велить так, что пересечение с данным N' станет трансверсальным [1]). Доказать, что получившееся пресечение есть гладкое многообразие.

Задача 17. Пусть $\Pi^p(M)$ обозначает множество всех классов оснащенных бордизмов коразмерности p в многообразии M. Используя трансверсальные пересечения, определить отображение

$$\Pi^p(M) \times \Pi^q(M) \to \Pi^{p+q}(M).$$

При $p \geqslant \frac{1}{2} m + 1$, используя операцию объединения непересекающихся оснащенных многообразий, превратить $\Pi^p(M)$ в абелеву группу (см. стр. 245).

Задача 18*. Пусть M, N — компактные гладкие многообразия одинаковой размерности и N связно, а $f\colon M \to N$ — непрерывное отображение. Докажите, что у всех гладких отображений $g\colon M \to N$, достаточно близко аппроксимирующих f (а такие g всегда существуют; см. задачу 12), степень отображения $\bmod 2$ одна и та же. Следовательно, этот вычет однозначно определяется исходным непрерывным отображением f. Его называют степенью отображения $f \bmod 2$. Если M и N ориентированы, то аналогично можно ввести степень любого непрерывного отображения $f\colon M \to N$.

Определенную таким путем степень (или степень $\bmod 2$) непрерывного отображения f, конечно, уже нельзя интерпретировать в таких наглядных терминах (с прообразами регулярного значения), как для гладких отображений. Докажите тем не менее, что основные свойства степени сохраняются: если N имеет край или если $f(M) \neq N$, то степень (или степень $\bmod 2$) равна нулю; у гомотопных отображений степени равны; верны аналоги задач 1, 6, 7. Пусть M и N — компактные гладкие ориентированные многообразия размерностей m и $m-1$ соответственно, причем M имеет край, состоящий из двух непересекающихся

[1]) Это верно и без предположения об оснащенности N, только при этом предположении доказательство получается проще. Еще один случай, когда доказательство упрощается, — это когда объемлющее многообразие M является евклидовым пространством. — *Прим. ред.*

многообразий N_1 и N_2; пусть $f\colon M \to N$ — непрерывное отображение. Покажите, что

$$\text{степень } f \mid N_1 = -\text{степень } f \mid N_2$$

(при обычной ориентации края). Если же M, N не ориентируемы, то во всяком случае выполняется соответствующее сравнение $\bmod 2$. Выведите отсюда, что край компактного гладкого многообразия не является его ретрактом (ранее было доказано, что он не является гладким ретрактом). Для непрерывного векторного поля с изолированными нулями определите понятие индекса поля в нуле и докажите аналоги основных результатов § 6.

Задача 19*. Пусть $M \subset R^k$ — компактное гладкое многообразие, E — его нормальное расслоение (задача 11),

$$E_1 = \{(x, v) \mid (x, v) \in E,\ \|v\| = 1\}.$$

Докажите, что E_1 — компактное гладкое $(k-1)$-мерное многообразие. Обозначая единичную сферу пространства R^k через R^{k-1}, для любого $e \in S^{k-1}$ рассмотрите касательное векторное поле

$$u_e(x) = \text{ортогональная проекция } e \text{ на } TM_x.$$

Докажите, что оно имеет нуль в точке x тогда и только тогда, когда e является образом точки $(x, v) \in E_1$ (с некоторым v) при отображении

$$\varphi\colon E_1 \to S^{k-1}, \quad \varphi(x, v) = v.$$

Когда этот нуль будет невырожденным? Докажите существование такого $e \in S^{k-1}$, что все нули поля $u_e(x)$ — невырожденные. Покажите, что для такого e все критические точки функции

$$f_e\colon M \to R, \qquad f_e(x) = e \cdot x,$$

будут невырожденными в смысле определения 4.5 из Уоллеса.

Задача 20*. В § 6 для компактного гладкого многообразия N без края доказано, что все касательные векторные поля на N с изолированными нулями

(согласно предыдущей задаче, такие поля существуют) имеют одну и ту же сумму индексов нулей. Обозначим ее через $\chi(N)$. Доказано также, что $\chi(N) = 0$, если размерность N нечетна.

Пусть теперь $M \subset R^k$ есть m-мерное гладкое компактное многообразие с краем. Мы хотим изучить касательные векторные поля на M, имеющие следующие свойства:

(*) поле имеет конечное число нулей,
а на крае оно направлено наружу.

Для этого полезно ввести *дубль* $\tilde{M}$ многообразия M. Дубль — это m-мерное гладкое компактное многообразие без края, обладающее следующим свойством: существуют такие многообразия M_0, M_1 и такие диффеоморфизмы φ_0: $M_0 \to M$, φ_1: $M_1 \to M$, что

$$\tilde{M} = M_0 \cup M_1, \quad M_0 \cap M_1 = \partial M_0 = \partial M_1,$$
$$\varphi_0 | M_0 \cap M_1 = \varphi_1 | M_0 \cap M_1.$$

Наглядно можно представлять себе, что дубль получается склеиванием многообразия M с его точной копией; склеивание производится по краю ∂M, причем так, что каждая точка края отождествляется со своей копией на краю второго экземпляра. Если исходить из «абстрактного» определения многообразия, как у Уоллеса, и пользоваться общим результатом о склеивании двух многообразий по заданному диффеоморфизму краев (Уоллес, конец разд. 2.7), то предыдущая фраза дает не только наглядное разъяснение, но и исчерпывающее описание построения дубля. Если же ограничиваться подмногообразиями евклидова пространства и не апеллировать к недоказанному результату, то дубль легко построить в $R^{k+1} = R^k \times R$ (при этом $M \subset R^k \times 0$ будет «приподнято» и «изогнуто» для получения M_0, «опущено» и «изогнуто» для получения M_1). А именно:

Край ∂M имеет в M окрестность L, диффеоморфную $\partial M \times [0, 1]$; пусть f: $\partial M \times [0, 1] \to L$ — диффеоморфизм, причем $f(x, 0) = x$. Пусть φ: $R \to R$ — гладкая функция класса C^∞ со следующими свойствами:

$\varphi(t) \equiv t$ при $t \leqslant \frac{1}{3}$; $\varphi'(t) > 0$ при $t < \frac{2}{3}$; $\varphi(t) \equiv 1$ при $t \geqslant \frac{2}{3}$. Положим

$$f_1\colon \partial M \times [0, 1] \to R^{k+1} = R^k \times R;$$
$$f_1(x, t) = (f(x, 1 - \varphi(1 - t)), \varphi(t));$$
$$L_1 = f_1(\partial M \times [0, 1]); \quad M_1 = (M \times 1 \setminus L \times 1) \cup L_1.$$

Многообразие M_0 получается из M_1 отражением в гиперплоскости $R^k \times 0$; наконец, $\widetilde{M} = M_0 \cup M_1$. (Рекомендуется проследить за построением, сделав рисунок для того случая, когда M — дуга на плоскости.)

Проверьте, что $\widetilde{M}$ действительно является дублем. Докажите, что сколь угодно близко к орту $(0, \ldots, 0, 1)$ найдется такой вектор e, что (в обозначениях предыдущей задачи) векторное поле $u_e(x)$ на M_0 будет обладать свойствами (*). Рассматривая подходящие векторные поля на $\widetilde{M}$, докажите, что для всех полей на M, удовлетворяющих (*), сумма индексов нулей $\Sigma\iota$ — одна и та же:

если m четно, то $2\Sigma\iota = \chi(\widetilde{M})$;

если m нечетно, то $2\Sigma\iota - \chi(\partial M) = \chi(\widetilde{M}) = 0$.

Задача 21*. Докажите теорему Хопфа, сформулированную на стр. 230, с помощью другой теоремы Хопфа, доказанной на стр. 245. А именно, постройте сперва векторное поле v с конечным числом нулей, затем докажите, что существует координатная окрестность, диффеоморфная шару, внутри которой содержатся все нули поля v, и сведите доказываемую теорему к такой: пусть на единичной сфере S^{n-1} в R^n задано векторное поле u (уже не касательное!), нигде не обращающееся в нуль, и пусть вращение u на S^{n-1} (см. стр. 219) равно нулю; тогда это поле можно продолжить до поля на единичном шаре, не имеющего нулей. Последнее утверждение докажите с помощью теоремы Хопфа об отображениях сферы в сферу.

Задача 22*. Пусть $M^m \subset R^{k+1}$ — гладкое компактное многообразие. Для любого единичного вектора e обозначим через R^k_e ортогональное ему

k-мерное линейное подпространство и через p_e — ортогональную проекцию на R^k_e. Посмотрим, когда ограничение $p_e|M$ будет вложением (см. стр. 65) многообразия M в R^k_e. Ранг $p_e|M$ будет всюду равен m, если e нигде не касается M. Две точки $x, y \in M$ не перейдут в одну, если соединяющий их вектор не параллелен e. Переформулируйте эти условия в терминах подходящих вспомогательных отображений

$$T_1M \to S^k, \quad (M \times M) \setminus \Delta \to S^k,$$

где S^k — единичная сфера,

$$T_1M = \{(x, v) \mid (x, v) \in TM, \ \|v\| = 1\}$$

(TM — касательное расслоение, см. задачу 10),

$$\Delta = \{(x, x) \mid x \in M\}$$

— «диагональ» в прямом произведении $M \times M$. Выведите отсюда, что существует вложение многообразия M^m в R^{2m+1} (теорема Уитни). Более того, если M компактно, то любое гладкое отображение $f\colon M^m \to R^{2m+1}$ можно путем малого возмущения превратить во вложение (если M — подмногообразие R^k, то рассмотрите вложение

$$g\colon M \to R^{2m+1} \times R^k, \qquad g(x) = (f(x), \varepsilon x),$$

и проекции $R^{2m+1} \times R^k \xrightarrow{p_k} R^{2m+1} \times R^{k-1} \xrightarrow{p_{k-1}} \ldots \to R^{2m+1} \times R \xrightarrow{p_1} R^{2m+1}$; ясно, что $p_1 \circ \ldots \circ p_k \circ g = f$; получите искомое вложение $M \to R^{2m+1}$, слегка изменяя p_i).

Докажите, что при $k \geqslant 2m + 3$ любые два вложения $N^m \to R^k$ гладко изотопны.

Задача 23*. В определении 6.5 у Уоллеса введено понятие бордантности двух гладких компактных многообразий без края (не путать с бордантностью подмногообразия в объемлющем многообразии, как это определено у Милнора!). Докажите, что это отношение эквивалентности.

Обозначим через $\mathfrak{N}_m$ совокупность классов бордизмов многообразий размерности m. Покажите, что $\mathfrak{N}_m$

можно рассматривать как совокупность классов бордизмов m-мерных многообразий в R^k или S^k, если $k > 2m + 2$, и что $\mathfrak{N}_m$ можно превратить в абелеву группу, называя суммой двух классов бордизмов, содержащих непересекающиеся многообразия M и N, класс бордизмов многообразия $M \cup N$. Вместо несвязного объединения можно воспользоваться связной суммой (см. Уоллес, стр. 155). Определите умножение $\mathfrak{N}_m \times \mathfrak{N}_n \to \mathfrak{N}_{m+n}$ с помощью прямого произведения многообразий и докажите, что по отношению к введенным операциям прямая сумма [1])

$$\mathfrak{N}_* = \sum \mathfrak{N}_m$$

является ассоциативным и коммутативным кольцом (оно называется *кольцом бордизмов*).

Для *ориентированных* многообразий M и N можно ввести другое отношение эквивалентности: M и N *бордантны* как ориентированные многообразия, если существует такое компактное гладкое ориентированное многообразие W с краем $M_1 \cup N_1$, что $M_1 \cup N_1 = \varnothing$, и существуют диффеоморфизмы $M \to M_1$ и $N \to N_1$, из которых один сохраняет, а другой изменяет ориентацию ($M_1 \cup N_1$ ориентируется как край W). Исходя из этого отношения эквивалентности, дайте определения *групп ориентированных бордизмов* Ω_m и *кольца ориентированных бордизмов* $\Omega_* = \Sigma\Omega_m$. (Чтобы подчеркнуть различие с этим случаем, об $\mathfrak{N}_m$ говорят, как о *группе неориентированных бордизмов.*)

Замечание. Кольца $\mathfrak{N}_*$ и Ω_* полностью известны ($\mathfrak{N}_*$ вычислил Том, вычисление же Ω_*, существенно продвинутое им, было доведено до конца усилиями ряда авторов).

Задача 24*. Определите эйлерову характеристику проективного пространства P^n (см. Уоллес, упражнения 2.6, 2.7), использовав стандартное отображение $f\colon S^n \to P^n$ и «подняв» с его помощью векторное поле с P^n на S^n (т. е. построив на S^n поле, f-связанное с

[1]) Напомним, что хотя имеется бесконечное число «слагаемых» $\mathfrak{N}_m$, каждый элемент $x \in \mathfrak{N}_*$ является конечной суммой $x_1 + \ldots + x_r$, $x_i \in \mathfrak{N}_{m_i}$.

заданным полем на P^n). Докажите, что при четном n P^n не ограничивает (см. задачу 20*; впрочем, это следует уже из неориентируемости, см. стр. 212).

Замечание. Использование эйлеровой характеристики в этой задаче — простейший пример применения для решения задач о бордизмах так называемых *характеристических классов* — некоторых «выделенных» элементов групп гомологий $H_i(M)$, определенным образом сопоставляемых каждому многообразию M.

Задача 25*. В § 7 у Уоллеса доказано, что каждая замкнутая поверхность (т. е. связное компактное гладкое двумерное многообразие без края) диффеоморфна одной из «стандартных» поверхностей Σ_k (сфера с k ручками) или $N(k)$ (сфера, в которую вклеены k листов Мёбиуса).

а) Вычислите эйлерову характеристику поверхностей Σ_k и $N(k)$ и убедитесь, в частности, что при различных k она получается различной. (Мы знаем, что эйлерова характеристика и ориентируемость сохраняются при диффеоморфизме [1]), поэтому отсюда получается полная классификация замкнутых поверхностей относительно диффеоморфизмов.)

б) В качестве инварианта, различающего Σ_k и $N(k)$ при разных k, Уоллес использует род поверхности, т. е. максимальное число непересекающихся гладких [2]) окружностей, при разрезе по которым поверхность остается связной. Хотя мы обошлись без рода, нелишне убедиться, что род замкнутой поверхности конечен — факт, принятый в § 7 у Уоллеса без доказательства. Пусть на поверхности M существует r непересекающихся гладких окружностей. Разрежем M по ним и заклеим кругами все полученные дырки

[1]) На самом деле они сохраняются и при гомеоморфизме. Это доказывается в алгебраической топологии.

[2]) Обычно в определении рода (определение 7.1 у Уоллеса) гладкости не требуют. Можно доказать, что в данном случае это несущественно. Но если мы интересуемся классификацией замкнутых поверхностей относительно диффеоморфизмов, то проще ничего не доказывать, а прямо включить требование гладкости в определение. Неважно, будет ли род в нашем смысле совпадать с обычным; важно, что он сохраняется при диффеоморфизмах.

(которых будет не менее r и не более $2r$). Обозначим эйлерову характеристику полученной замкнутой поверхности через χ'. Докажите, что $\chi' \geqslant \chi + r$ и $\chi' \leqslant 2$. Выведите отсюда, что род $M < \infty$.

в) Какие из замкнутых поверхностей ограничивают?

Задача 26*. Пусть $M^{n-1} \subset R^n$ — гладкое компактное подмногообразие без края, а S^{n-1} — единичная сфера $\| x \| = 1$. Для любой точки $p \in M^{n-1}$ определим *порядок* mod 2 *точки* p *относительно* M^{n-1} как степень mod 2 отображения

$$(*) \qquad M^{n-1} \to S^{n-1}, \qquad x \to \frac{x-p}{\|x-p\|}.$$

Обозначим его через $\omega(p, M^{n-1})$. Возьмем на какой-нибудь гладкой дуге, трансверсально пересекающей M^{n-1} в точке p_0, две точки p_1 и p_2, близкие к p_0 и расположенные по разные стороны от нее. Докажите, что

$$\omega(p_1, M^{n-1}) \equiv \omega(p_2, M^{n-1}) \bmod 2.$$

Выведите отсюда, что $R^n \setminus M^{n-1}$ несвязно. Рассматривая подходящую окрестность M^{n-1}, докажите, что $R^n \setminus M^{n-1}$ состоит ровно из двух компонент и что M^{n-1} совпадает с границей каждой из них. Докажите, наконец, что M^{n-1} ориентируемо и допускает оснащение в R^n.

(Теперь мы могли бы, ориентировав M^{n-1}, определить *порядок точки* p *относительно* M^{n-1} как степень отображения (*). Очевидно, это коэффициент зацепления p и M^{n-1}. Разумеется, можно и в общем случае ввести коэффициент зацепления mod 2; наш порядок mod 2 — частный случай.)

Приложение

КЛАССИФИКАЦИЯ ОДНОМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Здесь мы докажем один результат, который использовался в этой книге.

Теорема. *Любое связное гладкое одномерное многообразие диффеоморфно либо окружности* S^1, *либо интервалу числовой оси* R.

(*Интервал* — это связное подмножество R, не сводящееся к одной точке. Он может быть конечным или бесконечным, замкнутым, открытым или полуоткрытым.)

Поскольку любой интервал диффеоморфен[1]) либо $[0, 1]$, либо $(0, 1]$, либо $(0, 1)$, то существуют только четыре различных связных одномерных многообразия.

В доказательстве будет использовано понятие «длины дуги». Обозначим интервал буквой I.

Определение. Отображение $f\colon I \to M$ называется *параметризацией длиной дуги*, если f диффеоморфно отображает I на открытое подмножество[2]) многообразия M и при каждом $s \in I$ длина «вектора скорости» $df_s(1) \in TM_{f(s)}$ равна единице.

Любая локальная параметризация $I' \to M$ путем простой замены переменной может быть переобразована в параметризацию длиной дуги.

Лемма. *Пусть $f\colon I \to M$ и $g\colon J \to M$ — две параметризации длиной дуги. Тогда $f(I) \cap g(J)$ имеет не более двух компонент связности. Если это пересечение состоит только из одной компоненты, то f можно продолжить до параметризации длиной дуги объединения $f(I) \cup g(J)$. Если имеются две компоненты, то M обязательно диффеоморфно S^1.*

Доказательство. Ясно, что $g^{-1} \circ f$ диффеоморфно отображает любое относительно открытое[3]) подмножество интервала I на относительно открытое подмножество интервала J. Кроме того, производная функции $g^{-1} \circ f$ всюду равна $+1$ либо -1.

Рассмотрим график этой функции $\Gamma \subset I \times J$; он состоит из всех тех точек (s, t), что $f(s) = g(t)$. Тогда Γ — замкнутое подмножество в $I \times J$, состоящее из отрезков прямых наклона ± 1. Так как Γ

---

[1]) Бесконечный интервал диффеоморфно отображается на единичный, например, при помощи отображения вида $f(t) = a \operatorname{th} t + b$.

[2]) Следовательно, I может иметь граничные точки только в том случае, когда M имеет край.

[3]) См. сноску на стр. 195. — *Прим. ред.*

замкнуто в $I \times J$ и $g^{-1} \circ f$ — локальный диффеоморфизм, то эти отрезки прямых не могут кончаться внутри $I \times J$, а должны достигать границы. Поскольку $g^{-1} \circ f$ взаимно однозначно, то на каждой из четырех сторон прямоугольника $I \times J$ может кончаться, самое большее, один такой отрезок.

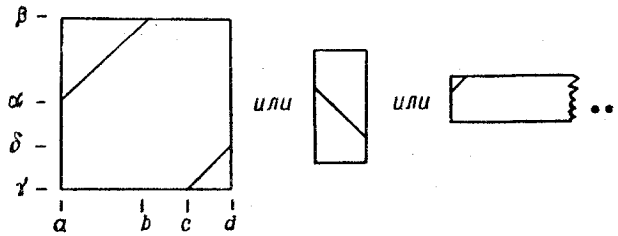

Рис. 19. Три из возможных вариантов для Г.

Следовательно, I состоит не более чем из двух компонент. (См. рис. 19.) Кроме того, если I состоит из двух компонент, то обе они должны иметь одинаковый наклон.

Если Г связно, то $g^{-1} \circ f$ продолжается до линейного отображения L: $R \to R$. Тогда комбинация f и $g \circ L$ дает требуемое продолжение

$$F\colon I \cup L^{-1}(J) \to f(I) \cup g(J).$$

Если Г имеет две компоненты с наклоном, скажем, $+1$, то оно должно быть устроено, как в левом прямоугольнике на рис. 19 [1]). Преобразуя, если необходимо, интервал $J = (\gamma, \beta)$, мы можем считать, что $\gamma = c$ и $\delta = d$, так что

$$a < b \leqslant c < d \leqslant \alpha < \beta.$$

Полагая теперь $\theta = 2\pi t/(\alpha - a)$, мы задаем требуемый диффеоморфизм

$$h\colon S^1 \to M$$

[1]) В частности, в этом случае I и J должны быть конечными. — *Прим. ред.*

формулой

$$h(\cos\theta,\ \sin\theta)=\begin{cases} f(t) & \text{при} \quad a<t<d, \\ g(t) & \text{при} \quad c<t<\beta. \end{cases}$$

Образ $h(S^1)$, будучи одновременно компактным и открытым в M, должен совпадать со всем M. Это доказывает лемму.

Доказательство классификационной теоремы. Любую параметризацию длиной дуги можно продолжить до параметризации

$$f\colon I \to M,$$

максимальной в том смысле, что f уже нельзя продолжить ни на какой больший интервал как параметризацию длиной дуги: для этого нужно только продолжить f, насколько это возможно, влево[1]), а затем насколько возможно вправо.

Если многообразие M не диффеоморфно S^1, то мы докажем, что f — отображение «на» и, следовательно, диффеоморфизм. Если бы открытое множество $f(I)$ не совпадало со всем M, то у $f(I)$ имелась бы предельная точка x в $M \setminus f(I)$. Параметризовав длиной дуги окрестность точки x и применив лемму, мы получили бы, что f можно продолжить на больший интервал[2]). Это противоречит предположению о максимальности f и, следовательно, завершает доказательство.

---

[1]) Легко видеть, что если существуют продолжения f на отрезки I_α, у каждого из которых правый конец совпадает с правым концом I, то существует и продолжение на $\bigcup I_\alpha$. — *Прим. ред.*

[2]) Если бы пересечение указанной окрестности точки x с $f(I)$ не было связно, то по лемме многообразие M было бы диффеоморфно S^1. — *Прим. ред.*

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ И РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Список литературы к этой книге имеет смешанный характер; он содержит как оригинальные работы (и недавние, и такие, результаты которых давно стали классическими, а изложение сильно устарело), так и рекомендуемые учебники. Для ориентации читателя, который пожелает глубже ознакомиться с предметом, здесь собрано несколько замечаний о достижениях дифференциальной топологии и о литературе.

Прежде всего об основах предмета. Было бы весьма стеснительно ограничиваться тем минимумом, которого хватало в пределах этой книги[1]). «Ничьей земле» (выражение Ленга, уже использованное в предисловии редактора перевода) посвящены [17] и первые три главы из [38], тогда как [18] относится специально к основаниям дифференциальной топологии (аппроксимация и триангулируемость; в упражнениях затронуты и другие вопросы).

Теперь о некоторых результатах дифференциальной топологии. Основное понятие этого предмета — понятие гладкой структуры на многообразии. В случае такого пространства, как n-мерная сфера, мы

---

[1]) Так, касательные пространства и касательные расслоения здесь были определены лишь для подмногообразий евклидова пространства (касательные расслоения — только в задачах), а между тем для «абстрактных» многообразий (топологических пространств, снабженных гладкой структурой) также имеются соответствующие понятия. Преимущество абстрактной трактовки — в ее гибкости: многообразие часто строится именно как «абстрактное» многообразие (пример — действительное и комплексное проективные пространства, упражнения 2.7 и 2.9 из Уоллеса) и многие вопросы, где касательные пространства несомненно должны играть существенную роль, тоже никак не связаны с вложением в евклидово пространство. Касательное расслоение — частный случай более общего понятия векторного расслоения, важного не только для топологии, но и для дифференциальной геометрии и теории дифференциальных уравнений.

имеем, так сказать, в готовом виде локальные системы координат, согласованные друг с другом так, что переход от одной такой системы к другой происходит при помощи гладких функций. Но можно ли ввести системы координат на сфере другим способом, так, чтобы полученное многообразие было бы не диффеоморфно исходному? И может ли быть так, что пространство является топологическим многообразием (т. е. покрывается окрестностями, каждая из которых есть клетка), но не может быть превращено в гладкое многообразие? Недавно было доказано, что ответ на оба этих вопроса положительный. Собственно, выделение дифференциальной топологии в самостоятельную область математики естественно как раз и датировать открытием Милнором [20] существования различных гладких структур на семимерной сфере. Обзор Милнора [23] в основном посвящен популярному изложению вопроса о гладких структурах на сферах. Для его понимания, так же как и для чтения других топологических работ, цитируемых далее в основном тексте данного раздела, требуется знакомство с основными понятиями алгебраической топологии.

Мы познакомились с классификацией одномерных гладких многообразий (приложение к Милнору) и двумерных компактных гладких многообразий без края (§ 7 Уоллеса) [1]). Изучение трехмерных многообразий в значительной степени представляет собой предмет современных научных исследований (см. обзор Папакирьякопулоса [26], [27*]). Для компактных многообразий размерности $\geqslant 4$ проблема классификации в действительности неразрешима (см. Марков [19], а также Бун, Хакен и Поенару [9]). Однако достигнут большой прогресс для *односвязных* многообразий большой размерности.

---

[1]) В связи с двумерными многообразиями Милнор ссылается на старую книгу Керекьярто [15], специально им посвященную. Вообще же классическая трактовка этого вопроса, упоминаемая Уоллесом в начале § 7, содержится в многих учебниках топологии (особенно старых — в новых не хватает места), а также в книгах по римановым поверхностям (где, правда, обычно ограничиваются ориентируемым случаем).

Важным результатом в этом направлении было доказательство *обобщенной гипотезы Пуанкаре* для размерностей $n \geqslant 5$: если компактное гладкое n-мерное многообразие M^n таково, что при всех $k < n$ любое отображение k-мерной сферы $S^k \to M^n$ гомотопно отображению в точку, то M^n гомеоморфно n-мерной сфере. Эта теорема была сперва доказана Смейлом [33], Столлингсом и Уоллесом [47] для $n \geqslant 7$, а затем Смейлом [34], Столлингсом и Зиманом — для $n \geqslant 5$. Подробное изложение этого результата и его обобщения — теоремы Смейла об h-бордизме — имеется у Милнора [24*], сводка результатов и первые применения — в обзоре Смейла [35]. Доказательства основаны на исследовании критических точек и сферических перестроек (важную роль играет описанное у Уоллеса в разделе 8.2 сокращение перестроек).

В формулировке обобщенной гипотезы Пуанкаре налагаются определенные условия на гомотопические свойства многообразия M^n и делается заключение, что классификация таких многообразий с точностью до гомеоморфизма тривиальна. (Теперь можно сказать, что теория Милнора гладких структур на сферах — это классификация таких многообразий с точностью до диффеоморфизма, т. е. до более тонкого отношения эквивалентности.) Сразу же стали предприниматься попытки более или менее непосредственного применения тех же методов для классификации многообразий с другими гомотопическими свойствами и кое-что удалось сделать [42], однако следующее существенное продвижение было достигнуто при комбинации этих методов с методом Понтрягина — Тома. Этот шаг (сопровождавшийся резким усложнением используемого аппарата алгебраической топологии) сделали Новиков и Браудер, которым удалось почти полностью осуществить редукцию классификации односвязных многообразий к задачам алгебраической топологии [1]). См. об этом в обзоре Уолла [43*].

[1]) Уоллес дает ссылку на изложение Уолла [44], содержащее некоторые усовершенствования. Теперь естественно сослаться на вышедшую недавно книгу Уолла [45*].

Неразрешимость проблемы классификации в общем неодносвязном случае еще не исключает возможности ее решения для многообразий с достаточно простой фундаментальной группой — например, циклической; и действительно, за последние годы в этом направлении достигнуто значительное продвижение[1]).

Одна из задач дифференциальной топологии относится к вложениям многообразий в евклидово пространство. Мы знаем, что n-мерное многообразие можно вложить в $(2n+1)$-мерное евклидово пространство (задача 22*); нельзя ли вложить его в евклидово пространство меньшей размерности? Такой же вопрос можно ставить и для *погружений*, или *иммерсий*; так называются гладкие отображения ранга n (Уоллес, определение 2.11). См. об этом в обзоре Смейла [35].

В целом обзоры [23], [35], [43*] (последний охватывает более широкий круг вопросов, но написан более сжато), не требуя значительных предварительных сведений, дают хорошее представление о состоянии дифференциальной топологии к моменту их написания. С тех пор в ней были достигнуты весьма значительные дальнейшие успехи, но, насколько известно, им пока не посвящено обзоров такого же характера.

В заключение упомянем литературу по смежным областям математики.

Учебники по алгебраической топологии: [36*], [49*], [50], [56]. К сожалению, в учебниках еще не нашли отражения новые направления в алгебраической топологии (обобщенные теории гомологий), в известной мере потеснившие прежние, особенно в приложениях к дифференцальной топологии.

Эпизодические упоминания о расслоениях в этой книге не дают представления об их значении для топологии. По-видимому, лучшим введением в теорию расслоенных пространств остается первая половина книги Стинрода [39] (расслоения в ней называются «косыми произведениями»), хотя кое-что теперь стоило бы изложить иначе. (Вторая половина, начи-

[1]) См. [45*].

ная с § 20, теперь безнадежно устарела.) Представление об использовании расслоений и дифференциальных форм в геометрии дает [38]. Теория дифференциальных форм находится на грани между топологией, геометрией и анализом и по-разному используется в каждой из этих дисциплин. Элементарное введение — [37]. Изложение, ориентированное в сторону топологии — [30].

Понятие критической точки имеет важные приложения в дифференциальной геометрии [22], [14], [3*]. Полученные таким образом геометрические результаты в свою очередь полезны для топологии [22].

ЛИТЕРАТУРА

1. Айнс (Ince E. L.), Ordinary differential equations, Dover, New York, 1953. (Русский перевод раннего издания: Обыкновенные дифференциальные уравнения, ГОНТИ, Харьков, 1939.)
2. Аллендорфер (Allendoerfer C. B.), The Euler number of a Riemann manifold, *Amer. Jour. Math.*, **62** (1940), 243—248.

3*. Альбер С. И., Топология функциональных многообразий и вариационное исчисление в целом, *УМН*, **25** (1970), № 4, 57—122.

4. Апостол (Apostol T. M.), Mathematical Analysis Reading, Mass: Addison — Wesley, 1957.
5. Ауслендер, Мак-Кензи (Auslander L., MacKenzie R.), Introduction to differentiable manifolds, New York, McGraw-Hill, 1963.
6. Блекетт (Blackett D. W.). Elementary topology, Academic Press, New York, 1967.
7. Браун (Brown A. B.), Functional dependence, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **38** (1935), 379—394. (См. теорему 3-III.)
8. Брауэр (Brouwer L. E. J.), Uber Abbildung von Mannigfaltigkeiten. *Math. Ann.*, **71** (1912), 97—115.

9*. Бун, Хакен, Поенару (Boone W. W., Haken W., Poenaru V.), On recursively insolvable problems in topology and their classification, Contributions to Mathematical Logic, 1966, 37—74.

10. Бурбаки (Bourbaki N.), Topologie générale, Hermann, Paris. (Русский перевод первых восьми глав: Общая топология. Основные структуры. М., «Наука», 1968; Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства. М., «Наука», 1969.)
11. Гофман (Goffman C.), Calculus of several variables, New York; Harper & Row, 1965.
12. Дубовицкий А. Я., О дифференцируемых отображениях n-мерного куба в k-мерный куб. *Мат. сб.* **32** (1953), № 2, 443—464.
13. Дьедонне Ж., Основы современного анализа, М., «Мир», 1964.
14. Зейферт Г., Трельфалль В., Вариационное исчисление в целом. М., ИЛ, 1947.
15. Керекьярто (Kerékjártó B. V.), Vorlesungen uber Topologie, Berlin, Springer, 1923.
16. Курант Р., Курс дифференциального и интегрального исчисления, М., «Наука», т. 1, 1967; т. 2, 1970.

17. Ленг С., Введение в теорию дифференцируемых многообразий, М., «Мир», 1967.
18. Манкрс (Munkres J. R.), Elementary differential topology, Annals of Math. Studies, v. 54, Princeton Univ. Press, 1963.
19 Марков А. А, Неразрешимость проблемы гомеоморфизма, Proceedings Internat. Congress of Math., 1960, 300—306, Cambridge Univer. Press.
20. Милнор Дж., О многообразиях, гомеоморфных семимерной сфере. Сб. переводов «Математика», 1 : 3 (1957), 35—42.
21. Милнор (Milnor J.), A survey of cobordism theory. *L'Enseignement math.* 8, (1962), 16—23.
22. Милнор Дж., Теория Морса, М., «Мир», 1965.
23. Милнор Дж., Дифференциальная топология. УМН, 1964, т. 20, № 6, 41—54 (поправки: *УМН*, **21**, (1965), № 1, 237; № 5, 286).
24*. Милнор Дж., Теорема об h-кобордизме. М., «Мир», 1969.
25. Морс А. (Morse A. P.), The behavior of a function on its critical set., *Ann. of Math.*, **40** (1939), 62—70.
26. Папакирьякопулос (Papakyriakopoulos C. D.), The theory of three-dimensional manifolds since 1950, Proc. Intern. Congress of Math., 1958, Cambridge Univ. Press, 1960, 433—440.
27*. Папакирьякопулос С. Д., Некоторые проблемы теории трехмерных многообразий, Сб. переводов «Математика», 4 : 1 (1960), 15—30.
28. Понтрягин Л. С., Классификация непрерывных отображений комплекса в сферу, *ДАН СССР*, **19** (1938), № 3, 147—149.
29. Понтрягин Л. С., Гладкие многообразия и их применение в теории гомотопий, Труды МИАН, т. 45, М., Изд-во АН СССР, 1955.
30. де Рам Ж., Дифференцируемые многообразия, М., ИЛ, 1956.
31*. Рохлин В. А., Классификация отображений $(n+3)$-мерной сферы в n-мерную. ДАН СССР, 1951, т. 81, № 1, 19—22.
32. Сард (Sard A.), The measure of the critical points of differentiable maps, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **48** (1942), 883—890.
33. Смейл (Smale S.), Generalized Poincare's conjecture in higher dimensions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **66** (1960), 373—375.
34. Смейл С., Обобщенная гипотеза Пуанкаре в размерностях, бо́льших четырех, Сб. переводов «Математика», **6** : 3 (1962), 139—155.
35. Смейл С., Обзор некоторых недавних достижений в дифференциальной топологии, *УМН*, **19** (1964), № 1, 125—138.
36*. Спеньер Э., Алгебраическая топология. М., «Мир», 1971.
37. Спивак М., Математический анализ на многообразиях, М., «Мир», 1968.
38. Стернберг С., Лекции по дифференциальной геометрии, М., «Мир», 1970.
39. Стинрод Н., Топология косых произведений, М., ИЛ, 1953.
40. Том Р., Некоторые свойства «в целом» дифференцируемых

многообразий, Сб. «Расслоенные пространства и их приложения», М., ИЛ, 1953, 293—351.
41. Уитни (Whitney H.), A function not constant on a connected set of critical points, *Duke Math. J.*, **1** (1935), 514—517.
42. Уолл (Wall C. T. C.), Classification of $(n-1)$-connected $2n$-manifolds, *Ann. of Math.*, **75** (1962), 163—189.
43*. Уолл (Wall C. T. C.), Topology of smooth manifolds, *J. Lond. Math. Soc.*, **40** (1965), № 1, 1—20.
44. Уолл (Wall C. T. C.), Classifications problems in differentiable topology, *Topology*, **2** (1963), 253—281; **3** (1965), 291—304; **5** (1966), 73—94.
45*. Уолл (Wall C. T. C.), Surgery on compact manifolds, Academic Press, New York — London, 1971.
46. Уоллес (Wallace A. H.), Introduction to algebraic topology, Macmillan (Pergamon), New York, 1957.
47. Уоллес (Wallace A. H.), Modifications and cobounding manifolds, Pt. 1, *Canad. J. Math.*, **12** (1960), 503—528; Pt. 2, *J. Math. Mech.*, **10** (1961), 773—809; Pt. 3, *J. Math. Mech.*, **11** (1962), 979—990; Pt. 4, *J. Math. Mech.*, **12** (1963), 445—484.
48. Фенхель (Fenchel W.), On total curvatures of Riemannian manifolds, *J. London. Math. Soc.*, **15** (1940), 15—22.
49*. Фукс Д., Фоменко А., Гутенмахер В., Гомотопическая топология, Изд-во МГУ, 1969.
50. Хилтон П., Уайли С. Теория гомологий. М., «Мир», 1966.
51. Хирцебрух (Hirzebruch F.), Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie, Ergeb. Math., v. 9.
52. Хирш (Hirsch M.), A proof of the nonretractibility of a cell onto its boundary, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **14** (1963), 364—365.
53. Хопф (Hopf H.), Abbildungsklassen n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten, *Math. Ann.* **96** (1926), 209—221.
54. Хопф (Hopf H.), Vektorfelder in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, *Math. Ann.*, **96** (1926), 225—250.
55. Хопф (Hopf H.), Uber die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension, *Fund. Math.* **25** (1935), 427—440.
56. Ху Сы-цзян, Теория гомотопий, М., «Мир», 1964.
57. Чжень (Chern S. S.), A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannien manifolds, *Ann. Math.* **45** (1944), 747—752.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

Теоретико-множественные обозначения

$x \in A$	x есть элемент множества A
$x \notin A$	x не является элементом множества A
$A \subset B$	множество A содержится в множестве B
$A \supset B$	множество A содержит множество B
$A \cup B$	объединение множеств A и B
$A \cap B$	пересечение множеств A и B
$\bigcup A_i$	объединение множеств A_i
$\bigcap A_i$	пересечение множеств A_i
CA	дополнение к множеству A
$\varnothing$	пустое множество
$A \setminus B$	разность множеств A и B
$\# A$	число элементов множества A
$\{x \mid x$ обладает свойством $S\}$	совокупность всех тех x, которые обладают свойством S
id	тождественное отображение (какого именно мно-

	жества A, должно быть ясно из контекста; переводит каждую точку $a \in A$ снова в a).
$f\colon A \to B$	отображение множества в множество

К такому f относятся еще следующие обозначения:

$f \mid A_1$	ограничение отображения f на подмножестве $A_1 \subset A$
$f^{-1}(b) = \{a \mid f(a) = b\}$	(полный) прообраз точки $b \in B$
$f^{-1}(B_1) = \{a \mid f(a) \in B_\perp\}$	(полный) прообраз множества $B_1 \subset B$
$\operatorname{Im} f = f(A)$	образ множества A
$g \circ f$ или gf	композиция отображений f и g: $B \to C$, определяемая формулой $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

(В зависимости от контекста gf (или $g \cdot f$) может обозначать и обычное произведение функций.)

Обозначения, которые вводятся в книге

$\overline{A}$	18	H^m	195
$\operatorname{Int} A$	18	R^k	179
$\operatorname{Fr} A$	18	S^{n-1}	181
$\dim M$	37	TM_x	181, 185
$\deg f$	213	$\lVert x \rVert$	198
$\deg(f, y)$	213	$x \cdot u$	198
$\deg_2 f$	210	$l(M, N)$	249
df_x	182, 186—187	$\omega(p, M)$	259
D^m	196	$\chi(M)$	223, 253
∂X	195	$\mathfrak{N}_m, \mathfrak{N}_*, \Omega_m, \Omega_*$	256
$f^* \mathfrak{w}$	235		

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Атлас 37
Атласы согласованные (совместимые) 38

Бордантное нулю многообразие 124, 233
Бордантные многообразия 124, 232
Бордизм, бордантность 123, 232, 233
— оснащенный 234
Бордизмов группа, кольцо 256

Векторное поле 217
Вложение 65
— теоремы о нем 69, 71, 87, 255
Внутренность 18
— многообразия с краем 195
Вращение векторного поля 219

Гаусса—Бонне теорема 228
Гауссово (нормальное) отображение 224, 228
Гессиан 83
Гомеоморфизм 20, 175
Гомотопия 205, 248
Граница 18

Диффеоморфизм 49, 179
Дифференциал (производная) отображения 181, 182
Дубль многообразия с краем 253

Замкнутое множество 16
Замыкание 18

Изотопия 128, 206, 221
Инвариант Хопфа 250
Индекс критической точки функции 86
— — — — связь с типом перестройки 122
— нуля векторного поля 221
Индексов сумма 223, 229, 230, 254

Карта 37, 44
Касательная прямая 72
Касательное пространство 73, 181, 185
— — в точке края 195
расслоение 248
Касательный вектор 181
Клетка 36
Когомотопические группы 245, 251
Компактность 26
Координаты локальные (система координат на многообразии), координатная окрестность 28—29, 43—44, 180
Коразмерность 232
Коэффициент зацепления 249
Край многообразия 51, 195

Критическая точка отображения 198, 192
— — функции 76
— — — невырожденная 83
— — — — строение окрестности 100
Критический уровень функции 89
— — — строение окрестности 96, 98, 106
Критическое значение отображения 189, 192

Многообразие гладкое 36, 180
— — класса C^n, C^∞ 38
— — с краем 51, 195
— Понтрягина 235
— топологическое 38
Многообразия, замечания о классификации 264—266
Многообразия размерности 0 180
— — 1 198, 258
— — 2, классификация 151, 159
— — 3 159, 174

Неориентируемое многообразие 113, 212, 246
Неподвижная точка 199
Нормальное (гауссово) отображение 224, 228
— расслоение 248
Нормальные векторы 194, 195, 234
Нуль векторного поля невырожденный 226

Ограничивающее многообразие 124, 233

Односвязность 164
Окрестность 13—15
— множества 16
— — прямое произведение 110, 238
Ориентация края 212
Ориентация, ориентированное или ориентируемое многообразие 113, 211
Ортогональные траектории семейства уровней 90
Оснащение, оснащенное подмногообразие, оснащенный бордизм 234
Основная теорема алгебры 190
Открытое множество 16
Относительно замкнутое, относительно открытое множество 195
Отображение гладкое гладких многообразий 45—46
— — подмножеств евклидова пространства 34, 179
— непрерывное 19

Параметризация 180
— длиной дуги 259
Перестройка 115
Петля (замкнутый путь) 161
Пленка, реализующая бордизм многообразий 124, 232
— — перестройку 123
Подмногообразие 54
— многообразия с краем 69
Подпокрытие 26
Подпространство 16
Покрытие 26
Порядок точки относительно многообразия 258

Проективная плоскость, проективное пространство 39—40
Производная (дифференциал) отображения 181, 182
Прямое вложение 110
Пуанкаре гипотеза 175
— — обобщенная 265
Пуанкаре — Хопфа теорема 223

Размерность многообразия 37, 180, 184
Ранг отображения 50
Регулярная точка 189, 193
Регулярное значение 189, 192, 193
Ретракт, ретракция 197, 252
Род поверхности 147, 257

Сарда теорема 191, 192, 200
Связная сумма многообразий 155
Связность 21
Сплошной тор 29
Степень отображения 213, 251
— — по дулю два 210, 251 190
Стереографическая проекция 190
Сферическая перестройка 115
— — компенсирующая 164, 173

Тип перестройки 115, 122
Топологическое произведение 21
— пространство 14
Тор 15, 29
Трансверсальность 250

Фундаментальная группа 163
Функция гладкая
— — в евклидовом пространстве или на его подмножестве 32, 34
— — на многообразии или на его подмножестве 42
f-связанные векторные поля 219

Хаусдорфово пространство 25
Хопфа теорема 218, 223, 230, 245, 254
Хопфовское расслоение 250

Эйлерова характеристика 223, 230

Якоби матрица, якобиан 35

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода 5

А. УОЛЛЕС. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ТОПОЛОГИЯ. ПЕРВЫЕ ШАГИ

Предисловие 11

§ 1. Топологические пространства 13

1.1. Окрестности 13
1.2. Открытые и замкнутые множества 16
1.3. Непрерывные отображения 19
1.4. Топологические произведения 20
1.5. Связность 21
1.6. Компактность 25
1.7. Пространства со счетной базой 28

§ 2. Гладкие многообразия 28

2.1. Введение 28
2.2. Гладкие функции и гладкие отображения 32
2.3. Гладкие многообразия 35
2.4. Локальные координаты и гладкие функции 40
2.5. Гладкие отображения 45
2.6. Ранг гладкого отображения 49
2.7. Многообразия с краем 50

§ 3. Подмногообразия 53

3.1. Определение 53
3.2. Многообразия в евклидовом пространстве 58
3.3. Теорема о вложении 65
3.4. Вложение многообразия с краем 69

§ 4. Касательные пространства и критические точки . . . 71

4.1. Касательные прямые 71
4.2. Критические точки 74
4.3. Невырожденные критические точки 81
4.4. Усиление теоремы о вложении 86

§ 5. Критические и некритические уровни 89

5.1. Определения и примеры 89
5.2. Окрестность критического уровня; разбор одного примера 96
5.3. Окрестность критического уровня; общее обсуждение 98
5.4. Окрестность критической точки 100
5.5. Окрестность критического уровня; итоги 106

§ 6. Сферические перестройки 109

6.1. Введение 109
6.2. Прямое вложение 109

6.3. Определение перестроек 114
6.4. Пленка, реализующая перестройку 118
6.5. Бордантные многообразия 123
6.6. Малые шевеления и изотопия 125
6.7. Приведение в общее положение 130
6.8. Перегруппировка перестроек 133
6.9. Интерпретация теоремы 6.5 в терминах критических точек 136

§ 7. **Двумерные многообразия** 137
7.1. Введение 137
7.2. Ориентируемые двумерные многообразия 138
7.3. Неориентируемый случай 152
7.4. Теорема о трехмерных многообразиях 159

§ 8. **Последующие шаги** 160
8.1. Убивание гомотопических классов 161
8.2. Компенсирующие перестройки и сокращение . . . 164
8.3. Приложение к трехмерным многообразиям 174

ДЖ. МИЛНОР. ТОПОЛОГИЯ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ

Предисловие 178

§ 1. **Гладкие многообразия и гладкие отображения** . . . 179
Касательные пространства и производные 181
Регулярные значения 189
Основная теорема алгебры 190

§ 2. **Теорема Сарда и Брауна** 191
Многообразия с краем 194
Теорема Брауэра о неподвижной точке 197

§ 3. **Доказательство теоремы Сарда** 200

§ 4. **Степень отображения по модулю 2** 204
Гладкая гомотопия и гладкая изотопия 205

§ 5. **Ориентированные многообразия** 211
Степень Брауэра 213

§ 6. **Векторные поля и эйлерова характеристика** 218

§ 7. **Оснащенный бордизм; конструкция Понтрягина** . . . 232
Теорема Хопфа 245

§ 8. **Упражнения** 247

Приложение. Классификация одномерных многообразий 258

Заключительные замечания и рекомендуемая литература . . 263

Литература 268

Список обозначений 271

Предметный указатель 273

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу:

129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., 2, изд-во «Мир».

Дж. МИЛНОР, А. УОЛЛЕС

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ТОПОЛОГИЯ

Редактор *Г. М. Цукерман*
Художник *А. В. Шипов*
Художественный редактор *В. И. Шаповалов*
Технический редактор *Т. А. Максимова*

Сдано в набор 9/II 1972 г.
Подписано к печати 17/XI 1972
Бумага № 3 $84\times108^1/_{32}$=4,38 бум. л. 14,70 усл. печ. л.
Уч.-изд. л. 13,14. Изд. № 1/6581
Цена 91 коп. Зак. 60

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Государственного комитета Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной
торговли. Измайловский проспект, 29.