

довом пространстве. Докажите, что ортогональные траектории на H для сечений гиперплоскостями $z = \text{const}$ проектируются на ортогональные траектории семейства подмногообразий $f = \text{const}$ в n -мерном пространстве $z = 0$. (Нужно заметить, что касательные пространства к горизонтальным сечениям гиперповерхности H проектируются в касательные пространства к множествам $f = \text{const}$ и что прямые, ортогональные первым, проектируются в прямые, ортогональные вторым.)

5.6. Работая теперь в n -мерном пространстве с координатами y_1, y_2, \dots, y_n , рассмотрим семейство гиперповерхностей $f(y_1, y_2, \dots, y_n) = \text{const}$. Покажите, что ортогональные траектории этого семейства удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$(14) \quad \frac{dy_1}{f_1} = \frac{dy_2}{f_2} = \dots = \frac{dy_n}{f_n},$$

где $f_i = \partial f / \partial y_i$. Выведите отсюда, что для семейства гиперповерхностей

$$(15) \quad y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_r^2 - y_{r+1}^2 - \dots - y_n^2 = \text{const}$$

ортогональные траектории определяются уравнениями

$$(16) \quad \begin{aligned} y'_2 y_1 &= y'_1 y_2, \dots, y'_r y_1 = y'_1 y_r, \\ y'_{r+2} y_{r+1} &= y'_{r+1} y_{r+2}, \dots, y'_n y_{r+1} = y'_{r+1} y_n, \\ y_1 y_{r+1} &= y'_1 y'_{r+1}, \end{aligned}$$

где y'_1, y'_2, \dots, y'_n — константы. Именно эти уравнения определяют ортогональную траекторию, проходящую через точку $(y'_1, y'_2, \dots, y'_n)$.

Покажите, что через каждую точку $(y'_1, y'_2, \dots, y'_n)$, отличную от $(0, 0, \dots, 0)$, проходит ровно одна кривая семейства (16). Далее, покажите, что гиперповерхность из семейства (15), проходящая через начало координат, представляет собой $(n-1)$ -мерный конус с вершиной в начале координат; поэтому бесполезно надеяться на выполнение условия ортогональности в этой точке.

5.7. Заметим, что все уравнения (16), кроме последнего, линейны; на самом деле они линейно независимы, если оба числа y'_1 и y'_{r+1} отличны от нуля. Таким образом, в случае $y'_1 \neq 0$, $y'_{r+1} \neq 0$ уравнения (16) определяют гиперболу. Но условие на y'_1 и y'_{r+1} зависит от произвола в нумерации координат y_i . Преобразуя уравнения ортогональных траекторий, покажите, что если одно из y'_1, y'_2, \dots, y'_r отлично от нуля и одно из $y'_{r+1},$

y'_{r+2}, \dots, y'_n отлична от нуля, то траектория, проходящая через точку $(y'_1, y'_2, \dots, y'_n)$, представляет собой гиперболу.

5.8. В дополнение к предыдущему упражнению покажите, что если у одной из траекторий $y_i = 0$ в какой-нибудь точке, то $y_i = 0$ вдоль всей траектории. (Выполните это непосредственно из дифференциальных уравнений.) Используйте это для доказательства того, что траектория, проходящая через точку, у которой $y_1 = y_2 = \dots = y_r = 0$, является лучом, исходящим из начала координат. Получите такой же результат для траектории, проходящей через точку с $y'_{r+1} = y'_{r+2} = \dots = y'_n = 0$. Покажите, кроме того, что если мы будем рассматривать ортогональные траектории только для гиперповерхностей семейства (15) с $-1 \leq c \leq 1$, то множество траекторий, лежащих в линейном пространстве $y_1 = y_2 = \dots = y_r = 0$, образует $(n-r)$ -мерную клетку E^{n-r} , граница которой есть сфера S^{n-r-1} , высекаемая в этом пространстве гиперповерхностью (15) с $c = -1$, в то время как траектории, лежащие в пространстве $y_{r+1} = \dots = y_n = 0$, образуют r -мерную клетку E^r , граница которой является сферой S^{r-1} , высекаемой гиперповерхностью (15) с $c = 1$. Заметим, что клетки E^r и E^{n-r} имеют единственную общую точку — начало координат.

Прежде чем продолжать изучение общей ситуации, полезно разобрать более подробно пример с $n = 3$. Для удобства изменив обозначения, рассмотрим семейство поверхностей

$$x^2 - y^2 - z^2 = c,$$

где $-1 \leq c \leq 1$. Заметим, что если положить c равным -1 и 1 , то получатся соответственно однополостный и двуполостный гиперболоид, причем двуполостный гиперболоид окажется внутри однополостного (см. рис. 5.2).

Как мы уже показали выше, ортогональные траектории этого семейства поверхностей представляют собой дуги гипербол, за исключением прямолинейных отрезков, образующих две клетки E^1 и E^2 , описанные в упражнении 5.8. На рис. 5.2 границы этих клеток обозначены через S^0 и S^1 соответственно.

Рассмотрим теперь траектории, которые начинаются в окрестности множества S^0 и кончаются в окрестности множества S^1 . В данном случае окрестность множества S^0 представляет собой объединение

двух кругов, а окрестность множества S^1 — полосу, опоясывающую однополостный гиперболоид. Первую окрестность можно представить как $S^0 \times E^2$, а вторую — как $S^1 \times E^1$. Кроме того, интуитивно ясно, что если правильно подобрать размеры этих окрестностей, то множество тех ортогональных траекторий, которые начинаются в первой окрестности, совпадает с множеством тех, которые кончаются во второй, а

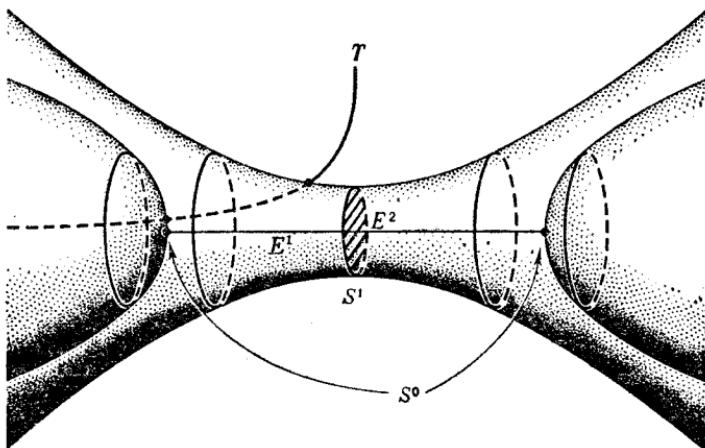
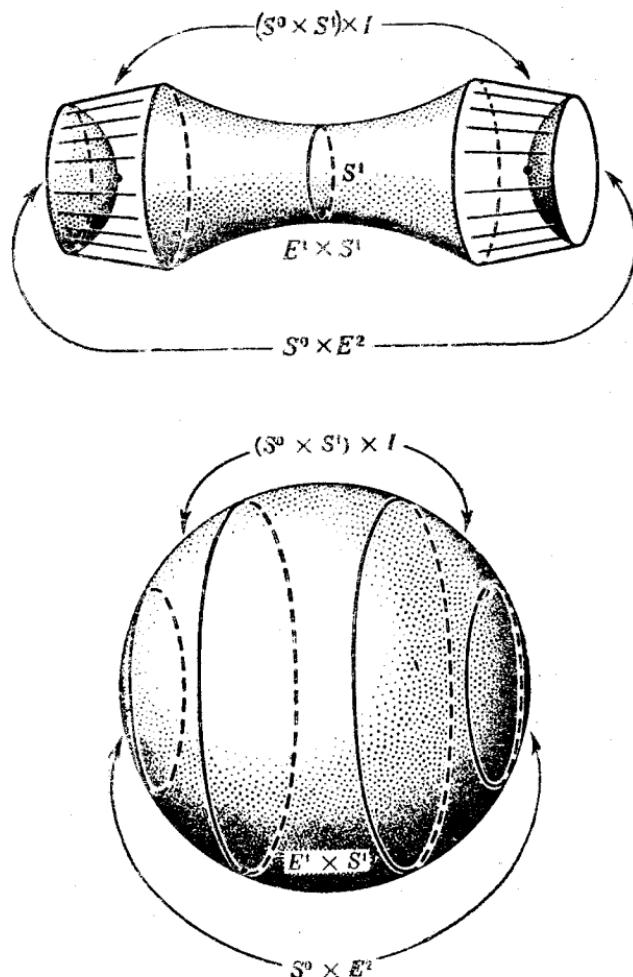


Рис. 5.2. Ортогональная траектория T , проходящая возле S^0 , проходит возле S^1 .

объединение всех этих траекторий, вместе с клетками E^1 и E^2 , образует трехмерную клетку E^3 . Граница этой клетки является сферой и разлагается в объединение трех множеств, как это показано на рис. 5.3. Первые два множества — это $S^0 \times E^2$ и $S^1 \times E^1$ (окрестности множеств S^0 и S^1 на двух гиперболоидах), а третье состоит из ортогональных траекторий, соединяющих точки на границах окрестностей $S^0 \times E^2$ и $E^1 \times S^1$ (каждая из этих границ является произведением $S^0 \times S^1$). Таким образом, третье множество представляется как $(S^0 \times S^1) \times I$, где I — интервал.

Цель следующей серии упражнений — обобщить только что разобранный частный случай.



Р и с. 5.3. S^2 разлагается на 3 множества; обозначения те же, что и на рис. 5.2.

Упражнение 5.9. Пусть S^{n-1} — сфера, заданная уравнением

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$$

в n -мерном пространстве. Пусть S^{r-1} есть $(r-1)$ -мерная сфера, лежащая на S^{n-1} и заданная уравнениями

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_r^2 = 1,$$

$$x_{r+1} = x_{r+2} = \dots = x_n = 0,$$

а S^{n-r-1} есть $(n-r-1)$ -мерная сфера на S^{n-1} с уравнениями

$$x_1 = x_2 = \dots = x_r = 0,$$

$$x_{r+1}^2 + x_{r+2}^2 + \dots + x_n^2 = 1.$$

Проверьте, что любую точку p на S^{r-1} можно соединить с любой точкой q на S^{n-r-1} единственной дугой большого круга, составляющей четвертую часть окружности. Другими словами, лучи, направленные из центра сферы S^{n-1} к точкам p и q , образуют угол $\pi/2$. Покажите, кроме того, что две такие дуги pq и $p'q'$ не имеют общих точек, если $p \neq p'$ и $q \neq q'$; если же либо $p = p'$, либо $q = q'$, то общими будут лишь концевые точки.

5.10. Фиксируем точку p на S^{r-1} и для каждой точки q на S^{n-r-1} обозначим через q_1 середину той дуги pq большого круга, о которой говорилось в упражнении 5.9. Покажите, что если точка p фиксирована, а q пробегает всю сферу S^{n-r-1} , то объединение дуг pq_1 образует $(n-r)$ -мерную клетку. Выведите отсюда, что множество точек сферы S^{n-1} , удаленных от S^{r-1} на угловое расстояние $\leq \pi/4$, представляется в виде $S^{r-1} \times E^{n-r}$, где E^{n-r} есть $(n-r)$ -мерная клетка.

5.11. Выполните из предыдущего упражнения, что S^{n-1} можно представить как объединение множеств $S^{r-1} \times E^{n-r}$ и $E^r \times S^{n-r-1}$. Заметим, что эти множества имеют в S^{n-1} общую границу, а именно $S^{r-1} \times S^{n-r-1}$. Все это можно выразить по-другому, сказав, что сфера S^{n-1} является объединением пространств $S^{r-1} \times E^{n-r}$ и $E^r \times S^{n-r-1}$, в котором каждая точка (p, q) из $S^{r-1} \times S^{n-r-1} = S^{r-1} \times (\text{граница } E^{n-r})$ отождествляется с точкой (p, q) из $S^{r-1} \times S^{n-r-1} = (\text{граница } E^r) \times S^{n-r-1}$.

5.12. У предыдущего упражнения имеется другой вариант. На этот раз надо показать, что сфера S^{n-1} разлагается в объединение трех множеств A , B , C , где A является множеством точек, удаленных на угловое расстояние $\leq \pi/6$ от S^{r-1} , и представляется в виде $S^{r-1} \times E^{n-r}$, B является множеством точек, удаленных на угловое расстояние $\leq \pi/6$ от S^{n-r-1} , и представляется в виде $E^r \times S^{n-r-1}$, а C есть множество точек, удаленных на угловое расстояние $\geq \pi/6$ от S^{r-1} и на расстояние $\geq \pi/6$ от S^{n-r-1} ; оно представляется в виде $S^{r-1} \times S^{n-r-1} \times I$, где I — интервал (например, интервал $(0; 1)$). В этом разложении точка $(p, q) \in A$ с $q \in S^{n-r-1} = \text{граница } E^{n-r}$ отождествляется с точкой $(p, q, 1)$ в C , а точка $(p, q) \in B$ с $p = S^{r-1} = \text{граница } E^r$ отождествляется с точкой $(p, q, 0)$ в C .

Отметим, что такое разложение сферы S^{n-1} соответствует описанному выше разложению сферы S^2 (рис. 5.3); однако S^2 в том примере появлялась не как поверхность единичного шара, а как множество, связанное с семейством поверхностей второго порядка. Сейчас мы воспроизведем эту ситуацию в общем случае.

5.13. Рассмотрим в n -мерном пространстве семейство гиперповерхностей второго порядка

$$(17) \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \dots - x_n^2 = c,$$

где $-1 \leq c \leq 1$.

Заметим, что сферы S^{r-1} и S^{n-r-1} из упражнения 5.9 лежат на гиперповерхностях этого семейства с параметрами $c = 1$ и $c = -1$ соответственно. Проверьте, что луч, направленный из начала координат в любую точку на каждой из сфер S^{r-1} , S^{n-r-1} , образует угол $\geq \pi/4$ с любой прямой на конусе

$$x_1^2 + \dots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \dots - x_n^2 = 0.$$

Отсюда следует, что множества A и B из упражнения 5.12 гомеоморфно проектируются из начала координат на некоторые куски гиперповерхностей (17) с параметрами $c = 1$ и $c = -1$ соответственно. Обозначим это проектирование через π . Пусть p и q — две точки на границах множеств A и B соответственно, соединенные одной из тех дуг большого круга, объединение которых дает множество C . Обозначив эту дугу через α , проверьте, что точки $\pi(p)$ и $\pi(q)$ лежат на одной гиперболической дуге β , которая является одной из ортогональных траекторий семейства (17), и что α проектируется из начала координат в дугу β .

Таким образом, существует гомеоморфный образ сферы относительно проектирования π , который является объединением трех множеств $\pi(A)$, $\pi(B)$, $\pi(C)$, причем $\pi(A)$ и $\pi(B)$ лежат на двух гиперповерхностях семейства (17) с параметрами $c = 1$ и $c = -1$ соответственно, а $\pi(C)$ есть объединение дуг ортогональных траекторий семейства (17).

5.14. Выведите из двух последних упражнений, что на n -мерной клетке E^n (с границей $\pi(S^{n-1})$) существует такая гладкая функция f , что $f = 0$ на $\pi(A)$, $f = 1$ на $\pi(B)$ и $f = t$ на подмножестве $\pi(S^{r-1} \times S^{n-r-1} \times \{t\})$ из $\pi(C) = \pi(S^{r-1} \times S^{n-r-1} \times I)$.

5.5. Окрестность критического уровня; итоги

Все результаты, необходимые для описания окрестности критического уровня гладкой функции, к настоящему моменту уже получены, и в этом разделе мы просто соберем их вместе.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть M — гладкое многообразие размерности n , f — гладкая функция на M , и пусть

в обозначениях определения 5.1 M_c — критический уровень функции f , на котором лежит одна невырожденная критическая точка P . Пусть M_a и M_b — некритические уровни функции f , причем $a < c < b$ и M_c — единственный критический уровень между a и b . Тогда точка P имеет окрестность E^n в M , которая является n -мерной клеткой и граница S^{n-1} которой есть объединение трех множеств A , B , C ¹⁾. Множество A лежит на уровне M_a и диффеоморфно произведению $S^{r-1} \times E^{n-r}$ (для некоторого r); B лежит на уровне M_b и диффеоморфно $E^r \times S^{n-r-1}$; наконец, C заключено между уровнями M_a и M_b и может быть представлено как $S^{r-1} \times S^{n-r-1} \times I$. При этом каждая точка $(p, q) \in A$, где $p \in S^{r-1}$ и $q \in S^{n-r-1}$ = граница E^{n-r} , отождествляется с точкой $(p, q, 0)$ на C , а каждая точка (p, q) на B , где $p \in S^{r-1}$ = граница E_r и $q \in S^{n-r-1}$, отождествляется с точкой $(p, q, 1)$ на C .

Кроме того, если мы выкинем клетку E^n из части M , заключенной между M_a и M_b , то оставшееся множество можно представить в виде $(M_a \setminus A) \times I$, где $(M_a \setminus A) \times \{0\}$ отождествляется с $M_a \setminus A$, а $(M_a \setminus A) \times \{1\}$ — с $(M_a \setminus B)$.

Доказательство. Из упражнения 5.4 следует, что достаточно доказать теорему 5.1 для значений a и b , близких к c ; насколько близких — это мы выясним в ходе доказательства.

Начнем с того, что возьмем окрестность U точки P , такую, как в разд. 5.3, и построим «подправленное» семейство F' (почти) ортогональных траекторий для многообразий уровня функции f . Вспомним, что в меньшей окрестности U' точки P эти траектории совпадают с траекториями семейства $\varphi^{-1}(F_0)$, где φ — отображение, определенное в разд. 5.3, а F_0 — семейство ортогональных траекторий, построенное для горизонтальных сечений гиперповерхности в $(n+1)$ -мерном пространстве, заданной уравнением

$$z = \sum c_i y_i^2,$$

1) S^{n-1} — не гладкое многообразие, хотя A , B , C гладкие; см. рис. 5.2. — Прим. ред.

в котором все c_i равны ± 1 . Согласно упражнению 5.5, при проектировании на пространство $z = 0$ семейство F_0 переходит в ортогональные траектории семейства

$$\sum c_i y_i^2 = c.$$

Изменяя, если это необходимо, масштаб координат y_i , мы можем считать, что клетка E^n из упражнения 5.14 лежит в образе окрестности U' при отображении ϕ . Обозначим через E^n прообраз этой клетки в M . Это и есть искомая клетка, существование которой утверждает теорема 5.1, если только некритические уровни M_a и M_b подобраны так, чтобы их части, лежащие в U' , попадали при отображении ϕ на гиперповерхности семейства (18) с параметрами $c = -1$ и $c = 1$ соответственно.

Действительно, перенося на M свойства, описанные в упражнении 5.13, мы видим, что граница клетки E^n удовлетворяет всем требованиям нашей теоремы.

Чтобы проверить, что часть многообразия M , заключенная между M_a и M_b , после исключения клетки E^n допускает представление в виде $(M_a \setminus A) \times I$, нужно воспользоваться дугами семейства F' , которые начинаются в $M_a \setminus A$ (и согласно предыдущему, кончаются в $M_b \setminus B$). Это завершает доказательство теоремы.

Дальнейшую информацию для более точного описания можно извлечь из упражнения 5.9; из результатов этого упражнения следует, что существуют сфера S^{r-1} на M_a и сфера S^{n-r-1} на M_b , такие, что все кривые семейства F' , выходящие из $M_a \setminus S^{r-1}$, приходят в $M_b \setminus S^{n-r-1}$ (и наоборот), в то время как кривые семейства F' , проходящие через S^{r-1} или S^{n-r-1} , все оканчиваются в точке P . Таким образом, M содержит две клетки E^r и E^{n-r} , края которых лежат на M_a и M_b соответственно и которые пересекаются в единственной точке — точке P .

Наконец отметим, что S^{r-1} имеет в M_a окрестность вида $S^{r-1} \times E^{n-r}$, а S^{n-r-1} — окрестность в M_b вида $S^{n-r-1} \times E^r$.

§ 6. СФЕРИЧЕСКИЕ ПЕРЕСТРОЙКИ

6.1. Введение

В этом параграфе мы рассмотрим изложенный в предыдущем параграфе материал с другой точки зрения. Отправным пунктом предыдущего параграфа было компактное гладкое многообразие M с краем $M_0 \cup M_1$. На M была задана гладкая функция f , или, что равносильно, было задано вложение многообразия M в евклидово пространство, и мы изучали окрестности критических и некритических уровней. Здесь же мы сконцентрируем наше внимание на том, как меняются многообразия уровней функции f , начиная с M_0 и кончая M_1 .

В разделе 5.1 мы видели, что если c в своем изменении не проходит критического уровня, то многообразие M_c топологически не меняется. Поэтому, переходя от M_c к M_1 при помощи семейства уровней функции f , мы совершаляем лишь конечное число операций, каждая из которых соответствует данному критическому уровню. Одна такая операция преобразует уровень M_a , лежащий непосредственно под критическим, в уровень M_b , расположенный непосредственно над этим критическим. Всякий раз она состоит в том, что мы выкидываем окрестность сферы, лежащей в M_a (окрестность A в обозначениях теоремы 5.1) и заменяем ее окрестностью сферы другой размерности (окрестностью B в тех же обозначениях). Исследование таких операций является основной целью настоящей главы.

6.2. Прямое вложение

Мы введем определения, которые, как уже отмечалось, полностью основываются на результатах, сформулированных в теореме 5.1; однако нам придется изменить обозначения. Рассматриваемое здесь многообразие M соответствует некритическому уровню функции f в теореме 5.1.

Итак, пусть M есть n -мерное гладкое многообразие, и пусть N — подмногообразие размерности r . Возьмем точку p на N и выберем локальную систему координат в окрестности этой точки, удовлетворяю-

щую условиям определения 3.1. Предположим, что соответствующая координатная окрестность U (точнее, ее образ в евклидовом пространстве) определена неравенствами $|x_i| \leq \delta$ ($i = 1, 2, \dots, n$); тогда U можно считать топологическим произведением $V \times F$, где $V = U \cap N$ — окрестность точки p в N , а F — окрестность начала координат в $(n-r)$ -мерном евклидовом пространстве с координатами $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$, задаваемая неравенствами $|x_i| \leq \delta$, $i = r+1, \dots, n$.

Множества вида $\{q\} \times F \subset V \times F$ представляют собой $(n-r)$ -мерные клетки, каждая из которых пересекает многообразие N ровно в одной точке. Поэтому можно представлять себе U как объединение слоев, каждый из которых является $(n-r)$ -мерной клеткой и пересекает многообразие N в одной точке. Объединение координатных окрестностей только что описанного типа мы будем называть трубчатой окрестностью подмногообразия N в M ¹). Можно показать (однако здесь нам это не понадобится), что трубчатую окрестность в целом можно представить как объединение $(n-r)$ -мерных клеток, каждая из которых пересекает подмногообразие N в одной точке; другими словами, можно добиться того, чтобы слои в пересекающихся координатных окрестностях совпадали на пересечениях. Здесь нам особенно важен один случай — тот, в котором трубчатая окрестность N диффеоморфна произведению $N \times F$, где F есть $(n-r)$ -мерная клетка.

Определение 6.1. При выполнении этого условия мы будем говорить, что многообразие N *прямое вложение* в M ²).

¹⁾ Это довольно небрежная формулировка; точная формулировка имеется в [17], стр. 105. Она сводится к некоторому уточнению того, о чём говорит Уоллес в следующей фразе. — Прим. ред.

²⁾ Кроме данной книги, я нигде не встречал такой терминологии. Читатель, проработавший книгу Милнора, поймет, что интересующее нас свойство означает, что N допускает оснащение в M (см. § 7), а также что N имеет тривиальное (т. е. сводящееся к прямому произведению) нормальное расслоение (см. задачу 11). Так обычно и говорят, но ввиду элементарности книги Уоллеса он вынужден был изобрести название попроще. — Прим. ред.

Примеры. 6.1. Пусть N — окружность $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ в трехмерном евклидовом пространстве, а M — само трехмерное пространство. Окружность N , конечно, является подмногообразием в M . Пусть B — сплошной тор, средняя линия которого есть N (см. рис. 6.1). Пусть F — часть сечения тора B плоскостью $y = 0$, расположенная в полупространстве $x > 0$. Множество F представляет собой круг,

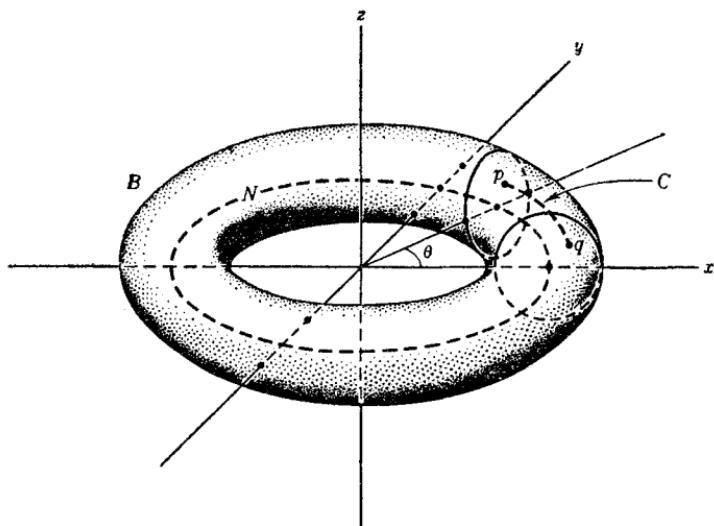


Рис. 6.1. Трубчатая окрестность окружности S^1 в E^3 как прямое произведение.

т. е. двумерную клетку. Теперь возьмем произвольную точку $p \in B$ и проведем плоскость через точку p и ось z . Эта плоскость образует некоторый угол θ с плоскостью (x, z) . Его, конечно, можно принять за координату на N . Проведем через точку p окружность C , параллельную плоскости (x, y) , и пусть $q \in F$ — точка, в которой C пересекает круг F . Нетрудно видеть, что так получается представление тора в виде произведения $N \times F$: точке p соответствует пара (θ, q) . Следовательно, N прямо вложено в M .

6.2. Теперь мы приведем пример непрямо вложенного многообразия. Пусть M — проективная плоскость (пример 2.6). Мы видели, что это пространство можно представить как полусферу, у которой отождествляются противоположные точки края. В качестве N возьмем окружность, полученную склеиванием концов некоторой большой полуокружности на полусфере. Легко видеть, что N является подмногообразием в M .

Трубчатую окрестность B для N в M мы построим сначала на полусфере, где она будет полосой, средняя линия которой совпадает с N . Очевидно, B можно представить как объединение слоев, которые являются одномерными клетками и пересекают N : слоями являются дуги окружностей на полусфере, пересекающие N под прямым углом. Однако отождествление противоположных точек на границе означает, что для получения окрестности B мы перед склеиванием должны повернуть концы полосы друг относительно друга на полоборота. Поэтому B является листом Мёбиуса. Можно показать, что он не гомеоморфен произведению $N \times F$, где F — одномерная клетка. Поэтому вложение N в M не является прямым.

Последний пример иллюстрирует явление, которое заслуживает дальнейшего изучения и приводит к важному различию между двумя типами многообразий. Существование непрямого вложения (как в примере 6.2) означает, что когда мы, двигаясь вдоль окружности, возвращаемся в исходную точку, многообразие каким-то образом перекручивается. Так, окрестность окружности в примере 6.2 — это закрученная полоса. Такого закручивания не происходит, если каждая окружность на многообразии является прямо вложенной окружностью.

Определение 6.2. Пусть M — гладкое многообразие. Если каждая окружность, лежащая как подмногообразие в M , является прямо вложенным подмногообразием, то мы будем говорить, что многообразие M *ориентируемо*. В противном случае будем говорить, что M *неориентируемо*.

Это определение эквивалентно другим, чаще встречающимся в литературе¹⁾; однако оно больше подходит для наших целей, так как мы будем использовать понятие именно в таком виде.

Пример 6.3. Сфера ориентируема, а проективная плоскость — нет.

В параграфе 7 мы дадим полную классификацию двумерных компактных многообразий. А именно, каждое такое многообразие гомеоморфно либо сфере с некоторым числом p ручек, либо сфере с некоторым числом k дырок, в каждой из которых отождествлены диаметрально противоположные точки краев. Пример первого типа дает тор, для которого $p = 1$, а пример второго типа — проективная плоскость, для которой $k = 1$. Многообразия первого типа ориентируемы, а второго — неориентируемы. Второе

¹⁾ См. Милнор, стр. 211—212; эквивалентность яствует из сказанного в списке на стр. 246.

Для дальнейшего полезно иметь представление также о связанный с этим понятием *ориентацией*. Точное определение для общего случая см. у Милнора, стр. 211; мы ограничимся наглядным описанием для двух частных случаев — окружности и двумерного многообразия. Задать ориентацию на окружности — это значит принять одно из двух направлений обхода по ней за положительное. Задать ориентацию двумерного многообразия — это значит указать правило, которое для каждого маленького кружочка (лежащего на многообразии) устанавливает, какое направление вращения на ограничивающей его окружности считается положительным, причем требуется, чтобы при непрерывном перемещении кружочка по многообразию направление вращения не менялось.

Ориентируемое многообразие — это такое многообразие, на котором можно задать ориентацию. Если в непересекающихся окрестностях U_a и U_b двух разных точек a и b многообразия M мы задали какие-то ориентации, то в том случае, когда M ориентируемо, имеют смысл высказывания: «эти две ориентации совпадают», «эти две ориентации противоположны». Когда же M неориентируемо, эти высказывания не имеют смысла: если с целью сравнения ориентаций мы будем «передвигать» b к a , «тяня» вслед за b ее окрестность вместе с введенной там ориентацией, пока эта окрестность не пересечется с U_a (тогда ориентации можно будет сравнивать непосредственно), то результат будет зависеть от пути, по которому будет двигаться b . — Прим. ред.

утверждение доказать легко, так как дуга на сфере с k дырками, соединяющая диаметрально противоположные точки края одной из дырок, после отождествления превращается в непрямо вложенную окружность. Чтобы показать, что сфера с p ручками ориентируема, реализуем ее как поверхность в трехмерном пространстве (см. рисунки в параграфе 7), возьмем на ней окружность S ,ложенную как подмногообразие, и рассмотрим трубчатую окрестность B этой окружности. Фиксируем на S какое-нибудь из двух направлений и выпустим из каждой точки S касательную прямую, отметив на ней это направление. Затем возьмем касательную к поверхности в точке p , которая перпендикулярна к S , и отметим на ней направление так, чтобы эта прямая вместе с направленной касательной и внешней нормалью к поверхности давала правостороннюю систему координат. Это определяет в каждой точке $p \in S$ положительное направление на перпендикуляре к S в B и тем самым превращает B в произведение $S \times I$.

Можно показать (но здесь мы этого делать не будем), что определение ориентируемости допускает формулировку в терминах локальных систем координат. Точнее, многообразие M ориентируемо тогда и только тогда, когда существует такое его покрытие координатными окрестностями, что для любых двух пересекающихся окрестностей якобиан соответствующего преобразования координат положителен.

Упражнение 6.1. Покажите, что шесть координатных окрестностей на S^2 в примере 2.6 удовлетворяют приведенному выше условию, если координаты в каждой из этих окрестностей брать в должном порядке.

6.3. Определение перестроек

Сейчас мы определим понятие сферической перестройки. Пусть M есть n -мерное гладкое многообразие, и предположим, что S^r — некоторая r -мерная сфера, которая является прямо вложенным подмногообразием в M . Для краткости мы будем называть ее прямо вложенной сферой. Таким образом, S^r

имеет в M окрестность B , диффеоморфную произведению $S^r \times E^{n-r}$, где E^{n-r} есть $(n-r)$ -мерная клетка. Тогда граница B есть многообразие $S^r \times S^{n-r-1}$, поэтому, выкидывая из M внутренность B , мы получаем многообразие с краем, причем край является произведением $S^r \times S^{n-r-1}$. С другой стороны, $S^r \times S^{n-r-1}$ является также краем многообразия $E^{r+1} \times S^{n-r-1}$. Значит, можно составить объединение $M \setminus \text{Int } B$ и $E^{r+1} \times S^{n-r-1}$, отождествив края, как объяснялось в разд. 2.7, причем это можно сделать так, чтобы в результате получилось гладкое многообразие M' .

Определение 6.3. Мы будем говорить, что M' получается из M *сферической перестройкой типа r* (r — это размерность сферы, окрестность которой удаляется из M)¹⁾.

Примеры. 6.4. Пусть M — двумерная сфера. Рассмотрим нульмерную сферу $S^0 \subset M$ (рис. 6.2). Она имеет окрестность, состоящую из двух непересекающихся кругов. Эту окрестность можно представить в виде $S^0 \times E^2$, так что вложение S^0 в M прямое. Обозначим ее через B . Тогда $M \setminus \text{Int } B$ представляет собой сферу с двумя дырками. $E^1 \times S^1$ есть цилиндр, и если подклейть его края к окружностям, образованным краями дырок, то мы получим сферу с одной ручкой, то есть просто тор. Таким образом, тор получается из двумерной сферы сферической перестройкой типа 0.

6.5. Чтобы получить другой пример сферической перестройки, рассмотрим обратную операцию: пусть M — тор, а S^1 — окружность, изображенная на рис. 6.3. S^1 имеет окрестность в M вида $S^1 \times E^1$ — это опоясывающая тор полоса. После удаления внутренности этой полосы то, что осталось, имеет границу $S^1 \times S^0$. Такую же границу имеет пара непересекающихся кругов $E^2 \times S^0$, и если подклейть их по этой границе, то получится сфера M' . Таким образом,

¹⁾ Сферические перестройки называют также *перестройками Морса*. — Прим. ред.

сфера получается из тора сферической перестройкой типа 1.

Приведенные выше примеры перестраивания сферы в тор, а затем обратно в сферу иллюстрируют со-

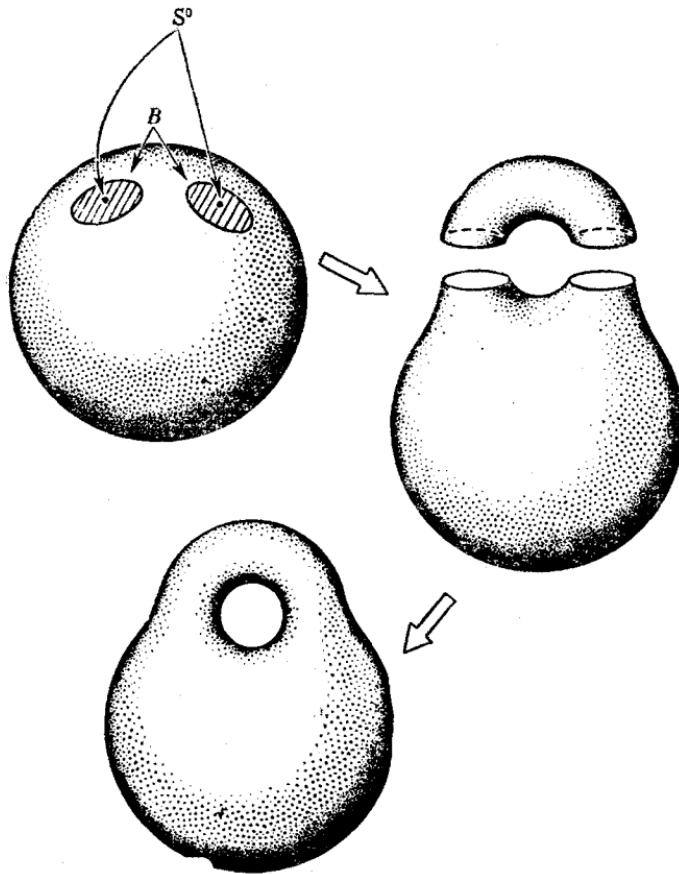


Рис. 6.2. Тор получается из сферы с помощью сферической перестройки.

вершенно общую ситуацию: если M' получается из M сферической перестройкой, то M тоже можно получить из M' сферической перестройкой. Действительно, предположим, что M' получится из M , если

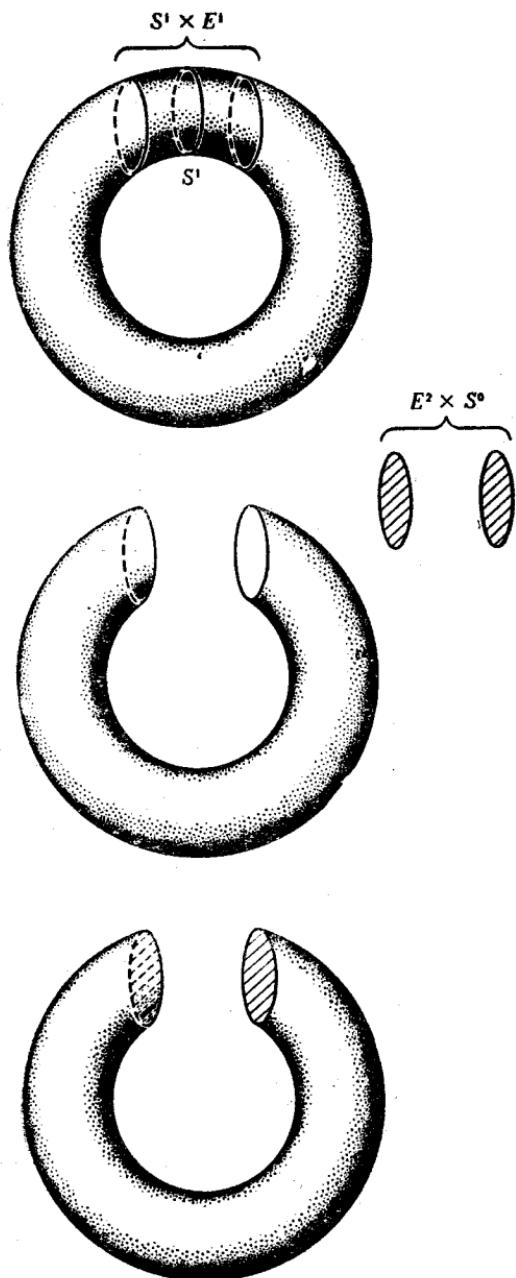


Рис. 6.3. Сфера (внизу) получается из тора (наверху) с помощью сферической перестройки. Сфера имеет вид изогнутого цилиндра, основания которого заклеены кругами.

удалить трубчатую окрестность $S^r \times E^{n-r}$ сферы S^r и заменить ее на $E^{r+1} \times S^{n-r-1}$. В этом случае $E^{r+1} \times S^{n-r-1}$ содержит сферу $\{p_0\} \times S^{n-r-1}$, где p_0 — какая-то внутренняя точка клетки E^{r+1} . Отсюда следует, что M' содержит сферу $\{p_0\} \times S^{n-r-1}$ и что эта сфера имеет в M' трубчатую окрестность $E^{r+1} \times S^{n-r-1}$; поэтому вложение этой сферы в M' прямое. Теперь для получения M из M' следует удалить трубчатую окрестность сферы $\{p_0\} \times S^{n-r-1}$ и заменить ее на $S^r \times E^{n-r}$. Эта сферическая перестройка имеет тип $n - r - 1$.

Пример 6.6. Общий тип примеров можно извлечь из теоремы 5.1: если W — гладкое многообразие, а f — гладкая функция на W и если M и M' — многообразия уровня функции f , отделенные друг от друга лишь одним критическим уровнем, на котором лежит лишь одна и притом невырожденная критическая точка, то M' получается из M сферической перестройкой.

6.4. Пленка, реализующая перестройку

Пример 6.6 показывает, как, имея функцию с одной критической точкой, получить сферическую перестройку. Теперь мы покажем, что таким способом можно получить любую сферическую перестройку. Идея состоит в том, чтобы из пары многообразий, связанных между собой сферической перестройкой, соорудить многообразие с краем и построить на нем функцию, для которой исходные многообразия будут многообразиями уровня, разделенными одним критическим уровнем. Как это сделать, подсказывает наше знакомство с тем, как должна была бы выглядеть окрестность критического уровня.

Следующий пример даст нам ключ к пониманию конструкции в общем случае.

Пример 6.7. В примере 6.4 мы видели, что тор M_1 получается из сферы M_0 перестройкой типа 0. Удаляемое из M_0 множество $\text{Int } B_0$ состоит из двух непересекающихся открытых кругов, так что

$M_0 \setminus \text{Int } B_0$ есть сфера с двумя отверстиями. Для наших целей удобнее представлять себе $M_0 \setminus \text{Int } B_0$ как поверхность цилиндра, которая изогнута дугой, как

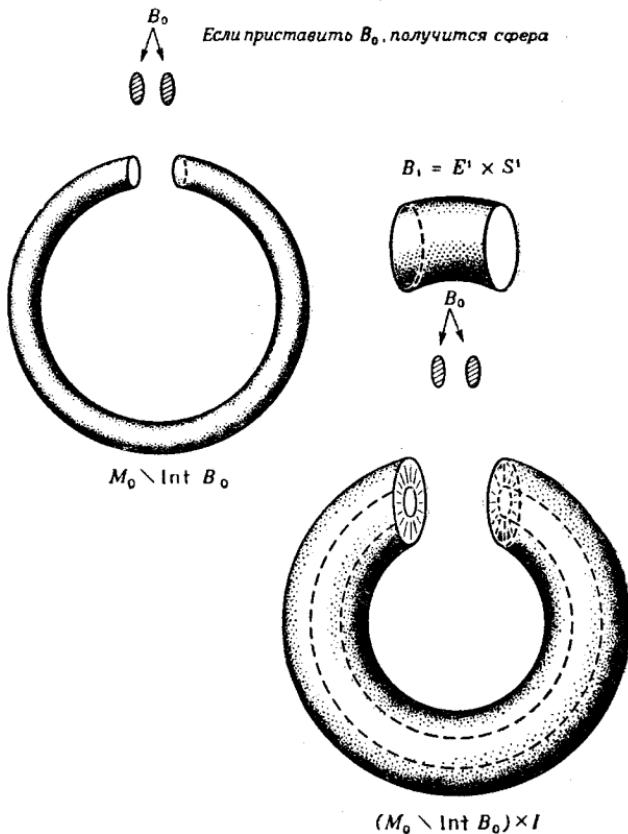


Рис. 6.4. При добавлении B_0 к внутренней поверхности изогнутого утолщенного цилиндра $(M_0 \setminus \text{Int } B_0) \times I$ получается сфера; при добавлении B_1 к его внешней поверхности получается тор.

показано на рис. 6.4. Тогда $(M_0 \setminus \text{Int } B_0) \times I$ будет утолщением поверхности цилиндра. Как показывает рис. 6.4, основания этого цилиндра составлены из радиальных отрезков, каждый из которых из \mathbb{R}^3 вид

$\{p\} \times I$, где p лежит на границе множества $M_0 \setminus \text{Int } B_0$. Объединение оснований цилиндра можно, конечно, представить как $S^0 \times S^1 \times I$. Примем внутреннюю поверхность цилиндра, т. е. $(M_0 \setminus \text{Int } B_0) \times \{0\}$, за $M_0 \setminus \text{Int } B_0$, а внешнюю, т. е. $(M_0 \setminus \text{Int } B_0) \times \{1\}$, — за $M_1 \setminus \text{Int } B_1$. Множество B_0 состоит из двух кругов, в то время как B_1 представляет собой цилиндр $S^1 \times E^1$. По-

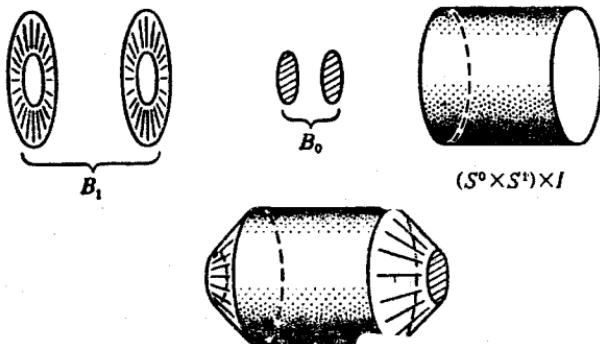


Рис. 6.5. Из множества B_0 , B_1 и $(S^0 \times S^1) \times I$ (наверху) составлена двумерная сфера (внизу); она является краем трехмерной клетки.

этому внутренняя поверхность цилиндра $(M_0 \setminus \text{Int } B_0) \times I$ превращается в сферу, если возвратить на место B_0 , а внешняя поверхность превращается в тор, если добавить к ней B_1 .

Рассмотрим, с другой стороны, трехмерную клетку E^3 с границей S^2 , которая разложена в объединение трех множеств $S^0 \times E^2$, $S^1 \times E^1$ и $S^0 \times S^1 \times I$; на самом деле это множества A , B и C из упражнения 5.12 (рис. 6.5). Заметим, что эти три множества можно отождествить соответственно с B_0 , B_1 и основанием утолщенного цилиндра $(M_0 \setminus \text{Int } B_0) \times I$. При этом радиальные отрезки на основаниях цилиндра взаимно однозначно отождествляются с дугами больших кругов, из которых составляется множество $(S^0 \times S^1) \times I$ на поверхности S^2 . Поэтому, если отождествить множество $(S^0 \times S^1) \times I$ на поверхности клетки E^3 с соответствующим множеством на осно-

ваниях утолщенного цилиндра, то получится сплошное тело M , причем B_0 и B_1 автоматически попадут на нужное место, образовав внутреннюю границу M_0 и внешнюю границу M_1 .

Из этого построения вытекает дальнейшая информация. В упражнении 5.14 мы видели, что на трехмерной клетке E^3 существует гладкая функция f со следующими свойствами. На границе S^2 клетки E^3 функция принимает такие значения: 0 на множестве $B_0 = S^0 \times E^2$, 1 на множестве B_1 и t на подмножестве $(S^0 \times S^1) \times \{t\}$ множества $S^0 \times S^1 \times I$. В остальных точках клетки E^3 функция f принимает значения между 0 и 1, а в центре клетки она имеет свою единственную критическую точку. Ясно, что теперь можно продолжить функцию f на все многообразие M , полагая $f = t$ в точках множества $(M_0 \setminus \text{Int } B_0) \times \{t\}$ из $(M_0 \setminus \text{Int } B_0) \times I$. Если $(M_0 \setminus \text{Int } B_0) \times I$ и E^3 уже подогнаны друг к другу так, что получилось гладкое многообразие, то f будет гладкой функцией, которая равна 0 на M_0 , 1 на M_1 и имеет в точности одну невырожденную критическую точку в центре клетки E^3 .

Теперь, имея перед собой этот пример, мы можем провести соответствующее построение в общем случае. Пусть M_0 — гладкое многообразие размерности n , и пусть M_1 получается из M_0 сферической перестройкой типа r . Эта перестройка производится путем удаления из M_0 множества B_0 , диффеоморфного трубчатой окрестности $S^r \times E^{n-r}$ прямо вложенной сферы S^r , и последующей замены этого множества множеством $B_1 = E^{r+1} \times S^{n-r-1}$. Чтобы построить M , мы начнем, следуя образцу предыдущего примера, с произведения $(M_0 \setminus \text{Int } B_0) \times I$. Часть границы этого произведения имеет вид $(S^r \times S^{n-r-1}) \times I$. С другой стороны, границу S^n n -мерной клетки E^{n+1} можно представить как объединение $A \cup B \cup C$ (см. упражнение 5.12), в котором $A = S^r \times E^{n-r}$, $B = E^{r+1} \times S^{n-r-1}$, а $C = (S^r \times S^{n-r-1}) \times I$. Образуем теперь объединение $(M_0 \setminus \text{Int } B_0) \times I$ и E^{n+1} , отождествляя подмножества $S^r \times S^{n-r-1} \times I$, которые встречаются в обоих слагаемых. Это автоматически возвратит на

место $A = B_0$ в $M_0 \setminus \text{Int } B_0$, восстановив опять M_0 , и вставит $B = B_1$ в $M_1 \setminus \text{Int } B_1$, образовав M_1 , так что мы получим многообразие M , край которого есть несвязное объединение¹⁾ M_0 и M_1 .

Далее, мы построим на M функцию f так же, как в трехмерном примере. Возьмем функцию f на клетке E^{n+1} , полученную в упражнении 5.14. На сфере, ограничивающей клетку E^{n+1} , имеем: $f = 0$ на A , $f = 1$ на B , а на C функция f принимает значение t на множестве $S^r \times S^{n-r-1} \times \{t\}$. Кроме того, f имеет ровно одну невырожденную критическую точку в центре клетки E^{n+1} . Тогда эту функцию можно продолжить на все многообразие M , полагая ее равной t на множестве $(M_0 \setminus \text{Int } B_0) \times \{t\}$ в $(M_0 \setminus \text{Int } B_0) \times I$.

Если соединить $(M_0 \setminus \text{Int } B_0) \times I$ и E^{n+1} надлежащим образом, то M будет гладким многообразием, а f — гладкой функцией. На множестве $(M_0 \setminus \text{Int } B_0) \times I$ значение функции f совпадает со значением параметра t интервала I , а этот параметр всегда можно принять за одну из локальных координат, так что по лемме 4.3 функция f не имеет критических точек в этом множестве. Другими словами, имеется лишь одна невырожденная критическая точка индекса $r+1$ в центре клетки E^{n+1} .

В итоге мы получаем следующий результат.

Теорема 6.1. *Пусть M_1 получается из M_0 сферической перестройкой типа r . Тогда существует гладкое многообразие M , край которого есть несвязное объединение M_0 и M_1 , и гладкая функция f на M , которая равна нулю на M_0 и единице на M_1 ; в остальных точках она принимает значения между 0 и 1 и имеет ровно одну невырожденную критическую точку индекса $r+1$.*

Повторное применение этой теоремы дает следующий результат:

¹⁾ Прилагательное «несвязное» призвано подчеркнуть, что M_0 и M_1 не пересекаются; тогда объединение, действительно, не может быть связным. — Прим. ред.

Теорема 6.2. Пусть M_1 получается из M_0 конечным числом сферических перестроек. Тогда существует гладкое многообразие M , край которого является несвязным объединением $M_0 \cup M_1$, и гладкая функция f на M , которая равна 0 на M_0 , 1 на M_1 , в остальных точках принимает значения между 0 и 1 и имеет критические точки, соответствующие всем произведенным перестройкам.

Определение 6.4. Построенное в этой теореме многообразие мы будем называть *пленкой*, реализующей последовательность сферических перестроек, превращающих M_0 в M_1 .

Для удобства терминологии мы введем еще одно определение. Пусть перестройка ϕ , превратившая M_0 в M_1 , состояла в удалении окрестности сферы S^r в M_0 . Тогда, рассматривая на пленке, реализующей ϕ , ортогональные траектории семейства уровней соответствующей функции f (в обозначениях теоремы 6.1), мы видим, что те траектории, которые начинаются в точках сферы S^r , все кончаются в критической точке функции f (см. упражнение 5.8). Таким образом, когда мы идем от M_0 к M_1 по семейству уровней функции f , сфера S^r стягивается по ортогональным траекториям в точку, а затем, когда мы, пройдя критический уровень, продолжаем двигаться дальше, появляется сфера S^{n-r-1} , которая раздувается из критической точки вдоль ортогональных траекторий, пока не достигнет уровня M_1 . Поэтому удобно говорить, что перестройка ϕ *стягивает* сферу S^r и что при этой перестройке *возникает* сфера S^{n-r-1} .

6.5. Бордантовые многообразия

Содержание теоремы 6.2 можно выразить и по-другому — в терминах отношения между многообразиями, известного под названием *бордантности*¹⁾.

¹⁾ В терминологии имеется некоторый разнобой, о чем говорится в прим. ред. на стр. 232. Сам Уоллес пользуется редко употребляющимся термином «соограничивающие многообразия». — Прим. ред.

Определение 6.5. Два гладких компактных многообразия (без края) M_0 и M_1 называются *бордантными*, если существует гладкое компактное многообразие M («пленка»), край которого есть несвязное объединение $M'_0 \cup M'_1$ двух многообразий, диффеоморфных многообразиям M_0 и M_1 соответственно. В частном случае, когда одно из исходных многообразий, скажем M_1 , пусто, второе многообразие M_0 называется *бордантным нулю*, или *ограничивающим*. (Последнее, таким образом, означает, что оно диффеоморфно краю некоторого компактного гладкого многообразия.)

Примеры. 6.8. Всякое компактное гладкое многообразие без края M_0 бордантно самому себе (за M можно взять $M_0 \times I$).

6.9. Сфера S^n — ограничивающее многообразие, так как она является границей шара E^{n+1} .

6.10. Сфера с p ручками M_0 является ограничивающим многообразием, так как это граница шара с p сплошными ручками.

Эти примеры могут показаться довольно тривиальными; однако нетривиальный пример придумать нелегко. Вообще признак, позволяющий для пары многообразий определить, бордантны они или нет, очень сложен, и мы не будем приводить его здесь. Однако можно сформулировать следующий результат.

Теорема 6.3. *Компактные гладкие многообразия M_0 и M_1 бордантны тогда и только тогда, когда одно из них можно получить из другого конечным числом сферических перестроек.*

Доказательство. Если дано, что M_0 и M_1 бордантны, т. е. сказано, что их несвязное объединение¹⁾ есть край многообразия M , то по теореме 4.2 существует функция f на M , которая равна 0 и 1 на

¹⁾ Следовало бы сказать: «несвязное объединение некоторых многообразий, диффеоморфных M_0 и M_1 »; из примера 6.8 видно, что иногда это существенно. Однако допущенная вольность речи является достаточно распространенной и следует привыкнуть правильно (не слишком буквально) понимать текст в подобных случаях. — Прим. ред.

M_0 и M_1 соответственно и имеет лишь конечное число критических точек; все они невырождены и лежат на разных уровнях. Будем следить за множеством уровней M_c , увеличивая c от 0 до 1. Согласно упр. 5.4 и теореме 5.1, с уровнем M_c топологически ничего не происходит, если мы не проходим критический уровень, и происходит сферическая перестройка, когда мы его проходим. Последнее случается на всем пути от M_0 к M_1 лишь конечное число раз. Обратно, если M_1 получается из M_0 конечным числом сферических перестроек, то теорема 6.2 утверждает, что многообразия M_0 и M_1 бордантны.

6.6. Малые шевеления и изотопия

Если разобраться в определении сферической перестройки, то окажется, что результат этой операции зависит от сферы, которую мы стягиваем, а также от того, как представлена трубчатая окрестность этой сферы в виде произведения внутри данного многообразия. С другой стороны, первый шаг в конструкции перестройки состоял в удалении трубчатой окрестности сферы S^r . Поэтому, если бы другая сфера S'_1 имела бы ту же самую трубчатую окрестность, то результат перестройки получился бы один и тот же. Это произойдет, например, если сфера S'_1 получается из S^r небольшим смещением, таким, что S'_1 пересекает в одной точке каждую клетку-слой $\{x\} \times \times E^{n-r}$ произведения $S^r \times E^{n-r}$ (трубчатой окрестности S^r). В этом случае $S^r \times E^{n-r}$ автоматически выражается как $S'_1 \times E^{n-r}$, и поэтому получится та же самая перестройка, независимо от того, с какой сферой начать: с S^r или S'_1 . Точнее, результат M_1 перестройки, стягивающей S'_1 , будет тем же самым, что и результат перестройки, стягивающей S^r . Кроме того, нетрудно видеть, что обе эти перестройки реализуются одинаковыми пленками.

Заметим, что структура произведения на трубчатой окрестности сферы S'_1 определяется соответствующей структурой на окрестности S^r . Важно отметить,

что даже в случае, когда S^r вообще не меняется, изменение структуры произведения на трубчатой окрестности может повлиять на результат перестройки. Это обстоятельство иллюстрируется следующим простым примером.

Пример 6.11. Возьмем сферу S^2 и рассмотрим на ней 0-мерную сферу S^0 , как в примере 6.4. На самом деле существуют два способа представить окрестность сферы S^0 в виде произведения $S^0 \times E^2$, каждый из которых получается из другого изменением направления вращения на одном из кругов¹⁾. Это

¹⁾ Пусть a, b — точка сферы S^0 , U — ее трубчатая окрестность, $E^2 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$, $f: S^0 \times E^2 \rightarrow U$ — диффеоморфизм. Если на круге E^2 выбрана ориентация, т. е. установлено, какое направление вращения считается положительным — скажем, против часовой стрелки, — то диффеоморфизм f переносит эту ориентацию на клетки

$$U_a = f(\{a\} \times E^2) \quad \text{и} \quad U_b = f(\{b\} \times E^2).$$

Но ведь можно взять и другой диффеоморфизм $g: S^0 \times E^2 \rightarrow U$, а именно

$$g(a, x, y) = f(a, x, y), \quad g(b, x, y) = f(b, x, -y).$$

Он тоже переносит ориентацию круга E^2 на те же клетки. Клетка U_a будет ориентирована так же, как и раньше, но U_b — нет.

Ясно, что имеются еще две возможности. Однако читатель легко убедится, сделав соответствующий рисунок, что на результат перестройки влияет только, одинаково ли ориентированы U_a и U_b . Если ориентации U_a и U_b противоположны, то будем говорить, что перестройка *сохраняет ориентацию*, в противном случае — что она *не сохраняет ориентацию*.

Происхождение этих названий ясно из таких примеров. В примере 6.11 перестройка, сохраняющая ориентацию, переводит сферу в тор, который ориентируем, а перестройка, не сохраняющая ориентации, — в неориентируемую бутылку Клейна. Другой пример — перестройки окружностей; см. стр. 139. Перестройки, названные там закручивающими, — как раз и есть те перестройки, которые мы сейчас назвали не сохраняющими ориентации. Они переводят окружность в окружность, т. е. ориентируемость при этом сохраняется; но если на исходной окружности выбрать какое-то направление, то после перестройки на различных кусках новой окружности получатся разные направления, т. е. ориентация не сохраняется.

Заметим еще, что если перестраиваемое многообразие неориентуемо, то говорить о подобном различии между перестройками типа 0 не приходится, ибо на таком многообразии нельзя сравнивать ориентации, введенные в непересекающихся окрестностях U_a и U_b . — *Прим. ред.*

означает, что когда мы подклеиваем $S^1 \times E^1$, соответствующим образом отождествляя границы, то это отождествление можно произвести двумя способами. Первый (ориентируемый) способ описан в примере 6.4, и, применяя его, мы получим гор. Другой (неориентируемый) способ приведет к односторонней поверхности — бутылке Клейна (рис. 7.22).

Упражнение 6.2. Пусть S^r — прямо вложенная в многообразие M сфера, и пусть B — ее трубчатая окрестность. Два представления B в виде произведения $S^r \times E^{n-r}$ определяют диффеоморфизм f окрестности B на себя. Он определяется тем, что переводит точку, которой при одном представлении B в виде произведения соответствует пара (p, q) , в точку, которой при другом представлении отвечает та же пара (p, q) . Докажите, что если f можно продолжить до диффеоморфизма многообразия M на себя, то перестройки, соответствующие двум разным представлениям, приведут к одному результату и реализуются одинаковыми пленками¹⁾.

6.3. Видоизменяя предыдущее упражнение, предположим, что S^r прямо вложена в M и что B_1 и B_2 — две трубчатые окрестности, каждая из которых представлена в виде произведения $S^r \times E^{n-r}$. Тогда аналогично упражнению 6.2 определяется отображение f окрестности B_1 на B_2 . Докажите, что если f можно продолжить до диффеоморфизма многообразия M на себя, то перестройки M при помощи B_1 и B_2 приводят к одному результату и реализуются одной и той же пленкой.

6.4. Один частный случай предыдущего упражнения для нас особенно важен. Пусть S^r имеет трубчатые окрестности $B_1 \subset B_2 \subset B_3$, где $B_i = S^r \times E_i$, $i = 1, 2, 3$, а E_i — шары с центром в начале координат некоторого $(n-r)$ -мерного пространства, причем $E_1 \subset E_2 \subset E_3$. Постройте диффеоморфизм $(n-r)$ -мерного пространства на себя, который тождествен вне E_3 и переводит E_2 в E_1 .

(Указание: стройте отображение, двигая точки по радиусам к началу координат и определяя величину сдвига при помощи функции типа 'той', которая была описана в примере 2.4.)

Выведите отсюда, что существует диффеоморфизм многообразия M на себя, переводящий B_2 в B_1 .

¹⁾ Вот точная формулировка того, что требуется доказать. Пусть при первой перестройке из M получается многообразие M_1 , а W — пленка, реализующая эту перестройку; пусть при второй перестройке получается M'_1 , а W' — соответствующая пленка. Тогда существует такой диффеоморфизм $F: W \rightarrow W'$ этих пленок, что $F|M = f$. (Тем самым уже сказано, что M_1 и M'_1 диффеоморфны). — Прим. ред.

С учетом упражнения 6.3 смысл упражнения 6.4 заключается в том, что, производя перестройку, стягивающую сферу S^r , мы можем брать трубчатую окрестность этой сферы сколь угодно малой.

Только что описанным результатам можно придать более общую формулировку, однако здесь мы не будем этим заниматься.

Наиболее важной для нас является ситуация, в которой прямо вложенные сферы S_1 и S_2 получились как образы двух изотопных отображений сферы S^r в M . Это можно понимать так, что сфера S_2 получается из S_1 посредством большого смещения, однако это большое смещение разлагается в последовательность малых смещений типа тех, которые описаны в начале этого раздела¹⁾. В этом случае можно показать, что заданная структура произведения на трубчатой окрестности сферы S_1 индуцирует структуру произведения на трубчатой окрестности сферы S_2 , причем перестройки, которые соответствуют этим окрестностям и стягивают сферы S_1 и S_2 , приводят к одному результату и реализуются одинаковыми пленками. Этот результат можно получить, например, последовательным применением соответствующего результата для малых шевелений.

Существует другое обстоятельство, которое требует изучения в связи с этим кругом вопросов: надо провести сравнение между пленками, реализующими две такие последовательности перестроек, что сферы, стягиваемые в одной последовательности, получаются из сфер, стягиваемых в другой, посредством малых шевелений. Следует отметить, что недостаточно рассматривать пленки, реализующие каждую отдельно взятую перестройку; надо также уделить внимание способу, которым они склеиваются, образуя две пленки, реализующие две последовательности перестроек.

Для наших целей достаточно рассмотреть следующий частный случай. Пусть ϕ — перестройка, которая превращает M_0 в M_1 и начинается с удаления трубча-

¹⁾ Точное определение изотопии см. у Милнора (стр. 206). — Прим. ред.

той окрестности B сферы S , прямо вложенной в M_0 . Пусть ϕ' — вторая перестройка M_0 , которая начинается с удаления трубчатой окрестности B' сферы S' . Предположим, что существует такое непрерывное отображение $F: M_0 \times I \rightarrow M_0$, что его ограничение на $M_0 \times \{0\}$ тождественно отображает M_0 в себя, его ограничение на $M_0 \times \{1\}$ переводит $B' \times \{1\}$ в B , сохраняя соответствующую структуру произведения, а его ограничение на множество $M_0 \times \{t\}$ для каждого t является гомеоморфизмом. Обозначим через g ограничение отображения F на множество $M_0 \times \{1\}$. Тогда, используя метод упражнения 6.3, мы получаем гомеоморфизм G пленки W , реализующий перестройку ϕ , на пленку W' , реализующую перестройку ϕ' , причем ограничение G на M_0 равно g^{-1} . Теперь мы хотим так подправить G , чтобы сделать его ограничение на M_0 тождественным отображением.

Для этой цели определим отображение H многообразия W' на себя следующим образом. Заметим, что, поскольку многообразие M_0 является некритическим уровнем функции на W' (теорема 6.2), оно имеет в W' окрестность вида $M_0 \times I$, где $M_0 \times \{0\}$ отождествляется с M_0 (упражнение 5.2). Определим отображение H , сказав, что вне этой окрестности оно тождественно, а внутри этой окрестности задано формулой

$$H(p, t) = (F(p, 1-t), t).$$

Мы видим, что $H(p, 1) = (F(p, 0), 1) = (p, 1)$, значит, определения отображения H в $M_0 \times I$ и вне $M_0 \times I$ согласованы и вместе определяют непрерывное отображение. Кроме того, наложенные на F условия обеспечивают, что H является гомеоморфизмом. Далее, $H(p, 0) = F(p, 1) = g(p)$. Таким образом, ограничение H на M_0 совпадает с g . Отсюда следует, что отображение HG является гомеоморфизмом многообразия W на W' , ограничение которого на M_0 есть $gg^{-1} =$ тождественное отображение.

Подведем итог:

Лемма 6.1. *Пусть ϕ и ϕ' — перестройки многообразия M_0 , удовлетворяющие приведенным выше*

условиям. Тогда ϕ и ϕ' приводят к одному результату, а между реализующими их пленками существует гомеоморфизм, ограничение которого на M_0 является тождественным отображением.

Теперь мы можем приложить это к последовательности перестроек. Пусть, например, к многообразию M_0 последовательно применяются две перестройки ϕ_1 и ϕ_2 , причем перестройка ϕ_1 превращает M_0 в M_1 , а перестройка ϕ_2 превращает M_1 в M_2 . Предположим, далее, что ϕ_2 заменяется перестройкой ϕ'_2 , связанной с ϕ_2 также, как ϕ' связана с ϕ в лемме 6.1. Обозначим пленки, реализующие перестройки ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ'_2 , через W_1 , W_2 , W'_2 соответственно. Тогда последовательность перестроек ϕ_1 , ϕ_2 реализуется пленкой $W = W_1 \cup W_2$, а последовательность ϕ_1 , ϕ'_2 — пленкой $W' = W_1 \cup W'_2$, где в каждом объединении отождествляются точки M_1 . Из леммы 6.1 сразу следует, что существует гомеоморфизм пленки W на W' ; он даже тождествен на W_1 .

Тот же способ можно применить к последовательности любого числа перестроек.

Упражнение 6.5. Пусть S — сфера, прямо вложенная в M_0 , и пусть B — трубчатая окрестность сферы S , представленная в виде произведения $S \times E$. Пусть S' — вторая сфера, которая является подмногообразием в B , пересекающим каждый слой в B — клетку $s \times E$, $s \in S$ — по одной точке, а B' — трубчатая окрестность сферы S' , которая содержится в B и каждый слой которой содержитя в слое окрестности B . Докажите, что S , S' , B , B' удовлетворяют условиям леммы 6.1. Результат этого упражнения будет существенным для перегруппировки перестроек в разд. 6.8.

6.7. Приведение в общее положение

Идею, положенную в основу этого раздела, совсем легко уловить интуитивно, однако детали доказательств слишком сложны, чтобы их здесь приводить. Поэтому понятие, которое мы вводим, будет лишь разъяснено на ряде примеров.

Сначала рассмотрим две кривые на плоскости, которые пересекаются в точке p . Если чуть-чуть сместить одну или другую кривую в плоскости, то сме-

щенные кривые по-прежнему будут иметь точку пересечения вблизи p (см. рис. 6.6). С другой стороны, если одну кривую вывести из плоскости в трехмерное пространство, то пересечение пропадет. Пара кривых на плоскости, конечно, может иметь неизолированные точки пересечения. Однако если, например, две кривые имеют общую дугу, то малое смещение

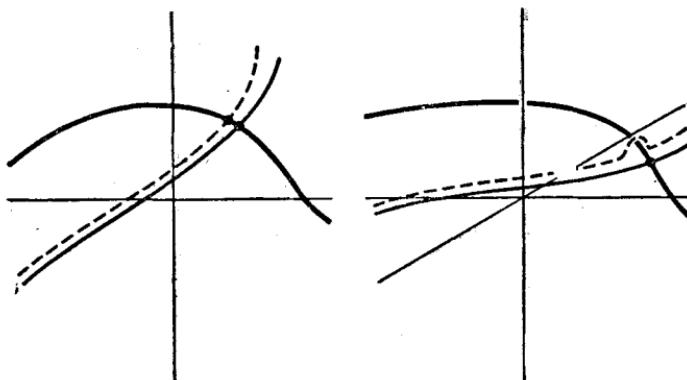


Рис. 6.6. Тонкая кривая при небольшом смещении в плоскости по-прежнему пересекает толстую кривую. Стоит ее приподнять в трехмерном пространстве, и пересечение исчезнет.

одной из них уже дает пару кривых с изолированными пересечениями (рис. 6.7). Иллюстрируемая здесь идея заключается в том, что две кривые в общем положении на плоскости имеют изолированные точки пересечения, в то время как в трехмерном пространстве они, находясь в общем положении, не имеют общих точек. Кроме того, пересечения кривых в трехмерном пространстве можно полностью устранить при помощи малых шевелений.

Чтобы увидеть, какую роль играет во всем этом размерность, следует представлять себе, что точки на плоскости имеют две степени свободы; чтобы зафиксировать точку, необходимо задать две ее координаты. Но точка на кривой имеет лишь одну степень

свободы, так что условие лежать на кривой поглощает одну степень свободы. Условие лежать на двух кривых, таким образом, поглощает две степени свободы. Следовательно, в общем случае множество точек пересечения двух кривых не должно иметь ни одной степени свободы и потому должно состоять из изолированных точек. С другой стороны, точка в трехмерном пространстве имеет три степени свободы, в то время как если она обязана лежать на кривой, то

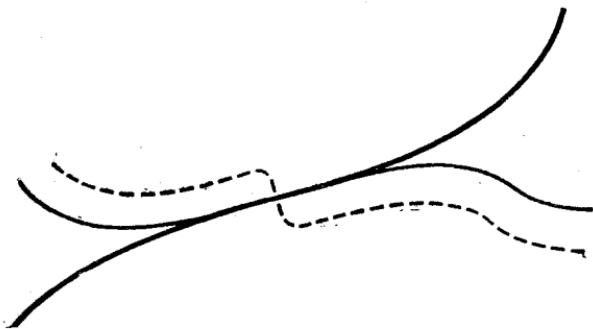


Рис. 6.7. Путем малого шевеления кривых на плоскости можно добиться, чтобы они пересекались в изолированных точках.

она будет иметь лишь одну степень свободы. Поэтому условие лежать на кривой в трехмерном пространстве поглощает две степени свободы. Условие лежать на двух кривых поглотит четыре степени свободы, но так как их на самом деле имеется только три, то две кривые общего положения в трехмерном пространстве вообще не обязаны пересекаться. Кроме того, разбор рисунков 6.6 и 6.7 убеждает нас в том, что приведение в общее положение в трехмерном пространстве может быть достигнуто посредством малых шевелений.

Теперь проведем аналогичные интуитивные рассуждения в более общей ситуации. Рассмотрим n -мерное гладкое многообразие M и его r -мерное подмногообразие N . Точка многообразия M имеет n степеней свободы, но если она лежит в подмногооб-

разии N , то их остается только r . Таким образом, условие лежать на N поглощает $n-r$ степеней свободы. Если N' — второе подмногообразие размерности r' , то условие лежать как на N , так и на N' в общем случае должно было бы поглощать $n-r+n-r'$ степеней свободы. Если это число оказывается большим n , то следует ожидать, что пересечение будет пусто. Иначе говоря, два подмногообразия размерностей r и r' , которые находятся в общем положении, при $r+r' < n$ не обязаны пересекаться. Кроме того, для любых двух подмногообразий N и N' должен быть верен тот факт, что их можно привести в общее положение малым шевелением одного из них. Здесь шевеление, скажем, многообразия N означает, что мы заменяем вложение $f: N \subseteq M$ другим отображением $g: N \rightarrow M$, которое тоже является вложением (уже в смысле определения 3.2) и близко к f в том смысле, что $g(p)$ для всех p близко к $f(p) = p$ и производные функций, выражающих g и f в локальных координатах (ввиду компактности понадобится лишь конечное число координатных окрестностей), тоже будут близки.

6.8. Перегруппировка перестроек

Теперь мы применим результаты двух последних разделов к доказательству важной теоремы о последовательности перестроек. Первый шаг — показать, что при подходящих условиях две последовательные перестройки можно производить в обратном порядке.

Итак, пусть ϕ_1 — перестройка типа r , которая превращает данное компактное гладкое многообразие M_0 в M_1 ; пусть W_1 — пленка, реализующая ϕ_1 , и пусть ϕ_2 — перестройка типа s , которая превращает M_1 в M_2 и реализуется пленкой W_2 . Перестройки ϕ_1 и ϕ_2 стягивают сферы $S^r \subset M_0$ и $S^s \subset M_1$ в точки P_1 и P_2 многообразий W_1 и W_2 соответственно, при этом возникают сферы S^{n-r-1} и S^{n-s-1} .

Предположим, что $s \leq r$. Тогда, обращаясь к рассуждениям разд. 6.7, мы видим, что можно слегка пошевелить сферу S^s так, чтобы она не пересекала

S^{n-r-1} . Согласно упражнению 6.5, это шевеление сферы S^s можно сделать так, чтобы выполнялись условия леммы 6.1, и тогда оно не подействует ни на результат последовательности перестроек ϕ_1, ϕ_2 , ни на реализующую пленку. Кроме того, теперь сферы S^s и S^{n-r-1} , не пересекаясь, имеют непересекающиеся окрестности. Так как перестройки можно производить с помощью сколь угодно малых трубчатых окрестностей (замечание после упражнения 6.4), то перестройку ϕ_2 и перестройку, обратную к ϕ_1 , можно производить, используя непересекающиеся трубчатые окрестности сфер S^s и S^{n-r-1} , и это уменьшение трубчатых окрестностей до непересекающихся опять не повлияет ни на результат последовательности перестроек ϕ_1, ϕ_2 , ни на реализующую ее пленку. Таким образом, мы доказали следующее:

ЛЕММА 6.2. *Пусть ϕ_1 и ϕ_2 — перестройки, описанные в начале этого раздела. Тогда, не изменяя ни результата этой последовательности перестроек, ни реализующей ее пленки, можно добиться того, чтобы сфера S^s в M_1 , стягиваемая перестройкой ϕ_2 , не пересекалась со сферой S^{n-r-1} , возникающей при перестройке ϕ_1 , и чтобы даже трубчатые окрестности этих сфер, соответствующие перестройке ϕ_2 и перестройке, обратной к ϕ_1 , не пересекались.*

Из этой леммы мгновенно выводится следствие. Рассмотрим непересекающиеся трубчатые окрестности B_1 и B_2 сфер S^{n-r-1} и S^s , о которых шла речь в лемме. Множества B_2 и B_1 мы удаляем из M_1 , начиная перестройку ϕ_2 и перестройку, обратную к ϕ_1 , соответственно. Обратившись к построению пленки, реализующей перестройку, мы видим, что пленка W_1 есть объединение $(M_1 \setminus \text{Int } B_1) \times I$ с $(n+1)$ -мерной клеткой E_1 , а W_2 есть объединение $(M_1 \setminus \text{Int } B_2) \times I$ с $(n+1)$ -мерной клеткой E_2 ; в каждом случае сделаны надлежащие отождествления. Кроме того, $E_1 \cap M_1$ в точности равно B_1 , а $E_2 \cap M_1$ равно B_2 . Теперь легко видеть, что W_1 содержит множество $B_2 \times I$ как подмножество в $(M_1 \setminus \text{Int } B_1) \times I$, в то время как W_2 содержит $B_1 \times I$ как подмножество в

$(M_1 \setminus \text{Int } B_2) \times I$. Наконец, объединение E_1 и $B_1 \times I$ по-прежнему является $(n+1)$ -мерной клеткой E'_1 , пересекающей M_2 по множеству B'_1 , гомеоморфному $S^{n-r-1} \times E^{r+1}$, а объединение E_2 и $B_2 \times I$ является $(n+1)$ -мерной клеткой E'_2 , которая пересекает M_0 по множеству B'_2 , гомеоморфному $S^s \times E^{n-s}$.

Упражнение 6.6. Проверьте то, что утверждается в предыдущем предложении.

Все это означает, что мы можем считать перестройки ϕ_1 и ϕ_2 производимыми одновременно в M_0 . Точнее, если исключить из M_0 множества B_0 и B'_2 и вставить на их место множества B'_1 и $S^{n-s-1} \times E^{s+1}$, то (при надлежащих отождествлениях) получится M_2 . Кроме того, пленка $W = W_1 \cup W_2$, реализующая пару перестроек ϕ_1 , ϕ_2 , получается добавлением клеток E'_1 и E'_2 к $(M_0 \setminus \text{Int } B_0 \setminus \text{Int } B'_2) \times I$ с надлежащими отождествлениями. Следовательно, по отношению к конечному результату и к построению пленки обе эти перестройки равноправны.

Заметим, что все это было сделано в предположении, что $s \leq r$. Последнее условие требовалось для того, чтобы можно было сделать сферы S^{n-r-1} и S^s в M_1 непересекающимися. Если бы эти сферы с самого начала были непересекающимися, то независимо от соотношения между r и s было бы справедливым тоже самое заключение о равноправии ϕ_1 и ϕ_2 .

Продолжая наши рассуждения, мы можем сказать, что поскольку перестройки ϕ_1 и ϕ_2 теперь находятся в равном положении, то порядок, в котором они производятся, можно поменять на обратный. Иначе говоря, мы можем сначала выполнить перестройку ϕ_2 , а затем к полученному результату применить перестройку ϕ_1 ; конечный результат и пленка будут теми же, что и для последовательности ϕ_1 , ϕ_2 . Это завершает доказательство основной теоремы настоящего раздела.

Теорема 6.4. Пусть M_2 получается из M_0 двумя последовательными перестройками, из которых первая ϕ_1 имеет тип r , а вторая ϕ_2 — тип s , причем $s \leq r$.

Тогда то же самое многообразие M_2 можно получить, делая сначала перестройку типа s , а затем перестройку типа r , и пленка, реализующая эту последовательность перестроек, будет такой же, как и для исходной последовательности¹⁾.

Многократное применение этого результата дает следующую теорему.

Теорема 6.5. *Последовательность перестроек можно, не изменяя конечного результата и пленки, упорядочить так, чтобы перестройки типа s производились раньше, чем перестройки типа $r \geq s$.*

6.9. Интерпретация теоремы 6.5 в терминах критических точек

В этом параграфе мы не обращали внимания на гладкость многообразий и отображений, которые возникали в результате наших построений. Об этом следует позаботиться особо. Например, при построении пленки, реализующей перестройку, нужно складывать куски так, чтобы получилось гладкое многообразие. Мы уже отмечали, что это можно сделать, и в теореме 6.1 утверждалось без доказательства, что каждая перестройка типа r соответствует гладкой функции на пленке, имеющей критическую точку индекса²⁾ $r+1$. Аналогично построение, проведенное в разд. 6.8 для перегруппировки перестроек, всегда может быть выполнено так, чтобы разные куски, складываясь, давали гладкое многообразие. Предпо-

¹⁾ Если же $s > r$, то перестройки ϕ_1 и ϕ_2 , вообще говоря, не только нельзя переставить, но даже и не имеет смысла говорить о применении перестройки ϕ_2 к многообразию M_0 . Ведь может случиться, что та сфера на многообразии M_1 , которую эта перестройка должна стягивать, не соответствует никакой сфере на многообразии M_0 и появляется только после перестройки ϕ_1 . (С одним примером такой ситуации мы будем иметь дело в разд. 8.2.) Исключение составляет упомянутый выше случай, когда эта сфера не пересекается со сферой, возникающей при перестройке ϕ_1 . — Прим. ред.

²⁾ Если функция f имеет в точке p на пленке минимум (критическая точка индекса 0), то перестройке многообразия уровня M_c приходится приписать тип -1 . Она состоит в следующем:

ложим теперь, что M есть гладкое многообразие с краем $M_0 \cup M_1$, реализующее последовательность перестроек, превращающую M_0 в M_1 , и пусть эта последовательность упорядочена так, как это описано в теореме 6.5. Тогда отсюда следует, что на M существует гладкая функция, которая принимает значения между 0 и 1, равна 0 на M_0 , 1 на M_1 и имеет лишь конечное число критических точек; все они невырожденны и обладают тем свойством, что для двух таких точек P_1 и P_2 из того, что индекс точки P_1 меньше, чем индекс точки P_2 , следует, что $f(p_1) < f(p_2)$. Функция с аналогичными свойствами описана в [33] под названием *хорошей* (пise) *функции* на M^1 .

§ 7. ДВУМЕРНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

7.1. Введение

В качестве иллюстрации развитых выше идей мы приведем сейчас классификацию двумерных многообразий (без края). При классическом подходе к этой задаче многообразия, заданные как симплексиальные комплексы, приводятся к каноническим формам путем последовательных разрезов и склеиваний. Таким способом доказывается, что компактное связное ориентируемое двумерное многообразие гомеоморфно сфере, к которой приклеено некоторое число ручек, а компактное связное неориентируемое двумерное многообразие гомеоморфно сфере, в которой прорезано некоторое число круглых дырок, после чего

у p имеется такая окрестность U на пленке, что $M_{f(p)-\varepsilon} \cap U = \emptyset$, а $M_{f(p)+\varepsilon} \cap U$ диффеоморфно сфере размерности $\dim M$. Иными словами, после перестройки к M добавляется не пересекающаяся с ним сфера. — Прим. ред.

¹⁾ Изложение этих вопросов с должным вниманием к гладкости содержится в первых четырех параграфах [24]. Оно там ведется с несколько иных позиций: упор делается не на сферические перестройки, а на реализующие их пленки и соответствующие функции (а также связанные с последними векторные поля). — Прим. ред.

отождествлены диаметрально противоположные пары точек окружности, образованной краями каждой из дырок. Число ручек в первом случае и число дырок во втором являются топологическими инвариантами поверхности. Сейчас мы получим эти результаты для гладких многообразий, изучая критические точки заданных на них функций. Ориентируемый и неориентируемый случаи будут разобраны отдельно.

7.2. Ориентируемые двумерные многообразия

Рассмотрим компактное связное ориентируемое двумерное многообразие M и построим на нем в соответствии с теоремой 4.2 функцию f с конечным числом невырожденных критических точек. В этом случае существует ровно три типа критических точек: минимум, седловая точка и максимум; они имеют индексы 0, 1, 2 соответственно. Теорема 6.5 показывает, что функцию f можно выбрать так, что ее значения в минимумах будут меньше, чем значения в седловых точках, а те в свою очередь будут меньше, чем значения в максимумах. Рис. 7.1 изображает многообразие M , лежащее в трехмерном пространстве; в качестве функции f взята последняя координата, и ее критические точки имеют только что описанное расположение. Между прочим, совсем не очевидно, хотя и верно, что многообразие M можно вложить в пространство размерности 3.

В соответствии с результатами параграфа 6 мы можем рассматривать многообразие M как пленку, реализующую последовательность перестроек одномерных многообразий. Каждый минимум соответствует возникновению окружности, так что, если мы рассматриваем семейство уровней функции f , поднимаясь вверх от самой нижней точки, то к тому моменту, когда мы пройдем все минимумы, у нас возникнет конечное число окружностей. После этого на одномерном многообразии, составленном из этих окружностей, производится некоторое число перестроек типа 0, соответствующих седловым точкам многообразия M . Наконец, производятся перестройки,

соответствующие различным точкам максимума функции f ; при этом в каждую точку максимума стягивается какая-то окружность.

Рассматривая сначала перестройки типа 0, легко видеть, что существует три типа таких перестроек; удобно назвать их *связывающей*, *разделяющей* и *за-*

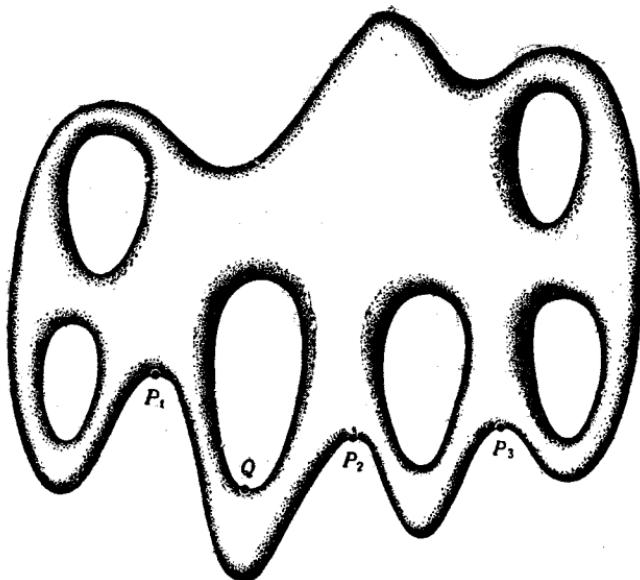


Рис. 7.1.

кручивающей перестройками. Проведение связывающей перестройки на уровне M_c уменьшает число компонент уровня $M_{c+\epsilon}$ на 1 по сравнению с $M_{c-\epsilon}$; при этом две окружности связываются в одну. Рисунок 7.2 изображает часть многообразия M , образованную соответствующей пленкой. Например, на рис. 7.1 перестройка, соответствующая критической точке P_1 , является связывающей. Разделяющая перестройка действует в точности обратным способом (рис. 7.3). На рис. 7.1, например, перестройка, соответствующая точке Q , является разделяющей.

Третий тип перестройки типа 0 стягивает нульмерную сферу на окружности (рис. 7.4), однако на этот раз окружность в окрестности одной из точек

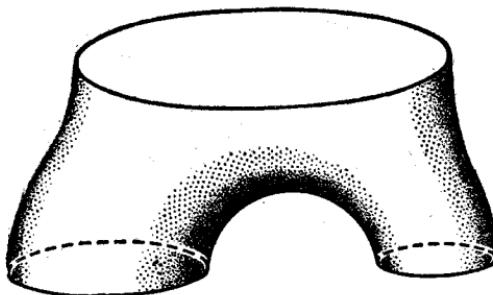


Рис. 7.2.

нульмерной сферы закручена (рис. 7.5). Результат перестройки по-прежнему представляет собой окруж-

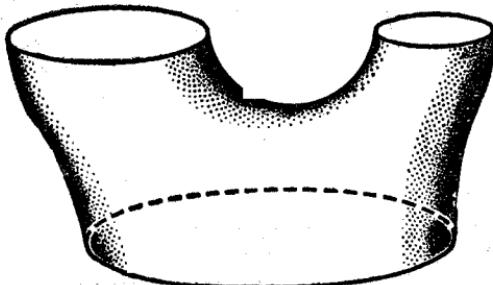


Рис. 7.3.

ность (рис. 7.6)¹⁾. Закручивание окружности при перестройке этого типа означает, что кривые уров-

¹⁾ Закручивание на рис. 7.5 продиктовано интересами описания пленки (см. ниже); саму же перестройку проще представ-

лять себе так: от рис. 7.4 переходим к

— Прим. ред.



ней соответствующей функции не зляются плоскими кривыми, и поэтому пленку, реализующую перестройку, нельзя поместить в трехмерном евклидовом пространстве без самопересечений¹⁾.

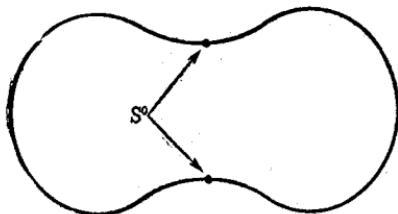


Рис. 7.4.

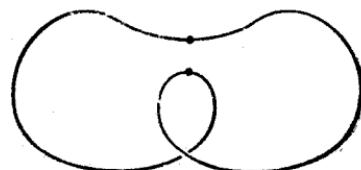


Рис. 7.5.

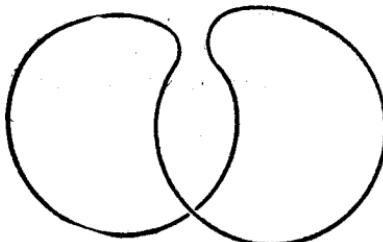


Рис. 7.6.

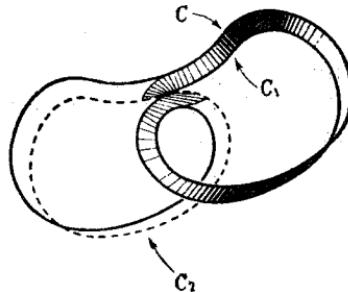


Рис. 7.7.



Рис. 7.8.

Рассмотрим теперь пленку W , реализующую перестройку, изображенную на рис. 7.4, 7.5 и 7.6. На W имеется функция с одной критической точкой P . Соответствующий критический уровень состоит из

¹⁾ Речь идет о таком вложении в трехмерное евклидово пространство E , при котором функцией является одна из координат. Вообще же вложить в E пленку без самопересечений можно, ибо она диффеоморфна листу Мёбиуса (см. Милнор, рис. 17), в котором вырезана дырка. — Прим. ред.

двух окружностей C_1 и C_2 , пересекающихся в точке (рис. 7.7). Третья окружность C на рис. 7.7 изображает некритический уровень функции f , расположенный ниже точки P ; другими словами, это та окружность, на которой производится закручивающая перестройка. Заштрихованная полоса на рис. 7.7 изображает часть W , в основном заключенную между C и C_1 . На рис. 7.8 представлен прямоугольник, концы которого отождествляются так, как указывают стрелки; в результате получается лист Мёбиуса. Заштрихованную полосу на W из рис. 7.7 можно отобразить на заштрихованную часть листа Мёбиуса, отождествляя C_1 со средней линией полосы, а изображенные на рис. 7.7 дуги на W — с вертикальными отрезками прямоугольника на рис. 7.8. Точно так же можно отождествить вторую половину листа Мёбиуса с частью W , в основном заключенной между окружностью C_1 и некритическим уровнем функции f , расположенным выше точки P . Таким образом, C_1 имеет в W окрестность, которая является листом Мёбиуса. Тем самым C_1 не прямо вложена в W , и потому W — неориентируемое многообразие. Мы же разбираем сейчас случай ориентируемых многообразий, так что все перестройки типа 0 будут либо связывающими, либо разделяющими.

Пусть теперь $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n$ — уровень функции f , расположенный над всеми минимумами. Этот уровень является тем одномерным многообразием, к которому будут применяться перестройки типа 0. Допустим на минуту, что перестройки типа 0 можно разбить на две группы так, что перестройки одной из них будут действовать только на $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_{n-1}$, а перестройки другой будут производиться на C_n . Тогда две пленки, реализующие эти две последовательности перестроек, с добавленными сверху и снизу клетками будут двумерными многообразиями, объединение которых равно M , а это противоречит связности многообразия M . Поэтому обязательно найдется перестройка, стягивающая нульмерную сферу, одна точка которой лежит на окружности C_n , а другая — на одной из окружностей C_i . Эта пере-

стройка будет связывающего типа. Переставим перестройки типа 0 так, чтобы она шла первой. Тогда остальные перестройки типа 0 действуют уже на объединении $n - 1$ окружностей. Повторяя это рассуждение, мы видим, что данную последовательность перестроек можно упорядочить так, чтобы первые $n - 1$ из них соединяли n окружности C_i в одну

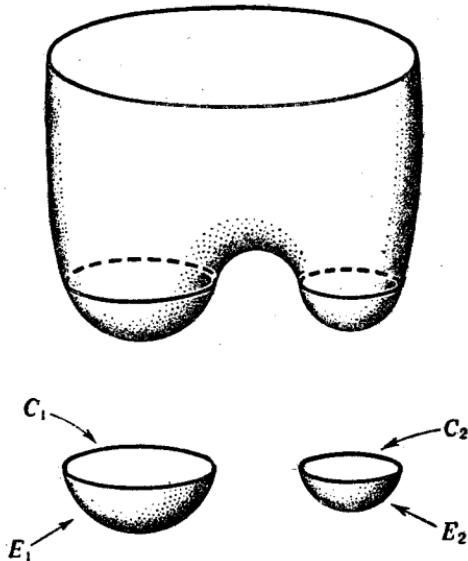


Рис. 7.9.

окружность C_0 . Геометрически это означает, что седловые точки P_i на рис. 7.1 мы перетянули вниз так, чтобы они оказались ниже остальных седловых точек.

Далее, любые две из упомянутых выше окружностей C_i , скажем C_1 и C_2 , являются границами двумерных клеток E_1 и E_2 , лежащих в M . Если C_1 и C_2 соединяются связывающей перестройкой, то получившаяся окружность также ограничивает двумерную клетку (рис. 7.9), образованную добавлением клеток E_1 и E_2 к пленке, реализующей перестройку. Повторяя это рассуждение $n - 1$ раз, мы видим, что часть многообразия M , расположенная под окружностью

C_0 , представляет собой двумерную клетку E_0 . Теперь мы можем заменить f новой функцией, у которой кривые уровней выше C_0 те же, что и прежде, а кривые уровней ниже C_0 образуют семейство окружностей, стягивающихся в точку на E_0 . Другими словами, функция f будет иметь на M ровно один минимум.

Аналогичное рассуждение позволяет подправить функцию f так, чтобы она имела на M ровно один максимум. Итак, мы получили следующее:

Лемма 7.1. *На связном компактном ориентируемом двумерном многообразии существует функция, все критические точки которой, кроме одного минимума и одного максимума, являются седловыми.*

Выраженная в других терминах, эта лемма утверждает, что многообразие M получается добавлением сверху и снизу клеток E_1 и E_0 к пленке, реализующей последовательность перестроек типа 0, которая начинается с окружности C_0 и кончается окружностью C_1 . В тех же терминах выражается наш следующий шаг: мы переставляем перестройки этой последовательности так, чтобы все разделяющие перестройки произвелись раньше других¹⁾.

Рассмотрим теперь клетку E_0 (рис. 7.10), гомеоморфную двумерной сфере с отверстием, край которого есть окружность C_0 . Если мы делаем с C_0 разделяющую перестройку и добавляем к E_0 соответствующую пленку, то получается сфера с двумя отверстиями. Продолжая по индукции, мы видим, что если добавляется пленка, реализующая $k - 1$ разделяющих перестроек, то в результате получается сфера M_1 с k дырками, края которых мы обозначим, например, через $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$. Остальная часть M_2 многообразия M получается как пленка, реализующая действующие на объединение окружностей Γ_i .

¹⁾ Убедиться в возможности такой перегруппировки перестроек читателю предоставляется самостоятельно. Формально это не совсем тривиально, ибо не исключено, что при изменении порядка перестройка, бывшая ранее связывающей, может стать разделяющей. Наглядно это соответствует переходу от рис. 7.10 к 7.11 (C_i на них имеют различный смысл). — Прим. ред.

связывающие перестройки, к которой «сверху» добавлена еще клетка E_1 . Однако перестройки, которые были связывающими при движении от C_0 к C_1 , станут разделяющими, если двигаться от C_1 к C_0 . По-

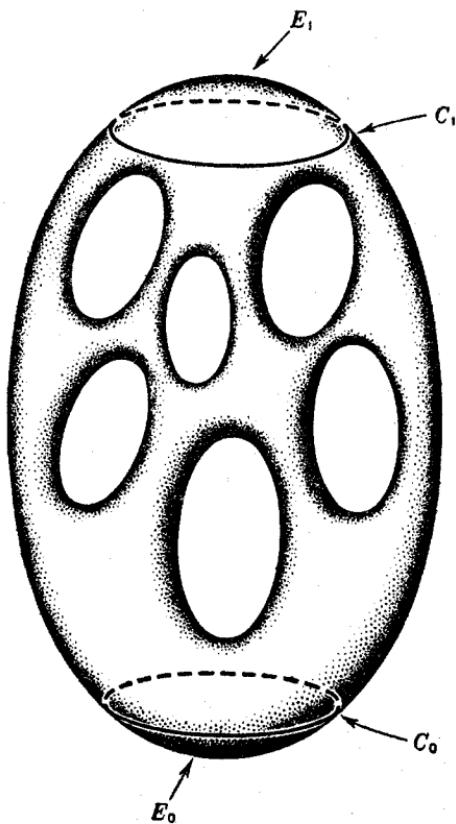


Рис. 7.10.

этому M_2 также является сферой с k дырками. Многообразие M теперь получается объединением M_1 и M_2 с попарным отождествлением краев отверстий. Таким образом, мы доказали следующий результат.

ЛЕММА 7.2. *Каждое компактное связное ориентируемое двумерное многообразие (без края)*

гомеоморфно многообразию $M(k)$, где $M(k)$ есть объединение двух сфер, в каждой из которых проделано k дырок, после чего края этих дырок попарно отождествлены (рис. 7.11).

Лемма дает нам такую последовательность многообразий $M(k)$, что любое компактное связное ориентируемое двумерное многообразие гомеоморфно

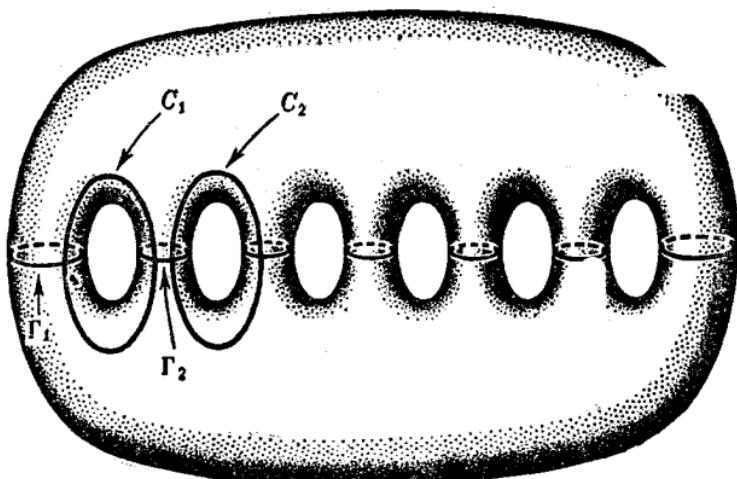


Рис. 7.11.

одному из них. Но чтобы эту лемму можно было считать классификационной теоремой, нужно еще показать, что при $h \neq k$ многообразия $M(h)$ и $M(k)$ не гомеоморфны. Однако многообразия $M(k)$ представлены не в нормальной форме, обычно используемой для классификации двумерных многообразий, и поэтому сначала мы должны придать лемме 7.2 общепринятую формулировку.

Чтобы сделать это, взглянем на $M(k)$ с другой точки зрения: предположим, что на $M(k)$ нарисовано $k - 1$ окружностей C_1, C_2, \dots, C_{k-1} , как показано на рис. 7.11. Если разрезать $M(k)$ на две сферы, каждая с k дырками, края которых образованы окружностями $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$, то на каждой сфере останется набор дуг, в котором i -я дуга соединяет точку на Γ_i

с точкой на Γ_{i+1} , причем окружность C_i получается при объединении i -й дуги на одной сфере с i -й дугой на другой сфере. Окружности C_i прямо вложены в $M(k)$, и если сделать перестройки, стягивающие эти окружности, то получится двумерная сфера. Рассуждая в обратном порядке, мы видим, что $M(k)$ получается в результате проведения $k - 1$ перестроек типа 0 на двумерной сфере, причем все они сохраняют ориентацию (пример 6.11). Действие каждой такой перестройки заключается в приkleивании к сфере одной ручки (рис. 6.2). Поэтому если обозначить через Σ_p двумерную сферу с p ручками, то $M(k)$ будет гомеоморфно Σ_{k-1} .

После подходящей перемены обозначений лемма 7.2 принимает следующий вид:

Лемма 7.3. *Каждое компактное связное ориентируемое двумерное многообразие (без края) гомеоморфно поверхности Σ_p , где Σ_p — сфера с p ручками.*

Упражнение 7.1. Дайте другое доказательство того, что $M(k)$ гомеоморфно Σ_{k-1} , применив к Σ_{k-1} последовательность шагов из доказательства лемм 7.1 и 7.2 и приведя тем самым Σ_{k-1} к виду $M(k)$.

Теперь нам осталось сделать последний шаг — показать, что Σ_p и Σ_q не гомеоморфны, если $p \neq q$.

Сначала заметим, что на Σ_p имеется p непересекающихся окружностей, по одной на каждой ручке (рис. 7.12), таких, что если разрезать Σ_p по каждой из них, то получившаяся поверхность¹⁾ будет по-прежнему связной. Максимальное число обладающих этим свойством непересекающихся окружностей на поверхности, очевидно, является ее топологическим инвариантом.

Определение 7.1. Максимальное число непересекающихся окружностей, по которым можно разрезать поверхность, не нарушая ее связности, называется *родом* этой поверхности.

¹⁾ Здесь и далее слово «поверхность» употребляется вместо «двумерного многообразия». — Прим. ред.

Имеется теорема, которую мы здесь доказывать не будем и которая утверждает, что род двумерного компактного многообразия конечен и, в частности, род сферы равен нулю (см. [46]). Эта теорема по-

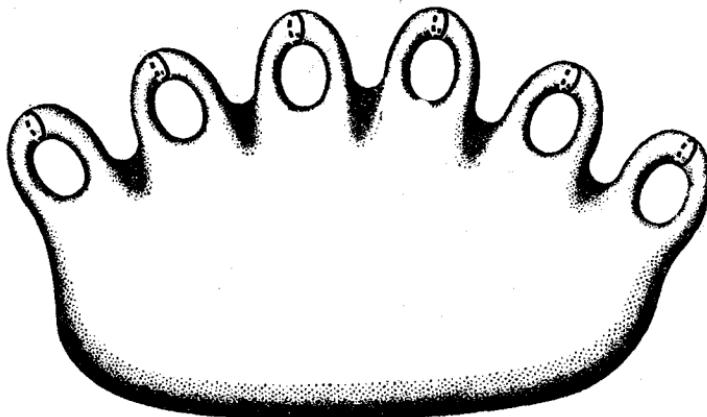


Рис. 7.12.

требуется нам в дальнейших рассуждениях. Доказательство того, что Σ_p и Σ_q не гомеоморфны при $p \neq q$, — это, по существу, доказательство того, что род Σ_p не p^1 .

Лемма 7.4. *Пусть связная поверхность M' получается из M перестройкой типа 0. Тогда род многообразия M' больше, чем род M .*

¹⁾ Вместо рода можно воспользоваться другим топологическим инвариантом — эйлеровой характеристикой. См. Милнор, задача 25* (заодно там доказана и конечность рода). Утверждение, что замкнутая кривая без самопересечений на сфере разбивает последнюю, равносильно аналогичному утверждению для плоскости (для перехода от одного к другому можно воспользоваться стереографической проекцией (Милнор, рис. 3), взяв за полюс сферы любую ее точку, лежащую вне рассматриваемой кривой). А оно является одним из утверждений теоремы Жордана, доказанной, например, у Дьюдене ([13], добавление к гл. 9). Для гладкой кривой оно легко доказывается с помощью методов, излагаемых у Милнора (см. задачу 26*); в переходе к произвольным замкнутым кривым требуются некоторые ухищрения. — Прим. ред.

Доказательство. Пусть род M равен p , и пусть C_1, C_2, \dots, C_p — непересекающиеся окружности на M , такие, что после разрезания вдоль этих

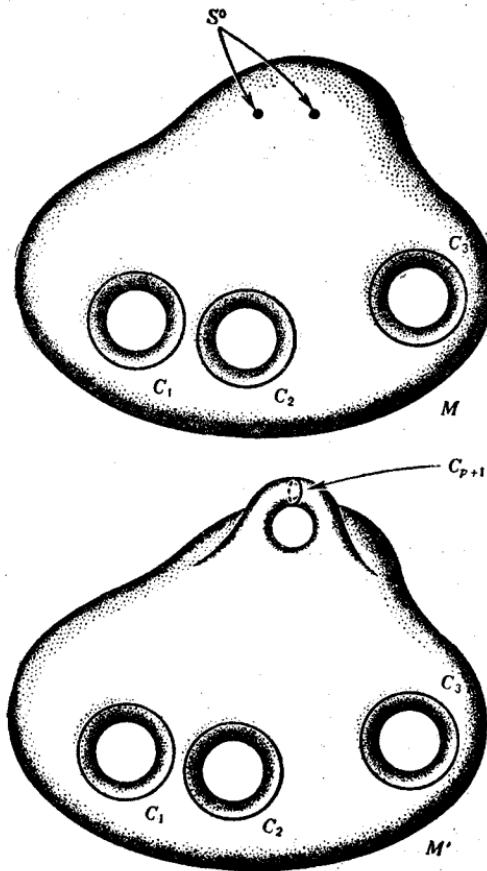


Рис. 7.13.

окружностей поверхность M остается связной. Можно считать (см. лемму 6.1), что нульмерная сфера, стягиваемая при переходе от M к M' , не пересекает окружностей C_i . Тогда окружности C_1, \dots, C_p «перекочуют» на M' (рис. 7.13); кроме них, на M' имеется окружность C_{p+1} , которая опоясывает приклеенную

ручку. Она не пересекает окружностей C_1, C_2, \dots, C_p , и если мы разрежем M' по C_1, C_2, \dots, C_{p+1} , то связность не нарушится. Следовательно, род M' по меньшей мере равен $p+1$, что строго больше, нежели род M .

Повторное применение этой леммы дает следующий результат:

Лемма 7.5. *Пусть род M равен p , и пусть многообразие M' получается из M проведением p перестроек типа 1 и является связным. Тогда M' — сфера.*

Доказательство. Рассмотрим многообразия, получающиеся из M при последовательном применении упомянутых перестроек. Все они связны, ибо M' связно, а перестройка типа 1 не может превратить несвязное многообразие в связное. Теперь из леммы 7.4 следует, что каждая из перестроек, преобразующих M в M' , уменьшает род по крайней мере на 1. Поэтому после p перестроек род должен оказаться равным нулю. Но получившаяся поверхность M' должна быть сферой с некоторым числом q ручек, и поскольку ее род равен нулю, q должно равняться нулю. Таким образом, M' есть сфера.

Замечание. На поверхности рода p имеются p непересекающихся окружностей, разрез по которым не нарушает связности; значит, и при перестройках типа 1, стягивающих эти окружности, связность не нарушится. По доказанной лемме при этом должна получиться сфера. Рассматривая перестройки, ведущие от M к сфере, в обратном порядке, получаем, что поверхность M рода p должна быть гомеоморфна сфере с p ручками¹⁾. Впрочем, сейчас нам понадо-

¹⁾ Обратите внимание, что это еще не дает нам полной классификации: мы теперь знаем, что если существует ориентируемая поверхность, имеющая род p , то и Σ_p имеет род p (род топологически инвариантен!), но мы еще не выяснили — быть может, для некоторых p поверхности с родом p вообще нет? В частности, всегда ли род Σ_p равен p ? Или, что эквивалентно, не могут ли быть гомеоморфны некоторые Σ_p и Σ_q с $p \neq q$? Все это и выясняется в оставшейся части данного раздела. — Прим. ред.