ненулевой якобиан относительно переменных $y_1, \ldots, y_n$ в точке $\varphi'(p)$. Отсюда следует (см. определение 2.7), что существует такая локальная система координат φ: $U \to V$, что $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — координаты в V и $f\varphi^{-1} = x_1$, что и требовалось.

Обратно, если существует система координат с указанным свойством, то $\partial(f\varphi^{-1})/\partial x_1 = 1$ в точке $\varphi(p)$, и потому p не является критической точкой функции f.

Следствие. *Пусть в обозначениях леммы 4.3 M_c есть множество точек, в которых функция f принимает значение c. Если M_c не содержит критических точек функции f, то оно является подмногообразием в M. Его размерность равна* $\dim M - 1$.

Доказательство. Возьмем точку $p \in M_c$. Так как p не является критической точкой функции f, по лемме 4.3 можно найти такую локальную систему координат φ: $U \to V$ в окрестности точки p, что $f\varphi^{-1} = x_1$. Поэтому множество $\varphi(M_c \cap U)$ есть множество точек из V, удовлетворяющих уравнению $x_1 - c = 0$. А так как $x_1 - c$ можно принять за одну из координат в V, условие (2) определения 3.1 выполнено. Тем

самым M_c является подмногообразием размерности $\dim M - 1$.

По аналогии с леммой 4.2 последний результат можно сформулировать в терминах вложения многообразия M в евклидово пространство. На этом языке он будет означать, что каждое сечение M гиперплоскостью $x_N = \text{const}$, не содержащее критических точек функции x_N, является подмногообразием размерности $\dim M - 1$ в M.

4.3. Невырожденные критические точки

Вернемся к примеру тора в трехмерном пространстве (пример 4.2). Если выразить функцию z в окрестности критической точки P_i на торе через координаты x и y, то это выражение будет иметь довольно специальный вид. Тор, который, как и ранее, заметается окружностью радиуса 1, лежащей на плоскости (x, y) и с центром в точке $(2, 0)$, при вращении этой плоскости вокруг оси y, задается в трехмерном пространстве уравнением

$$(x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 = 16(x^2 + z^2).$$

Рассматривая это уравнение как квадратное относительно z^2, найдем из него z^2. Получим следующее выражение:

$$z^2 = 5 - x^2 - y^2 \pm 4(1 - y^2)^{1/2}. \tag{8}$$

Оно дает два значения для z^2 в зависимости от того, какой выбирается знак — плюс или минус. Для z, таким образом, получается четыре значения. Для небольших значений x и y они соответствуют локальным уравнениям тора M в окрестностях каждой из четырех точек P_i. Чтобы получить, например, локальное уравнение в окрестности точки P_3, возьмем в выражении (8) знак минус и разложим правую часть в степенной ряд.

Разложение имеет вид

$$z^2 = 1 + y^2 - x^2 + \frac{1}{2} y^4 + \ldots .$$

Затем, извлекая положительный квадратный корень и разлагая в степенной ряд, получаем

$$z = 1 + \frac{1}{2}(y^2 - x^2) + \ldots .$$

Здесь все последующие члены уже имеют степень, большую двух.

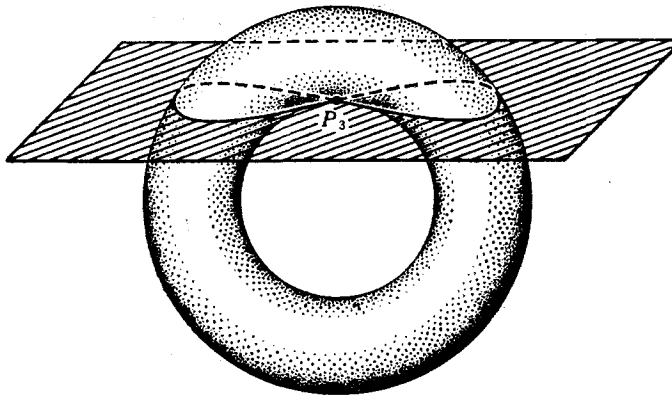

Рис. 4.3. Критический уровень функции z на торе. Первое приближение к функции z в точке P_3 равно $1 + \frac{1}{2}(y^2 - x^2)$.

Таким образом, первое приближение для уравнения многообразия M в окрестности точки P_3 получается отбрасыванием высших степеней переменных x и y. Оно имеет вид $z = 1 + \frac{1}{2}(y^2 - x^2)$. Сечение поверхности с таким уравнением плоскостью $z = 1$ представляет собой пару прямых $y = \pm x$ — это две касательные в центре восьмерки, которую высекает на этой плоскости тор. Важно заметить, что в первом приближении $z - 1$ записывается как квадратичная форма от x и y, которая невырожденна, т. е.

ее определитель не равен нулю. Этот определитель есть

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{vmatrix},$$

где все производные берутся в точке P_3.

Проведенный разбор делает естественным следующее определение:

Определение 4.5. Пусть f — гладкая функция на n-мерном гладком многообразии M, и пусть p — критическая точка f. Пусть U — координатная окрестность точки p, а φ: $U \to V$ — локальная система координат. Введем $g = f\varphi^{-1}$ — функцию от координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в клетке V. Если определитель [1])

$$\left| \frac{\partial^2 g}{\partial x_i\,\partial x_j} \right|, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

отличен от нуля в точке $\varphi(p)$, мы будем называть критическую точку p *невырожденной*. Заметим, что в этом случае ранг матрицы $(\partial^2 g/\partial x_i \partial x_j)$ равен размерности многообразия M.

Упражнения. 4.7. Проверьте, что определение 4.5 не зависит от выбора системы локальных координат в окрестности точки p.

4.8. Докажите, что в примере 4.2 P_1, P_2, P_3, P_4 являются невырожденными критическими точками функции z на торе.

4.9. Возьмем тор M из примера 4.2 и рассмотрим y как функцию на M. Проверьте, что плоскости $y = \pm 1$ являются касательными плоскостями к M, причем каждая из них касается многообразия M вдоль целой окружности. Тем самым все точки этих двух окружностей будут критическими точками для функции y. Покажите, что все эти точки являются вырожденными (т. е. не являются невырожденными).

4.10. Можно заметить, что в упражнении 4.9 вырожденные критические точки не являются изолированными. Однако это вовсе не обязательно для вырожденных точек. Рассмотрим, например, функцию $x^3 + y^3$ на плоскости. Покажите, что $(0, 0)$ — изолированная критическая точка, которая, однако, является вырожденной.

---

[1]) Он называется *гессианом* функции g. — *Прим. ред.*

4.11. Пусть f — гладкая функция от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, равная нулю при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Заметим, что

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)\, dt.$$

Выведите отсюда, что $f = \sum x_i f_i$, где f_i — гладкие функции, для которых $f_i(0, 0, \ldots, 0)$ равно значению $\partial f/\partial x_i$ при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Покажите, что если, кроме того, все $\partial f/\partial x_i$ обращаются в нуль, когда все x_i равны нулю, то $f = \sum x_i x_j f_{ij}$, где f_{ij} — гладкие функции, причем $f_{ij}(0, 0, \ldots, 0)$ равно значению $\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j$ при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Это упражнение означает, что для гладкой функции на многообразии f с критической точкой p и для локальной системы координат $\varphi: U \to V$ в окрестности точки p, у которой $\varphi(p)$ есть точка $(0, 0, \ldots, 0)$, функция $g = f\varphi^{-1}$ является квадратичной формой от координат x_i в V с переменными коэффициентами, которые в точке $\varphi(p)$ совпадают с $\partial^2 g/\partial x_i \partial x_j$. Дело, очевидно, упрощалось бы, если бы можно было построить локальную систему координат, в которой функция f выражалась бы квадратичной формой с постоянными коэффициентами. Следующее упражнение показывает, что это можно сделать, если критическая точка невырожденна.

4.12. Так же, как и в упражнении 4.11, пусть f — гладкая функция от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, причем f и все $\partial f/\partial x_i$ равны нулю при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Пусть начало координат является невырожденной критической точкой. Запишем $f = \sum x_i x_j f_{ij}$. Покажите, что существует преобразование переменных

$$y_i = \sum h_{ij}(x)\, x_j,$$

где h_{ij} — гладкие функции и $\det(h_{ij}(0)) \neq 0$, приводящее f к виду

$$f = \sum c_i y_i^2$$

с коэффициентами c_i, равными либо 1, либо -1.

(Начните с приведения $\sum f_{ij} x_i x_j$ к диагональному виду точно так же, как это делают для квадратичной формы с постоянными коэффициентами. Для этого занумеруйте x_i так, чтобы $f_{11}(0) \neq 0$, и исключите члены вида $x_1 x_i$, полагая

$$y_1 = \sqrt{|f_{11}|}\left(x_1 + \frac{f_{12}}{f_{11}} x_2 + \ldots + \frac{f_{1n}}{f_{11}} x_n\right).$$

Затем надо продолжать по индукции. Проверьте, что коэффициенты получившегося преобразования $y_i = \sum h_{ij}(x)\, x_j$ удовлетворяют требуемым условиям.)

Следующая теорема непосредственно вытекает из результатов приведенных выше упражнений:

Теорема 4.1. *Пусть f — гладкая функция на гладком многообразии M, и пусть p — невырожденная критическая точка функции f на M. Тогда в окрестности точки p существует такая локальная система координат φ: $U \to V$, что функция $f\varphi^{-1}$ выражается через координаты в V в виде $\sum c_i y_i^2$ с c_i, равными 1 или -1. (Подразумевается, что $\varphi(p)$ имеет координаты $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0$ и что $f(p) = 0$.)*

Доказательство. Возьмем произвольную систему локальных координат χ: $U' \to V'$ в окрестности точки p и предположим, что координаты x_1, x_2, ..., x_n в V' выбраны так, что $\chi(p)$ есть точка $(0, 0, \ldots, 0)$. Положим $f\chi^{-1} = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и перейдем от переменных x_j к переменным y_i из упражнения 4.12. Якобианом функций y_i по переменным x_j будет определитель, значение которого в нуле совпадает с $\det(h_{ij}(0))$ и потому отлично от нуля. Отсюда, как мы видели при обсуждении определения 2.7, следует, что существует локальная система координат φ: $U \to V$, для которой y_i являются координатами в V, и тогда в ней $f\varphi^{-1} = \sum c_i y_i^2$; каждое c_i может быть равным 1 или -1.

Сигнатура формы $\sum c_i y_i^2$, появляющейся в теореме 4.1 (т. е. число положительных c_i минус число отрицательных c_i), является инвариантом относительно линейных преобразований переменных[1]). Отсюда следует, что он зависит только от функции f и

[1]) При переходе от одной локальной системы координат к другой квадратичная форма, коэффициенты которой — вторые производные в *критической* точке p, преобразуется так, как преобразуется квадратичная форма при линейном преобразовании переменных, матрица коэффициентов которого совпадает с матрицей Якоби замены координат в точке p. Поэтому инварианты этой формы не зависят от используемых локальных координат и могут быть связаны с самой p как с критической точкой функции f. (Это не зависит от невырожденности точки p и от теоремы 4.1.) — *Прим. ред.*

точки p. Но так как для невырожденной точки ранг квадратичной формы $\sum c_i y_i^2$ равен размерности многообразия M, число r отрицательных c_i тоже зависит только от точки p и функции f, но не от выбора системы координат.

Определение 4.6. Только что введенное число r, связанное с невырожденной критической точкой функции f, мы будем называть *индексом критической точки* [1]).

4.4. Усиление теоремы о вложении

В упражнениях 4.8 и 4.9 рассматривались две функции y и z на торе, причем одна имела вырожденные критические точки, а другая — невырожденные. Сейчас нам удобнее в упражнении 4.9 поменять местами оси y и z. Таким образом, мы вкладываем тор в трехмерное пространство двумя способами: как поверхность

$$(x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 = 16(x^2 + z^2)$$

и как поверхность

$$(x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 = 16(x^2 + y^2).$$

В обоих случаях координата z является гладкой функцией на вложенном торе, причем в первом случае она имеет четыре невырожденные критические точки (рис. 4.2), тогда как во втором случае у нее имеется бесконечное множество вырожденных критических точек (рис. 4.4). Рассматривая невырожденные критические точки как более простые, мы будем считать, что первое вложение «лучше» второго.

---

[1]) Автор называет его *типовым числом*, но термин «индекс» употребляется чаще. Вообще, следует иметь в виду, что терминология здесь не вполне установилась. Так, индексом квадратичной формы иногда называют число отрицательных слагаемых при ее представлении в виде суммы квадратов, иногда сигнатуру, т. е. разность между числом положительных и числом отрицательных слагаемых, а иногда — меньшее из последних двух чисел. — *Прим. ред.*

На самом деле наличие вырожденных критических точек является, в известном смысле, исключением: небольшое вычисление показывает, что стоит лишь чуть-чуть повернуть поверхность, и функция z будет иметь четыре невырожденные критические точки.

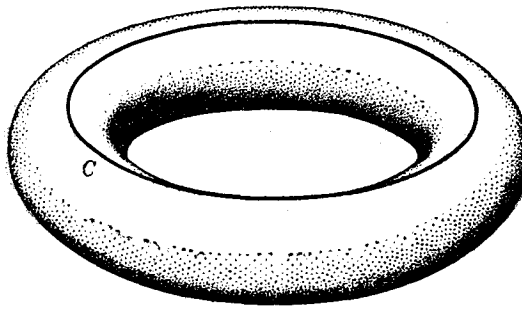

Рис. 4.4. На «горизонтально» вложенном торе имеются вырожденные критические точки функции z; они образуют две окружности, одна из которых (C) показана.

Рассмотренная ситуация является частным случаем следующей общей теоремы.

Теорема 4.2. *Пусть M — компактное гладкое многообразие, край которого является несвязным объединением $M_1 \cup M_2$. Тогда существует гладкое вложение f многообразия M в N-мерное евклидово пространство со следующими свойствами:*

(1) *$f(M)$ целиком лежит во множестве тех x, для которых $0 \leqslant x_N \leqslant 1$, а $f(M_1)$ и $f(M_2)$ — пересечения $f(M)$ с гиперплоскостями $x_N = 0$ и $x_N = 1$ соответственно.*

(2) *Функция x_N на $f(M)$ имеет лишь конечное число критических точек; все они невырожденны и лежат вне гиперплоскостей $x_N = 0$ и $x_N = 1$. Можно вдобавок добиться того, чтобы никаким двум точкам не соответствовало одно значение x_N.*

Условие (2) означает, в частности, что среди гиперплоскостей $x_N = c$ имеется лишь конечное число

касательных к $f(M)$, причем каждая такая гиперплоскость соответствует в точности одной точке касания.

Конечно, можно сформулировать теорему и по-другому. Функцию x_N на $f(M)$ можно перенести посредством отображения f на многообразие M, получив там гладкую функцию φ. Таким образом, теорема утверждает, что на M можно найти гладкую функцию φ, которая равна нулю на M_1 и единице на M_2, удовлетворяет неравенству $0 < \varphi(p) < 1$ во всех точках p, не лежащих на крае, и имеет лишь конечное число критических точек; все эти точки невырожденны, соответствуют различным значениям φ и не лежат ни в M_1, ни в M_2.

Заметим, что если M — компактное гладкое многообразие без края, то справедливо аналогичное утверждение, отличающееся только тем, что ничего не говорится о крае.

Доказательство теоремы 4.2 довольно сложное, и мы не будем приводить его здесь. Однако данная здесь формулировка намекает на один из возможных подходов к доказательству. Вспомним, что, как мы уже видели, для данного многообразия M с краем $M_1 \cup M_2$ существует вложение в евклидово пространство, удовлетворяющее условию (1). Идея теперь состоит в том, чтобы подправить это вложение f так, чтобы и условие (2) тоже выполнялось.

В качестве первого шага следует показать, что отображение f можно приблизить отображением f', для которого $f'(M)$ является частью алгебраического многообразия, т. е. частью множества нулей конечного числа полиномиальных уравнений от координат $x_1, x_2, \ldots, x_N$ евклидова пространства. Заметим, что в приведенных выше примерах вложения тора в трехмерное пространство этот шаг уже пройден. Действительно, в каждом из случаев тор задавался как алгебраическая поверхность.

Второй шаг доказательства — показать, что можно подправить координаты в N-мерном пространстве так, чтобы координата x_N удовлетворяла условию (2) относительно $f'(M)$. Идея — рассмотреть функцию $\sum u_i x_i$, где u_i — вещественные числа. Оказывается,

условие, состоящее в том, что эта функция должна иметь бесконечное число критических точек или вырожденные критические точки, налагает на u_i некоторые алгебраические уравнения. Поэтому выберем значения u_i, не удовлетворяющие этим уравнениям, и сделаем замену координат, после которой $\sum u_i x_i$ станет N-й координатой. Тогда условие (2) будет выполнено[1]).

§ 5. КРИТИЧЕСКИЕ И НЕКРИТИЧЕСКИЕ УРОВНИ

5.1. Определения и примеры

Предположим, что M — компактное гладкое многообразие с краем $M_0 \cup M_1$, которое вложено в евклидово пространство так, что оно целиком лежит между гиперплоскостями $x_N = 0$ и $x_N = 1$, а M_0 и M_1 суть пересечения M с этими гиперплоскостями. Сейчас мы подробно изучим связь между различными сечениями многообразия M гиперплоскостями $x_N = \text{const}$. Вместо этого можно было бы исследовать множества уровней гладкой на M функции, не обращаясь к евклидову пространству. Однако вложение в евклидово пространство автоматически дает понятие перпендикулярности, которое нам вскоре понадобится.

Определение 5.1. Если сечение M_c многообразия M гиперплоскостью $x_N = c$ содержит критическую точку функции x_N, то мы будем называть M_c *критическим уровнем функции* x_N. В противном случае будем называть его *некритическим уровнем функции* x_N.

---

[1]) Зато условие (1) нарушится, так что после этого придется еще раз «подправить» наше вложение. После того как читатель изучит Милнора, он сможет доказать теорему 4.2, пользуясь теоремой Сарда вместо алгебраической аппроксимации, которая является хотя и более элементарной (ни слова о мере!), но зато гораздо более громоздкой. — *Прим. ред.*

В частности, в примере 4.2 функция z на торе имеет четыре критических уровня, а именно сечения плоскостями H_1, H_2, H_3, H_4. Заметим, что в этом примере каждый критический уровень M_c окружен соседними некритическими уровнями, причем соседние уровни, лежащие выше M_c, гомеоморфны друг другу так же, как и соседние уровни, лежащие ниже M_c. Например (рис. 5.1), между гиперплоскостями H_1 и H_2

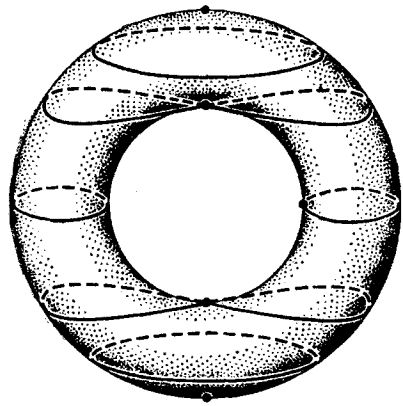

Рис. 5.1. Критические и некритические уровни функции z на торе.

все некритические уровни являются окружностями. С другой стороны, при прохождении критического уровня вид сечения изменяется. Некритические уровни, расположенные вблизи плоскости H_2 и ниже нее, отличаются от близких уровней, лежащих выше этой плоскости. Основная цель этого параграфа — показать, что только что сделанные замечания справедливы в общем случае, и точно выяснить, что происходит, когда мы совершаем переход с одной стороны критического уровня на другую.

Мы будем проводить это исследование с помощью семейства траекторий, ортогональных к сечениям M_c, т. е. семейства кривых на M, которые имеют гладкие параметрические уравнения и пересекают уровни M_c

под прямым углом (за исключением критических точек)[1]. Это понятие можно проиллюстрировать на следующем довольно простом примере.

Пусть M — двумерная сфера в трехмерном евклидовом пространстве. Функция z имеет две критические точки — северный и южный полюс. Некритические уровни функции z — это линии широты. Ортогональные траектории этих уровней являются меридианами. Представим себе, что точки одного некритического уровня скользят вдоль меридианов до тех пор, пока не достигнут другого некритического уровня. Тогда получится отображение одного уровня на другой. Кроме того, если M_c — некритический уровень, то его окрестность можно представить как объединение дуг меридианов; поэтому она имеет вид $M_c \times I$, где I — интервал.

Как выяснится, аналогичная ситуация имеет место в общем случае. Поэтому нам будет нужно изучить поведение ортогональных траекторий вблизи критических точек. Из приведенного примера уже сейчас видно, что для критических точек перестает быть верным тот факт, что через каждую точку проходит ровно одна траектория.

В первую очередь надо построить в общем случае семейство ортогональных траекторий. Мы сделаем это, установив систему дифференциальных уравнений для ортогональных траекторий и применив теорему о существовании и единственности из теории дифференциальных уравнений.

Итак, начнем с окрестности U в N-мерном евклидовом пространстве, в которой M является множеством точек, удовлетворяющих уравнениям вида

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\vdots \\ x_N &= f_N(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

[1]) В критической точке не определено, какое направление ортогонально к M_c в этой точке — из рис. 5.1 видно, что критический уровень может не быть многообразием. — *Прим. ред.*

где f_i — гладкие функции. Из леммы 4.3 следует, что если $U \cap M$ не содержит ни одной критической точки функции x_N, то саму x_N можно принять за одну из локальных координат в открытом множестве $U \cap M$. Отсюда следует, что после подходящей перенумерации координат $U \cap M$ станет множеством точек, удовлетворяющих уравнениям

$$(1) \quad x_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_N), \qquad i = n, n+1, \ldots, N-1.$$

Тогда множество $U \cap M_c$, если оно непусто, будет задаваться уравнениями (1) и дополнительным уравнением $x_N = c$.

Пусть $p \in U \cap M$. Обозначим через $x_i(p)$ значение координаты x_i в точке p. Таким образом, для уровня M_c, проходящего через точку p, имеем $c = x_N(p)$. Пусть T_p — касательное пространство к многообразию M в точке p, а T'_p — касательное пространство к M_c в этой же точке. Тогда T_p и T'_p имеют размерности n и $n-1$ соответственно и $T'_p \subset T_p$ (упражнение 4.3). Так как p не является критической точкой функции x_N (множество U вообще не содержит критических точек), пространство T_p не лежит в гиперплоскости $x_N = c = x_N(p)$. С другой стороны, пространство T'_p, очевидно, лежит в этой гиперплоскости, и потому направление в T_p, ортогональное пространству T'_p, не попадает в гиперплоскость $x_N = x_N(p)$. Таким образом, кривая в M, проходящая через точку p и имеющая касательную, ортогональную пространству T'_p, должна была бы записываться параметрическими уравнениями вида

$$x_i = \varphi_i(x_N), \qquad i = 1, 2, \ldots, N-1,$$

так что касательная к ней будет иметь направление с угловыми коэффициентами

$$(2) \qquad (\varphi'_1(x_N), \varphi'_2(x_N), \ldots, \varphi'_{N-1}(x_N), 1),$$

где у каждой производной надо взять значение в точке p.

Уравнения пространства T_p имеют вид

$$(3)\quad x_i - x_i(p) = \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_p (x_j - x_j(p)) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_N}\right)_p (x_N - x_N(p)),$$

где индекс p справа внизу означает, что значение производной берется в точке p. А вот уравнения пространства T'_p:

$$(4)\qquad x_i - x_i(p) = \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_p (x_i - x_i(p)).$$

Направление (2) должно быть ортогонально пространству T'_p, а это равносильно тому, что оно ортогонально множеству из $n-1$ линейно независимых направлений в пространстве T'_p. Множеством таких направлений будет множество линейно независимых решений уравнений (4), которые рассматриваются как линейные уравнения относительно $x_i - x_i(p)$. Следующие $n-1$ строк образуют множество линейно независимых решений:

$$(5)\quad \begin{array}{l} 1,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\right)_p,\ \left(\frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_1}\right)_p,\ \ldots,\ \left(\frac{\partial f_{N-1}}{\partial x_1}\right)_p,\ 0; \\ 0,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_2}\right)_p,\ \left(\frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_2}\right)_p,\ \ldots,\ \left(\frac{\partial f_{N-1}}{\partial x_2}\right)_p,\ 0; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 1,\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_{n-1}}\right)_p,\ \left(\frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_{n-1}}\right)_p,\ \ldots,\ \left(\frac{\partial f_{N-1}}{\partial x_{n-1}}\right)_p,\ 0. \end{array}$$

Таким образом, направление (2) должно быть ортогонально этим векторам и, кроме того, удовлетворять уравнениям (3), если подставить числа (2) вместо $x_i - x_i(p)$ (последнее условие обеспечивает, что наше направление лежит в пространстве T_p).

Упражнение 5.1. Докажите, что полученная система линейных уравнений для (2) имеет единственное решение, выражающее $d\varphi_i/dx_N$ ($i = 1, 2, \ldots, N-1$) в виде функции, гладкой на многообразии M, из которого исключены критические точки функции x_N.

Обратимся теперь к теореме из теории дифференциальных уравнений (см. [1]), утверждающей, что у системы дифференциальных уравнений типа той, которая только что у нас получилась и в которой $d\varphi_i/dx_N$ выражаются как гладкие функции, существуют решения $x_i = \varphi_i(x_N)$, $i = 1, \ldots, N-1$; каждое решение дает параметрическое представление некоторой кривой на многообразии M. Из различных решений получается семейство F кривых. Это семейство обладает тем свойством, что через каждую некритическую точку на M проходит ровно одна кривая из F. Из построения нашей системы дифференциальных уравнений видно, что семейство F есть требуемое семейство ортогональных траекторий для уровней M_c. Та же теорема о дифференциальных уравнениях дает нам дополнительную информацию о том, как выглядят уравнения кривых из семейства F в окрестности точки на M, не содержащей критических точек функции x_N: эти уравнения можно записать в виде

$$x_i = \varphi_i(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0, x_N), \tag{6}$$

где координата x_N берется в качестве параметра на кривой, $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0$ — локальные координаты точки, в которой рассматриваемая кривая пересекает фиксированный уровень M_c, а функции φ_i являются гладкими по всем своим аргументам [1]).

---

[1]) Строго говоря, одной ссылки на известные теоремы из теории дифференциальных уравнений здесь мало. Эти теоремы относятся к системам дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_i}{dt} = G_i(x_1, \ldots, x_N), \qquad i = 1, \ldots, N,$$

правые части которых определены в некоторой области евклидова пространства $(x_1, \ldots, x_N)$. У нас же dx_i/dx_N выражаются как некоторые гладкие функции на $M \setminus \{$критические точки$\}$.

Воспользуемся локальными координатами на M; пусть это будут, скажем, $x_1, \ldots, x_{n-1}, x_N$. Тогда наши дифференциальные уравнения имеют вид

$$\frac{dx_i}{dx_N} = G_i(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_N), \qquad i = 1, \ldots, N-1, \tag{*}$$

Упражнения. 5.2. Докажите, что уравнения (6) можно использовать для того, чтобы ввести новую систему локальных координат в окрестности некритической точки функции x_N, задавая точку ее параметром x_N на соответствующей кривой семейства F и координатами той точки, в которой эта кривая пересекает фиксированный уровень M_c.

Выведите отсюда, что если M_c — некритический уровень функции x_N, то у него есть окрестность в M, диффеоморфная произведению $M_c \times I$, где I — открытый интервал значений функции x_N. Докажите, что аналогичный результат будет справедлив для критического уровня, если исключить окрестность критической точки [1]).

5.3. Выведите из предыдущего упражнения, что если M_{c_1} и M_{c_2} — два последовательных критических уровня (т. е. таких, что все уровни M_c, у которых $c_1 < c < c_2$, — некритические), то часть многообразия M, заключенная между M_{c_1} и M_{c_2}, диффеоморфна произведению $M_c \times I$, где $c_1 < c < c_2$.

5.4. Выведите также из упражнения 5.2, что если между двумя некритическими уровнями нет ни одного критического, то эти уровни диффеоморфны.

где G_i — не произвольные, а вполне определенные функции, которые однозначно определяются из сказанного на стр. 93, хотя мы и не получили для них явных выражений. Если из этих уравнений (*) оставить только первые $n-1$, то получится такая система, как в теории дифференциальных уравнений. Используя специфические свойства наших G_i, можно доказать, что если $x_1(x_N), \ldots, x_{n-1}(x_N)$ — решение этой системы, то функции

$$x_j(x_N) = f_j(x_1(x_N), \ldots, x_{n-1}(x_N), x_N), \quad j = n, \ldots, N-1,$$

где f_j — те же, что в (1), будут удовлетворять остальным уравнениям (*). Мы приходим к такой ситуации: многообразие $M \setminus \{$критические точки$\}$ покрыто координатными окрестностями, в каждой из них через каждую точку проходит короткий кусок ортогональной траектории. Теперь из этих коротких кусков надо «склеить» «целые» ортогональные траектории. Это не сложно, но требует времени и места (и напоминает продолжение решения системы дифференциальных уравнений до границы области определения правых частей). При первом чтении, вероятно, лучше не вникать в эти детали, которые, собственно, и не относятся к дифференциальной топологии. Поэтому я ограничусь замечанием, что удобно пользоваться другой параметризацией ортогональных траекторий, при которой критические точки не выпадают из области определения наших дифференциальных уравнений, но являются положениями равновесия (соответствующие решения — константы). См. [22], начало § 3. — *Прим. ред.*

[1]) Точнее: если c — критический уровень, а U и V — две малые окрестности критической точки, причем $U \supset \overline{V}$, то $M_c \setminus U$ имеет окрестность, диффеоморфную $(M_c \setminus V) \times I$. — *Прим. ред.*

5.2. Окрестность критического уровня; разбор одного примера

В предыдущем разделе мы показали, что когда c возрастает от 0 до 1, сечение M_c не меняется до тех пор, пока мы остаемся между двумя критическими уровнями (диффеоморфные многообразия считаются одинаковыми). Однако когда мы проходим критический уровень, M_c изменяется, и наш следующий шаг — изучить природу этого изменения.

Итак, пусть M_c — критический уровень функции x_N, и пусть P — критическая точка на M_c. Как уже отмечалось, ортогональные траектории из семейства F ведут себя в окрестности любой точки уровня M_c, отличной от P, по существу так же, как и в окрестности некритического уровня. Теперь очень важно изучить их поведение в окрестности точки P.

Мы начнем с анализа примера 4.2, в котором рассматривалась функция z на торе M, вложенном в трехмерное пространство; здесь мы уделим особое внимание изучению окрестности критической точки P_3. Мы уже видели (в разделе 4.2), что первым приближением к тору в окрестности этой точки является поверхность с уравнением $z = 1 + \frac{1}{2}(y^2 - x^2)$. Это можно уточнить с помощью теоремы 4.1, эквивалентная формулировка которой для нашего случая выглядит так: существует диффеоморфизм φ, который окрестности точки P_3 на торе отображает на окрестности точки $(0, 0, 0)$ на поверхности $z = y^2 - x^2$ (множитель $1/2$ убирается подходящим изменением масштаба). Конечно, диффеоморфизм φ не обязан переводить ортогональные траектории горизонтальных сечений тора в ортогональные траектории горизонтальных сечений поверхности $z = y^2 - x^2$. С другой стороны, последние представляют собой более удобный объект для изучения, и хорошо бы свести все дело именно к ним; тогда мы будем иметь стандартное описание окрестности любой седловой точки. Чтобы сделать это, покажем, что ортогональные траектории F к горизонтальным сечениям тора можно подпра-

вить в окрестности точки P_3 таким образом, чтобы получилось новое семейство F' с аналогичными свойствами[1]), но уже такое, что отображение φ переводит его часть, лежащую в окрестности точки P_3, в семейство F_0 траекторий, ортогональных к горизонтальным сечениям поверхности $z = y^2 - x^2$.

Мы используем совсем простой прием. Каждой точке p на торе, которая близка к P_3, но не равна ей, соответствуют два направления: одно из них — касательная к кривой семейства F, проходящей через точку p, а другое — касательная к кривой семейства $\varphi^{-1}(F_0)$, проходящей через p. Обозначим эти направления через $(l_1, l_2, 1)$ и $(\lambda_1, \lambda_2, 1)$ соответственно. Сопоставим точке p направление

$$(7) \qquad (g\lambda_1 + (1-g)l_1,\ g\lambda_2 + (1-g)l_2,\ 1),$$

где g — гладкая функция на торе, равная нулю вне окрестности точки P_3 и единице внутри некоторой меньшей окрестности. Построим новое семейство кривых F', касательных к этому направлению. Заметим, что по мере приближения к точке P_3 направление (7) постепенно изменяется от $(l_1, l_2, 1)$ до $(\lambda_1, \lambda_2, 1)$. Поэтому семейство F' будет совпадать с F вне окрестности точки P_3, а в меньшей окрестности оно будет совпадать с семейством $\varphi^{-1}(F_0)$.

Как уже отмечалось раньше, это означает, что можно исследовать окрестность H_3 на торе, используя

[1]) Новые кривые уже не будут ортогональны к сечениям тора горизонтальными плоскостями, но, во всяком случае, не будут их касаться и даже не будут образовывать с ними малых углов; фактически легко добиться, чтобы не было углов, меньших, скажем, 89°. (Это следует из того, что в достаточно малой окрестности точки P_3 рассматриваемые ниже направления $(l_1, l_2, 1)$ и $(\lambda_1, \lambda_2, 1)$ будут сколь угодно близки друг к другу. Действительно, пусть p — близкая к P_3 точка тора с координатами (x, y, z), и пусть $p' = (x, y, y^2 - x^2)$. Направление $(\lambda_1, \lambda_2, 1)$ в точке p — это направление кривой $\varphi^{-1}(C)$, где C — кривая из семейства F_0, проходящая через точку $\varphi(p)$. Чем ближе p к P_3, тем слабее изменяет φ углы и направления, поэтому рассматриваемое направление близко к направлению кривой C в точке $\varphi(p)$, а оно близко к направлению в точке p' проходящей через нее кривой семейства F_0; наконец, последнее направление близко к направлению $(l_1, l_2, 1)$ в точке p.) — *Прим. ред.*

подправленное семейство (почти) ортогональных траекторий F', а отсюда следует, что окрестность точки P_3 можно изучать, рассматривая поверхность $z = y^2 - x^2$ в окрестности начала координат и используя кривые семейства F_0 на этой поверхности.

5.3. Окрестность критического уровня; общее обсуждение

Теперь мы реализуем в общем случае идеи, проиллюстрированные в предыдущем разделе на двумерном примере. Точнее, мы сравним окрестность невырожденной критической точки функции на данном многообразии с некоторой окрестностью стандартной критической точки (в примере она соответствует началу координат на поверхности $z = y^2 - x^2$).

Итак, пусть M — гладкое многообразие размерности n, f — гладкая функция на M, а p — невырожденная критическая точка функции f. Прибавляя подходящую константу, мы можем считать, что $f(p) = 0$. Используем теорему 4.1 для того, чтобы ввести в окрестности U точки p локальную систему координат ψ: $U \to V$, в которой

$$f\psi^{-1} = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i^2, \tag{8}$$

где y_i — евклидовы координаты в V, а каждое c_i равно ± 1. Все y_i равны нулю в точке $\psi(p)$.

Наряду с этим рассмотрим в евклидовом пространстве размерности $n+1$ с координатами $(y_1, y_2, \ldots, y_n, z)$ гиперповерхность Q, заданную уравнением

$$z = \sum c_i y_i^2. \tag{9}$$

Множество V можно отождествить с окрестностью начала координат на гиперплоскости $z = 0$. Пусть V' — окрестность на Q, которая проектируется на V. Определим отображение φ: $U \to V'$, переводя точку q в точку с координатами $(y_1, y_2, \ldots, y_n, z)$, где $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — координаты точки $\psi(q)$, а z опре-

деляется из равенства (9). Теперь заметим, что значение функции $f\varphi^{-1}$ в точке $(y_1, y_2, \ldots, y_n, z)$ на Q то же, что и у функции $f\psi^{-1}$ в точке $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, а именно $\sum c_i y_i^2$, и поэтому, согласно формуле (9), оно совпадает со значением координаты z в этой точке.

Таким образом, φ: $U \to V'$ является отображением на открытое множество в Q, для которого $f\varphi^{-1}$ есть функция z. Отсюда, в частности, следует, что подмножества вида $f = \text{const}$ в U переходят в сечения гиперповерхности Q гиперплоскостями $z = \text{const}$.

Предположим теперь, что многообразие M вложено в N-мерное евклидово пространство так, что функция f на M совпадает с x_N (см. лемму 4.2), и построим, так же как в разд. 5.1, семейство F ортогональных траекторий к сечениям многообразия M гиперплоскостями $x_N = \text{const}$. Сейчас мы «подправим» семейство F в окрестности точки p по аналогии с тем, как мы делали это в разд. 5.2.

Итак, пусть F_0 — семейство траекторий на гиперповерхности второго порядка, ортогональных к сечениям гиперплоскостями $z = c$. Семейство F_0 определено во всех точках, кроме начала координат. Тогда, обозначив через $\varphi^{-1}(F_0)$ прообраз этого семейства в U, мы получаем, что через каждую точку $q \in U$, отличную от p, проходит две кривых — одна из семейства F, другая из $\varphi^{-1}(F_0)$. Запишем направления касательных к этим прямым в виде векторов

$$(l_1(q),\ l_2(q),\ \ldots,\ l_{N-1}(q),\ 1), \tag{10}$$

$$(\lambda_1(q),\ \lambda_2(q),\ \ldots,\ \lambda_{N-1}(q),\ 1) \tag{11}$$

соответственно. Заметим, что последнюю координату действительно можно сделать равной 1, так как ни одно из этих направлений не горизонтально.

Далее, пусть U_1 — другая окрестность точки p, такая, что $\overline{U}_1 \subset U$. Для простоты лучше взять в качестве U_1 клетку. Найдем гладкую функцию g на M, которая равна 1 на $\overline{U}_1$ и нулю вне U (см. упражнение 2.14). Теперь сопоставим каждой точке $q \in U$

направление, заданное вектором

$$(12)\quad (g(q)\lambda_1(q)+(1-g(q))l_1(q),\ \ldots,\ g(q)\cdot\lambda_{N-1}(q)+ \\ +(1-g(q))\cdot l_{N-1}(q),\ 1).$$

Заметим, что это сопоставление можно продолжить на все многообразие M, беря для каждой точки вне U вектор $(l_1, l_2, \ldots, l_{N-1}, 1)$. Наконец, чтобы найти семейство кривых, касательные к которым в каждой точке задаются формулой (12), надо решить систему дифференциальных уравнений

$$(13)\quad \left(\frac{dx_i}{dx_N}\right)_q = g(q)\lambda_i(q)+(1-g(q))l_i(q), \\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1.$$

Так как функции, стоящие в правой части этих уравнений, являются гладкими во всех точках многообразия M, кроме критических точек функции x_N, мы можем применить цитированную выше теорему о существовании (см. [1]), которая показывает, что на многообразии M, из которого исключены критические точки функции x_N, существует семейство гладких кривых F' с соответствующими направлениями; через каждую точку проходит ровно одна кривая. Но вектор (12) совпадает с (11) в окрестности U_1 и с (10) вне окрестности U; отсюда следует, что семейство F' совпадает с $\varphi^{-1}(F_0)$ в U_1 и с F вне U, что и требовалось.

5.4. Окрестность критической точки

Как мы уже объясняли, в первую очередь надо исследовать частный случай окрестности начала координат на гиперповерхности (9). Тогда мы сможем перенести информацию на многообразие M при помощи отображения φ^{-1}, определенного в предыдущем разделе. Бо́льшая часть рассуждений, необходимых для получения основного результата этого раздела, будет дана в виде серии упражнений.

Упражнения. 5.5. Пусть H — гиперповерхность, заданная уравнением $z=f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ в $(n+1)$-мерном евкли-