1-й шаг. Образ $f(C \setminus C_1)$ имеет меру нуль.

2-й шаг. Образ $f(C_i \setminus C_{i+1})$ имеет меру нуль при $i \geqslant 1$.

3-й шаг. Образ $f(C_k)$ имеет меру нуль для достаточно большого k.

(Замечание. Если f — действительное аналитическое отображение, то пересечение всех C_i пусто, кроме того случая, когда f постоянно на целой компоненте множества U. Следовательно, в этом случае достаточно сделать первые два шага.)

Доказательство. 1-й шаг. Этот первый шаг, по-видимому, самый трудный. Мы можем считать, что $p \geqslant 2$, так как $C = C_1$ при $p = 1$. Нам понадобится хорошо известная теорема Фубини, которая утверждает, что *измеримое множество*

$$A \subset R^p = R^1 \times R^{p-1}$$

должно иметь меру нуль, если оно пересекается с каждой гиперплоскостью (const) $\times R^{p-1}$ *по множеству* $(p-1)$*-мерной меры нуль* [1] [2]).

Для каждого $\bar{x} \in C \setminus C_1$ мы ниже найдем такую открытую окрестность $V \subset R^n$, что $f(V \cap C)$ имеет меру нуль. А так как $C \setminus C_1$ покрывается счетным числом таких окрестностей, то отсюда непосредственно будет следовать, что мера $f(C \setminus C_1)$ равна нулю.

Так как $\bar{x} \notin C_1$, то существует некоторая частная производная, например $\partial f_1/\partial x_1$, которая отлична от нуля в точке $\bar{x}$. Рассмотрим отображение h: $U \to R^n$,

---

[1]) Простое доказательство можно найти у Стернберга [38, стр. 60—61] (там же есть и другое доказательство теоремы Сарда (стр. 53—64)). Стернберг предполагает, что A — компакт, но общий случай легко следует из этого частного.

[2]) Утверждение, выделенное курсивом, представляет собой весьма частный случай теоремы Фубини, которая в полном объеме здесь не понадобится. Читатель, не знакомый с теорией меры, может вместо слов «измеримое множество» подставить «множество, являющееся объединением счетного числа компактных множеств», ибо только к такому множеству данное утверждение будет применяться. — *Прим. ред.*

определенное формулой

$$h(x) = (f_1(x),\ x_2,\ \ldots,\ x_n).$$

Так как производная $dh_{\bar{x}}$ невырожденна, то h диффеоморфно отображает некоторую окрестность V точки $\bar{x}$ на открытое множество V'. Композиция $g = f \circ h^{-1}$ будет отображать V' в R^p. Заметим, что множество C' критических точек отображения g есть в точности $h(V \cap C)$; следовательно, множество $g(C')$ критических значений для g совпадает с $f(V \cap C)$.

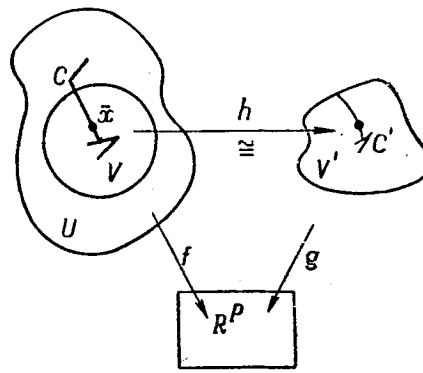


Рис. 5. Построение отображения g.

Заметим, что для каждой точки $(t,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \in V'$ точка $g(t,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ принадлежит гиперплоскости $t \times R^{p-1} \subset R^p$, т. е. g переводит гиперплоскости в гиперплоскости. Пусть

$$g^t\colon (t \times R^{n-1}) \cap V' \to t \times R^{p-1}$$

обозначает ограничение отображения g на область в гиперплоскости $t \times R^{n-1}$. Заметим, что точка гиперплоскости $t \times R^{n-1}$ является критической для g^t тогда и только тогда, когда она — критическая точка для g, так как матрица частных производных отображения g представляется в виде

$$(\partial g_i/\partial x_j) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & (\partial g_i^t/\partial x_j) \end{pmatrix}.$$

В соответствии с предположением индукции, множество критических значений для g^t имеет меру нуль в $t \times R^{p-1}$. Поэтому множество критических значений для g пересекается с каждой гиперплоскостью по множеству меры нуль. Это множество $g(C')$ измеримо, так как оно может быть представлено в виде счетного объединения компактных подмножеств. Значит, по теореме Фубини множество

$$g(C') = f(V \cap C)$$

имеет меру нуль, и первый шаг завершен.

2-й шаг. Для каждого $\bar{x} \in C_k \setminus C_{k+1}$ существует $(k+1)$-я производная $\partial^{k+1} f_r / \partial x_{s_1} \ldots \partial x_{s_{k+1}}$, отличная от нуля в точке $\bar{x}$. Стало быть, функция

$$w(x) = \partial^k f_r / \partial x_{s_2} \ldots \partial x_{s_{k+1}}$$

обращается в точке $\bar{x}$ в нуль, но $\partial w / \partial x_{s_1}$ не равна нулю. Предположим для определенности, что $s_1 = 1$. Тогда отображение $h\colon U \to R^n$, определенное по формуле

$$h(x) = (w(x), x_2, \ldots, x_n),$$

диффеоморфно отображает некоторую окрестность V точки $\bar{x}$ на открытое множество V'. Заметим, что h переводит $C_k \cap V$ в гиперплоскость $0 \times R^{n-1}$. Опять рассмотрим

$$g = f \circ h^{-1}\colon V' \to R^p.$$

Пусть

$$\bar{g}\colon (0 \times R^{n-1}) \cap V' \to R^p$$

обозначает ограничение отображения g. По предположению индукции множество критических значений у $\bar{g}$ имеет меру нуль в R^p. Но все точки множества $h(C_k \cap V)$ заведомо являются критическими точками для $\bar{g}$, так как в них все производные порядка $\leqslant k$ равны нулю. Поэтому множество

$$\bar{g}h(C_k \cap V) = f(C_k \cap V)$$

имеет меру нуль.

Из того, что $C_k \setminus C_{k+1}$ покрывается счетным числом таких окрестностей V, следует, что $f(C_k \setminus C_{k+1})$ имеет нулевую меру.

3-й шаг. Пусть $I^n \subset U$ — куб с ребром δ.

Если k достаточно велико (точнее, $k > n/p - 1$), то мы докажем, что $f(C_k \cap I^n)$ имеет меру нуль. Так как C_k может быть покрыто счетным числом таких кубиков, то отсюда будет следовать, что множество $f(C_k)$ имеет меру нуль.

Используя теорему Тейлора, компактность куба I^n и определение C_k, мы можем написать

$$f(x+h) = f(x) + R(x, h),$$

где

$$\| R(x, h) \| \leqslant c \| h \|^{k+1} \tag{1}$$

при $x \in C_k \cap I^n$, $x + h \in I^n$. Здесь c — постоянная, зависящая только от f и I^n. Теперь разделим I^n на r^n кубиков с ребром δ/r. Пусть I_1 — кубик получившегося разбиения, который содержит точку $x \in C_k$. Тогда любая точка I_1 может быть записана в виде $x + h$, где

$$\| h \| \leqslant \sqrt{n}\,(\delta/r). \tag{2}$$

Из формулы (1) следует, что $f(I_1)$ лежит в кубе с ребром a/r^{k+1} с центром в точке $f(x)$, где $a = 2c(\sqrt{n}\,\delta)^{k+1}$.

Следовательно, $f(C^k \cap I^n)$ содержится в объединении самое большее r^n кубиков, имеющих общий объем

$$V \leqslant r^n (a/r^{k+1})^p = a^p r^{n-(k+1)p}.$$

Если $k + 1 > n/p$, то очевидно, что V стремится к 0 при $r \to \infty$. Поэтому множество $f(C_k \cap I^n)$ должно иметь меру нуль. Доказательство теоремы Сарда закончено.

§ 4. СТЕПЕНЬ ОТОБРАЖЕНИЯ ПО МОДУЛЮ 2

Рассмотрим гладкое отображение $f\colon S^n \to S^n$. Напомним, что если y — регулярное значение, то $\# f^{-1}(y)$ означает число решений уравнения $f(x) = y$.

Мы докажем, что *класс вычетов* mod 2 *числа* $\#f^{-1}(y)$ *не зависит от выбора регулярного значения* y. Этот класс вычетов называется *степенью* mod 2 отображения f. Вообще это же самое определение годится и в случае произвольного гладкого отображения

$$f\colon M \to N,$$

где M — компактное многообразие без края, N связно и оба многообразия имеют одинаковую размерность. (Мы можем также считать, что N тоже является компактным многообразием без края, так как в противном случае степень отображения по mod 2 обязательно равнялась бы нулю.) Для доказательства мы введем два новых понятия.

Гладкая гомотопия и гладкая изотопия

Если $X \subset R^k$, то через $X \times [0, 1]$ обозначим подмножество[1]) пространства R^{k+1}, состоящее из всех (x, t), где $x \in X$ и $0 \leqslant t \leqslant 1$. Два отображения

$$f,\ g\colon X \to Y$$

называются *гладко гомотопными* (сокращенно обозначаем $f \sim g$), если существует такое гладкое отображение $F\colon X \times [0, 1] \to Y$, что

$$F(x, 0) = f(x), \quad F(x, 1) = g(x)$$

для всех $x \in X$. В этом случае F называется *гладкой гомотопией*, связывающей f с g.

Отметим, что отношение гладкой гомотопности является отношением эквивалентности. Для доказательства транзитивности используем существование такой гладкой функции $\varphi\colon [0, 1] \to [0, 1]$, что

$$\varphi(t) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1/3,$$
$$\varphi(t) = 1 \quad \text{при} \quad 2/3 \leqslant t \leqslant 1.$$

---

[1]) Если M — гладкое многообразие без края, то $M \times [0,1]$ является гладким многообразием, край которого состоит из двух экземпляров многообразия M. Если бы у M был край, то точки края M привели бы к «угловым» точкам на $M \times [0,1]$.

(Например, $\varphi(t) = \lambda(t - {}^1/_3)/[\lambda(t - {}^1/_3) + \lambda({}^2/_3 - t)]$, где $\lambda(\tau) = 0$ при $\tau \leqslant 0$ и $\lambda(\tau) = \exp(-\tau^{-1})$ при $\tau > 0$.) Если F — гладкая гомотопия, связывающая f и g, то формула $G(x, t) = F(x, \varphi(t))$ определяет гладкую гомотопию G, для которой

$$G(x, t) = f(x) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant {}^1/_3,$$
$$G(x, t) = g(x) \quad \text{при} \quad {}^2/_3 \leqslant t \leqslant 1.$$

Если $f \sim g$ и $g \sim h$, то с помощью этой конструкции легко доказать, что $f \sim h$.

Если f и g являются диффеоморфизмами X на Y, то мы можем также определить понятие «гладкой изотопии» между f и g. Она также будет отношением эквивалентности.

Определение. Диффеоморфизм f *гладко изотопен* диффеоморфизму g, если существует такая гладкая гомотопия $F\colon X \times [0, 1] \to Y$ между f и g, что для каждого $t \in [0, 1]$ соответствующее отображение

$$x \to F(x, t)$$

диффеоморфно отображает X на Y.

Из дальнейшего будет видно, что степень отображения mod 2 зависит только от его класса гладко гомотопных отображений.

Лемма о гомотопии. *Пусть $f, g\colon M \to N$ — гладко гомотопные отображения многообразия M в многообразие N той же размерности, причем M — компактное многообразие без края. Если $y \in N$ является регулярным значением как для f, так и для g, то*

$$\# f^{-1}(y) \equiv \# g^{-1}(y) \pmod 2.$$

Доказательство. Пусть $F\colon M \times [0, 1] \to N$ — гладкая гомотопия, связывающая f и g. Сначала предположим, что y является регулярным значением также и для F. Тогда $F^{-1}(y)$ — компактное одномерное многообразие с краем, равным

$$F^{-1}(y) \cap (M \times 0 \cup M \times 1) = f^{-1}(y) \times 0 \cup g^{-1}(y) \times 1.$$

Таким образом, общее число точек края многообразия $F^{-1}(y)$ равно

$$\# f^{-1}(y) + \# g^{-1}(y).$$

Вспомним (§ 2), что компактное одномерное многообразие всегда имеет четное число точек края. Таким образом, $\# f^{-1}(y) + \# g^{-1}(y)$ четно. Отсюда

$$\# f^{-1}(y) \equiv \# g^{-1}(y) \pmod 2.$$

Теперь предположим, что y не является регулярным значением отображения F. Напомним (§ 1), что

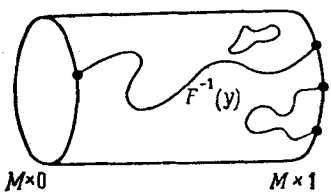


Рис. 6. Число точек края слева сравнимо с числом точек края справа mod 2.

$\# f^{-1}(y')$ и $\# g^{-1}(y')$ являются локально постоянными функциями от y' (пока мы остаемся вне множества критических значений). Поэтому существует такая окрестность $V_1 \subset N$ точки y, состоящая из регулярных значений отображения f, что

$$\# f^{-1}(y') = \# f^{-1}(y)$$

для всех $y' \in V_1$, и аналогичная окрестность $V_2 \subset N$, в которой

$$\# g^{-1}(y') = \# g^{-1}(y)$$

для всех $y' \in V_2$. Выберем регулярное значение z отображения F в $V_1 \cap V_2$. Тогда

$$\# f^{-1}(y) = \# f^{-1}(z) \equiv \# g^{-1}(z) = \# g^{-1}(y),$$

что и завершает доказательство.

В дальнейшем нам будет необходима следующая

Лемма об однородности. *Пусть y и z — произвольные внутренние точки гладкого связного многообразия N.*

Тогда существует диффеоморфизм h: $N \to N$, гладко изотопный тождественному и переводящий y в z.

(В частом случае, когда $N = S^n$, доказательство очевидно: в качестве h выберем вращение, которое переводит y в z и оставляет неподвижными все векторы, ортогональные плоскости, натянутой на векторы y и z.)

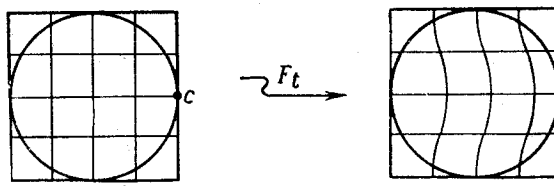


Рис. 7. Деформация единичного шара.

В общем случае доказательство ведется следующим образом. Сперва построим гладкую изотопию R^n на себя, которая:

1) оставляет неподвижными все точки вне единичного шара;

2) переводит начало координат в произвольно выбранную точку открытого единичного шара.

Пусть φ: $R^n \to R$ — такая гладкая функция, что

$$\varphi(x) > 0 \quad \text{при} \quad \|x\| < 1,$$
$$\varphi(x) = 0 \quad \text{при} \quad \|x\| \geqslant 1.$$

(Например, $\varphi(x) = \lambda(1 - \|x\|^2)$, где $\lambda(t) = 0$ при $t \leqslant 0$ и $\lambda(t) = \exp(-t^{-1})$ при $t > 0$.) Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = c_i \varphi(x_1, \ldots, x_n), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

где $c = (c_1, \ldots, c_n) \in S^{n-1}$ — произвольный фиксированный вектор, $\|c\| = 1$.

Для любого $\bar{x} \in R^n$ эта система имеет единственное решение $x = x(t)$, определенное при всех[1]) действительных t и удовлетворяющее начальному условию

$$x(0) = \bar{x}.$$

Мы будем обозначать это решение $x(t)$ через $F_t(\bar{x})$. Ясно, что:

1) $F_t(\bar{x})$ определено при всех t и $\bar{x}$ и гладко зависит от t и $\bar{x}$;

2) $F_0(\bar{x}) = \bar{x}$;

3) $F_{s+t}(\bar{x}) = F_s \circ F_t(\bar{x})$.

Поэтому каждое F_t является диффеоморфизмом пространства R^n на себя. Меняя t, мы видим, что для любого t диффеоморфизм F_t гладко изотопен тождественному отображению посредством изотопии, оставляющей неподвижными все точки вне единичного шара. Ясно, что при подходящем выборе c и t диффеоморфизм F_t будет переводить начало координат в любую наперед заданную точку открытого единичного шара.

Теперь рассмотрим связное многообразие N. Назовем две точки «изотопными», если существует гладкая изотопия, переводящая одну точку в другую. Очевидно, что это отношение эквивалентности. Если y — внутренняя точка, то она имеет окрестность, диффеоморфную R^n; следовательно, приведенное выше рассуждение показывает, что любая достаточно близкая к y точка «изотопна» y. Другими словами, каждый класс «изотопных» внутренних точек N является открытым множеством и внутренность многообразия N разбита на непересекающиеся открытые классы «изотопных» точек. Но внутренность N — связное множество, поэтому может существовать только один такой класс. Это завершает доказательство.

Теперь мы можем доказать основной результат этого раздела. Предположим, что M — компактное многообразие без края, N связно, а $f\colon M \to N$ гладко.

---

[1]) См. [22, § 2.4].

Теорема. *Если y и z — регулярные значения отображения f, то*

$$\# f^{-1}(y) \equiv \# f^{-1}(z) \pmod 2.$$

Этот общий класс вычетов, который называется степенью отображения f mod 2, зависит только от содержащего f класса гладко гомотопных отображений, а не от самого f.

Доказательство. Пусть даны регулярные значения y и z. Через h обозначим изотопный тождественному диффеоморфизм h: $N \to N$, который переводит y в z. Тогда z является регулярным значением для композиции $h \circ f$. Так как $h \circ f$ гомотопно отображению f, то, согласно лемме о гомотопии,

$$\# (h \circ f)^{-1}(z) \equiv \# f^{-1}(z) \pmod 2,$$

но

$$(h \circ f)^{-1}(z) = f^{-1} \circ h^{-1}(z) = f^{-1}(y).$$

Отсюда

$$\# (h \circ f)^{-1}(z) = \# f^{-1}(y).$$

Поэтому

$$\# f^{-1}(y) \equiv \# f^{-1}(z) \pmod 2,$$

что и требовалось доказать.

Обозначим этот общий класс вычетов через $\deg_2(f)$. Предположим теперь, что f гладко гомотопно g. Согласно теореме Сарда, существует точка $y \in N$, являющаяся регулярным значением как для f, так и для g. Сравнение

$$\deg_2(f) \equiv \# f^{-1}(y) \equiv \# g^{-1}(y) \equiv \deg_2(g) \pmod 2$$

показывает, что $\deg_2(f)$ инвариантен относительно гладкой гомотопии, что и заканчивает доказательство.

Примеры. Постоянное отображение (отображение в точку) c: $M \to M$ имеет четную степень mod 2. Тождественное отображение I: $M \to M$ имеет нечетную степень mod 2. Значит, *тождественное отображе-*

ние компактного многообразия без края не гомотопно постоянному.

В случае $M = S^n$ из этого результата следует, что не существует гладкого отображения $f\colon D^{n+1} \to S^n$, оставляющего каждую точку сферы неподвижной (т. е. сфера не является гладким «ретрактом» шара; см. § 2, лемма 5). Действительно, такое отображение давало бы гладкую гомотопию

$$F\colon S^n \times [0, 1] \to S^n, \quad F(t, x) = f(tx),$$

связывающую отображение в точку с тождественным отображением.

§ 5. ОРИЕНТИРОВАННЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

Для того чтобы определить степень отображения как целое число (а не вычет $\bmod 2$), мы должны ввести ориентацию.

Определения. Ориентация в действительном конечномерном векторном пространстве — это класс упорядоченных базисов относительно следующего отношения эквивалентности: базис $(b_1, \ldots, b_m)$ определяет *ту же ориентацию*, что и базис $(b_1', \ldots, b_m')$, если $b_i' = \sum a_{ij} b_j$ и $\det(a_{ij}) > 0$; он определяет *противоположную ориентацию*, если $\det(a_{ij}) < 0$. Таким образом, каждое векторное пространство положительной размерности имеет в точности две ориентации. Векторное пространство R^n имеет *стандартную* ориентацию, соответствующую базису

$$(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)$$

Для нульмерного векторного пространства удобно определить «ориентацию» как символ $+1$ или -1.

Ориентированное гладкое многообразие состоит из многообразия M и ориентаций, выбранных для каждого касательного пространства TM_x. При $m \geqslant 1$ требуется выполнение следующего условия согласования этих ориентаций: для каждой точки M должны существовать окрестность $U \subset M$ и диффеоморфизм h,

отображающий U на открытое подмножество в R^m или H^m, который *сохраняет ориентацию* в том смысле, что для каждого $x \in U$ изоморфизм dh_x переводит[1]) выбранную ориентацию пространства TM_x в стандартную ориентацию пространства R^m.

Если M связно и ориентируемо, то оно имеет в точности две ориентации.

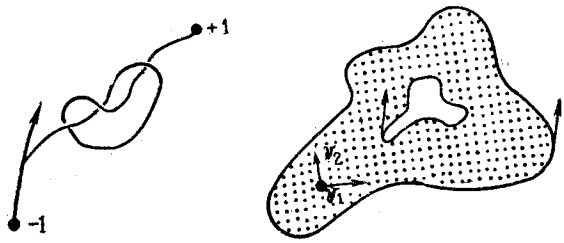


Рис. 8. Как ориентировать край.

Если M имеет край, то мы можем в точке x края различать три типа векторов касательного пространства TM_x:

1) векторы, касательные к краю; они образуют $(m-1)$-мерное подпространство $T(\partial M)_x \subset TM_x$;

2) векторы, направленные «наружу»; они образуют открытое полупространство, ограниченное подпространством $T(\partial M)_x$;

3) векторы, направленные «внутрь»; они образуют дополнительное полупространство.

Каждая ориентация многообразия M определяет ориентацию края ∂M, а именно: для $x \in \partial M$ выберем положительно ориентированный базис $(v_1, \ldots, v_m)$ в TM_x таким образом, чтобы $v_2, \ldots, v_m$ касались

[1]) Если $A: E \to E'$ — линейный изоморфизм двух конечномерных действительных векторных пространств и в E выбрана ориентация, то A переводит ее в некоторую ориентацию пространства E' согласно следующему правилу: пусть $(b_1, \ldots, b_m)$ — базис в E, принадлежащий выбранной в E ориентации; тогда в E' берется ориентация, соответствующая базису $(Ab_1, \ldots, Ab_m)$.

Заметим еще, что не на всяком многообразии можно ввести ориентацию и что многообразия, для которых это можно сделать, называются *ориентируемыми*, а остальные — *неориентируемыми*. — *Прим. ред.*

края (предполагается, что $m \geqslant 2$), а v_1 был направлен «наружу». Тогда базис $(v_2, \ldots, v_m)$ определяет требуемую ориентацию края ∂M в точке x.

Если размерность многообразия равна 1, то каждой точке края приписывается ориентация $+1$ или -1 в зависимости от того, будет ли положительно направленный вектор в точке x направлен «наружу» или «внутрь» (см. рис. 8).

Например, единичную сферу $S^{m-1} \subset R^m$ можно ориентировать как край шара D^m.

Степень Брауэра

Пусть M и N — два n-мерных ориентированных многообразия без края, и пусть

$$f\colon M \to N$$

— гладкое отображение. Если M компактно, а N связно, то степень отображения определяется следующим образом:

Пусть $x \in M$ — регулярная точка отображения f, т. е. $df_x\colon TM_x \to TN_{f(x)}$ — линейный изоморфизм ориентированных векторных пространств. Определим $\operatorname{sign} df_x$ равным $+1$ или -1 в зависимости от того, сохраняет df_x ориентацию или нет.

Для любого регулярного значения y определим

$$\deg(f;\ y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sign} df_x.$$

Как и в § 1, целое число $\deg(f;\ y)$ — локально постоянная функция от y. Эта функция определена на открытом всюду плотном множестве многообразия N.

Теорема А. *Целое число* $\deg(f;\ y)$ *не зависит от выбора регулярного значения* y.

Оно будет называться *степенью отображения* f и обозначаться через $\deg f$.

Теорема В. *Если отображение* f *гладко гомотопно* g, *то* $\deg f = \deg g$.

По существу доказательство будет таким же, как и в § 4, только необходимо внимательно следить за ориентациями.

Сначала рассмотрим следующую ситуацию: предположим, что M является краем компактного ориентированного многообразия X и M ориентировано как край многообразия X.

Лемма 1. *Если f: $M \to N$ продолжается до гладкого отображения F: $X \to N$, то* $\deg(f;\ y) = 0$ *для любого регулярного значения y.*

Доказательство. Сначала предположим, что y является регулярным значением как для F, так и для $f = F|M$. Компактное одномерное многообразие $F^{-1}(y)$ представляет собой конечное объединение дуг и окружностей, причем граничные точки дуг лежат на $M = \partial X$. Пусть $A \subset F^{-1}(y)$ — одна из дуг, $\partial A = \{a\} \cup \{b\}$.

Мы покажем, что

$$\operatorname{sign} df_a + \operatorname{sign} df_b = 0$$

и, следовательно (надо суммировать по всем таким отрезкам), что $\deg(f,\ y) = 0$.

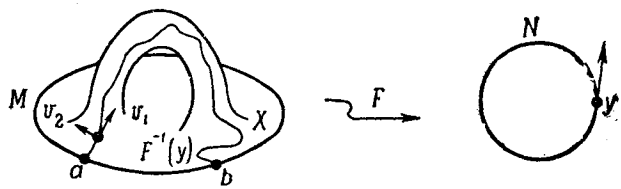


Рис. 9. Как ориентировать $F^{-1}(y)$.

Ориентации многообразий X и N следующим образом определяют ориентацию дуги A. Пусть $x \in A$, и пусть $(v_1, \ldots, v_{n+1})$ — положительно ориентированный базис в TX_x, причем v_1 касается дуги A. *Тогда v_1 определяет требуемую ориентацию пространства TA_x в том и только в том случае, когда dF_x переводит $(v_2, \ldots, v_{n+1})$ в положительно ориентированный базис пространства TN_y.*

Пусть $v_1(x)$ обозначает положительно ориентированный единичный вектор, касательный к A в точке x. Ясно, что v_1 — гладкая функция и $v_1(x)$ направлен «наружу» в одной точке края (скажем, в b) и «внутрь» — в другой (в a).

Отсюда немедленно следует, что

$$\operatorname{sign} df_a = -1, \quad \operatorname{sign} df_b = +1,$$

а сумма равна нулю. Просуммировав по всем таким дугам, мы докажем, что $\deg(f;\ y) = 0$.

Более общо, предположим, что y_0 является регулярным значением для f, но не для F. Функция $\deg(f;\ y)$ постоянна в некоторой окрестности U точки y_0. Поэтому, как в § 4, мы можем выбрать внутри U регулярное значение y отображения F и заметить, что тогда

$$\deg(f;\ y_0) = \deg(f;\ y) = 0.$$

Это доказывает лемму 1.

Теперь рассмотрим некоторую гладкую гомотопию $F\colon [0, 1] \times M \to N$, связывающую два отображения $f(x) = F(0, x)$, $g(x) = F(1, x)$.

Лемма 2. *Степень* $\deg(g;\ y)$ *равна* $\deg(f;\ y)$ *для любого общего регулярного значения* y.

Доказательство. Многообразие $[0, 1] \times M$ может быть ориентировано как произведение двух ориентированных многообразий. Тогда его край будет состоять из $1 \times M$ (с правильной ориентацией) и $0 \times M$ (с неправильной ориентацией). Таким образом, степень отображения $F|\partial([0, 1] \times M)$ для регулярного значения y равна разности

$$\deg(g;\ y) - \deg(f;\ y),$$

а эта разность, согласно лемме 1, должна равняться нулю.

Остальная часть доказательства теорем A и B совершенно аналогична рассуждениям § 4. Для двух регулярных значений y и z отображения $f\colon M \to N$ выберем изотопный тождественному диффеоморфизм

h: $N \to N$, переводящий y в z. Тогда h будет сохранять ориентацию, и простая проверка показывает, что

$$\deg(f;\ y) = \deg(h \circ f;\ h(y)).$$

Отображение f гомотопно $h \circ f$. Из леммы 2 немедленно следует, что

$$\deg(h \circ f;\ z) = \deg(f;\ z).$$

Поэтому $\deg(f;\ y) = \deg(f;\ z)$, что заканчивает доказательство.

Примеры. Комплексная функция $z \to z^k$, $z \neq 0$, отображает единичную окружность на себя, причем степень этого отображения равна k (здесь k может быть произвольным целым числом — положительным, отрицательным или нулем).

Вырожденное отображение

$$f\colon M \to \text{постоянная} \in N$$

имеет степень нуль. Диффеоморфизм f: $M \to N$ имеет степень либо $+1$, либо -1 в зависимости от того, сохраняет или обращает он ориентацию. Поэтому *обращающий ориентацию диффеоморфизм компактного многообразия без края не может быть гладко гомотопен тождественному.*

Отражение r_i: $S^n \to S^n$,

$$r_i(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, -x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}),$$

дает пример диффеоморфизма, обращающего ориентацию. Центральная симметрия $S^n \to S^n$, $x \to -x$ имеет степень $(-1)^{n+1}$, в чем легко убедиться, представив ее в виде композиции $n+1$ отражений:

$$-x = r_1 \circ r_2 \circ \ldots \circ r_{n+1}(x).$$

Таким образом, *при четном n центральная симметрия сферы S^n не может быть гладко гомотопна тождественному отображению — факт, который не улавливается с помощью степени отображения* mod 2.

В качестве приложения мы, следуя Брауэру, покажем, что *на S^n тогда и только тогда существует*

нигде не обращающееся в нуль касательное векторное поле, когда n нечетно. (Сравните рис. 10 и 11).

Определение. Гладкое *касательное векторное поле*[1]) *на* $M \subset R^k$ — это такое гладкое отображение $v\colon M \to R^k$, что $v(x) \in TM_x$ для всех $x \in M$. Для сферы $S^n \subset R^{n+1}$ последнее, очевидно, эквивалентно условию

(1) $$v(x) \cdot x = 0 \text{ при всех } x \in S^n,$$

где точка означает евклидово скалярное произведение в R^{n+1}.

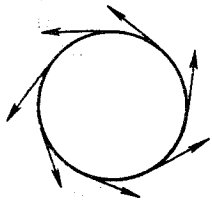


Рис. 10. Векторное поле на одномерной сфере, нигде не обращающееся в нуль.

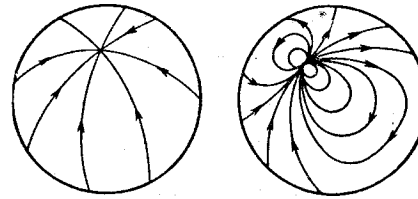


Рис. 11. Попытки построить такое поле на двумерной сфере.

Если $v(x)$ нигде не равно нулю, то мы можем также считать, что

(2) $$v(x) \cdot v(x) = 1 \quad \text{при всех} \quad x \in S^n.$$

Во всяком случае, $\bar{v}(x) = v(x)/\| v(x) \|$ будет векторным полем, удовлетворяющим этому условию. Таким образом, мы можем рассматривать v как гладкое отображение сферы S^n в себя.

Теперь определим гладкую гомотопию

$$F\colon S^n \times [0, \pi] \to S^n$$

[1]) Обычно слово «касательное» опускают, хотя на многообразии в евклидовом пространстве может понадобиться рассматривать и не касательные поля. — *Прим. ред.*

формулой $F(x, \theta) = x\cos\theta + v(x)\sin\theta$. Прямой подсчет показывает, что

$$F(x, \theta)\cdot F(x, \theta) = 1$$

и

$$F(x, 0) = x, \quad F(x, \pi) = -x.$$

Таким образом, центральная симметрия оказалась гомотопной тождественному отображению, что невозможно, как мы видели, при четных n.

С другой стороны, если $n = 2k - 1$, то формула

$$v(x_1, \ldots, x_{2k}) = (x_2, -x_1, \ldots, x_{2k}, -x_{2k-1})$$

определяет нигде не обращающееся в нуль касательное векторное поле на S^n. Утверждение полностью доказано.

В частности, отсюда следует, что при нечетном n центральная симметрия сферы S^n действительно гомотопна тождественному отображению. Знаменитая теорема, принадлежащая Хопфу, утверждает, что два отображения связного n-мерного многообразия в n-мерную сферу гладко гомотопны *тогда и только тогда*, когда их степени совпадают.

В § 7 мы докажем более общий результат, из которого будет следовать теорема Хопфа.

§ 6. ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ И ЭЙЛЕРОВА ХАРАКТЕРИСТИКА

В качестве дальнейшего приложения понятия степени отображения мы изучим векторные поля на других многообразиях.

Рассмотрим сначала открытое множество $U \subset R^m$ и гладкое векторное поле

$$v\colon U \to R^m$$

с изолированным нулем в точке $z \in U$. Функция

$$\bar{v}(x) = v(x)/\|v(x)\|$$

отображает маленькую сферу с центром z в единичную сферу[1]). Степень этого отображения назовем *индексом* ι векторного поля v в точке z[2]).

На рис. 12 представлено несколько примеров таких векторных полей с индексами —1, 0, 1, 2. (С векторным полем v тесно связаны кривые, «касающиеся» поля v, которые получаются решением системы дифференциальных уравнений $dx_i/dt = v_i(x_1, \ldots, x_n)$. Именно эти кривые[3]) и изображены на рис. 12.)

Нуль произвольного индекса можно получить следующим образом: на плоскости комплексного переменного многочлен z^k определяет гладкое векторное поле с нулем индекса k в начале координат, а функция $\bar{z}^k$ определяет векторное поле с нулем индекса $-k$.

Мы должны доказать, что определение индекса инвариантно относительно диффеоморфизмов. Чтобы объяснить, что же это значит, рассмотрим более общую ситуацию. Пусть задано гладкое отображение $f\colon M \to N$ и на каждом многообразии определено векторное поле.

Определение. Векторные поля v на M и v' на N называются *f-связанными*, если дифференциал df_x переводит $v(x)$ в $v'(f(x))$ для всех $x \in M$.

---

[1]) Каждая сфера должна быть ориентирована как край соответствующего шара.

[2]) А также индексом нуля z этого векторного поля. Часто вместо «нуля» говорят об «особой точке» векторного поля, хотя с аналитической точки зрения никаких особенностей у поля v там может не быть; особенность имеется у соответствующего поля единичных касательных векторов $\bar{v}$.

Заметим попутно, что если в R^m на компактном гладком $(m-1)$-мерном многообразии M задано векторное поле v (не обязательно касательное), нигде на M не обращающееся в нуль, то степень отображения

$$M^{m-1} \to S^{m-1}, \quad x \to \frac{v(x)}{\|v(x)\|}$$

называется *вращением поля v на M*. С ним встречаются не только при определении индекса, но и в других случаях; см., например, лемму 3 ниже. — *Прим. ред.*

[3]) Их называют *интегральными кривыми*, *траекториями* или *силовыми линиями поля v*. — *Прим. ред.*

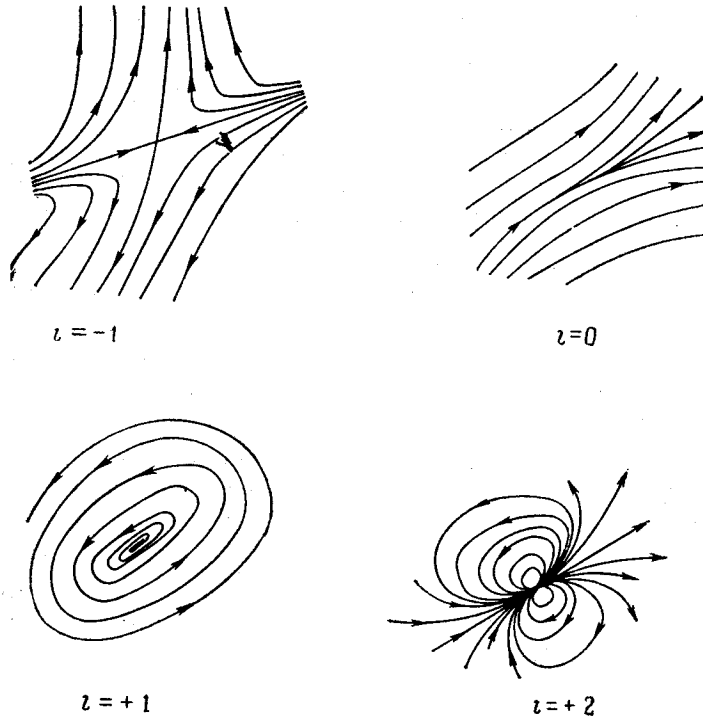


Рис. 12. Примеры векторных полей на плоскости (ι — индекс).

Если f — диффеоморфизм, то v', конечно, однозначно определяется по v. В этом случае мы будем писать

$$v' = df \circ v \circ f^{-1}.$$

Лемма 1. *Предположим, что векторное поле v на U f-связано с полем*

$$v' = df \circ v \circ f^{-1}$$

на U' с помощью диффеоморфизма f: $\to U'$. Тогда индекс поля v в изолированном нуле z, [illegible] индексу поля v' в $f(z)$.

Предположив, что лемма 1 доказана, мы можем следующим образом ввести понятие индекса векторного поля w на произвольном многообразии M. Если $g\colon U \to M$ — параметризация окрестности точки z на M, то *индекс* ι векторного поля w определяется как индекс соответствующего векторного поля $dg^{-1} \circ w \circ g$ на U в точке $g^{-1}(z)$. Из леммы 1, очевидно, будет следовать, что индекс ι корректно определен [1]).

Доказательство леммы 1 будет основано на доказательстве совсем другого утверждения.

Лемма 2. *Любой сохраняющий ориентацию диффеоморфизм f евклидова пространства R^m гладко изотопен тождественному.*

(Напротив, для многих значений m существуют сохраняющие ориентацию диффеоморфизмы сферы S^m, которые не являются гладко изотопными тождественному; см. [20, стр. 41].)

Доказательство. Мы можем считать, что $f(0) = 0$. Так как дифференциал в нуле можно определить как

$$df_0(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(tx)}{t},$$

то естественно ввести изотопию

$$F\colon R^m \times [0, 1] \to R^m,$$

определяемую формулами

$$F(x, t) = f(tx)/t \quad \text{при} \quad 0 < t \leqslant 1,$$
$$F(x, 0) = df_0(x).$$

Для доказательства гладкости отображения F при $t = 0$ мы перепишем f в виде [2])

$$f(x) = x_1 g_1(x) + \ldots + x_m g_m(x),$$

---

[1]) То есть его определение не зависит от выбора параметризации. — *Прим. ред.*

[2]) См., например, [22, стр. 14], а также упр. 4.11 из Уоллеса. — *Прим. ред.*

где $g_1, \ldots, g_m$ — некоторые гладкие функции, и заметим, что

$$F(x, t) = x_1 g_1(tx) + \ldots + x_m g_m(tx)$$

для всех значений t.

Поэтому f изотопно линейному отображению df_0, которое, очевидно, изотопно тождественному[1]). Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 1. Мы можем считать, что $z = f(z) = 0$ и U — выпуклая окрестность.

Если f сохраняет ориентацию, то, проведя в точности те же самые рассуждения, мы построим такое однопараметрическое семейство вложений[2])

$$f_t\colon U \to R^m,$$

что f_0 — тождественное вложение, $f_1 = f$ и $f_t(0) = 0$ при всех t. Пусть v_t — векторное поле $df_t \circ v \circ f_t^{-1}$ на $f_t(U)$, f_t-связанное с полем v на U. Все эти векторные поля определены и не обращаются в нуль на достаточно малой сфере с центром в 0. Следовательно, индекс поля $v = v_0$ в 0 должен совпадать с индексом поля $v' = v_1$ в 0, что доказывает лемму 1 для сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов.

---

[1]) Пусть A — матрица с положительным определителем; тогда существует такая матрица $A(t)$, которая гладко зависит от t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, и ни при одном t не вырождается, причем $A(0) = A$ и $A(1)$ — единичная матрица. Действительно, A можно представить в виде $A = SU$, где S — положительно определенная симметричная матрица, а U — ортогональная матрица с определителем 1. (Именно, S определяется из условия $AA' = S^2$, где штрих обозначает транспонирование.) Поэтому наше утверждение достаточно доказать отдельно для S и U. Это проще всего сделать, приведя S к диагональному виду, а U — к виду, состоящему из «блоков» $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ и диагональных элементов ± 1; при этом -1 войдет четное число раз, а $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ — это «блок» указанного выше вида с $\varphi = \pi$, поэтому можно считать, что имеются только «блоки» и диагональные единицы. — *Прим. ред.*

[2]) См. Уоллес, определение 3.2. — *Прим. ред.*

Среди диффеоморфизмов, обращающих ориентацию, достаточно исследовать случай отражения ρ. Тогда

$$v' = \rho \circ v \circ \rho^{-1},$$

а для соответствующего отображения $\bar{v}'(x) = \frac{v'(x)}{\|v'(x)\|}$ сферы радиуса ε в единичную сферу будет справедливо соотношение

$$\bar{v}' = \rho \circ \bar{v} \circ \rho^{-1}.$$

Очевидно, степень отображения $\bar{v}'$ равна степени отображения $\bar{v}$, что завершает доказательство леммы 1.

Мы сейчас получим классический результат, относящийся к следующей ситуации: M — компактное многообразие, w — гладкое векторное поле на M с изолированными нулями. *Если M имеет край, то требуется, чтобы векторное поле w в каждой точке края было направлено наружу.*

Теорема Пуанкаре — Хопфа. *Сумма $\sum \iota$ индексов нулей такого векторного поля равна эйлеровой характеристике*[1])

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \text{ ранг } H_i(M).$$

В частности, эта сумма индексов является топологическим инвариантом многообразия M, т. е. она не зависит от конкретного выбора векторного поля.

(Двумерный вариант этой теоремы был доказан Пуанкаре в 1885 г. Полностью теорема была доказана Хопфом [54] в 1926 г., вслед за частичными результатами Брауэра и Адамара.)

Мы докажем часть этой теоремы и дадим набросок остального. Сначала рассмотрим частный случай — компактную область в R^m.

---

[1]) Здесь $H_i(M)$ обозначает i-ю группу гомологий многообразия. Это наша первая и последняя ссылка на теорию гомологий. (Читатель, не знакомый с теорией гомологий, может ограничиться таким вариантом: сумма индексов для всех векторных полей с изолированными нулями (направленных на крае наружу, если есть край) одна и та же. — *Ред.*)

Пусть $X \subset R^m$ — компактное m-мерное многообразие с краем. Гауссово отображение[1])

$$g\colon \partial X \to S^{m-1}$$

ставит в соответствие каждой точке $x \in \partial X$ единичный вектор, нормальный к ∂X в точке x и направленный наружу многообразия X.

Лемма 3 (Хопф). *Если $v\colon X \to R^m$ — гладкое векторное поле с изолированными нулями, направленное на крае наружу многообразия X*[2]), *то сумма ин-*

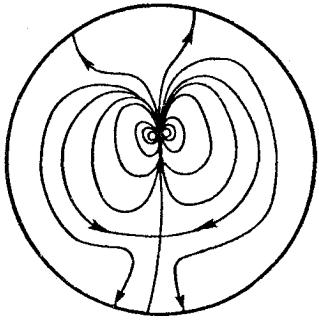


Рис. 13. Пример векторного поля с суммой индексов $+1$.

дексов $\sum \iota$ равна степени гауссова отображения края ∂X в S^{m-1}. В частности, $\sum \iota$ не зависит от выбора v.

Например, если v — векторное поле на шаре D^m, направленное на крае наружу, то $\sum \iota = 1$ (см. рис. 13).

Доказательство. Вырезав шар радиуса ε вокруг каждого нуля, мы получим новое многообразие с краем. Отображение $\bar{v}(x) = v(x)/\|v(x)\|$ переводит это многообразие в S^{m-1}. Следовательно, сум-

[1]) Его называют также *нормальным*. — *Прим. ред.*

[2]) И, в частности, нигде на ∂X не обращающееся в нуль. — *Прим. ред.*

ма степеней ограничений отображения $\bar{v}$ на различные компоненты края равна 0 [1]). Но $\bar{v}|\partial X$ гомотопно g [2]). Сумма же степеней ограничений на остальные компоненты края равна $-\sum \iota$. (Знак минус стоит перед суммой ввиду неправильной ориентации каждой маленькой сферы [3]).)

Поэтому

$$\deg g - \sum \iota = 0,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Степень отображения g известна также под названием «интегральной кривизны» гиперповерхности ∂X, так как она пропорциональна интегралу по ∂X от гауссовой кривизны. Она равна, конечно, эйлеровой характеристике многообразия X. Для нечетного m она равна также половине эйлеровой характеристики многообразия ∂X [4]).

Прежде чем распространить этот результат на другие многообразия, необходимы некоторые приготовления.

---

[1]) Используется лемма 1 из § 5 и тот простой факт, что для несвязного многообразия M степень отображения равна сумме степеней ограничений этого отображения на компоненты связности многообразия M. — *Прим. ред.*

[2]) Достаточно рассмотреть $\frac{(1-t)\,\bar{v} + tg}{\|(1-t)\,\bar{v} + tg\|}$. Знаменатель нигде не обращается в нуль, так как ни в одной точке $x \in \partial X$ направление одного из этих двух полей не противоположно направлению другого. — *Прим. ред.*

[3]) Пусть $D_\varepsilon^m(x)$ — шар радиуса ε с центром в x, а $S_\varepsilon^{m-1}(x)$ — ограничивающая его сфера. Обозначим нули векторного поля v через $x_1, \ldots, x_N$. Индекс точки x_i — это степень отображения $x \to \frac{v(x)}{\|v(x)\|}$ сферы $S_\varepsilon^{m-1}(x)$ в S^{m-1}, где сферы должны быть ориентированы как края соответствующих шаров. Но ориентация, которую $S_\varepsilon^{m-1}(x)$ получает как край многообразия $Y = X \setminus \bigcup_i D_\varepsilon^m(x_i)$, противоположна ориентации ее как края шара $D_\varepsilon^m(x_i)$, потому что если в какой-нибудь точке сферы вектор направлен наружу $D_\varepsilon^m(x_i)$, то тот же вектор в этой же точке направлен внутрь Y. — *Прим. ред.*

[4]) См. § 8, задача 20. — *Прим. ред.*

Естественно попытаться вычислить индекс векторного поля v в нуле z с помощью производных поля v в точке z. Рассмотрим сначала векторное поле v на открытом множестве $U \subset R^m$. Будем рассматривать его как отображение $U \to R^m$, так что определен дифференциал dv_z.

Определение. Векторное поле v называется *невырожденным в точке* z, если линейное преобразование dv_z невырожденно.

В этом случае z — изолированный ну

Лемма 4. *Индекс векторного поля v в невырожденном нуле z равен либо $+1$, либо -1, в зависимости от того, положителен или отрицателен определитель дифференциала dv_z.*

Доказательство. Будем рассматривать v как диффеоморфизм некоторой выпуклой окрестности U_0 точки z в пространство R^m. Можно считать, что $z = 0$. Если отображение v сохраняет ориентацию, то мы уже видели, что $v|U_0$ может быть гладко продеформировано в тождественное отображение, причем никаких новых нулей не появится. (См. леммы 1, 2.) Поэтому индекс равен $+1$.

Если v обращает ориентацию, то совершенно аналогичным образом оно может быть продеформировано в отражение; отсюда $\iota = -1$.

Более общо, рассмотрим нуль z векторного поля w на многообразии $M \subset R^k$. Будем рассматривать w как отображение M в R^k с дифференциалом dw_z: $TM_z \to R^k$

Лемма 5. *Дифференциал dw_z в действительности переводит TM_z в подпространство $TM_z \subset R^k$; поэтому dw_z можно рассматривать как линейное преобразование пространства TM_z. Если это линейное преобразование имеет определитель $D \neq 0$, то z является изолированным нулем поля w. Индекс точки z равен $+1$ или -1 в зависимости от того, положителен D или отрицателен.*

Доказательство. Пусть $h\colon U \to M$ — параметризация некоторой окрестности точки z, e^i обозначает i-й базисный вектор в R^m, и пусть

$$t^i = dh_u(e^i) = \partial h/\partial u_i,$$

так что векторы $t^1, \ldots, t^m$ образуют базис касательного пространства $TM_{h(u)}$. Нам нужно вычислить, куда переходит вектор $t^i = t^i(u)$ под действием линейного преобразования $dw_{h(u)}$. Сначала заметим, что

$$(1) \qquad dw_{h(u)}(t^i) = d(w \circ h)_u(e^i) = \partial w(h(u))/\partial u_i.$$

Пусть $v = \Sigma v_j e^j$ — векторное поле на U, которое h-связано с векторным полем w на M. По определению $v = dh^{-1} \circ w \circ h$ и

$$w(h(u)) = dh_u(v) = \sum v_j t^j.$$

Поэтому

$$(2) \qquad \partial w(h(u))/\partial u_i = \sum_j (\partial v_j/\partial u_i)\, t^j + \sum_j v_j (\partial t^j/\partial u_i$$

Комбинируя формулы (1) и (2), мы получаем в нуле $h^{-1}(z)$ векторного поля v следующую формулу:

$$(3) \qquad dw_z(t^i) = \sum_j (\partial v_j/\partial u_i)\, t^j.$$

Таким образом, dw_z отображает TM_z в себя, а определитель D этого преобразования $TM_z \to TM_z$ равен определителю матрицы $(\partial v_j/\partial u_i)$, что вместе с леммой 4 завершает доказательство.

Теперь мы рассмотрим компактное многообразие без края $M \subset R^k$. Пусть N_ε обозначает замкнутую ε-окрестность многообразия M, т. е. множество всех таких $x \in R^k$, что $\| x - y \| \leqslant \varepsilon$ для некоторого $y \in M$. Можно показать, что N_ε будет гладким многообразием с краем при достаточно малых ε (см. § 8, задача 11).

Теорема 1. *Для любого векторного поля v на M, меющего только невырожденные нули, сумма*

индексов $\sum \iota$ *равна степени гауссова отображения* [1])

$$g\colon \partial N_\varepsilon \to S^{k-1}.$$

В частности, эта сумма не зависит от выбора векторного поля v.

Доказательство. Для $x \in N_\varepsilon$ через $r(x) \in M$ мы обозначим ближайшую к x точку многообразия M (см. § 8, задача 12). Заметим, что вектор $x - r(x)$ перпендикулярен касательному пространству к M

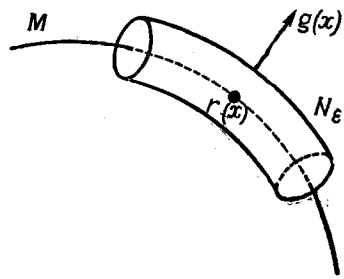


Рис. 14. ε-окрестность многообразия M.

в точке $r(x)$, иначе $r(x)$ не была бы ближайшей к x точкой многообразия M. Если ε достаточно мало, то $r(x)$ — гладкая и корректно определенная функция.

Мы будем также рассматривать квадратичную функцию расстояния

$$\varphi(x) = \| x - r(x) \|^2.$$

Простой подсчет показывает, что градиент функции φ задается соотношением

$$\operatorname{grad} \varphi = 2(x - r(x)).$$

Отсюда для каждой точки x поверхности уровня $\partial N_\varepsilon = \varphi^{-1}(\varepsilon^2)$ внешний единичный нормальный век-

[1]) Другая интерпретация этой степени дана Аллендорфером и Фенхелем: степень отображения g может быть выражена через интеграл по M от подходящего скаляра кривизны; таким образом получается m-мерный вариант классической теоремы Гаусса — Бонне (см. [2], [48], а также Чжень [57]).

тор задается равенством

$$g(x) = \operatorname{grad} \varphi / \|\operatorname{grad} \varphi\| = \frac{1}{\varepsilon}(x - r(x)).$$

Продолжим v до векторного поля w на окрестности N_ε, полагая

$$w(x) = (x - r(x)) + v(r(x)).$$

Тогда w направлено «наружу» на крае, так как скалярное произведение $w(x) \cdot g(x) = \varepsilon > 0$.

Заметим, что w обращается в нуль только в нулях поля v на M; это явствует из того, что два слагаемых $x - r(x)$ и $v(r(x))$ взаимно ортогональны. Вычислив дифференциал w в нуле $z \in M$, найдем, что

$$dw_z(h) = dv_z(h) \quad \text{для всех} \quad h \in TM_z,$$

$$dw_z(h) = h \quad \text{для} \quad h \in TM_z^{\perp}.$$

Поэтому определитель отображения dw_z равен определителю отображения dv_z. Следовательно, индекс поля w в нуле z равен индексу ι векторного поля v в точке z.

Но, в соответствии с леммой 3, сумма индексов $\sum \iota$ равна степени g. Тем самым теорема 1 доказана.

Примеры. На сфере S^m существует векторное поле, направленное на «север» в каждой точке[1]). В южном полюсе векторы направлены от полюса (индекс равен $+1$), а в северном полюсе сходятся внутрь (индекс равен $(-1)^m$). Поэтому инвариант $\sum \iota$ равен нулю для нечетных m и 2 для четных. Это дает новое доказательство того факта, что на четномерной сфере любое векторное поле имеет нуль.

Для нечетномерного многообразия без края инвариант $\sum \iota$ равен нулю, так как, если заменить

[1]) Например, v можно определить формулой $v(x) = p - (p \cdot x)x$, где p — северный полюс (см. рис. 11).

векторное поле v на $-v$, то каждый индекс умножится на $(-1)^m$, а равенство

$$\sum \iota = (-1)^m \sum \iota$$

для нечетных m влечет за собой

$$\sum \iota = 0.$$

Замечание. Имеется теорема Хопфа, утверждающая, что если для связного многообразия M имеет место равенство $\sum \iota = 0$, то на M существует векторное поле, нигде не обращающееся в нуль[1]).

Чтобы доказать теорему Пуанкаре — Хопфа в полном объеме, необходимо сделать еще три шага.

1-й шаг. *Отождествление инварианта $\sum \iota$ с эйлеровой характеристикой $\chi(M)$.* Достаточно построить только один какой-нибудь пример невырожденного векторного поля на M, для которого легко проверялось бы, что $\sum \iota = \chi(M)$. Наиболее удобный способ построения таков.

Согласно М. Морсу, на M обязательно существует функция с действительными значениями, «градиент» которой является невырожденным векторным полем[2]). Кроме того, Морс показывает, что сумма индексов такого градиентного векторного поля равна эйлеровой характеристике многообразия M. Подробное изложение этих рассуждений читатель может найти у Милнора [22, стр. 40, 47].

2-й шаг. *Доказательство теоремы для векторных полей с вырожденными нулями.* Рассмотрим сначала векторное поле v на открытом множестве U, имеющее изолированный нуль в точке z. Если функция

$$\lambda : U \to [0, 1]$$

равна 1 в малой окрестности N_1 точки z и ра нулю вне несколько большей окрестности N, а y доста-

[1]) См. § 8, задача 21*. — *Прим. ред.*
[2]) См. § 8, задача 19*. — *Прим. ред.*

точно малое регулярное значение для v, то векторное поле

$$v' = v(x) - \lambda(x)\, y$$

невырожденно[1]) внутри N. Сумма индексов для нулей, лежащих внутри N, может быть вычислена через степень отображения

$$\bar{v}: \partial N \to S^{m-1};$$

поэтому она не изменилась после замены v на v'.

Более общо, рассмотрим векторные поля на компактном многообразии M. Локально применяя эти рассуждения, мы видим, что *любое векторное поле с изолированными нулями можно заменить невырожденным векторным полем, не изменив* $\Sigma\iota$.

3-й шаг. *Многообразия с краем. Если* $M \subset R^k$ имеет край, то любое векторное поле, направленное на ∂M «наружу», опять можно так продолжить на окрестность N_ε, чтобы на ∂N_ε оно было направлено наружу. Однако возникают некоторые трудности с гладкостью из-за края M. Так, N_ε не является гладким (в нашем смысле, т. е. дифференцируемым класса C^∞) многообразием, а только многообразием класса C^1.

Продолжение w, если определять его, как и выше, формулой $w(x) = v(r(x)) + (x - r(x))$, будет только непрерывным векторным полем вблизи ∂M. Тем не менее доказательство можно довести до конца либо показав, что наши сильные требования гладкости в действительности не нужны, либо другими методами[2]).

---

[1]) Ясно, что v' невырожденно внутри N_1; но если y достаточно мало, то v' вообще не будет обращаться в нуль на $N \setminus N_1$

[2]) При первом варианте наиболее «неприятной» является, вероятно, «обосновательская» деятельность, вроде доказательства C^1-гладкости N_ε, однозначной определенности и непрерывности $r(x)$ и тому подобные простые, но громоздкие рассуждения. О непрерывных векторных полях см. § 8, задача 18*. Другой вариант - 8, задача 20*. — *Прим. ред.*

§ 7. ОСНАЩЕННЫЙ БОРДИЗМ[1]); КОНСТРУКЦИЯ ПОНТРЯГИНА

Степень отображения $M \to M'$ определена только в том случае, когда M и M' — ориентированные многообразия одинаковой размерности. Мы будем изучать предложенное Понтрягиным обобщение степени, определяемое для произвольного гладкого отображения

$$f\colon M \to S^p$$

произвольного компактного многообразия без края в сферу. Сначала дадим несколько определений.

Пусть N и N' — компактные n-мерные подмногообразия M, причем $\partial N = \partial N' = \partial M = \varnothing$. Разность размерностей $m - n$ называется *коразмерностью* подмногообразий.

Определение. *Подмногообразие N бордантно N' в M*, если подмножество

$$N \times [0, \varepsilon) \cup N' \times (1 - \varepsilon, 1]$$

многообразия $M \times [0, 1]$ можно так расширить до компактного многообразия

$$X \subset M \times [0, 1],$$

что

$$\partial X = N \times 0 \cup N' \times 1,$$

[1]) Следует предупредить о некотором разнобое в терминологии. Бордизмы еще несколько лет назад называли (а иногда и сейчас по старой памяти называют) кобордизмами. Такой терминологией пользовался и Милнор в оригинале этой книги. Недавнее изменение терминологии вызвано тем, что бордизмы (бывшие кобордизмы) в некотором отношении аналогичны гомологиям; термин «кобордизм» резервируется для другого понятия, примерно так же связанного с бордизмами, как когомологии с гомологиями.

Далее, термин «бордизм» чаще употребляется в словосочетании «*класс бордизмов*» (т. е. класс бордантных друг другу подмногообразий многообразия M). Вместе с тем раньше слово «бордизм» (в то время — «кобордизм») означало тройку (X, N, N') с описанными выше свойствами. В переводе было решено сохранить «бордизмы» только в первом словосочетании. Что же до X, то я рискнул воспользоваться словом, которое топологи постоянно употребляют устно: они называют X «пленкой» (подробнее: пленкой, соединяющей N с N' или реализующей их бордантность). — *Прим. ред.*

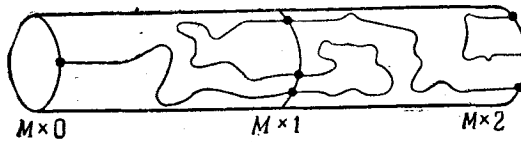
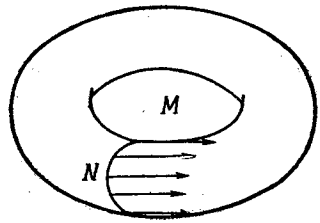
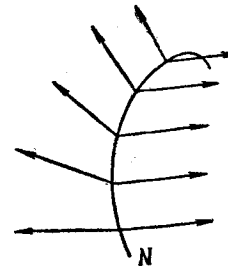


Рис. 15. Склеивание двух бордизмов внутри M.





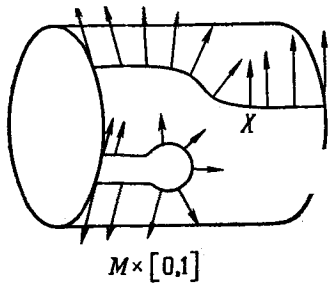


Рис. 16. Оснащенные подмногообразия и оснащенная пленка.

а X (которое в дальнейшем будет называться «пленкой») не пересекается с $M \times 0 \cup M \times 1$, кроме точек края ∂X.

Ясно, что бордизм является отношением эквивалентности (см. рис. 15).

Определение. *Оснащением* подмногообразия $N \subset M$ называется гладкая функция $\mathfrak{v}$, ставящая в соответствие каждой точке $x \in N$ базис

$$\mathfrak{v}(x) = (v^1(x), \ldots, v^{m-n}(x))$$

пространства $TN_x^{\perp} \subset TM_x$ векторов, нормальных в точке x к N в многообразии M (см. рис. 16). Пара $(N, \mathfrak{v})$ *называется оснащенным подмногообразием* многообразия M. Два оснащенных подмногообразия $(N, \mathfrak{v})$ и $(N', \mathfrak{w})$ *оснащенно бордантны*, если существуют такая пленка $X \subset M \times [0, 1]$, соединяющая N и N', и такое оснащение $\mathfrak{u}$ пленки X, что

$$u^i(x, t) = (v^i(x), 0) \quad \text{для} \quad (x, t) \in N \times [0, \varepsilon),$$
$$u^i(x, t) = (w^i(x), 0) \quad \text{для} \quad (x, t) \in N' \times (1 - \varepsilon, 1].$$

Это опять отношение эквивалентности[1]).

---

[1]) Так как далее речь будет идти о бордантности многообразий, являющихся прообразами регулярных значений, то целесообразно уточнить, что это означает в том случае, когда один из этих прообразов пуст.

По большей части Милнор дает такие формулировки, которые сохраняются и в этом случае, если условиться чисто формально называть пустое множество $\varnothing$ «компактным n-мерным подмногообразием многообразия M» (с n, зависящим от обстановки. Когда речь идет об оснащении, то ввиду отсутствия в $\varnothing$ точек сопоставлять им базисы не приходится.) Так, можно всюду в приведенном выше определении бордантности подмногообразий N и N' заменить N' на $\varnothing$; получится формулировка некоторого свойства подмногообразия $N \subset M$. Формальная замена N' на $\varnothing$ не совсем годится только в самом названии этого свойства: если N этим свойством обладает, то обычно говорят, не «N бордантно в M пустому множеству», а «N бордантно в M нулю». или «N ограничивает в M». Ради ясности повторим определения для этого случая.

Компактное n-мерное подмногообразие $N \subset M$, где $\partial N = \partial M = \varnothing$, *бордантно нулю в* M (*ограничивает в* M), если в $M \times [0,1]$ подмножество $N \times [0, \varepsilon)$ можно расширить до «натя-

Рассмотрим теперь гладкое отображение $f\colon M \to S^p$ и его регулярное значение $y \in S^p$. Отображение f следующим образом индуцирует оснащение многообразия $f^{-1}(y)$. Выберем положительно ориентированный базис $\mathfrak{v} = (v^1, \ldots, v^p)$ касательного пространства $T(S^p)_y$. Напомним, что для каждого $x \in f^{-1}(y)$ (см. стр. 194) производная

$$df_x\colon TM_x \to T(S^p)_y$$

переводит подпространство $Tf^{-1}(y)_x$ в 0, а его ортогональное дополнение $Tf^{-1}(y)_x^{\perp}$ изоморфно отображает на $T(S^p)_y$. Поэтому существует единственный вектор

$$w^i(x) \in Tf^{-1}(y)_x^{\perp} \subset TM_x,$$

который переводится в v^i под действием df_x. Для полученного оснащения $w^1(x), \ldots, w^p(x)$ многообразия $f^{-1}(y)$ будет удобно использовать обозначение $\mathfrak{w} = f^*\mathfrak{v}$.

Определение. Оснащенное многообразие $(f^{-1}(y), f^*\mathfrak{v})$ будет называться *многообразием Понтрягина*, соответствующим отображению F.

Конечно, у f есть много многообразий Понтрягина. Они получаются при различном выборе y и $\mathfrak{v}$, но все они принадлежат к одному и тому же классу оснащенных бордизмов.

Теорема А. *Если y' — другое регулярное значение для f, а $\mathfrak{v}'$ — положительно ориентированный базис*

нутой на $N \times 0$ пленки X», т. е. до такого компактного подмногообразия $X \subset M \times [0, 1]$, что $\partial X = N \times 0$ и X не пересекается с $M \times 0$ и $M \times 1$, кроме точек края ∂X. Пусть теперь N оснащено и $\mathfrak{v}$ — оснащение. Пара $(N, \mathfrak{v})$ оснащенно бордантна нулю в M, если в $M \times [0, 1]$ существует такая пленка X, натянутая на $N \times 0$, что $\mathfrak{v}$ продолжается до оснащения $\mathfrak{u}$ этой пленки в $M \times [0, 1]$, т. е.

$$u^i(x, t) = (v^i(x), 0) \quad \text{при} \quad (x, t) \in N \times [0, \varepsilon).$$

— *Прим. ред.*

пространства $T(S^p)_{y'}$, *то оснащенное многообразие* $(f^{-1}(y'), f^*\mathfrak{v}')$ *оснащенно бордантно* $(f^{-1}(y), f^*\mathfrak{v})$.

Теорема B. *Два гладких отображения многообразия* M *в* S^p *гладко гомотопны тогда и только тогда, когда соответствующие многообразия Понтрягина оснащенно бордантны*[1]).

Теорема C. *Любое оснащенное компактное подмногообразие* $(N, \mathfrak{w})$ *коразмерности* p *в* M *является многообразием Понтрягина, соответствующим некоторому гладкому отображению* $f\colon M \to S^p$.

Таким образом, классы гомотопных отображений находятся во взаимно однозначном соответствии с классами оснащенных бордизмов подмногообразий.

Доказательство теоремы A очень похоже на рассуждения § 4 и 5. Оно будет основано на трех леммах.

Лемма 1. *Если* $\mathfrak{v}$ *и* $\mathfrak{v}'$ — *два разных положительно ориентированных базиса в точке* y, *то многообразие Понтрягина* $(f^{-1}(y), f^*\mathfrak{v})$ *оснащенно бордантно многообразию* $(f^{-1}(y), f^*\mathfrak{v}')$.

Доказательство. Выберем гладкий путь, соединяющий $\mathfrak{v}$ с $\mathfrak{v}'$ в пространстве положительно ориентированных базисов пространства $T(S^p)_y$. Существование такого пути обеспечивается линейной связностью пространства положительно ориентированных базисов, которое можно отождествить с пространством $GL^+(p, R)$ матриц p-го порядка, имеющих

[1]) В частности, гладкое отображение $M^m \to S^p$ гладко гомотопно постоянному отображению (отображению, образ которого сводится к одной единственной точке) тогда и только тогда, когда соответствующее многообразие Понтрягина оснащенно бордантно нулю.

Отметим еще, что в теореме B вместо «гладкой гомотопии» можно говорить просто о «гомотопии», однако по-прежнему считая рассматриваемые отображения $M^m \to S^p$ гладкими (см. § 8, задача 4). Для непрерывных, но не гладких отображений $M^m \to S^p$ говорить о многообразии Понтрягина не приходится, однако из той же задачи видно, что их гомотопическая классификация сводится к гомотопической классификации гладких отображений. — *Прим. ред.*

положительный определитель [1]). Этот путь и дает требуемое оснащение пленки $f^{-1}(y) \times [0, 1]$.

Допуская некоторую вольность в обозначениях, мы будем часто опускать указание на $f^*\mathfrak{b}$ и говорить просто об «оснащенном многообразии $f^{-1}(y)$».

Лемма 2. *Если y — регулярное значение для f, а z достаточно близко к y, то многообразие $f^{-1}(z)$ оснащенно бордантно многообразию $f^{-1}(y)$.*

Доказательство. Ввиду компактности множества $f(C)$ критических значений отображения f мы можем выбрать так $\varepsilon > 0$, чтобы ε-окрестность точки y содержала бы только регулярные значения. Зафиксировав z, $\| z - y \| < \varepsilon$, выберем гладкое однопараметрическое семейство вращений (т. е. изотопию) r_t: $S^p \to S^p$ так, что $r_1(y) = z$ и

1) r_t — тождественное отображение при $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon'$;

2) r_t совпадает с r_1 при $1 - \varepsilon' < t \leqslant 1$;

3) для всех t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, прообраз $r_t^{-1}(z)$ лежит на большой окружности, проходящей через y и z, и, следовательно, является регулярным значением отображения f. Определим гомотопию

$$F : M \times [0, 1] \to S^p$$

формулой $F(x, t) = r_t \circ f(x)$. Для каждого t точка z является регулярным значением композиции

$$r_t \circ f : M \to S^p.$$

Из этого следует, что z тем более является регулярным значением отображения F. Поэтому

$$F^{-1}(z) \subset M \times [0, 1]$$

— оснащенное многообразие; оно задает оснащенный бордизм между оснащенными многообразиями $f^{-1}(z)$ и $(r_1 \circ f)^{-1}(z) = f^{-1} \circ r_1^{-1}(z) = f^{-1}(y)$. Это доказывает лемму 2.

---

[1]) См. сноску на стр. 222. — *Прим. ред.*

Лемма 3. *Если f и g гладко гомотопны, а y является регулярным значением для них обоих, то $f^{-1}(y)$ оснащенно бордантно $g^{-1}(y)$.*

Доказательство. Выберем такую гомотопию F, что

$$F(x, t) = f(x) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon,$$
$$F(x, t) = g(x) \quad \text{при} \quad 1 - \varepsilon \leqslant t \leqslant 1.$$

Пусть z — такое близкое к y регулярное значение отображения F, что $f^{-1}(z)$ оснащенно бордантно $f^{-1}(y)$ и $g^{-1}(z)$ оснащенно бордантно $g^{-1}(y)$. Тогда $F^{-1}(z)$ — оснащенное многообразие; оно задает оснащенный бордизм между $f^{-1}(z)$ и $g^{-1}(z)$. Это доказывает лемму 3.

Доказательство теоремы А. Для двух фиксированных регулярных значений y и z отображения f можно так выбрать вращения

$$r_t\colon S^p \to S^p,$$

что r_0 — тождественное отображение, а $r_1(z) = z$. Тогда отображение f гомотопно композиции $r_1 \circ f$; поэтому $f^{-1}(z)$ оснащенно бордантно оснащенному подмногообразию

$$(r_1 \circ f)^{-1}(z) = f^{-1} \circ r_1^{-1}(z) = f^{-1}(y).$$

Доказательство теоремы А закончено.

Доказательство теоремы С будет основано на утверждении, относящемся к следующей ситуации. Пусть $N \subset M$ является оснащенным подмногообразием коразмерности p с оснащением $\mathfrak{v}$. Пусть N компактно и $\partial N = \partial M = \varnothing$.

Теорема об окрестности — прямом произведении. *Некоторая окрестность подмногообразия N в M диффеоморфна произведению $N \times R^p$, причем диффеоморфизм можно выбрать так, чтобы каждая точка $x \in N$ соответствовала точке $(x, 0) \in N \times R^p$, а любое наперед заданное нормальное оснащение $\mathfrak{v}(x)$ соответствовало стандартному базису в R^p.*

Замечание. Не каждое подмногообразие имеет окрестность, диффеоморфную произведению подмногообразия на евклидово пространство (см. рис. 17).

Доказательство. Сначала предположим, что M является евклидовым пространством R^{n+p}. Рассмотрим отображение g: $N \times R^p \to M$, определенное формулой

$$g(x;\ t_1, \ldots, t_p) = x + t_1 v^1(x) + \ldots + t_p v^p(x).$$

Ясно, что дифференциал $dg_{(x, 0, \ldots, 0)}$ невырожден; поэтому g диффеоморфно отображает некоторую окрестность точки $(x, 0) \in N \times R^p$ на открытое множество.

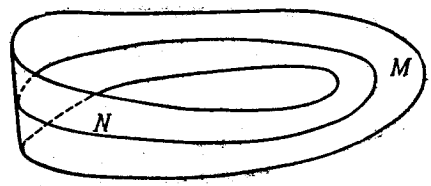


Рис. 17. Подмногообразие, не допускающее оснащения.

Мы докажем, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ отображение g взаимно однозначно на всей окрестности $N \times U_\varepsilon$ многообразия $N \times 0$; здесь U_ε обозначает ε-окрестность нуля в R^p. В противном случае в $N \times R^p$ существовали бы такие пары $(x, u) \neq (x', u')$ со сколь угодно малыми $\| u \|$ и $\| u' \|$, что

$$g(x, u) = g(x', u').$$

Ввиду компактности многообразия N мы могли бы выбрать такую последовательность подобных пар, что x сходятся, скажем, к x_0, x' — к x'_0, $u \to 0$ и $u' \to 0$. В этом случае ясно, что $x_0 = x'_0$, и мы получили бы противоречие с взаимной однозначностью отображения g в окрестности точки $(x_0, 0)$.

Следовательно g диффеоморфно отображает $N \times U_\varepsilon$ на некоторое открытое множество. Но U_ε

диффеоморфно всему евклидову пространству R^p посредством отображения

$$u \to \frac{u}{1 - \frac{\|u\|^2}{\varepsilon^2}}.$$

Так как $g(x, 0) = x$ и $dg_{(x, 0)}$ обладает нужными свойствами, то теорема об окрестности — прямом произведении в частном случае $M = R^{n+p}$ доказана.

В общем случае прямые линии в R^{n+p} нужно заменить геодезическими линиями на M. Более точно, пусть $g(x, t_1, \ldots, t_p)$ — конец дуги геодезической линии на M длины $\| t_1 v^1(x) + \ldots + t_p v^p(x) \|$, выходящей из точки x с начальным вектором скорости

$$\frac{t_1 v^1(x) + \ldots + t_p v^p(x)}{\| t_1 v^1(x) + \ldots + t_p v^p(x) \|}.$$

Читателю, знакомому с геодезическими, не составит труда проверить, что при достаточно малом ε отображение

$$g\colon N \times U_\varepsilon \to M$$

корректно определено, гладко и диффеоморфно отображает некоторую окрестность точки $(x, 0) \in N \times U_\varepsilon$ на некоторое открытое множество[1]). Конец доказательства проводится точно так же, как выше.

---

[1]) Читатель, недостаточно знакомый с геодезическими, возможно, найдет более простым следующий путь. Считая, что $N^n \subset M^m \subset R^k$, напомним, что Милнор рассматривает касательное пространство TM_x^m как m-мерное векторное пространство в R^k, проходящее через 0 (а не через x); параллельное ему линейное пространство, проходящее через x, обозначим на минуту через L_x.

Пусть $TM_x^\perp$ — векторное $(k-m)$-мерное пространство, ортогональное к TM_x и тоже проходящее через 0, и $L_x^\perp$ — параллельное ему линейное пространство, проходящее через x. Точки пространства L_x суть $x + y$, $y \in TM_x$, а точки $L_x^\perp$ суть $x + z$, $z \in TM_x^\perp$. Каждую точку $q \in M$ можно ортогонально спроектировать на L_x и $L_x^\perp$; пусть $x + y$ и $x + z$ — эти проекции. Тогда

Доказательство теоремы С. Пусть $N \subset M$ — компактное оснащенное подмногообразие без края. Возьмем, как это было сделано выше, представление некоторой окрестности V подмногообразия N в виде произведения

$$g\colon N \times R^p \to V \subset M$$

и определим проекцию

$$\pi\colon V \to R^p$$

формулой $\pi(g(x, y)) = y$ (см. рис. 18). Ясно, что 0 является регулярным значением, а $\pi^{-1}(0)$ в точности совпадает с N вместе с заданным на нем оснащением.

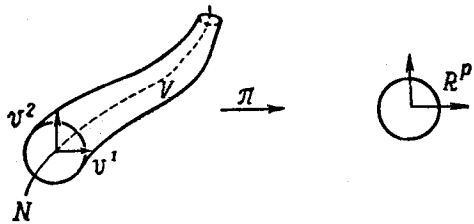


Рис. 18. Построение отображения с заданным многообразием Понтрягина.

Теперь возьмем какое-нибудь гладкое отображение $\varphi\colon R^p \to S^p$, которое переводит все точки x с $\|x\| \geqslant 1$ в одну «отмеченную» точку s_0, а открытый

некоторая окрестность W точки x на многообразии M описывается уравнением вида

$$z = f^x(y) \quad \left(z \in TM_x^{\perp},\ y \in TM_x,\ \|y\| < \varepsilon\right),$$

где $f^x\colon TM_x \to TM_x^{\perp}$ — гладкая функция и $df_0^x = 0$.

Иными словами, каждая точка $q \in W$ имеет своей ортогональной проекцией на L_x некоторое $x + y$, где y мало, а на $L_x^{\perp}$ — $x + z$, где $z = f^x(y)$; такую точку q мы обозначим через $h^x(y)$. Тогда можно принять

$$g(x, t_1, \ldots, t_p) = h^x(t_1 v^1(x) + \ldots + t_p v^p(x)).$$

— *Прим. ред.*

единичный шар диффеоморфно отображает[1]) на $S^p \setminus s_0$. Определим

$$f\colon M \to S^p,$$

положив

$$f(x) = \varphi(\pi(x)) \quad \text{при} \quad x \in V,$$
$$f(x) = s_0 \quad \text{при} \quad x \notin V.$$

Ясно, что F — гладкое отображение и $\varphi(0)$ является его регулярным значением. Так как соответствующее многообразие Понтрягина

$$f^{-1}(\varphi(0)) = \pi^{-1}(0)$$

в точности совпадает с оснащенным многообразием N, то доказательство теоремы С закончено.

Для доказательства теоремы В нам сначала необходимо показать, что многообразие Понтрягина любого отображения однозначно определяет его класс гомотопных отображений. Пусть f, g: $M \to S^p$ — гладкие отображения, а y является регулярным значением для них обоих.

Лемма 4. *Если оснащенное многообразие* $(f^{-1}(y), f^*\mathfrak{v})$ *совпадает с* $(g^{-1}(y), g^*\mathfrak{v})$, *то отображение* f *гладко гомотопно* g.

Доказательство. Обозначим $N = f^{-1}(y)$. Предположение $f^*\mathfrak{v} = g^*\mathfrak{v}$ означает, что $df_x = dg_x$ для всех $x \in N$.

Сначала предположим, что f в действительности совпадает с g на целой окрестности V многообразия N. Пусть h: $S^p \setminus y \to R^p$ — стереографическая проекция

---

[1]) Например, $\varphi(x) = h^{-1}(x/\lambda(\|x\|^2))$, где h — стереографическая проекция из точки s_0, λ — гладкая монотонно убывающая функция, причем $\lambda(t) > 0$ при $t < 1$ и $\lambda(t) = 0$ при $t \geqslant 1$. (Считаем, что s_0 — северный полюс сферы S^p, а R^p параллельно $TS^p_{s_0}$. — *Ред.*)

из точки y. Тогда гомотопия

$$F(x, t) = f(x) \quad \text{при} \quad x \in V,$$

$$F(x, t) = h^{-1}[t \cdot h(f(x)) + (1-t)\, h(g(x))] \text{ при } x \in M \setminus N$$

показывает, что f гладко гомотопно g.

Таким образом, нам достаточно так продеформировать f, чтобы оно в некоторой малой окрестности подмногообразия N совпало с g; при этом надо позаботиться о том, чтобы в процессе деформации никакие новые точки не отображались бы в y. Возьмем представление окрестности V многообразия N в виде прямого произведения $N \times R^p \to V \subset M$, и пусть V — настолько малая окрестность, что ни $f(V)$, ни $g(V)$ не содержат точки $\bar{y}$, центрально-симметричной точке y. Отождествляя V с $N \times R^p$ и $S^p \setminus \bar{y}$ с R^p, мы получаем из f, g отображения

$$F, G\colon N \times R^p \to R^p,$$

причем

$$F^{-1}(0) = G^{-1}(0) = N \times 0$$

и

$$dF_{(x,0)} = dG_{(x,0)} = (\text{проекция на } R^p)$$

для всех $x \in N$.

Сначала мы найдем такую постоянную c, что

$$F(x, u) \cdot u > 0, \quad G(x, u) \cdot u > 0$$

при $x \in N$ и $0 < \|u\| < c$, т. е. точки $F(x, u)$ и $G(x, u)$ принадлежат одному и тому же открытому полупространству в R^p [1]). Поэтому гомотопия

$$-t)\, F(x, u) + tG(x, u),$$

соединяющая F с G, не переводит никаких новых точек в 0 — по крайней мере при $\|u\| < c$.

Согласно теореме Тейлора,

$$\|F(x, u) - u\| \leqslant c_1 \|u\|^2 \quad \text{при} \quad \|u\| \leqslant 1.$$

---

[1]) Именно здесь используется, что $df_x = dg_x$ при всех $x \in N$. — *Прим. ред.*

Поэтому

$$|(F(x, u) - u) \cdot u| \leqslant c_1 \|u\|^3$$

и

$$F(x, u) \cdot u \geqslant \|u\|^2 - c_1 \|u\|^3 > 0$$

при $0 < \|u\| < \min(c_1^{-1}, 1)$; аналогичное неравенство справедливо и для G.

Чтобы образы удаленных от N точек не пришлось двигать при гомотопии, возьмем такую гладкую функцию λ: $R^p \to R$, что

$$\lambda(u) = 1 \quad \text{при} \quad \|u\| \leqslant c/2,$$
$$\lambda(u) = 0 \quad \text{при} \quad \|u\| \geqslant c.$$

Тогда гомотопия

$$F_t(x, u) = [1 - \lambda(u) t] F(x, u) + \lambda(u) t G(x, u)$$

соединяет отображение $F = F_0$ с отображением F_1, которое (1) совпадает с G в области $\|u\| < \frac{c}{2}$; (2) совпадает с F при $\|u\| \geqslant c$; (3) не имеет новых нулей. Тем самым получается требуемая деформация исходного отображения f, и лемма 4 доказана.

Доказательство теоремы B. Если f и g гладко гомотопны, то, согласно лемме 3, многообразия Понтрягина $f^{-1}(y)$ и $g^{-1}(y)$ оснащенно бордантны. Обратно, если $f^{-1}(y)$ и $g^{-1}(y)$ оснащенно бордантны, а $(X, \mathfrak{w})$ — оснащенная пленка, реализующая этот бордизм, то с помощью рассуждений, полностью аналогичных доказательству теоремы C, строится гомотопия

$$F\colon M \times [0, 1] \to S^p,$$

для которой многообразие Понтрягина $(F^{-1}(y), F^*\mathfrak{w})$ в точности совпадает с $(X, \mathfrak{w})$. Положим $F_t(x) = F(x, t)$ и заметим, что F_0 и f имеют одно и то же многообразие Понтрягина. Поэтому $F_0 \sim f$, согласно лемме 4; аналогично $F_1 \sim g$. Отсюда $f \sim g$, и теорема B доказана.

Замечания. Теоремы A, B и C можно легко обобщить на тот случай, когда M — многообразие с

краем. Основная идея состоит в том, чтобы рассматривать только те отображения, которые переводят край в отмеченную точку s_0. Гомотопические классы таких отображений

$$(M, \partial M) \to (S^p, s_0)$$

находятся во взаимно однозначном соответствии с классами бордизмов оснащенных подмногообразий

$$N \subset \text{Внутренность } (M)$$

коразмерности p. Если $p \geqslant {}^1/_2 m + 1$, то в этом множестве гомотопических классов можно ввести структуру абелевой группы, которая называется *p-й когомотопической* группой $\pi^p(M, \partial M)$. Групповая операция в $\pi^p(M, \partial M)$ соответствует операции объединения непересекающихся оснащенных подмногообразий, лежащих во внутренности M (см. § 8, задача 17).

Теорема Хопфа

В качестве примера рассмотрим следующую ситуацию. Пусть M — связное ориентированное многообразие размерности $m = p$. Оснащенное подмногообразие коразмерности p — это просто конечное множество точек с выделенным базисом касательного пространства в каждой из них.

Пусть $\operatorname{sgn}(x)$ равно $+1$ или -1 в зависимости от того, согласуется ли ориентация выделенного базиса с ориентацией M или нет. Тогда $\Sigma \operatorname{sgn}(x)$, очевидно, равна степени соответствующего отображения $M \to S^m$. С другой стороны, не трудно понять, что класс оснащенных бордизмов нульмерных многообразий однозначно определяется целым числом $\Sigma \operatorname{sgn}(x)$. Следовательно, мы доказали следующую теорему.

Теорема Хопфа. *Если M — компактное связное ориентированное m-мерное многообразие без края, то два отображения $M \to S^m$ гладко гомотопны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую степень.*

С другой стороны, предположим, что M неориентируемо. Тогда, взяв какой-нибудь базис в TM_x, можно провести точку x по такому замкнутому пути в M,

что этот базис непрерывно перейдет в базис, имеющий противоположную ориентацию[1]). В этом случае просто доказывается следующее утверждение.

Теорема. *Если M — связное компактное неориентируемое m-мерное многообразие без края, то два отображения $M \to S^m$ гомотопны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую степень* mod 2.

Теория оснащенных бордизмов была разработана Понтрягиным для изучения гомотопических классов отображений $S^m \to S^p$ при $m > p$ (случай $m < p$ три-

---

[1]) Пусть $x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, — путь в многообразии M (т. е. точка $x(t) \in M$ непрерывно зависит от t). Пусть выбрана ориентация $\mathcal{O}_0$ касательного пространства $TM_{x(0)}$. Существует такой базис $\mathfrak{v}$ в $TM_{x(t)}$, который непрерывно зависит от t (т. е. состоит из непрерывно зависящих от t векторов) и при $t = 0$ ориентирован согласно $\mathcal{O}_0$. (Существование такого базиса $\mathfrak{v}(t)$ очевидно, если весь путь целиком лежит в одной координатной окрестности, т. е. $x([0, 1]) \subset g(U)$, где $g\colon U \to M$ — некоторая параметризация. В общем же случае можно разбить путь на участки, целиком лежащие в некоторых координатных окрестностях.) Базисов $\mathfrak{v}(t)$ с указанными свойствами существует много, но ориентация $\mathcal{O}_1$, которую $\mathfrak{v}(1)$ определяет в $TM_{x(1)}$, зависит только от исходной ориентации $\mathcal{O}_0$ и, может быть, еще от пути $x(t)$. (Если $\mathfrak{w}(t)$ — другой непрерывно зависящий от t базис в $TM_{x(t)}$, то при всех t переход от первого базиса ко второму описывается невырожденной матрицей m-го порядка, и если ее определитель положителен при $t = 0$, то он будет положителен и при $t = 1$.) Будем говорить, что ориентация $\mathcal{O}_1$ *получается при переносе $\mathcal{O}_0$ вдоль пути $x(t)$*.

Допустим теперь, что на M не существует замкнутого пути, *обращающего ориентацию*, т. е. такого пути $x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $x(0) = x(1)$, при переносе вдоль которого в $TM_{x(1)} = TM_{x(0)}$ получается ориентация, противоположная исходной. Зафиксировав какую-нибудь точку $x \in M$ и какую-нибудь ориентацию $\mathcal{O}_x$ пространства TM_x, определим для любой точки $y \in M$ ориентацию $\mathcal{O}_y$, как ту ориентацию, которая получается при переносе $\mathcal{O}_x$ вдоль какого-нибудь пути, соединяющего x с y. Если бы $\mathcal{O}_y$ зависела от выбора этого пути, то, идя из x в y по одному пути и возвращаясь из y в x по другому, мы получили бы путь, обращающий ориентацию. Легко видеть, что ориентации $\mathcal{O}_y$ согласованы в смысле, указанном в начале § 5. Итак, если на многообразии нет замкнутых путей, обращающих ориентацию, то оно ориентируемо (кстати, очевидно, что обратное тоже верно). — *Прим. ред.*

виален). Например, если $m = p + 1 \geqslant 4$, то существует ровно два гомотопических класса отображений $S^m \to S^p$. Понтрягин доказал этот результат, классифицируя одномерные оснащенные подмногообразия в S^m. Гораздо труднее оказалась эта задача при $m = p + 2 \geqslant 4$, но и в этом случае ему удалось, используя 2-мерные оснащенные многообразия, показать, что существуют ровно два гомотопических класса. Однако при $m - p > 2$ такой подход к этой задаче упирается в трудности с многообразиями большей размерности[1]). С тех пор выяснилось, что гомотопические классы отображений проще вычислять при помощи совсем других, более алгебраических методов[2]). Конструкция Понтрягина, однако, является обоюдоострым оружием. Она не только позволяет нам переводить информацию о многообразиях на язык гомотопической теории, но и, наоборот, позволяет переводить информацию о гомотопиях на язык теории многообразий. Некоторые наиболее глубокие работы по современной топологии возникли при взаимодействии этих двух теорий. Важным примером является работа Тома о бордизме ([40], [21])

§ 8. УПРАЖНЕНИЯ

В заключение читателю предлагается несколько задач.

Задача 1. Показать, что степень композиции $g \circ f$ равна произведению (степень g) $\cdot$ (степень f).

Задача 2. Показать, что любой комплексный многочлен степени n задает гладкое отображение степени n сферы S^2 на себя.

Задача 3. Доказать, что если отображения f и g единичной сферы S^p удовлетворяют условию $\| f(x) - g(x) \| < 2$ при всех x, то f гомотопно g, и гомотопия гладкая, если f и g гладкие.

---

[1]) Этим методом удалось еще разобрать случай $m - p = 3$ (В. А. Рохлин [31*]). — *Прим. ред.*

[2]) См., например, Ху Сы-цзян [56] (или [36*], [49*]. — *Ред.*).

Задача 4. Доказать, что если X — компакт, то любое непрерывное отображение $X \to S^p$ можно равномерно приблизить гладким отображением, и если два гладких отображения $X \to S^p$ непрерывно гомотопны, то они гладко гомотопны.

Задача 5. Показать, что если $m < p$, то любое отображение $M^m \to S^p$ гомотопно отображению в точку.

Задача 6 (Брауэр). Показать, что любое отображение $S^n \to S^n$ степени, отличной от $(-1)^{n+1}$, имеет неподвижную точку.

Задача 7. Показать, что любое отображение $S^n \to S^n$ нечетной степени переводит некоторую пару центрально-симметричных точек в пару центрально-симметричных точек.

Задача 8. Пусть $M \subset R^k$ и $N \subset R^l$ — гладкие многообразия. Показать, что касательное пространство $T(M \times N)_{(x, y)}$ равно $TM_x \times TN_y$.

Задача 9. *Графиком* Γ гладкого отображения $f\colon M \to N$ называется множество таких точек $(x, y) \in M \times N$, что $y = f(x)$. Показать, что Γ есть гладкое многообразие и что касательное пространство

$$T\Gamma_{(x, y)} \subset TM_x \times TN_y$$

является графиком линейного отображения df_x.

Задача 10. Пусть дано гладкое многообразие $M \subset R^k$. Показать, что *касательное расслоение*

$$TM = \{(x, v) \in M \times R^k \mid v \in TM_x\}$$

также является гладким многообразием. Показать, что любое гладкое отображение $f\colon M \to N$ порождает гладкое отображение

$$df\colon TM \to TN,$$

причем (id — тождественное отображение)

$$d(\mathrm{id}) = \mathrm{id}, \qquad d(g \circ f) = (dg) \circ (df).$$

Задача 11. Аналогично показать, что *нормальное расслоение*

$$E = \{(x, v) \in M \times R^k \mid v \in TM_x^{\perp}\}$$

является гладким многообразием. Если M компактно и не имеет края, то отображение E в R^k

$$(x, v) \longmapsto x + v$$

диффеоморфно отображает ε-окрестность многообразия $M \times 0$ в E на ε-окрестность N_ε многообразия M в R^k. (Сравните с теоремой об окрестности — прямом произведении в § 7.)

Задача 12. Определим r: $N_\varepsilon \to M$ с помощью формулы $r(x+v) = x$. Показать, что $r(x+v)$ ближе к $x+v$, чем любая другая точка многообразия M. Используя эту ретракцию r, доказать аналог утверждения из задачи 4, в котором сфера S^p заменена на многообразие M [1]).

Задача 13. Пусть многообразия M, $N \subset R^{k+1}$ не пересекаются друг с другом. Отображение зацепления

$$\lambda\colon M \times N \to S^k$$

определяется следующим образом:

$$\lambda(x, y) = (x - y)/\| x - y \|.$$

Если M и N компактны, ориентированы и без края, а сумма их размерностей $m + n = k$, то степень отображения называется *коэффициентом зацепления* $l(M, N)$. Доказать, что

$$l(N, M) = (-1)^{(m+1)(n+1)} l(M, N).$$

Доказать, что $l(M, N) = 0$, если M является краем ориентированного многообразия X, не пересекающегося

---

[1]) В этом аналоге задачи 4 вполне можно допустить наличие у M края. В этом случае, вместо того чтобы строить гладкую ретракцию $N \to M$ некоторой окрестности N многообразия M на само M (что, впрочем, можно сделать), проще поступить так. Некоторая окрестность U края ∂M в M диффеоморфна $\partial M \times I$ (почему?). Пусть $M' = M \setminus (\partial M \times [0, \varepsilon])$, где использовано представление U в виде $\partial M \times I$ и ε взято достаточно малым. Легко доказать, что M' является гладким ретрактом многообразия M, а M — гладким ретрактом некоторой окрестности N множества M' в объемлющем евклидовом пространстве. После этого любое непрерывное отображение компакта X в M можно сперва аппроксимировать отображением $X \to M'$, затем гладким отображением $X \to N$ и, наконец, гладким отображением $X \to M$. — *Прим. ред.*

с N. Дать определение коэффициента зацепления непересекающихся многообразий на сфере S^{m+n+1}.

Задача 14. Инвариант Хопфа. Если $y \neq z$ — регулярные значения отображения $f\colon S^{2p-1} \to S^p$, то многообразия $f^{-1}(y)$ и $f^{-1}(z)$ могут быть ориентированы как в § 5; следовательно, можно определить коэффициент зацепления $l(f^{-1}(y), f^{-1}(z))$.

a) Доказать, что коэффициент зацепления как функция y локально постоянен.

b) Доказать, что если y и z являются регулярными значениями также и для g, а $\|f(x) - g(x)\| < \|y - z\|$ для всех x, то

$$l(f^{-1}(y), f^{-1}(z)) = l(g^{-1}(y), f^{-1}(z)) = l(g^{-1}(y), g^{-1}(z)).$$

c) Показать, что $l(f^{-1}(y), f^{-1}(z))$ зависит только от гомотопического класса f и не зависит от выбора y и z.

Целое число $H(f) = l(f^{-1}(y), f^{-1}(z))$ называется *инвариантом Хопфа* отображения f [55].

Задача 15. Доказать, что если размерность p нечетна, то $H(f) = 0$. Доказать, что для композиции

$$S^{2p-1} \xrightarrow{f} S^p \xrightarrow{g} S^p$$

$H(g \circ f)$ равно $H(f)$, умноженному на квадрат степени g.

Расслоение Хопфа $\pi\colon S^3 \to S^2$ определяется так:

$$\pi(x_1, x_2, x_3, x_4) = h^{-1}((x_1 + ix_2)/(x_3 + ix_4)),$$

где h означает стереографическую проекцию сферы на плоскость комплексного переменного. Доказать, что $H(\pi) = 1$.

Задача 16. Говорят, что подмногообразия N и N' многообразия M *пересекаются трансверсально*[1]), если для любого $x \in N \cap N'$ подпространства TN_x и TN'_x порождают TM_x. (Если $n + n' < m$, то это означает, что $N \cap N' = \varnothing$.) Доказать, что если N — оснащенное подмногообразие, то его можно слегка поше-

[1]) Говорят также: *N и N' трансверсальны*; *N и N' находятся в общем положении*. — *Прим. ред.*