бится только следующее: для всякой ориентируемой поверхности M существует некоторое конечное число (равное на самом деле ее роду p) с тем свойством, что при применении к M бо́льшего числа перестроек типа 1 получится несвязное многообразие (если предположить противное, то первые p перестроек должны привести к сфере, а после этого следующая же перестройка нарушит связность, ибо род сферы равен 0).

Теперь мы можем доказать основной результат этого параграфа.

Теорема 7.1. *Каждое компактное связное ориентируемое двумерное многообразие (без края) гомеоморфно одной из поверхностей Σ_p; при этом Σ_p и Σ_q не гомеоморфны, если $p \neq q$.*

Доказательство. Первая часть была доказана в лемме 7.3. Предположим теперь, что Σ_p гомеоморфна Σ_q с $q > p$. На поверхности Σ_q можно провести $q - p$ последовательных перестроек типа 1, стягивающих окружности, которые опоясывают $q - p$ ее ручек; в результате мы получим поверхность Σ_p. Но так как мы предположили, что Σ_p и Σ_q гомеоморфны, то мы можем считать, что эти перестройки проводились на Σ_p и в результате тоже получилось Σ_p.

Повторное проведение этих перестроек привело бы к сколь угодно длинной последовательности перестроек типа 1, примененных к Σ_p и оставляющих ее связной. Это противоречит сделанному выше замечанию, согласно которому каждое компактное ориентируемое двумерное многообразие после некоторого конечного числа перестроек типа 1 перестает быть связным. Следовательно, Σ_p и Σ_q не могут быть гомеоморфными.

Упражнения. 7.2. Докажите, что если на Σ_p приводится перестройка типа 1, то ее результат, если он связен, будет поверхностью Σ_q с $q < p$.

(*Указание.* Предположив, что $q \geqslant p$, постройте на Σ_p сколь угодно длинную последовательность перестроек типа 1, оставляющую эту поверхность связной.)

7.3. Докажите, что род Σ_p равен p. (Ясно, что род Σ_p не меньше p. Предположим, что он больше p. Используя последнее

упражнение, постройте последовательность перестроек, которая превращает поверхность Σ_p в сферу, но оставляет строго положительным ее род.)

7.3. Неориентируемый случай

Прежде чем рассматривать неориентируемые поверхности в общем случае, полезно разобрать простой пример, чтобы получить представление, как действует закручивающая перестройка (рис. 7.4, 7.5, 7.6). Рассмотрим проективную плоскость; ее можно представить как сферу, у которой отождествлены пары диаметрально противоположных точек. Таким образом, если мы возьмем единичную сферу $x^2+y^2+z^2=1$ в трехмерном евклидовом пространстве, то точку (x, y, z) надо отождествить с точкой $(-x, -y, -z)$. Так как функция

$$(*) \qquad f(x, y, z)=x^2+2y^2+3z^2$$

принимает одинаковые значения в точках (x, y, z) и $(-x, -y, -z)$, то формула $(*)$ определяет функцию f на проективной плоскости. Теперь мы можем делать выводы о поведении линий уровня функции f на проективной плоскости, исследуя уровни функции $x^2+2y^2+3z^2$ на сфере и помня о том, что пары противоположных точек отождествляются.

Линии уровня на сфере — это пересечения сферы с семейством эллипсоидов:

$$x^2+2y^2+3z^2=c.$$

Ясно, что при $c<1$ действительных пересечений нет. При $c=1$ имеется две точки пересечения: $(\pm 1, 0, 0)$ (рис. 7.14). Они, разумеется, определяют одну точку P_0 на проективной плоскости, которая соответствует минимуму функции f. Пока c возрастает от 1 до 2, пересечение представляет собой пару овалов на сфере (рис. 7.15). Отождествление противоположных точек означает, что на проективной плоскости это будет одна окружность. При $c=2$ пересечение эллипсоида и сферы устроено так, как это показано на рис. 7.16. При этом функция f имеет критические точки

$(0, \pm 1, 0)$, которые опять определяют одну точку P_1 на проективной плоскости. Когда c возрастает от 2 до 3, пересечение сферы и эллипсоида снова представляет собой пару окружностей, как на рис. 7.17, и

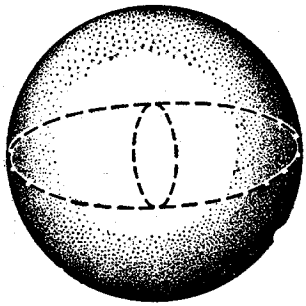


Рис. 7.14.

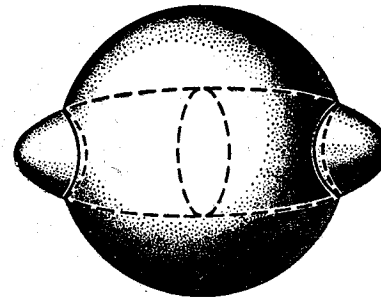


Рис. 7.15.

снова они определяют одну окружность на проективной плоскости. Когда c стремится к 3, эти окружности стягиваются в точки $(0, 0, \pm 1)$ на сфере, определяющие одну точку P_2 на проективной плоскости.

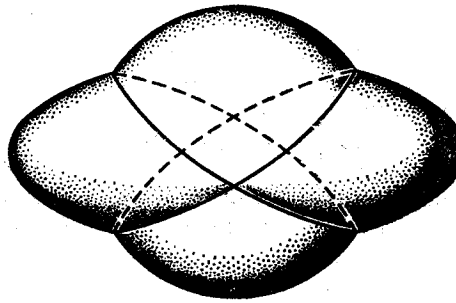


Рис. 7.16.

Для детального изучения перехода через критический уровень, соответствующий точке P_1, мы заметим, что проективную плоскость можно рассматривать как полусферу $y \leqslant 0$ единичной сферы, если

отождествить противоположные точки окружности, образованной краями полусферы. На рис. 7.18 полусфера для удобства сплющена в круг. Этот рисунок изображает критический уровень функции f, соответствующий точке P_1, а также некритические уровни с обеих сторон от него. Дуги a и b образуют некритический уровень ниже P_1, а дуги c и d — выше. Противоположные точки на границе круга, обозначенные одинаковыми буквами, отождествляются. Стрелки на дугах a и b показывают некоторое направление вращения на нижнем уровне функции f; видно, что около точки P_1 линии уровня идут в одном направлении. Сравнение этого рисунка с рис. 7.5 показывает, что

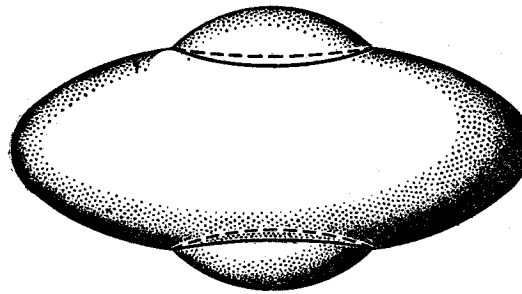


Рис. 7.17.

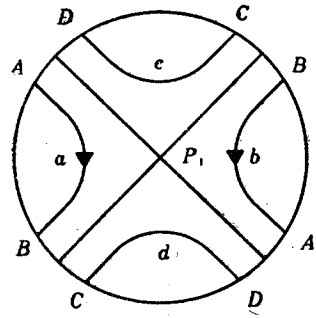


Рис. 7.18.

при переходе от нижнего критического уровня к верхнему происходит закручивающая перестройка.

Эту ситуацию можно описать по-другому, сказав, что пленка, реализующая закручивающую перестройку, — это проективная плоскость, в которой вырезаны две дырки. Таким образом, последовательность k закручивающих перестроек реализуется такой пленкой: надо взять k проективных плоскостей, в каждой из которых прорезано по две дырки, и отождествить края одной дырки в каждой из плоскостей с краями дырки в следующей плоскости.

Последнее построение можно описать в других, более удобных терминах. Пусть M_1 и M_2 — два связных многообразия одинаковой размерности[1]). Возьмем точки P_1 и P_2 на M_1 и M_2 соответственно и выберем их окрестности U_1 и U_2, которые являются клетками. Выкинем эти окрестности и образуем объединение множеств $M_1 \setminus U_1$ и $M_2 \setminus U_2$, в котором отождествляются границы клеток U_1 и U_2. То, что получится, называется *связной суммой многообразий* M_1 *и* M_2. Заметим, что она является результатом перестройки типа 0, которая производится на обычном (несвязном!) объединении $M_1 \cup M_2$ и стягивает нульмерную сферу $P_1 \cup P_2$.

Таким образом, используя введенную терминологию, можно сказать, что пленка, реализующая последовательность k закручивающих перестроек, представляет собой связную сумму k проективных плоскостей, в которой вырезаны две дырки.

Построение связной суммы многообразия M и проективной плоскости по-другому можно описать следующим образом. Проективная плоскость получается из круга отождествлением диаметрально противоположных точек окружности. Чтобы соединить ее с M, надо и в круге, и в M вырезать по дырке. При этом круг превращается в кольцо, или, что то же самое, в цилиндр, у которого надо отождествить диаметрально противоположные точки на одном

[1]) Они предполагаются непересекающимися; в противном случае их надо заменить диффеоморфными им непересекающимися многообразиями. — *Прим. ред.*

основании. Если совместить отождествляемые точки в трехмерном пространстве, то получится поверхность, которую называют *«перекрещенным колпаком»* (рис. 7.19). Заметим, что самопересечение получается из-за неудачной попытки построить перекрещенный колпак в трехмерном пространстве[1]. Итак, для того чтобы получить связную сумму многообразия M и проективной плоскости, мы должны отождествить край перекрещенного колпака с краем круглой дырки в M. Эта операция называется приклеиванием перекрещенного колпака к многообразию M[2]. Заметим, что можно было бы получить тот же результат, вырезав в M дырку и отождествив диаметрально противоположные точки ее края.

Оставшаяся часть исследования неориентируемых двумерных многообразий будет дана как ряд упражнений.

Упражнения. 7.4. Пусть M — связное компактное неориентируемое многообразие (без края). Так же, как в § 7.2, покажите, что на M существует функция с одним минимумом, одним максимумом и конечным числом седловых точек. Переставьте седловые точки так, чтобы соответствующие перестройки типа 0 расположились в таком порядке: сначала все разделяющие перестройки, затем — все связывающие и, наконец, закручивающие. Выведите отсюда, что многообразие M является связной суммой поверхности $M(k)$, определенной в лемме 7.2, с некоторым числом проективных плоскостей. Другими словами, M можно

---

[1]) Проективную плоскость с дыркой можно расположить в трехмерном евклидовом пространстве и без самопересечений, ибо она диффеоморфна *листу Мёбиуса* — поверхности, изображенной на рис. 17 у Милнора. Лист Мёбиуса выглядит проще, чем перекрещенный колпак, и такие его свойства, как неориентируемость или существование замкнутой кривой, разрез по которой не нарушает связности, достаточно легко усмотреть непосредственно из рисунка. Но если мы хотим, чтобы дырка была заклеена не в смысле абстрактного отождествления точек, а в буквальном смысле слова, то приходится пользоваться перекрещенным колпаком. — *Прим. ред.*

[2]) Хотя в данном случае и принято говорить о «приклеивании», это слово здесь употребляется не совсем в обычном смысле (прежде чем приклеивать, надо из M выкинуть круг!). Возможно, лучше было бы говорить о заклеивании дырки в M перекрещенным колпаком или о вклеивании в M листа Мёбиуса. — *Прим. ред.*

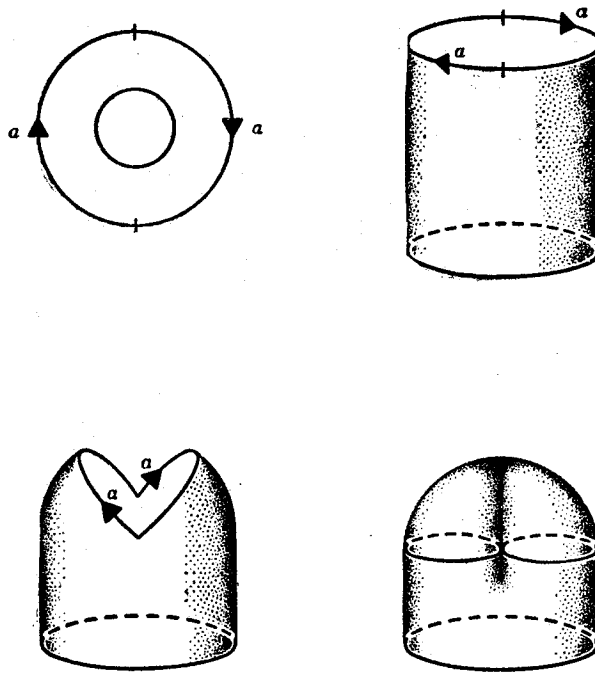


Рис. 7.19. Последовательные этапы построения перекрещенного колпака.

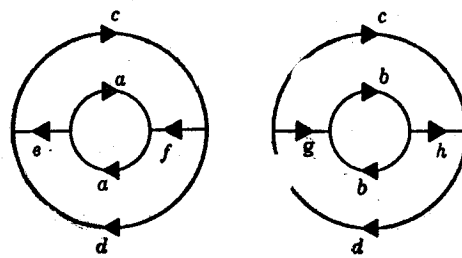


Рис. 7.20.

представить как сферу с дырками, некоторые из которых попарно соединены ручками, а остальные заклеены перекрещенными колпаками.

7.5. Буквы и стрелки на рис. 7.20 указывают способ отождествления, при котором в результате склеивания двух колец получается связная сумма двух проективных плоскостей, или, что то

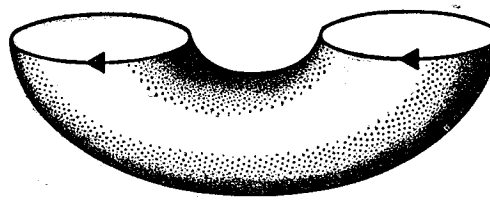


Рис. 7.21.

же самое, пара перекрещенных колпаков, приклеенных основаниями друг к другу. Разрезав по дугам e, f, g, h, указанным на рисунке, и сложив получившиеся куски по-новому, покажите, что она гомеоморфна цилиндру, концы которого отождествляются способом, указанным на рис. 7.21. (Эта поверхность является

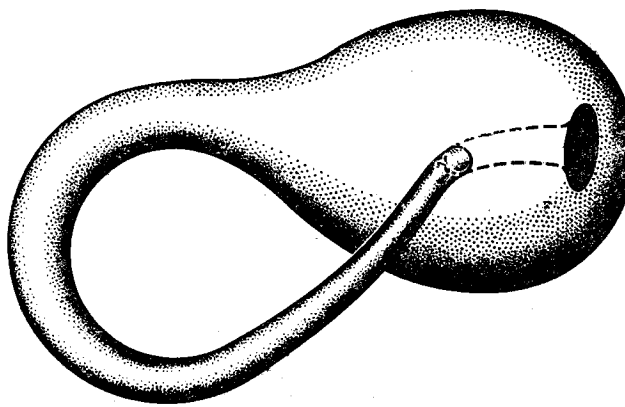


Рис. 7.22.

бутылкой Клейна.) Рис. 7.22 изображает результат отождествления. Снова заметим, что, когда мы строим поверхность в трехмерном евклидовом пространстве, получается самопересечение.

7.6. Дайте другое доказательство того, что бутылка Клейна является связной суммой двух проективных плоскостей, построив на ней функцию с одним минимумом, одним м[illegible]мумом и двумя

седловыми точками, каждая из которых соответствует закручивающей перестройке.

7.7. Заметим, что бутылка Клейна является результатом перестройки типа 0, которая проводится на сфере и не сохраняет ориентации (см. пример 6.11).

Если теперь M — проективная плоскость, на которой производится перестройка типа 0, то не имеет смысла говорить, что перестройка сохраняет ориентацию или нет. Используя это, покажите, что связная сумма бутылки Клейна и проективной плоскости гомеоморфна связной сумме тора и проективной плоскости. Выведите отсюда, что связная сумма тора и проективной плоскости гомеоморфна связной сумме трех проективных плоскостей.

7.8. Повторным применением результатов предыдущего упражнения покажите, что связная сумма поверхности Σ_p с любым числом проективных плоскостей сама будет связной суммой проективных плоскостей.

7.9. Предыдущие упражнения показывают, что связное неориентируемое компактное двумерное многообразие (без края) гомеоморфно поверхности $N(k)$, которая является связной суммой k проективных плоскостей, или, что то же самое, результатом приклеивания к сфере k перекрещенных колпаков.

7.10. Покажите теперь, что $N(h)$ не гомеоморфно $N(k)$ при $h \neq k$. Проверьте сначала, что если N' получается из N приклеиванием перекрещенного колпака, то род N' больше, чем род N. Теперь рассмотрите два сорта операций: перестройки типа I и удаление перекрещенных колпаков. Покажите, что после проведения конечного числа таких операций поверхность превращается в сферу, а дальнейшее применение этих операций нарушает ее связность.

Затем, используя такое же рассуждение, как в теореме 7.1, покажите, что $N(k)$ и $N(h)$ не гомеоморфны, если $k \neq h$.

7.11. Докажите, что род $N(k)$ равен k.

7.4. Теорема о трехмерных многообразиях [1])

Пусть M — трехмерное гладкое многообразие (связное и без края), которое компактно и ориентируемо. Если удалить из M две непересекающиеся клетки — обозначим их E_0 и E_2, — то получится многообразие M', край которого есть несвязное объединение двух двумерных сфер M_0 и M_2. Таким образом, M' можно считать пленкой, реализующей некоторую последовательность перестроек, превращающих

[1]) В английском оригинале этот раздел находился в § 6, но в нем фактически предполагается знакомство с некоторыми рассуждениями § 7, отчего при переводе он и был перенесен сюда. — *Прим. ред.*

M_0 в M_2. Аналогично тому, как это было сделано для поверхностей (лемма 7.1), можно обеспечить, чтобы соответствующая функция имела на M ровно один минимум, притом расположенный внутри E_0, и ровно один максимум, притом расположенный внутри E_2. Тогда все перестройки, реализуемые пленкой M', будут иметь тип 0 или 1, причем по теореме 6.5 мы можем считать, что сначала выполняются все перестройки типа 0, в результате чего получается некоторое многообразие M_1. Тогда все перестройки, происходящие на пути от M_1 до M_2, имеют тип 1, или, что то же самое, все перестройки на пути от M_2 до M_1 имеют тип 0. Напомним, что наши перегруппировки перестроек не влияют на M'. Возвращая трехмерные клетки, которые мы удалили вначале, мы видим, что M является объединением двух многообразий W_1 и W_2 с общим краем M_1. Так как все перестройки, превратившие двумерную сферу в M_1, имели тип 0 и были ориентируемы, W_1 и W_2 представляют собой шары с ручками. Мы доказали следующее утверждение:

Теорема 7.2. *Трехмерное компактное ориентируемое многообразие (связное и без края) является объединением двух шаров с ручками, поверхности которых отождествлены посредством некоторого гомеоморфизма*[1]).

§ 8. ПОСЛЕДУЮЩИЕ ШАГИ

Здесь мы хотим дать некоторые указания о развитии нашего предмета за пределами того круга элементарных идей и методов, которого мы до сих пор придерживались. Подробный разбор затрагиваемых вопросов потребовал бы более глубоких знаний ряда разделов алгебраической топологии, но поскольку это выходит за рамки данной книги, мы ограничимся набросками, которые должны всего лишь создать из-

[1]) Такое разбиение трехмерного многообразия на два шара с ручками называется *разбиением Хегора*. — *Прим. ред.*

вестные интуитивные представления. Те, кто пожелает узнать об этом подробнее, найдут некоторые рекомендации для дальнейшего чтения в конце книги.

8.1. Убивание гомотопических классов

Иллюстрацией к этому разделу может служить пример 6.5; тор преобразуется в сферу перестройкой типа 1. Эта перестройка — процесс упрощения. Можно считать, что сфера проще тора в следующем смысле: любой замкнутый путь на сфере можно на этой сфере стянуть в точку, тогда как, например, окружность a на рис. 8.1 нельзя стянуть в точку на торе.

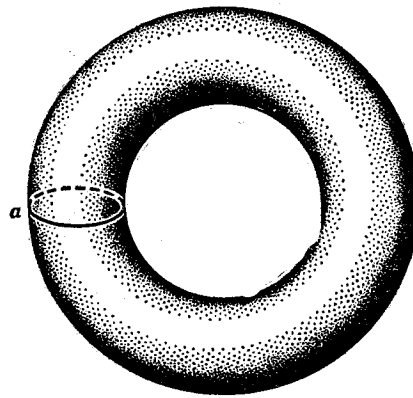


Рис. 8.1.

(Мы приводим эти утверждения как интуитивно очевидные; при строгом изложении нужны точные формулировки и доказательства.)

Посмотрим, как можно обобщить эти соображения. Первый шаг — классифицировать замкнутые кривые на многообразии M. *Замкнутый путь*, или *петля* в точке x на M, — это такое непрерывное отображение $f\colon I \to M$, где I — единичный интервал на оси вещественных чисел, что $f(0) = f(1) = x$. Иначе можно рассматривать f как отображение окружности

в M, при котором выбранная точка на окружности переходит в точку x. Мы будем называть две таких петли f и g гомотопными и писать $f \sim g$, если существует такое непрерывное отображение F: $I \times I \to M$, что

$$\left.\begin{aligned} F(s, 0) &= f(s) \\ F(s, 1) &= g(s) \end{aligned}\right\} \text{ при всех } s \in I,$$

$$F(0, t) = F(1, t) = x \text{ при всех } t \in I.$$

Геометрически это означает, что F отображает квадрат в многообразие M так, что нижняя сторона отображается при помощи f, верхняя — при помощи g, а боковые стороны переходят в точку x. Интуитивно же это означает, что если рассматривать t как время, то в течение единичного интервала времени путь f непрерывно деформируется в g. Оказывается, что отношение $\sim$ между замкнутыми путями является отношением эквивалентности, и поэтому множество петель в точке x можно разбить на классы эквивалентности. Класс, содержащий f, называется *гомотопическим классом* замкнутого пути (петли) f. Множество гомотопических классов петель в точке x на M мы будем обозначать через $\pi_1(M, x)$. В этом множестве можно ввести алгебраическую структуру следующим образом. Для двух петель f и g в точке x мы определим $fg = h$ как путь, который получится, если сначала пройти по f, а потом по g. Этот путь задается формулами

$$h(s) = f(2s), \qquad 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2},$$

$$h(s) = g(2s - 1), \qquad \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1.$$

Тогда можно показать, что если $f \sim f'$, а $g \sim g'$, то $fg \sim f'g'$. Поэтому, обозначая гомотопический класс f через $\bar{f}$ и аналогично обозначая гомотопические классы остальных путей, мы можем определить произведение гомотопических классов, положив

$$\bar{f}\bar{g} = \overline{fg}.$$

Правая часть здесь зависит только от гомотопических классов путей $\bar{f}$ и $\bar{g}$, а не от конкретных путей f и g, которые эти классы представляют. Можно показать (см. [46]), что это умножение является групповой операцией, для которой единицей будет класс постоянного пути — пути, переводящего весь отрезок I в точку x, а обратный элемент получится, если пройти путь в обратном направлении. Таким образом, $\pi_1(M, x)$ превращается в группу — это *фундаментальная группа* многообразия M[1]).

Все это можно сделать для любого топологического пространства. Однако если M — гладкое компактное многообразие, то можно показать, что группа $\pi_1(M, x)$ имеет конечное число образующих. Кроме того, если размерность многообразия M больше 2, то соображения о приведении в общее положение (§ 6.7) показывают, что в каждом гомотопическом классе всегда содержится путь f, который является гладким вложением окружности в M. Если M ориентируемо, эта окружность будет прямо вложенной (определение 6.2).

Предположим теперь, что M — ориентируемое гладкое многообразие размерности, бо́льшей 2, и пусть $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_r$ — образующие группы $\pi_1(M, x)$. Как мы уже говорили, путь $\bar{\alpha}_r$ можно представить окружностью α_r, которая прямо вложена в M. Произведем перестройку типа 1, которая стягивает окружность α_r, превращая многообразие M в M'. Грубо говоря, действие этой перестройки состоит в том, что мы встраиваем в многообразие круг, краем которого является окружность α_r. Поэтому оказывается, что в M' путь α_r гомотопен постоянному. Другими словами, гомотопический класс $\bar{\alpha}_r$ становится единичным. Однако других образующих $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_{r-1}$ переход от M к M', как можно показать, не затрагивает. Итак, фундаментальная группа многообразия M' получается из фундаментальной группы M при замене одной образующей $\bar{\alpha}_r$ на единицу. Обычно называют эту опера-

[1]) Фундаментальная группа рассматривается во многих учебниках алгебраической топологии: [36*], [49*], [— *Прим. ред.*

цию *убиванием класса* $\bar{a}_r$. Ясно, что, проделав такую операцию с другими образующими, мы можем убить всю фундаментальную группу.

Этот результат можно сформулировать, сказав, что ориентируемое гладкое многообразие путем сферических перестроек типа 1 может быть преобразовано в многообразие с нулевой фундаментальной группой[1]). Или, используя теорему 6.3, можно сказать, что данное многообразие бордантно многообразию с нулевой фундаментальной группой. Здесь не нужно накладывать условие, что размерность больше 2; ведь мы уже знаем, что ориентируемое двумерное многообразие является сферой с ручками, а ее легко преобразовать в сферу с помощью перестроек типа 1, каждая из которых стягивает окружность, опоясывающую одну из ручек.

Изложенные идеи можно еще обобщить. Элементы из $\pi_1(M, x)$ можно считать гомотопическими классами окружностей в M. Можно определить другие группы $\pi_r(M, x)$, элементами которых являются гомотопические классы r-мерных сфер в M. Тогда классы, представленные прямо вложенными r-мерными сферами, можно убивать с помощью перестроек типа r. Операции такого рода могут привести к упрощению строения многообразия и быть полезными при решении задач о классификации.

8.2. Компенсирующие перестройки и сокращение

Мы уже видели, что если M' получается из M сферической перестройкой типа r, при которой стягивается сфера S^r и возникает сфера S^{n-r-1}, то мы можем вернуться от M' к M, делая перестройку типа $n-r-1$, при которой стягивается сфера S^{n-r-1} и возникает сфера S^r. Однако при определенных условиях существует более интересный и менее очевидный способ обратить действие перестройки. Рассмотрим сначала следующий пример.

---

[1]) Заметим, что многообразие с нулевой фундаментальной группой называется *односвязным*. — *Прим. ред.*

Пример 8.1. Начав с двумерной сферы M, преобразуем ее в тор перестройкой ϕ типа 0 (сохраняющей ориентацию), которая стягивает нульмерную сферу S^0. Этот процесс описан в примере 6.4. Пусть B — трубчатая окрестность сферы S^0 — это пара непересекающихся кругов. Край окрестности B имеет вид $S^0 \times S^1$ (пара окружностей) и для фиксированной точки p содержит множество $S^0 \times \{p\}$, которое можно считать смещенным экземпляром сферы S^0.

Но S^0 является границей одномерной клетки E^1 в M. Подберем эту клетку так, чтобы она пересекала границу окрестности B по множеству $S^0 \times \{p\}$. Тогда можно удалить из E^1 ее часть, лежащую в окрестности B, и полученная клетка E_0^1 будет иметь множество $S^0 \times \{p\}$ своей границей.

Для получения тора M' мы приклеиваем к $M \setminus B$ ручку $E^1 \times S^1$. На этой ручке имеется отрезок, концы которого соединяют концы отрезка E_0^1, при этом образуется окружность S^1 на торе. Ясно, что, сделав перестройку тора ϕ', которая имеет тип 1 и стягивает эту окружность, мы вернемся к сфере.

Исследуя этот процесс более подробно, можно извлечь дополнительную информацию. Мы уже видели, что пленка, реализующая перестройку ϕ, представляет собой сплошной тор, из внутренности которого вырезан шар, причем границей шара будет M, а внешней границей тора — M' (пример 6.7). Поверхности уровня связанной с этой перестройкой функции (см. теорему 6.1) начинаются с M и продолжают оставаться двумерными сферами до тех пор, пока мы не достигнем критического уровня. Этот уровень представляет собой тор, на котором одна окружность стянута в точку. Поверхности уровня, идущие за критическим, все являются торами. Видно, что, когда мы перебираем уровни, начиная с M, отрезок E^1 появляется на каждом из них до тех пор, пока его концы не соединятся на критическом уровне, образовав окружность S^1. Эта окружность уже сохраняется на всех последующих уровнях. Построим теперь пленку, реализующую две перестройки, из которых первой выполняется ϕ, а потом ϕ'. Для этого надо приклеить

пленку, реализующую перестройку ϕ', к той пленке, реализующей ϕ, которая у нас уже имеется. На приклеиваемой пленке уровни, предшествующие критическому, можно представлять себе как расширяющееся семейство торов — все они содержат внутри себя сплошной тор, являющийся пленкой перестройки ϕ, и уровни, более близкие к критическому, заключают внутри себя уровни, более далекие от него. Окружность S^1, которую можно представлять себе расположенной на «горловине» тора, по мере приближения к критическому уровню уменьшается и, наконец, стягивается в критическую точку: мы достигли критического уровня, который выглядит как сфера с притянутыми к центру полюсами. Вне критического уровня поверхности уровня становятся сферами. Поэтому пленка, реализующая перестройки ϕ и ϕ', является шаром, внутри которого сделана шаровая полость. Здесь интересно, что эта пленка в действительности имеет вид $M \times I$. Другими словами, перестройки ϕ и ϕ' не только погашают друг друга в том смысле, что их последовательное выполнение приводит нас опять к многообразию M, но они еще и реализуются наиболее простой из всех возможных пленок — произведением $M \times I$.

Существенное обстоятельство в этом примере то, что сфера S^r, стягиваемая первой перестройкой, является границей клетки E_0^{r+1} в M, причем эта клетка в процессе перестройки замыкается, образуя прямо вложенную сферу S^{r+1} в M'. Вторая перестройка ϕ' стягивает эту сферу. Сейчас мы покажем, что всякий раз, когда выполняется это условие, последовательность перестроек ϕ, ϕ' реализуется произведением $M \times I$ [1]).

---

[1]) Короче это утверждение можно сформулировать так: *если последовательно выполняемые перестройки ϕ и ϕ' таковы, что ϕ' стягивает сферу S^{r+1}, которая ровно в одной точке пересекает сферу S^{n-r-1}, возникающую при перестройке ϕ, и при этом сферы находятся в общем положении* («трансверсальное пересечение» по терминологии Милнора, стр. 250), *то пленка, реализующая ϕ и ϕ', диффеоморфна $M \times I$.* Клетка E_0^{r+1} и обсуждение в двух следующих абзацах Уоллеса нужны для того, чтобы разобраться,

Итак, пусть S^r — прямо вложенная сфера в многообразии M, и предположим, что S^r является границей клетки E_0^{r+1}, гомеоморфно и гладко вложенной в M. Мы собираемся сделать перестройку, которая стягивает сферу S^r, удовлетворяющую этому дополнительному условию. Сфера S^r имеет в M трубчатую окрестность B со структурой произведения: B имеет вид $S^r \times E^{n-r}$, а граница B есть $S^r \times S^{n-r-1}$.

как может возникнуть такая ситуация (это нужно как для доказательства сформулированного утверждения, так и при его применении).

Строго говоря, Уоллес не доказывает сформулированного утверждения, потому что в последующих рассуждениях не уделено никакого внимания гладкости. (Кстати, «клетки» теперь, как правило, из-за «углов» на своих краях будут не диффеоморфны шару, а только гомеоморфны.) Невнимание к гладкости «мстит за себя» довольно неожиданным образом: не только не получается диффеоморфизма между пленкой и $M \times I$ (это-то понятно), но и при построении гомеоморфизма встречаются трудности (см. следующую сноску).

Тем не менее ознакомление со следующими несколькими страницами очень полезно, ибо дает ясную геометрическую картину того, как «взаимно сокращаются» перестройки ϕ и ϕ'. (Быть может, вся книга писалась ради этих именно страниц! Надо только ясно отдавать себе отчет, что здесь доказано, а о чем лишь рассказано.) Читателю, вероятно, покажется правдоподобным, что их содержание можно «подправить», позаботившись о гладкости, и получить в итоге доказательство диффеоморфности. Это действительно можно сделать, но это довольно громоздкое дело (более громоздкое, чем аналогичная корректировка § 6). Полное доказательство имеется в книжке Милнора [24*] (теорема 5.4) и занимает 15 страниц, хотя Милнор проводит рассуждения не в терминах наглядных геометрических операций (выбросим, склеим...), а на более удобном для «наведения гладкости» языке функций и векторных полей.

Я немного изменил текст этого раздела, надеясь сделать его более ясным. Основное изменение состоит в том, что я вставил три абзаца, где, если можно так выразиться, резюмируется экспозиция предстоящей драмы — еще раз упомянуто о всех тех множествах в M и M', которые будут участвовать в дальнейших построениях, и об их взаимном расположении.

Наконец, обращаю внимание, что при переходе от функции с несколькими минимумами к функции с одним минимумом (лемма 7.1) фактически происходит сокращение перестроек типа — 1 и 0. Этот пример, как и тот, с которого начинается данный раздел, полезно проанализировать в свете последующих построений. — *Прим. ред.*

Предположим, что клетку E_0^{r+1} можно подправить путем малого шевеления так, чтобы ее пересечение с границей окрестности B имело вид $S^r \times \{p\}$, где p — точка на S^{n-r-1}. Сейчас нам будет удобнее считать, что клетка E_0^{r+1} содержится в $M \setminus B$; тогда ее граница — сфера $S^r \times \{p\}$ — будет лежать на общей границе B и $M \setminus B$.

Пусть M' — результат преобразования M при помощи перестройки ϕ. Чтобы построить M', мы добавляем $E^{r+1} \times S^{n-r-1}$ в $M \setminus B$ и подходящим образом отождествляем граничные точки. В частности, клетки $E^{r+1} \times \{p\}$ и E_0^{r+1} склеиваются вдоль своих границ, образуя сферу S^{r+1} в M'. Предположим, что выполнено дополнительное условие: сфера S^{r+1} прямо вложена в M'. Можно показать, что это будет так, если представление окрестности B в виде прямого произведения, участвующее в построении ϕ, удовлетворяет некоторым условиям, однако здесь мы не будем этого обсуждать. Разумеется, условие «S^{r+1} прямо вложена в M'» не будет автоматически выполняться во всех возможных случаях. Оно не выполняется, например, для перестройки типа 0 на сфере, не сохраняющей ориентации.

Итак, предполагая, что сфера S^{r+1} прямо вложена в M', рассмотрим ее трубчатую окрестность B', представленную в виде произведения, и пусть ϕ' — соответствующая перестройка типа $r+1$, стягивающая сферу S^{r+1}. Заметим, что если разложить S^{n-r-1} в объединение двух клеток E_1^{n-r-1} и E_2^{n-r-1}, первая из которых содержит точку p, то B' можно представить как объединение окрестности $E^{r+1} \times E_1^{n-r-1}$ клетки $E^{r+1} \times \{p\}$ в $E^{r+1} \times S^{n-r-1}$ и окрестности клетки E_0^{r+1} в $M \setminus B$. Последняя окрестность сама является n-мерной клеткой E_0^n.

До сих пор мы не рассматривали S^{n-r-1} как какую-то определенную сферу в M', однако позднее будет удобно, зафиксировав какую-нибудь точку q внутри клетки E^{r+1}, говорить о сфере $\{q\} \times S^{n-r-1} \subset \subset M'$ как о сфере S^{n-r-1}. (Это обычный прием, когда сомножитель считается вложенным в прямое произ-

ведение, например ось x — в плоскость (x, y). Конкретный выбор q в данном случае безразличен.) Тогда можно будет сказать, что перестройка, обратная к ϕ, стягивает сферу S^{n-r-1} (подробнее: она изымает из M' окрестность $E^{r+1} \times S^{n-r-1}$ этой сферы и вместо нее «вклеивает» $B = S^r \times E^{n-r}$).

Отметим своего рода симметрию между перестройкой ϕ' и перестройкой, обратной к ϕ: стягиваемые ими сферы S^{r+1} и S^{n-r-1} многообразия M' имеют ровно одну общую точку (q, p) и эта точка имеет в M' окрестность $E^{r+1} \times E_1^{n-r-1}$; сфера S^{r+1} пересекает эту окрестность по клетке $E^{r+1} \times \{p\}$, а S^{n-r-1} — по клетке E_1^{n-r-1} (бывшая $\{q\} \times E_1^{n-r-1}$); сфера S^{r+1} является объединением первой клетки (лежащей в этой окрестности) и клетки E_0^{r+1} (лежащей вне этой окрестности), а сфера S^{n-r-1} — объединением клетки E_1^{n-r-1} (лежащей в названной окрестности) и клетки E_2^{n-r-1} (лежащей вне ее). После того как мы обозначили окрестность клетки E_0^{r+1} в $M \setminus B$ (т. е. фактически, в $M' \setminus (E^{r+1} \times S^{n-r-1})$) через E_0^n, естественно обозначить окрестность клетки E_2^{n-r-1} в $M' \setminus B'$ через E_1^n.

Проследим теперь за построением пленки, реализующей последовательность перестроек: ϕ, затем ϕ'. Напомним, что пленка, реализующая перестройку, получается так: к произведению

(*) (многообразие $\setminus$ окрестность стягиваемой сферы) $\times$ $\times$ интервал

надо добавить $(n+1)$-мерную клетку и произвести определенные отождествления граничных точек; кроме того, исходное многообразие интерпретируется как одна часть края пленки, а перестроенное — как другая часть (не пересекающаяся с первой). Так как у нас будут две пленки, реализующие ϕ и ϕ', то удобно будет чуть-чуть изменить обозначения: при построении первой пленки мы будем обозначать интервал в (*) через I и считать, что $I = [0, 1]$, а при

построении второй пленки мы будем обозначать интервал через I' и считать, что $I' = [1, 2]$. (Это соответствует тому, что если M лежит в евклидовом пространстве $\mathscr{E}$, первая пленка расположена в $\mathscr{E} \times I$ (причем $\mathscr{E}$ мы естественным образом отождествляем с $\mathscr{E} \times \{0\}$) и M' получается в пересечении этой пленки с $\mathscr{E} \times \{1\}$, то вторую пленку естественно расположить в $\mathscr{E} \times I'$; тогда пленка, реализующая последовательность перестроек ϕ и ϕ', будет просто объединением этих двух пленок, как это обсуждалось в § 6. Она будет расположена в $\mathscr{E} \times I''$, где $I'' = I \cup I' = [0, 2]$, и конечным результатом перестроек ϕ, ϕ' будет ее пересечение с $\mathscr{E} \times \{2\}$. Мы будем доказывать, что она гомеоморфна $M \times I''$.)

Далее, пленка, реализующая перестройку ϕ, получается добавлением к $(M \setminus B) \times I$ $(n+1)$-мерной клетки E с надлежащим отождествлением граничных точек. Пересечение клетки E с M равно B, тогда как ее пересечение с M' есть множество $E^{r+1} \times S^{n-r-1}$, добавляемое к $M \setminus B$ при построении ϕ. С другой стороны, пленка, реализующая ϕ', получается добавлением к $(M' \setminus B') \times I'$ $(n+1)$-мерной клетки E', пересечение которой с M' равно B'. Поэтому пересечение клеток E и E' совпадает с пересечением множеств B' и $E^{r+1} \times S^{n-r-1}$. Это пересечение можно записать как $E^{r+1} \times E_1^{n-r-1}$ (см. замечание, сделанное выше о строении окрестности B'). Существенно то, что это n-мерная клетка. Таким образом, $(n+1)$-мерные клетки E и E' пересекаются по n-мерной клетке, лежащей на границе каждой из них. Отсюда следует, что $E \cup E'$ есть $(n+1)$-мерная клетка.

Замечание[1]). Читателю рекомендуется, прежде всего, изобразить на рисунке склеивание двух двумерных или трехмерных клеток E, E' по одномерной, соответственно двумерной, клетке $K = \Sigma \cap \Sigma'$, где Σ и Σ' — границы E и E', и убедиться, что получается снова клетка. Нетрудно сообразить, что этот факт тесно связан с таким: в данном случае $\Sigma \setminus K$ и $\Sigma' \setminus K$ — тоже клетки.

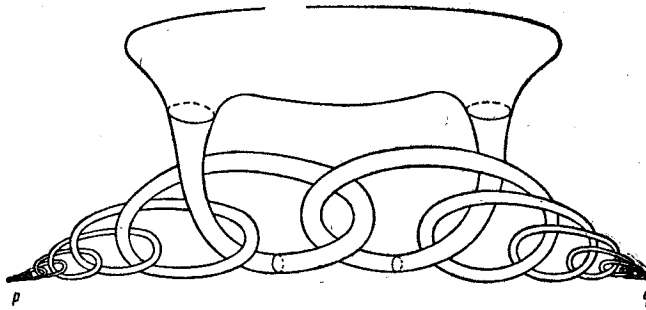
---

[1]) Добавлено редактором перевода. — *Прим. ред.*

Вероятно, довольно неожиданным покажется следующее предостережение: при $n \geqslant 3$ на n-мерной сфере S^n существует такое множество K, гомеоморфное шару

$$D^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \sum x_i^2 \leqslant 1\},$$

что $S^n \setminus K$ не гомеоморфно $\operatorname{Int} D^n$. Перефразировка: при $n \geqslant 3$ в евклидовом n-мерном пространстве R^n существует гомеоморфное сфере S^{n-1} множество, делящее R^n на такие две области, что замыкание внутренней области гомеоморфно D^n, но внешняя не гомеоморфна $R^n \setminus D^n$. Этот монстр заслуживает того, чтобы на него посмотреть:



(Каждое щупальце образует бесконечное число петель, стягивающихся к одной точке.) Заметим, что нарушение гладкости в «концах щупалец» является, в некотором смысле, более сильным, чем то, которое бывает связано с наличием «углов».

С другой стороны, сравнительно легко доказать, что $E \cup E'$ будет клеткой при гладких E, E', K. Впрочем, та негладкость, которая возникает при построениях этого раздела, как и в § 6, связана только с появлением «углов»; *такая* негладкость еще не мешает, но в общем случае это доказывается сложнее.

Далее будут еще два места, где можно сделать аналогичное замечание: во-первых, построение клетки E''; во-вторых, когда определенная часть границы E'' представится в виде $S^{n-1} \times I''$ и мы захотим продолжить это представление до представления $E'' = D^n \times I''$. Когда имеется всего два-три излома во вполне определенных местах, то можно рассчитывать, что удастся придумать короткое рассуждение, учитывающее специфику именно данных изломов; однако если в довольно длинном построении углы возникают на каждом шагу, то к концу их накопится довольно много и они будут расположены в самых разных частях фигуры. Тогда ничего иного не остается делать, кроме как считать, что мы рассматриваем «общий» случай «фигур с углами», а это значит развить целую теорию с точными определениями, леммами и тому подобным. Проще все время «сглаживать» углы.

Теперь мы добавим к $E \cup E'$ еще несколько кусков так, что в результате по-прежнему получится $(n+1)$-мерная клетка. Сначала добавим множество $E_0^n \times I$, лежащее в $(M \setminus B) \times I$; здесь E_0^n — как и раньше, окрестность клетки E_0^{r+1} в $M \setminus B$. Множество $E_0^n \times I$ пересекает $E \cup E'$ по двум множествам: первое — $E_0^n \times \{1\}$ (это пересечение с E'), а второе имеет вид $S^r \times E_1^{n-r-1} \times I$ (это пересечение с E; оно возникает из-за того, что пересечение E_0^n с B имеет вид $S^r \times E_1^{n-r-1}$). Теперь легко видеть, что объединение $E_0^n \times I$ с $E \cup E'$ по-прежнему является $(n+1)$-мерной клеткой.

Относительно доказательства последнего утверждения укажем следующее. Пусть E^{n+1} есть $(n+1)$-мерная клетка, ограниченная сферой S^n, а K — любое n-мерное многообразие с краем, лежащее в S^n. Тогда объединение E^{n+1} и $K \times I$, в котором точки K в E^{n+1} отождествляются с точками множества $K \times \{0\}$ в $K \times I$, является $(n+1)$-мерной клеткой. Это почти тривиально. Наша ситуация немножко сложнее: в крае многообразия K имеется такое $(n-1)$-мерное подмногообразие L, что S^n содержит множество $L \times I$, часть $L \times \{0\}$ которого отождествляется с L, а остальная часть с K не пересекается; это множество $L \times I$ в S^n отождествляется с множеством $L \times I$ в $K \times I$. Надо показать, что в результате по-прежнему получается $(n+1)$-мерная клетка.

Теперь заметим, что точки, только что добавленные к $E \cup E'$, все содержатся в пленке, реализующей перестройку ϕ. Напомним также, что существует некая симметрия между перестройкой ϕ' и перестройкой, обратной к ϕ; об этом уже говорилось. Еще одно множество точек, которое мы сейчас добавим к $E \cup E'$, лежит в пленке, реализующей ϕ', и выступает по отношению к перестройке, обратной к ϕ', в той же роли, в какой выступает уже добавленное нами множество $E_0^n \times I$ по отношению к перестройке ϕ. А именно, мы добавим множество вида $E_1^n \times I'$, где

E_1^n — уже упоминавшаяся окрестность клетки E_2^{n-r-1} (второй половины сферы S^{n-r-1}) в $M' \setminus B'$. При этом граничные точки снова отождествятся так, что в результате получится $(n+1)$-мерная клетка.

Обозначим через E'' $(n+1)$-мерную клетку, полученную добавлением к $E \cup E'$ двух только что описанных множеств, и посмотрим, что останется от пленки, реализующей перестройки ϕ и ϕ', после удаления E''. То, что останется от пленки, реализующей ϕ, представляет собой произведение $(M \setminus B) \times I$, из которого выброшено множество $E_0^n \times I$. Результат имеет вид $N \times I$, где $N = M \setminus B \setminus E_0^n$. Заметим, что $N \times \{1\}$ есть дополнение в M' к окрестностям сфер S^{n-r-1} и S^{r+1}. Аналогично, дополнение к E'' в пленке, реализующей ϕ', имеет вид $N' \times I'$. Но так как оно пересекается с M' по тому же множеству, что и $N \times I$, N' будет равно $N \times \{1\}$. Таким образом, дополнение к E'' в общей пленке перестроек ϕ, ϕ' имеет вид $N \times I''$. Кроме того, структура произведения на $N \times I''$ индуцирует структуру произведения на части границы E'', остальная же часть состоит из двух n-мерных клеток, а именно клетки $B \cup E_0^n$ в исходном многообразии M и аналогичного множества на многообразии, полученном в результате последовательного проведения перестроек ϕ и ϕ'. Эту структуру произведения можно продолжить до структуры на всей клетке E'', которая тогда представится в виде произведения отрезка I'' на n-мерную клетку, и если теперь мы соединим это E'', представленное как произведение, с произведением $N \times I''$, то окажется, что пленка, реализующая последовательность перестроек ϕ, ϕ', представляется в виде произведения $M \times I''$. В частности, это означает, что последовательное выполнение перестроек ϕ и ϕ' дает тождественное преобразование многообразия M.

Если перестройки ϕ и ϕ' связаны так, как описано выше, то мы будем говорить, что перестройка ϕ' *компенсирует* перестройку ϕ. Суммируя наши результаты, можно сказать, что при последовательном выполнении перестройки и компенсирующей ее

перестройки многообразие M не меняется, а пленка, реализующая эти две перестройки, имеет вид $M \times I$.

Приложение к трехмерным многообразиям

Из результата предыдущего раздела вытекает интересное следствие, относящееся к строению ориентируемого трехмерного многообразия.

Сначала заметим, что, вообще, если ϕ — сферическая перестройка типа r на M, удовлетворяющая условию предыдущего раздела, то ϕ преобразует M в M', а компенсирующая перестройка ϕ' преобразует M' обратно в M. Но это означает, что перестройка, обратная к ϕ', преобразует M в M', причем тип этой перестройки равен $n-r-2$. Другими словами, если многообразие M превратилось в M' в результате перестройки типа r, удовлетворяющей условию предыдущего раздела, то M можно также превратить в M' некоторой перестройкой типа $n-r-2$.

Пусть теперь M — компактное ориентируемое трехмерное многообразие (связное и без края). Существует теорема [1]), утверждающая, что каждое такое многообразие является краем некоторого ориентируемого четырехмерного многообразия (см. [51]). Мы можем удалить из этого четырехмерного многообразия четырехмерную клетку; получится многообразие, край которого является несвязным объединением многообразия M и трехмерной сферы. Следовательно (теорема 6.3), можно получить M из сферы при помощи конечного числа сферических перестроек, причем все перестройки типов 0 и 2 будут сохранять ориентацию [2]). Каждая ориентируемая перестройка

[1]) Впервые доказанная В. А. Рохлиным. — *Прим. ред.*

[2]) В данном случае перестройка ϕ', обратная к перестройке ϕ типа 2, является перестройкой типа 0, и мы говорим, что ϕ сохраняет ориентацию, если ϕ' сохраняет ориентацию. Сохранение ориентации при всех перестройках следует из того, что в данном случае можно «согласованно» ориентировать все многообразия уровня функции, соответствующей перестройке. Для этого надо воспользоваться ориентацией пленки и тем, что для любой ее некритической точки в касательном пространстве к пленке имеется однозначно выделенный луч, перпендикулярный к многообразию уровня и направленный в сторону возрастания функции. — *Прим. ред.*

типа 0 заведомо удовлетворяет условию предыдущего раздела, так как сфера S^0, стягиваемая такой перестройкой, является границей клетки E', а концы этой клетки в процессе перестройки соединяются, образуя прямо вложенную окружность. Поэтому, следуя сделанному выше замечанию, мы можем заменить каждую перестройку типа 0 на пути от S^3 до M перестройкой типа 1. Перестройки типа 2 обратны к перестройкам типа 0, так что их тоже можно заменить перестройками типа 1 (в данном случае перестройка, обратная к перестройке типа 1, также имеет тип 1). Следовательно, данное многообразие M получается из трехмерной сферы конечным числом перестроек типа 1.

Описывая явно действие перестройки типа 1, мы приходим к следующей теореме [1]):

Теорема 8.1. *Ориентируемое компактное трехмерное многообразие (связное и без края) можно получить из трехмерной сферы, если вырезать из нее конечное число непересекающихся сплошных торов (множеств вида $S^1 \times E$) и заполнить получившиеся полости новыми сплошными торами, подходящим способом отождествляя границы.*

Отметим, что граница каждой полости имеет вид $S^1 \times S^1$, и существует на самом деле бесконечное число способов отождествить ее с границей сплошного тора; поэтому существует бесконечное число различных построений такого сорта. Однако нелегко решить вопрос о том, когда два таких различных построения приведут к одинаковому результату. Для этого в первую очередь понадобилось бы решение проблемы Пуанкаре. Гипотеза Пуанкаре заключается в том, что всякое ориентируемое трехмерное многообразие, на котором любую окружность можно стянуть в точку, является на самом деле трехмерной сферой. Она не доказана и не опровергнута.

---

[1]) Принадлежащей Дену, который доказывал ее иначе (это было задолго до появления теоремы Рохлина). — *Прим. ред.*

Посвящается

Хайнцу Хопфу

Дж. МИЛНОР

Топология с дифференциальной точки зрения

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эти лекции были прочитаны в декабре 1963 г. в университете штата Вирджинии при поддержке Пейдж-Барбуровского лекционного фонда[1]). В них представлены некоторые темы из начальных разделов топологии, сконцентрированные вокруг введенного в 1912 г. Брауэром определения степени отображения. Используемые методы, однако, — это методы дифференциальной топологии, а не комбинаторные методы Брауэра.

Центральную роль играют понятие регулярного значения и теорема Сарда и Брауна, утверждающая, что каждое гладкое отображение имеет регулярные значения.

Для упрощения изложения все многообразия считаются бесконечно дифференцируемыми и явно вложенными в евклидово пространство. Начальные сведения из теоретико-множественной топологии и теории функций действительного переменного предполагаются известными и используются без доказательств.

Я хотел бы выразить благодарность Дэвиду Уиверу, чья преждевременная смерть опечалила всех нас. Его превосходные записи сделали возможным появление этой книги.

Дж. Милнор

Принстон, Нью-Джерси

---

[1]) В американском издании сообщаются некоторые сведения об этом фонде: он называется по имени своих основателей и предназначен для чтения в университете Вирджинии циклов лекций выдающимися деятелями в какой-либо отрасли науки. — *Прим. ред.*

§ 1. ГЛАДКИЕ МНОГООБРАЗИЯ И ГЛАДКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Сначала объясним некоторые обозначения и термины: R^k обозначает k-мерное евклидово пространство; таким образом, точка $x \in R^k$ — это набор k действительных чисел

$$x = (x_1, \ldots, x_k).$$

Пусть $U \subset R^k$ и $Y \subset R^l$ — открытые множества. Отображение f множества U в V (будем писать $f\colon U \to V$) называется *гладким*, если все частные производные $\partial^n f / \partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_n}$ существуют и непрерывны.

Более общо, пусть $X \subset R^k$ и $Y \subset R^l$ — произвольные подмножества евклидовых пространств. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *гладким*, если для любой точки $x \in X$ существуют открытое множество $U \subset R^k$, содержащее x, и гладкое отображение $F\colon U \to R^l$, совпадающее с f на $U \cap X$ [1]).

Заметим, что если отображения $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ гладкие, то композиция $g \circ f\colon X \to Z$ тоже будет гладким отображением. Тождественное отображение произвольного множества X автоматически является гладким.

Определение. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *диффеоморфизмом*, если f гомеоморфно [2])

---

[1]) Определение понятия «функция, гладкая на подмножестве евклидова пространства» у Милнора на первый взгляд кажется более широким, чем у Уоллеса (определения 2.2, 2.3), но с помощью подходящего разбиения единицы ([30], стр. 22, теорема 1) можно доказать их эквивалентность. Впрочем, для дальнейшего это не важно. — *Прим. ред.*

[2]) Отображение $f\colon X \to Y$ называется *гомеоморфизмом* множеств X и Y, если $f(X) = Y$, отображение f взаимно однозначно и как f, так и обратное к нему отображение f^{-1} непрерывны. — *Прим. ред.*

отображает X на Y, и оба отображения f и f^{-1} гладкие[1]).

Мы можем приблизительно охарактеризовать предмет дифференциальной топологии, сказав, что она изучает те свойства множества $X \subset R^k$, которые инвариантны относительно диффеоморфизмов.

Однако мы не хотим рассматривать совершенно произвольные множества X. Следующее определение выделяет особенно интересный и полезный класс.

Определение[2]). Подмножество $M \subset R^k$ называется *гладким многообразием размерности* m (или *гладким* m*-мерным многообразием*), если для каждой точки $x \in M$ существует окрестность $W \cap M$, которая диффеоморфна открытому подмножеству U евклидова пространства R^m.

Любой данный диффеоморфизм $g\colon U \to W \cap M$ называется *параметризацией* области $W \cap M$. (Обратный диффеоморфизм $W \cap M \to U$ называется *системой координат на* $W \cap M$.)

Иногда нам понадобится рассматривать многообразия размерности нуль. По определению M — *нульмерное* многообразие, если каждая точка $x \in M$ имеет окрестность $W \cap M$, состоящую только из нее самой.

Примеры. Единичная сфера S^2, состоящая из всех точек $(x, y, z) \in R^3$, удовлетворяющих условию $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, является гладким многообразием размерности 2. Действительно, диффеоморфизм

$$(x, y) \to \left(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}\right) \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 < 1$$

[1]) Согласно определению гладкости, если $x \in X \subset R^k$ и $y \in Y \subset R^l$, то существуют такие гладкие отображения $g\colon U \to R^l$ и $h\colon V \to R^k$, где U и V — некоторые окрестности точек x и y в R^k и R^l, что совпадают ограничения

$$g \mid U \cap X = f \mid U \cap X, \quad h \mid V \cap Y = f^{-1} \mid V \cap Y.$$

Обратите внимание, что g и h уже не обязаны быть обратными по отношению друг к другу. — *Прим. ред.*

[2]) С более общей точки зрения (см. Уоллеса), здесь определяются гладкие подмногообразия евклидова пространства. — *Прим. ред.*

параметризует область $z > 0$ на S^2. Поменяв ролями x, y, z и изменив знаки у переменных, мы получим подобные же параметризации областей $x > 0$, $y > 0$, $x < 0$, $y < 0$ и $z < 0$, которые покрывают сферу. Следовательно, S^2 — гладкое многообразие.

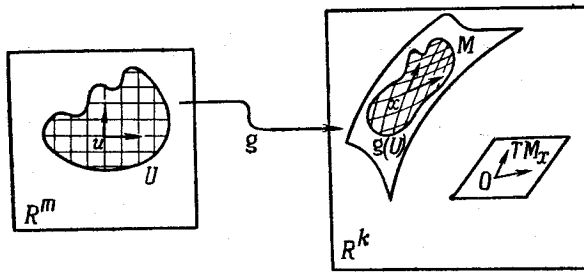


Рис. 1. Параметризация области на M.

Вообще сфера $S^{n-1} \subset R^n$, состоящая из всех точек $(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих условию $\sum x_i^2 = 1$, является гладким многообразием размерности $n - 1$. Например, $S^0 \subset R^1$ — многообразие, состоящее ровно из двух точек.

Множество всех точек $(x, y) \in R^2$, для которых $x \neq 0$ и $y = \sin(1/x)$, дает несколько более «дикий» пример гладкого многообразия.

Касательные пространства и производные

Для того чтобы определить понятие *производной*[1]) гладкого отображения $f\colon M \to N$, где M и N — гладкие многообразия, мы сначала свяжем с каждой точкой $x \in M \subset R^k$ линейное подпространство $TM_x \subset R^k$ размерности $m = \dim M$, называемое *касательным пространством* многообразия M в точке x. Тогда df_x будет некоторым линейным отображением TM_x в TN_y, где $y = f(x)$. Элементы векторного пространства TM_x называются *касательными векторами* к M в точке x.

[1]) Вместо производной столь же часто говорят о *дифференциале*. — *Прим. ред.*

Интуитивно можно представлять себе m-мерную плоскость в R^k, которая наилучшим образом аппроксимирует M вблизи x. Тогда TM_x — параллельная ей плоскость, проходящая через начало координат. (Ср. рис. 1 и 2.) Аналогично можно представлять себе неоднородное линейное отображение касательной плоскости в точке x в касательную плоскость в точке y,

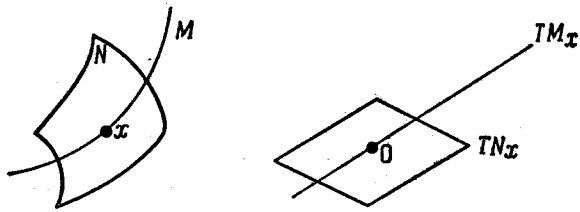


Рис. 2. Касательные пространства подмногообразия евклидова пространства.

которое лучше всего аппроксимирует f. После параллельного переноса обеих плоскостей в начало координат мы получаем df_x.

Прежде чем дать настоящее определение, мы должны изучить специальный класс отображений одного открытого множества в другое. Для любого открытого множества $U \subset R^k$ *касательное пространство* TU_x определяется как все векторное пространство R^k. Для произвольного гладкого отображения $f\colon U \to V$ *производная*

$$df_x\colon R^k \to R^l$$

определяется формулой

$$df_x(h) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t},$$

где $x \in U$, $h \in R^k$. Ясно, что $df_x(h)$ — линейная функция от h. (В действительности df_x — это такое линейное отображение, которое соответствует матрице $(\partial f_i/\partial x_j)_x$ порядка $l \times k$, составленной из первых частных производных, вычисленных в точке x.)

Отметим два основных свойства операции дифференцирования:

1 (производная сложной функции, или цепное правило). *Если* $f\colon U \to V$ *и* $g\colon V \to W$ — *гладкие отображения и* $f(x) = y$, *то*

$$d(g \circ f)_x = dg_y \circ df_x.$$

Другими словами, каждому коммутативному треугольнику[1]) гладких отображений

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dr, "g"] & \\ U \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g \circ f"'] & & W \end{tikzcd}$$

где U, V и W — открытые подмножества векторных пространств R^k, R^l и R^m, соответствует коммутативный треугольник линейных отображений

$$\begin{tikzcd} & R^l \arrow[dr, "dg_y"] & \\ R^k \arrow[ur, "df_x"] \arrow[rr, "d(g \circ f)_x"'] & & R^m \end{tikzcd}$$

---

[1]) Пусть имеется диаграмма, состоящая из вершин и соединяющих их стрелок, причем каждой вершине сопоставлено определенное множество, а каждой стрелке, соединяющей две вершины, сопоставлено отображение соответствующих множеств. Например,

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] & C \arrow[dr, "i"] \arrow[d, "h"] & \\ & & E \\ A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "k"] & D \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd}$$

Диаграмма называется *коммутативной*, если всякий раз, когда от одной ее вершины к другой можно перейти по двум разным путям, двигаясь все время по стрелкам, совпадают композиции соответствующих отображений в соответствующем порядке (первым действует отображение, соответствующее первой стрелке пути, и т. д.). Например, коммутативность изображенной выше диаграммы означает, что

$$h \circ g \circ f = k, \qquad i = j \circ h$$

(откуда уже следует $j \circ k = i \circ g \circ f = j \circ h \circ g \circ f$). — *Прим. ред.*

2. *Если I — тождественное отображение множества U, то dI_x — тождественное отображение пространства R^k. Более общо, если $U \subset U'$ — открытые множества и*

$$i\colon U \to U'$$

— отображение вложения[1]*, то di_x также является тождественным отображением пространства R^k.*

Заметим также следующее:

3. *Если $L\colon R^k \to R^l$ — линейное отображение, то*

$$dL_x = L.$$

В качестве простого следствия этих двух свойств мы имеем такое утверждение.

Утверждение. *Если f — диффеоморфизм открытого множества $U \subset R^k$ на открытое множество $V \subset R^l$, то k должно равняться l и линейное отображение*

$$df_x\colon R^k \to R^l$$

должно быть невырожденным.

Доказательство. Композиция $f^{-1} \circ f$ является тождественным отображением множества U. Следовательно, $d(f^{-1})_y \circ df_x$ — тождественное отображение пространства R^k. Аналогично, $df_x \circ d(f^{-1})_y$ — тождественное отображение пространства R^l. Таким образом, линейное отображение df_x имеет двустороннее обратное, откуда немедленно следует, что $k = l$.

Верно и частичное обращение этого утверждения. Пусть $f\colon U \to R^k$ — гладкое отображение, причем U открыто в R^k.

Теорема об обратной функции. *Если производная $df_x\colon R^k \to R^l$ невырожденна, то f диффеоморфно отображает любое достаточно малое открытое множество U', содержащее x, на открытое множество $f(U')$.*

---

[1]) То есть отображение, сопоставляющее точке $x \in U$ ту же самую точку, рассматриваемую как элемент множества U'. — *Прим. ред.*

(Смотри Апостол [4, стр. 144] или Дьедонне [13, стр. 311].)

Заметим, что f в целом может и не быть взаимно однозначным, даже если при всех x производная df_x невырожденна. (Поучительный пример дается отображением $z \to \exp z$ комплексной плоскости в себя.)

Теперь мы определим *касательное пространство* TM_x для произвольного гладкого многообразия $M \subset R^k$. Выберем параметризацию

$$g\colon U \to M \subset R^k$$

окрестности $g(U)$ точки x на M, $g(u) = x$. Здесь U — открытое подмножество из R^m. Если рассматривать g как отображение множества U в R^k, то будет определена производная

$$dg_u\colon R^m \to R^k.$$

Положим TM_x равным образу $dg_u(R^m)$ (см. рис. 1).

Мы должны доказать, что это построение не зависит от выбора параметризации g. Пусть $h\colon V \to M \subset R^k$ — другая параметризация окрестности $h(V)$ точки x на M, и пусть $v = h^{-1}(x)$. Тогда $h^{-1} \circ g$ диффеоморфно отображает некоторую окрестность U_1 точки u на окрестность V_1 точки v. Коммутативная диаграмма гладких отображений открытых множеств

$$\begin{tikzcd} & R^k & \\ U_1 \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "h^{-1}\circ g"'] & & V_1 \arrow[ul, "h"'] \end{tikzcd}$$

влечет за собой коммутативную диаграмму линейных отображений

$$\begin{tikzcd} & R^k & \\ R^m \arrow[ur, "dg_u"] \arrow[rr, "\cong", "d(h^{-1}\circ g)_u"'] & & R^m \arrow[ul, "dh_v"'] \end{tikzcd}$$

откуда немедленно следует, что

$$\operatorname{Im}(dg_u) = \operatorname{Im}(dh_v).$$

Таким образом, TM_x корректно определено.

Теперь мы докажем, что TM_x является *m-мерным векторным пространством*. Ввиду гладкости отображения

$$g^{-1}\colon\ g(U) \to U$$

можно выбрать открытое множество W, содержащее x, и гладкое отображение $F\colon W \to R^m$, совпадающее с g^{-1} на $W \cap g(U)$. Полагая $U_0 = g^{-1}(W \cap g(U))$, мы получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dr, "F"] & \\ U_0 \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "\text{вложение}"] & & R^m \end{tikzcd}$$

и связанную с ней коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} & R^k \arrow[dr, "dF_x"] & \\ R^m \arrow[ur, "dg_u"] \arrow[rr, "\text{тождественное}"] & & R^m \end{tikzcd}$$

Из последней диаграммы, очевидно, следует, что ранг отображения dg_u равен m. Следовательно, размерность его образа TM_x равна m.

Пусть $M \subset R^k$ и $N \subset R^l$ — два гладких многообразия, а

$$f\colon\ M \to N$$

— гладкое отображение и $f(x) = y$. Мы сейчас следующим образом определим *производную*

$$df_x\colon\ TM_x \to TN_y.$$

Так как f — гладкое отображение, то существуют содержащее точку x открытое множество W и глад-

кое отображение $F\colon W \to R^l$, совпадающее с f на $W \cap M$. *Определим* $df_x(v) = dF_x(v)$ *для всех* $v \in TM_x$.

Для обоснования корректности этого определения необходимо доказать, что $dF_x(v)$ принадлежит пространству TN_y и не зависит от конкретного выбора отображения F.

Сначала выберем параметризации

$$g\colon U \to M \subset R^k \quad \text{и} \quad h\colon V \to N \subset R^l$$

окрестностей $g(U)$ и $h(V)$ точек x и y соответственно. Уменьшив U, если потребуется, мы можем считать, что $g(U) \subset W$ и что f отображает $g(U)$ в $h(V)$. Таким образом, корректно определено гладкое отображение

$$h^{-1} \circ f \circ g\colon U \to V.$$

Рассмотрим коммутативную диаграмму гладких отображений открытых множеств

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "F"] & R^l \\ U \arrow[u, "g"] \arrow[r, "h^{-1}\circ f\circ g"] & V \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

Переходя к производным, мы получим коммутативную диаграмму линейных отображений

$$\begin{tikzcd} R^k \arrow[r, "dF_x"] & R^l \\ R^m \arrow[u, "dg_u"] \arrow[r, "d(h^{-1}\circ f\circ g)_u"] & R^m, \arrow[u, "dh_v"'] \end{tikzcd}$$

где $u = g^{-1}(x)$, $v = h^{-1}(y)$.

Из этой диаграммы немедленно следует, что dF_x переводит $TM_x = \operatorname{Im}(dg_u)$ в $TN_y = \operatorname{Im}(dh_v)$. Кроме того, отображение df_x не зависит от конкретного выбора отображения F, так как мы можем получить то же самое линейное отображение, обходя основание этой диаграммы, а именно:

$$df_x = dh_v \circ d(h^{-1} \circ f \circ g)_u \circ (dg_u)^{-1}.$$

Тем самым доказана корректность определения производной.

Как и выше, операция дифференцирования обладает двумя основными свойствами:

1 (цепное правило). *Если* $f\colon M \to N$ *и* $g\colon N \to P$ — *гладкие отображения и* $f(x) = y$, *то*

$$d(g \circ f)_x = dg_y \circ df_x.$$

2. *Если* I — *тождественное отображение многообразия* M, *то* dI_x — *тождественное отображение касательного пространства* TM_x. *Более общо, если* $M \subsetneq N$ *при помощи отображения вложения* i, *то* $TM_x \subsetneq TN_y$ *при помощи отображения вложения* di_x (см. рис. 2).

Доказательства этих свойств очевидны.

Как и раньше, эти два свойства дают следующее

Утверждение. *Если* $f\colon M \to N$ — *диффеоморфизм, то* $df_x\colon TM_x \to TN_y$ — *изоморфизм векторных пространств. В частности, размерность многообразия* M *должна быть равна размерности многообразия* N [1]).

---

[1]) Полезно иметь в виду, что отображение $f\colon M \to N$ гладких многообразий $M \subset R^k$ и $N \subset R^l$ будет гладким тогда и только тогда, когда будут гладкими его представления в локальных координатах; последнее означает, что если $g\colon U \to M$ и $h\colon V \to N$ — две параметризации, причем $f \circ g(U) \subset h(V)$, то отображение $h^{-1} \circ f \circ g\colon U \to V$ — гладкое. Действительно, доказывая корректность определения производной, Милнор попутно отмечает гладкость отображения $h^{-1} \circ f \circ g$ для гладких f. Обратно, пусть известно, что представления отображения $f\colon M \to N$ в локальных координатах гладкие. Для $x \in M$ мы должны указать такую окрестность W в R^k и гладкое отображение $\psi\colon W \to R^l$, что $\psi | W \cap M = f | W \cap M$. По определению параметризации существуют такие окрестность $W \ni x$ и гладкое отображение $\varphi\colon W \to R^m$, что $\varphi | W \cap M = g^{-1} | W \cap M$. Можно считать, что $\varphi(W) \subset U$. Рассматривая отображения

$$\begin{array}{ccccccccc} W & \xrightarrow{\varphi} & U & \xrightarrow{g} & g(U) & \xrightarrow{f} & h(V) & \xrightarrow{h^{-1}} & V \xrightarrow{h} R^l \\ & & & & \cap & & \cap & & \\ & & & & M & \xrightarrow{f} & N & & \end{array}$$

легко понять, что за ψ можно взять композицию $h \circ (h^{-1} \circ f \circ g) \circ \varphi$; ее гладкость следует из гладкости отображений φ, $h^{-1} \circ f \circ g$ и h.

Обычно гладкость отображения одного гладкого многообразия в другое определяется именно как гладкость представления данного отображения в локальных координатах. Милнор далее фактически тоже пользуется этим определением. — *Прим. ред.*

Регулярные значения

Пусть $f\colon M \to N$ — гладкое отображение многообразий одинаковой размерности[1]). Назовем точку $x \in M$ *регулярной*, если дифференциал df_x невырожден. Из теоремы об обратной функции следует, что в этом случае f диффеоморфно отображает некоторую окрестность точки $x \in M$ на открытое множество многообразия N. Точка $y \in N$ называется *регулярным значением*, если $f^{-1}(y)$ состоит только из регулярных точек (в частности, если $f^{-1}(y)$ пусто).

Если дифференциал df_x вырожден, то x называется *критической точкой* отображения f, а ее образ $f(x)$ — *критическим значением*. Таким образом, любая точка $y \in N$ является либо регулярным, либо критическим значением в зависимости от того, содержит или не содержит $f^{-1}(y)$ критическую точку.

Отметим, что *если M компактно, а $y \in N$ — регулярное значение, то $f^{-1}(y)$ — конечное (возможно, пустое) множество точек.*

Множество $f^{-1}(y)$, будучи замкнутым подмножеством компакта M, само является компактом; кроме того, $f^{-1}(y)$ дискретно[2]), поскольку f взаимно однозначно в окрестности любой точки $x \in f^{-1}(y)$.

Для гладкого отображения $f\colon M \to N$, где M — компакт, и регулярного значения $y \in N$ *обозначим через $\# f^{-1}(y)$ число точек в $f^{-1}(y)$*. Следует отметить, что $\# f^{-1}(y)$ локально постоянна как функция y (здесь y пробегает только регулярные значения!), т. е. *у точки y существует такая окрестность $V \subset N$, что $\# f^{-1}(y) = \# f^{-1}(y')$ для всех $y' \in V$.* [Пусть $x_1, \ldots, x_k$ — все точки из $f^{-1}(y)$; выберем попарно непересекающиеся окрестности $U_1, \ldots, U_k$ этих точек, которые диффеоморфно отображаются на окрестности $V_1, \ldots, V_k$ в многообразии N. Мы тогда можем положить

$$V = V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_k \setminus f(M \setminus \bigcup U_i).]$$

---

[1]) Это ограничение будет снято в § 2.

[2]) То есть все его точки — изолированные. — *Прим. ред.*

Основная теорема алгебры

В качестве приложения этих понятий мы докажем основную теорему алгебры: *каждый комплексный многочлен $P(z)$, отличный от константы, должен где-то обращаться в нуль.*

Для доказательства надо прежде всего перейти от плоскости комплексных чисел к компактному многообразию. Рассмотрим единичную сферу $S^2 \subset R^3$ и стереографическую проекцию

$$h_+\colon S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \to R^2 \times 0 \subset R^3$$

из «северного полюса» (0, 0, 1) сферы S^2 (см. рис. 3). Мы будем отождествлять $R^2 \times 0$ с плоскостью комплексных чисел.

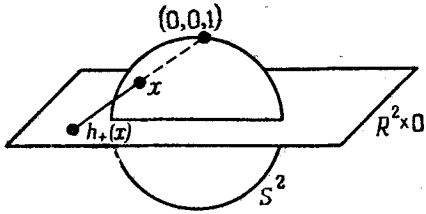


Рис. 3. Стереографическая проекция.

Полиномиальному отображению P плоскости $R^2 \times 0$ в себя соответствует отображение f сферы S^2 в себя, где

$$f(x) = h_+^{-1} \circ P \circ h_+(x) \quad \text{при} \quad x \neq (0, 0, 1),$$
$$f(0, 0, 1) = (0, 0, 1).$$

Хорошо известно, что получившееся отображение f является гладким, даже в окрестности «северного полюса». Чтобы убедиться в этом, введем стереографическую проекцию h_- из «южного полюса» (0, 0, —1) и положим

$$Q(z) = h_- \circ f \circ h_-^{-1}(z).$$

Из элементарной геометрии следует, что

$$h_+ \circ h_-^{-1}(z) = z/|z|^2 = 1/\bar{z}.$$

Если $P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_n$, $a_0 \neq 0$, то краткий подсчет показывает, что

$$Q(z) = z^n/(\bar{a}_0 + \bar{a}_1 z + \ldots + \bar{a}_n z^n).$$

Следовательно, отображение Q гладко в окрестности точки 0, поэтому отображение $f = h_-^{-1} \circ Q \circ h_-$ гладко в окрестности точки (0, 0, 1).

Теперь заметим, что f имеет только конечное число критических точек, ибо P не является локальным диффеоморфизмом только в корнях производной $P'(z) = \sum a_{n-j} j z^{j-1}$, а так как P' — не тождественный нуль, то у него существует только конечное число корней. Множество регулярных значений отображения f связно (ибо это сфера, из которой уделено конечное множество точек). Следовательно, локально постоянная функция $\# f^{-1}(y)$ должна быть постоянной на этом множестве. Так как $\# f^{-1}(y)$ не может быть нулевой всюду, то это число нигде не равно нулю. Итак, f — отображение «на», а многочлен P должен иметь корень.

§ 2. ТЕОРЕМА САРДА И БРАУНА

В общем случае нельзя, конечно, надеяться на то, что множество критических значений гладкого отображения окажется конечным. Но все-таки это множество мало в смысле, указанном в следующей теореме, которую, следуя более ранней работе А. П. Морса, в в 1942 году доказал Сард (см. [32], [25]).

Теорема. *Пусть $f\colon U \to R^n$ — гладкое отображение, определенное на открытом множестве $U \subset R^m$, а*

$$C = \{x \in U \mid \text{ранг}\, df_x < n\}.$$

Тогда образ $f(C) \subset R^n$ имеет нулевую меру Лебега [1] [2].

---

[1]) Другими словами, для любого $\varepsilon > 0$ можно покрыть $f(C)$ n-мерными кубиками, общий объем которых меньше ε.

[2]) Это было доказано Брауном в 1935 г. Этот результат был вновь открыт Дубовицким в 1953 г. и Томом в 1954 г. (см. [7], [12], [40]).

Так как множество меры нуль не может содержать внутри себя непустое открытое множество, то дополнение $R^n \setminus f(C)$ должно быть всюду плотно в R^n.

Эта теорема будет доказана в § 3. Для доказательства существенно наличие у f большого числа производных (см. Уитни [41])[1].

Нас будет интересовать главным образом случай $m \geqslant n$. Если $m < n$, то, очевидно, $C = U$. Следовательно, в этом случае теорема просто утверждает, что $f(U)$ имеет меру нуль.

Более общо, рассмотрим гладкое отображение $f\colon M \to N$ многообразия размерности m в многообразие размерности n. Обозначим через C множество всех таких $x \in M$, что производная

$$df_x\colon TM_x \to TN_{f(x)}$$

имеет ранг, меньший n (т. е. df_x не является отображением «на»). Тогда C будет называться множеством *критических точек*, $f(C)$ — множеством *критических значений*, а дополнение $N \setminus f(C)$ — множеством *регулярных значений* отображения f (это согласуется с нашими прежними определениями в случае $m = n$)[2]. Так как M можно покрыть счетным множеством

---

[1]) Требуемый класс гладкости таков: $f \in C^k$, где

$$(*) \qquad k = \max(0, m - n) + 1.$$

Именно в таком виде теорема доказана Сардом и Дубовицким. Доказательство имеется, например, в [35]. Уитни [41] и Д. Е. Меньшов показали, что предположения гладкости нельзя ослабить: в R^m существует функция класса C^{m-1} с $f(C) = R$. (Этот пример относится к случаю $n = 1$; из него нетрудно вывести существование соответствующих примеров и при бо́льших n.) Если, с другой стороны, предполагать бо́льшую гладкость, чем в (*), то, как доказано в более поздних работах Сарда и Дубовицкого, утверждение о «малости» $f(C)$ можно несколько усилить: в зависимости от m, n и класса гладкости f эту «малость» можно характеризовать в терминах так называемых r-мерных мер Хаусдорфа. Впрочем, для чисто топологических целей все эти тонкости не нужны. — *Прим. ред.*

[2]) Наконец, точка $x \in M$ — *регулярная*, если в этой точке ранг $df_x = n$. Следует предупредить, что многие авторы исполь-

окрестностей, каждая из которых диффеоморфна открытому подмножеству из R^m, то мы имеем

Следствие (Браун). *Множество регулярных значений гладкого отображения $f\colon M \to N$ всюду плотно в N.*

Для того чтобы использовать это замечание, нам необходима следующая

Лемма 1. *Если $f\colon M \to N$ — гладкое отображение многообразия размерности m в многообразие размерности n, а $y \in N$ — регулярное значение отображения f, то множество $f^{-1}(y) \subset M$ — гладкое многообразие размерности $m-n$* [1].

Доказательство. Пусть $x \in f^{-1}(y)$. Так как y — регулярное значение, то дифференциал df_x должен отображать TM_x на TM_y. Поэтому ядро $\mathfrak{N} \subset TM_x$ отображения будет $(m-n)$-мерным векторным пространством.

Пусть $M \subset R^k$. Выберем линейное отображение $L\colon R^k \to R^{m-n}$, невырожденное на подпространстве $\mathfrak{N} \subset TM_x \subset R^k$. Определим

$$F\colon M \to N \times R^{m-n}$$

как $F(\xi) = (f(\xi), L(\xi))$. Дифференциал dF_x, очевидно, задается формулой

$$dF_x(v) = (df_x(v), L(v)).$$

Поэтому он невырожден. Следовательно, F диффеоморфно отображает некоторую окрестность U точки x на окрестность V точки $(y, L(x))$. Отметим, что при отображении F множество $f^{-1}(y)$ является прообразом гиперплоскости $y \times R^{m-n}$. При этом F диффеоморфно отображает $f^{-1}(y) \cap U$ на $(y \times R^{m-n}) \cap V$.

зуют этот термин в другом смысле, называя регулярными те точки, где ранг $df_x = \min(m, n)$; тогда, естественно, и при $m < n$ могут быть регулярные точки. — *Прим. ред.*

[1]) Если только множество $f^{-1}(y)$ непусто. Эта тривиальная оговорка в дальнейшем часто подразумевается, но не приводится. Читателю предоставляется проследить, где она нужна, и убедиться, что по существу она ничего не меняет. — *Прим. ред.*

Это доказывает, что $f^{-1}(y)$ — гладкое многообразие размерности $m-n$.

В качестве примера мы можем дать простое доказательство того, что единичная сфера S^{m-1} является гладким многообразием. Рассмотрим функцию

$$f\colon R^m \to R, \quad f(x) = x_1^2 + \ldots + x_m^2.$$

Любое $y \neq 0$ является регулярным значением, а гладкое многообразие $f^{-1}(1)$ — это единичная сфера.

Если M' — многообразие, содержащееся в M, то, как уже было замечено, TM'_x — подпространство пространства TM_x при $x \in M'$. Тогда ортогональное дополнение подпространства TM'_x в TM_x будет $(m-m')$-мерным векторным пространством, которое называется пространством *нормальных к M' векторов (из) M в точке x.*

В частности, пусть $M' = f^{-1}(y)$, где y — регулярное значение отображения $f\colon M \to N$.

Лемма 2. *Ядро производной $df_x\colon TM_x \to TN_y$ в точности совпадает с касательным пространством $TM'_x \subset TM_x$ подмногообразия $M' = f^{-1}(y)$. Следовательно, df_x изоморфно отображает ортогональное дополнение к TM'_x на TN_y.*

Доказательство. Из диаграммы

$$\begin{array}{ccc} M' & \xrightarrow{i} & M \\ \downarrow & & \downarrow f \\ y & \longrightarrow & N \end{array}$$

мы видим, что df_x переводит подпространство $TM'_x \subset TM_x$ в нуль. Сравнение размерностей показывает, что df_x *изоморфно отображает пространство нормальных к M' векторов на TN_y.*

Многообразия с краем

Усилив предыдущие леммы, можно распространить их на случай отображений гладких «многообразий с краем». Сперва рассмотрим замкнутое полу-

пространство

$$H^m = \{(x_1, \ldots, x_m) \in R^m \mid x_m \geqslant 0\}.$$

По определению *край* ∂H^m — это гиперплоскость $R^{m-1} \times 0 \subset R^m$.

Определение. Подмножество $X \subset R^k$ называется *гладким m-мерным многообразием с краем*, если для каждого $x \in X$ существует окрестность $U \cap X$, диффеоморфная открытому подмножеству $V \cap H^m$ полупространства H^m [1]). Край ∂X — это множество всех тех точек из X, которые под действием таких диффеоморфизмов переходят в точки ∂H^m.

Не трудно показать, что ∂X — корректно определенное гладкое многообразие размерности $m-1$. *Внутренность* X многообразия с краем X, т. е. $X \setminus \partial X$, является гладким многообразием размерности m.

Касательное пространство TX_x определяется так же, как в § 1; даже если x — точка края, то TX_x — это все m-мерное векторное пространство.

Вот один из методов для построения примеров. Пусть M — многообразие без края, и пусть для функции g: $M \to R$ нуль является регулярным значением.

Лемма 3. *Множество всех $x \in M$, для которых $g(x) \geqslant 0$, является гладким многообразием с краем; край есть $g^{-1}(0)$.*

Доказательство в точности подобно доказательству леммы 1.

---

[1]) Здесь использована терминология, согласно которой открытое подмножество множества A, расположенного в евклидовом пространстве R^m, — это пересечение множества A с каким-нибудь открытым подмножеством $U \subset R^m$; такое пересечение, вообще говоря, не будет открытым подмножеством евклидова пространства. (Иногда говорят, что $A \cap U$ *относительно открыто* A.) Аналогично, если $F \subset R^m$ — замкнутое множество, то говорят, что $F \cap A$ *замкнуто* в A. (Основания для такой терминологии см. в первом параграфе Уоллеса.)

Как понимать в данном контексте термин «диффеоморфизм», ясно из сказанного в начале § 1. — *Прим. ред.*

Пример. *Единичный шар* D^m, состоящий из всех таких $x \in R^m$, что

$$1 - \sum x_i^2 \geqslant 0,$$

является гладким многообразием с краем, равным S^{m-1}.

Сейчас мы рассмотрим гладкое отображение $f\colon X \to N$ m-мерного многообразия с краем в n-мерное многообразие, причем $m > n$.

Лемма 4. *Если $y \in N$ является регулярным значением как для f, так и для ограничения $f|\partial X$, то $f^{-1}(y) \subset X$ является $(m-n)$-мерным гладким многообразием с краем. Далее, край $\partial(f^{-1}(y))$ в точности равен $f^{-1}(y) \cap \partial X$.*

Доказательство. Так как нам нужно доказать локальное свойство, то достаточно рассмотреть только частный случай — отображение $f\colon H^m \to R^n$, для которого $y \in R^n$ является регулярным значением. Пусть $\bar{x} \in f^{-1}(y)$. Если $\bar{x}$ — внутренняя точка, то, как и раньше, $f^{-1}(y)$ в окрестности точки $\bar{x}$ является гладким многообразием.

Если $\bar{x}$ — точка края, то выберем гладкое отображение $g\colon U \to R^n$, определенное всюду в некоторой окрестности U точки $\bar{x}$ в R^m и совпадающее с f на $U \cap H^m$. Уменьшив, если это необходимо, окрестность U, мы можем считать, что g не имеет критических точек. Отсюда $g^{-1}(y)$ — гладкое многообразие размерности $m-n$.

Пусть $\pi\colon g^{-1}(y) \to R$ означает проекцию на координатную ось

$$\pi(x_1, \ldots, x_m) = x_m.$$

Мы утверждаем, что 0 является регулярным значением для π. Действительно, касательное пространство к $g^{-1}(y)$ в точке $x \in \pi^{-1}(0)$ совпадает с ядром производной

$$dg_x = df_x\colon R^m \to R^n,$$

а предположение о регулярности в точке x ограничения $f|\partial X$, т. е. (в рассматриваемом частном случае) $f|\partial H^m$, гарантирует нам, что это пространство не может целиком содержаться в $R^{m-1} \times 0$. Следовательно, множество $g^{-1}(y) \cap H^m = f^{-1}(y) \cap U$, состоящее из всех таких $x \in g^{-1}(y)$, что $\pi(x) \geqslant 0$, является, согласно лемме 3, гладким многообразием с краем $\pi^{-1}(0)$. Это завершает доказательство.

Теорема Брауэра о неподвижной точке

Мы сейчас используем этот результат для доказательства леммы, являющейся ключевой для классической теоремы Брауэра о неподвижной точке. Пусть X — компактное многообразие с краем.

Лемма 5. *Не существует гладкого отображения $f\colon X \to \partial X$, которое оставляло бы каждую точку края на месте* [1]).

Доказательство (следуя Хиршу). Предположим, что такое отображение f существует. Пусть $y \in \partial X$ — регулярное значение отображения f. Так как y, конечно, является регулярным значением для тождественного отображения $f|\partial X$, то $f^{-1}(y)$ — гладкое одномерное многообразие с краем, состоящим из одной точки:

$$f^{-1}(y) \cap \partial X = \{y\}.$$

---

[1]) Подмножество $B \subset A$ называется *ретрактом* множества A, если существует непрерывное отображение $f\colon A \to B$, оставляющее каждую точку множества B на месте (пример: сторона квадрата). Это отображение называется *ретрагирующим отображением*, или *ретракцией*.

Если A, B — гладкие многообразия и ретрагирующее отображение тоже является гладким, то B можно назвать *гладким ретрактом* многообразия.

Таким образом, лемма 5 утверждает, что край компактного многообразия не является гладким ретрактом последнего. На самом деле он не является и просто ретрактом, без всяких условий гладкости. Читатель, решивший первые несколько задач, приведенных в конце книги, без труда докажет это самостоятельно. — *Прим. ред.*

Многообразие $f^{-1}(y)$ компактно, а так как компактными одномерными многообразиями являются только объединения непересекающихся окружностей[1]) и дуг[2]), то край $\partial(f^{-1}(y))$ должен состоять из четного числа точек. Это противоречие доказывает лемму.

В частности, единичный шар

$$D^n = \{x \in R^n \mid x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1\}$$

является компактным многообразием, краем которого служит сфера S^{n-1}. Следовательно, как частный случай мы доказали, что *тождественное отображение сферы S^{n-1} нельзя продолжить до гладкого отображения $D^n \to S^{n-1}$.*

Лемма 6. *Любое гладкое отображение g: $D^n \to D^n$ имеет неподвижную точку* (т. е. точку $x \in D^n$, для которой $g(x) = x$).

Доказательство. Предположим, что g не имеет неподвижной точки. Для $x \in D^n$ определим $f(x) \in S^{n-1}$ как точку сферы S^{n-1}, лежащую на соединяющей x с $g(x)$ прямой и более близкую к x, нежели к $g(x)$ (рис. 4). Тогда f: $D^n \to S^{n-1}$ — гладкое отображение и $f(x) = x$ при $x \in S^{n-1}$, что противоречит лемме 5. (В гладкости f можно убедиться, получив путем непосредственной выкладки, что $f(x) = x + tu$, где

$$u = \frac{x - g(x)}{\| x - g(x) \|}, \quad t = -x \cdot u + \sqrt{1 - x \cdot x + (x \cdot u)^2},$$

причем выражение под знаком радикала всегда положительно. Здесь и далее $\| x \|$ означает евклидову длину $\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$, а $x \cdot u$ — скалярное произведение $x_1 u_1 + \ldots + x_n u_n$.)

---

[1]) «Окружность», конечно, означает не окружность в смысле евклидовой метрики, а диффеоморфное ей одномерное многообразие, т. е. гладкую замкнутую кривую без самопересечений. — *Прим. ред.*

[2]) Доказательство дано в приложении.

Теорема Брауэра о неподвижной точке. *Любое непрерывное отображение G: $D^n \to D^n$ имеет неподвижную точку.*

Доказательство. Мы сведем эту теорему к лемме 6, аппроксимируя G гладким отображением. Согласно аппроксимационной теореме Вейерштрасса[1]), для любого $\varepsilon > 0$ существует такое полиномиальное отображение P_1: $R^n \to R^n$, что $\| P_1(x) -$

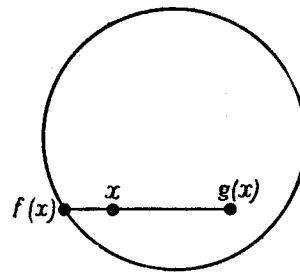


Рис. 4.

$- G(x) \| < \varepsilon$ при $x \in D^n$. Однако P_1 может переводить точки из D^n в точки, находящиеся вне D^n. Этого можно избежать, положив

$$P(x) = P_1(x)/(1 + \varepsilon).$$

Ясно, что P отображает D^n в D^n и $\| P(x) - G(x) \| < 2\varepsilon$ при $x \in D^n$.

Предположим, что $G(x) \neq x$ для всех $x \in D^n$. Тогда непрерывная функция $\| G(x) - x \|$ должна иметь на D^n минимум $\mu > 0$. Выберем, как показано выше, такое полиномиальное отображение P: $D^n \to D^n$, что $\|P(x) - G(x)\| < \mu$ при всех $x \in D^n$. Тогда P — гладкое отображение шара D^n в себя, не имеющее неподвижных точек. Это противоречит лемме 6, чем и завершается доказательство теоремы.

Использованная здесь процедура часто применяется в более общих ситуациях: чтобы доказать

[1]) См., например, Дьедонне [13, стр. 160].

некоторое утверждение о непрерывных отображениях, мы сначала доказываем этот результат для гладких отображений, а затем пытаемся использовать аппроксимационную теорему, чтобы перейти к непрерывному случаю. (См. § 8, задача 4.)

§ 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ САРДА[1])

Сначала напомним ее формулировку.

Теорема Сарда. *Пусть* $f\colon U \to R^p$ — *гладкое отображение, причем множество* U *открыто в* R^n, *и пусть* C — *множество его критических точек, т. е. множество всех тех* $x \in U$, *для которых*

$$\text{ранг}\, df_x < p.$$

Тогда $f(C) \subset R^p$ *имеет меру нуль.*

Замечание. Случай $n \leqslant p$ сравнительно прост (см. де Рам [30, стр. 30]). Однако мы дадим универсальное доказательство, в котором этот случай выглядит столь же плохим, как и остальные.

Доказательство будет вестись индукцией по n. Заметим, что утверждение имеет смысл при $n \geqslant 0$ и $p \geqslant 1$. (По определению R^0 состоит из одной точки.) Начнем индукцию: теорема, несомненно, верна при $n = 0$.

Пусть $C_1 \subset C$ означает множество всех таких $x \in U$, для которых первый дифференциал df_x равен нулю. Вообще пусть C_i означает множество таких $x \in U$, что все частные производные функции f порядка $\leqslant i$ обращаются в точке x в нуль. Таким образом, мы имеем убывающую последовательность замкнутых множеств

$$C \supset C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \ldots .$$

Доказательство будет разбито на три шага.

---

[1]) Наше доказательство основывается на рассуждении, приведенном у Понтрягина в [29]. Детали у нас несколько проще из-за того, что мы предполагаем отображение f бесконечно дифференцируемым.