Учитывая тот факт, что $\theta(v) = \operatorname{ad} v$ и $\theta(w) = \operatorname{ad} w$, получаем

$$\Phi([v, w]) = \Phi(vw - wu) = \theta(v)\Phi(w) - \theta(w)\Phi(v) =$$
$$= q\theta(v)w - p\theta(w)v = q[v, w] - p[w, v] =$$
$$= (q+p)[v, w] = nu.$$

Теперь мы в состоянии дать явную формулу для $z(x, y) = \log(e^x \cdot e^y)$ $(x, y \in X)$.

Как и раньше, запишем

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} z_n,$$

где $z_n \in L_X^n$.

Имеем

$$e^x \cdot e^y = \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^p}{p!}\right)\left(\sum_{q=0}^{\infty} \frac{y^q}{q!}\right) = 1 + \sum_{p+q\geqslant 1} \frac{x^p x^q}{p!\,q!},$$

откуда

$$z = \log(e^x \cdot e^y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m}\left(\sum_{p+q\geqslant 1} \frac{x^p x^q}{p!\,q!}\right)^m =$$
$$= \sum_{p_i+q_i\geqslant 1} \frac{(-1)^m}{m} \frac{x^{p_1}y^{q_1}x^{p_2}y^{q_2}\ldots x^{p_m}y^{q_m}}{p_1!\,q_1!\ldots p_m!\,q_m!}.$$

Применим отображение $\Phi$ к фигурирующим здесь одночленам:

$$\Phi\left(x^{p_1}y^{q_1}\ldots x^{p_m}y^{q_m}\right) = \operatorname{ad}(x)^{p_1}\operatorname{ad}(y)^{q_1}\ldots$$
$$\ldots \operatorname{ad}(x)^{p_m}\operatorname{ad}(y)^{q_m-1}(y), \text{ если } q_m \geqslant 1,$$

и

$$\Phi\left(x^{p_1}y^{q_1}\ldots x^{p_m}\right) = \operatorname{ad}(x)^{p_1}\operatorname{ad}(y)^{q_1}\ldots \operatorname{ad}(x)^{p_m-1}(x),$$
$$\text{если } q_m = 0.$$

Заметим, что первое выражение равно нулю при $q_m \geqslant 2$, а второе равно нулю при $p_m \geqslant 2$. Таким образом, ненулевые члены возможны только в двух случаях: при $q_m=1$ или при $p_m=1$, $q_m=0$. Применяя тождество $z_n=\varphi(z_n)$, получаем *явную формулу Кэмпбелла — Хаусдорфа* (в форме Дынкина):

$$z_n=\frac{1}{n}\sum_{p+q=n}\left(z'_{p,q}+z''_{p,q}\right),$$

где

$$z'_{p,q}=$$
$$=\sum_{\substack{p_1+\ldots+p_m=p\\ q_1+\ldots+q_{m-1}=q-1\\ p_i+q_i\geqslant 1\\ p_m\geqslant 1}}\frac{(-1)^{m+1}}{m}\,\frac{\operatorname{ad}(x)^{p_1}\operatorname{ad}(y)^{q_1}\ldots\operatorname{ad}(x)^{p_m}(y)}{p_1!\,q_1!\,\ldots\,q_{m-1}!}$$

и

$$z''_{p,q}=$$
$$=\sum_{\substack{p_1+\ldots+p_{m-1}=p-1\\ q_1+\ldots+q_{m-1}=q\\ p_i+q_i\geqslant 1}}\frac{(-1)^{m+1}}{m}\,\frac{\operatorname{ad}(x)^{p_1}\operatorname{ad}(y)^{q_1}\ldots\operatorname{ad}(y)^{q_{m-1}}(x)}{p_1!\,q_1!\,\ldots\,q_{m-1}!}.$$

## УПРАЖНЕНИЯ

**1.** Пусть $X$ — конечное множество и $\operatorname{Card}(X)=d$. Показать, что число элементов длины $n$ в моноиде $M_X$ равно $2^{n-1}d^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\,\ldots\,(2n-3)}{n!}$.

**2.** Доказать, что $L_X^n=\left[X,\ L_X^{n-1}\right]$ для $n\geqslant 2$.

**3.** Показать, что центр алгебры $L_X$ сводится к 0, если $\operatorname{Card}(X)\neq 1$, а центр алгебры $L_X/\sum\limits_{n>p}L_X^n$ равен $L_X^p$.

**4.** Пусть $X$ — некоторое множество, $\operatorname{Card}(X)\geqslant 2$ и $\mathscr{H}$ — совокупность всех семейств Холла в $M_X$. Доказать, что $\operatorname{Card}(\mathscr{H})=2^{\operatorname{Card}(X)}$.

**5.** Показать, что гомоморфизм $\Theta\colon F_X\to\widehat{\operatorname{Ass}}_X^*$, определенный в § 6, инъективен.

Глава V

# НИЛЬПОТЕНТНЫЕ И РАЗРЕШИМЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ

В этой главе $k$ предполагается полем, а в § 5, где рассматриваются основные теоремы о разрешимых алгебрах Ли, — полем характеристики нуль. Все встречающиеся алгебры и модули имеют конечную размерность над $k$.

## § 1. Дополнительные сведения о $\mathfrak{g}$-модулях

Пусть задана некоторая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ над $k$. По определению $\mathfrak{g}$-модулем называется векторное пространство $V$ над $k$ вместе с $k$-билинейным отображением $\mathfrak{g} \times V \to V$ (которое обозначается $(x, v) \mapsto xv$), таким, что $[x, y]v = xyv - yxv$ для всех $x, y \in \mathfrak{g}$ и $v \in V$. Соответствующий гомоморфизм алгебр Ли $\rho$: $\mathfrak{g} \to \operatorname{End}(V)$ называется *линейным представлением* алгебры $\mathfrak{g}$, а $V$ — *пространством представления*.

Произвольное векторное пространство $V$ можно превратить в $\mathfrak{g}$-модуль, полагая $xv = 0$ для любых $v \in V$ и $x \in \mathfrak{g}$; в этом случае говорят, что $\mathfrak{g}$ *действует тривиально* на $V$. В частности, всякий раз, когда $k$ рассматривается как $\mathfrak{g}$-модуль, мы будем молчаливо предполагать (если не оговорено противное), что $k$ — тривиальный $\mathfrak{g}$-модуль.

Пусть $V_1$ и $V_2$ — два $\mathfrak{g}$-модуля. На их тензорном произведении $V_1 \otimes_k V_2$ можно единственным способом определить структуру $\mathfrak{g}$-модуля, такую, что выполняется соотношение

$$x(v_1 \otimes v_2) = (xv_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (xv_2). \qquad (1)$$

Это можно проверить непосредственно или усмотреть из диаграммы

$$U\mathfrak{g} \xrightarrow{\Delta} U\mathfrak{g} \otimes_k U\mathfrak{g} \xrightarrow{\rho_1 \otimes \rho_2} \operatorname{End} V_1 \otimes_k \operatorname{End} V_2 \to$$
$$\to \operatorname{End}(V_1 \otimes V_2),$$

где $\Delta$ — диагональное отображение. Действие (1) алгебры $\mathfrak{g}$ на $V_1 \otimes V_2$ иногда называется *диагональным действием*.

Аналогично пространство $k$-линейных отображений $\operatorname{Hom}_k(V_1, V_2)$ становится $\mathfrak{g}$-модулем, если положить

$$(xf)(v_1) = x(f(v_1)) - f(xv_1), \text{ где } x \in \mathfrak{g},\ v_1 \in V_1. \tag{2}$$

Более общим образом пусть дано конечное семейство $\mathfrak{g}$-модулей $V, V_1, \ldots, V_r$. Тогда легко построить структуру $\mathfrak{g}$-модуля на пространстве $k$-полилинейных отображений из $\prod_{i=1}^{r} V_i$ в $V$.

Элемент $v$ $\mathfrak{g}$-модуля $V$ называется $\mathfrak{g}$-*инвариантным*, если $xv = 0$ для всех $x \in \mathfrak{g}$. Эта на первый взгляд странная терминология возникла из соответствующей групповой ситуации; равенство $xv = 0$ равносильно равенству $v = (1 + \varepsilon x) v$. Множество всех $\mathfrak{g}$-инвариантных элементов образует, очевидно, $\mathfrak{g}$-подмодуль в $V$, являющийся наибольшим подмодулем, на котором $\mathfrak{g}$ действует тривиально.

Пример 1. Линейное отображение $f: V_1 \to V_2$ инвариантно относительно действия $\mathfrak{g}$ в пространстве $\operatorname{Hom}_k(V_1, V_2)$ в том и только в том случае, если $f(xv_1) = xf(v_1)$, т. е. если $f$ — *гомоморфизм* $\mathfrak{g}$-*модулей*.

Пример 2 (*инвариантные билинейные формы*). По определению инвариантная билинейная форма $B: V_1 \times V_2 \to k$ есть форма, удовлетворяющая тождеству

$$B(xv_1, v_2) + B(v_1, xv_2) = 0.$$

(Для групп это означает, что $B(gv_1, gv_2) = B(v_1, v_2)$, где $g = 1 + \varepsilon x$.) Пусть V — некоторый $\mathfrak{g}$-модуль и $\rho: \mathfrak{g} \to \operatorname{End} V$ — соответствующее линейное представление. Положим $B_\rho(x, y) = \operatorname{Tr}_V(\rho(x)\rho(y))$, где $\operatorname{Tr}_V \alpha$ означает след $k$-линейного преобразования $\alpha: V \to V$.

Предложение 1. *Билинейная форма $B_\rho$ симметрична и $\mathfrak{g}$-инвариантна относительно присоединенного представления алгебры $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{g}$.*

Доказательство. Из тождества $\mathrm{Tr}_V(\alpha\beta) = \mathrm{Tr}_V(\beta\alpha)$ легко следует симметричность $B_\beta$. Для доказательства инвариантности мы должны показать, что выражение

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_V(\rho[x_1, x_2])\rho(x_2) + \mathrm{Tr}_V(\rho(x_1)\rho([x_1, x_2])) &= \\ = \mathrm{Tr}_V(\rho(x)\rho(x_1)\rho(x_2) - \rho(x_1)\rho(x)\rho(x_2) &+ \\ + \rho(x_1)\rho(x)\rho(x_2) - \rho(x_1)\rho(x_2)\rho(x)&)\end{aligned}$$

равно нулю при любых $x_1, x_2 \in \mathfrak{g}$. Но два средних члена взаимно уничтожаются. Остается воспользоваться уже доказанной симметричностью, положив $\alpha = \rho(x)$ и $\beta = \rho(x_1)\rho(x_2)$.

Определение 2. *Формой Киллинга* называется инвариантная симметрическая билинейная форма $B(x, y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}x\,\mathrm{ad}y)$ на алгебре $\mathfrak{g}$, соответствующая присоединенному представлению.

## § 2. Нильпотентные алгебры Ли

Пусть $\mathfrak{g}$ — конечномерная алгебра Ли над $k$. Для любых двух подмножеств $V, W \subset \mathfrak{g}$ через $[V, W]$ обозначим подмодуль в $\mathfrak{g}$, порожденный элементами вида $[x, y]$ с $x \in V$, $y \in W$. В случае когда $V$ и $W$ — подмодули в $\mathfrak{g}$, множество $[V, W]$ есть образ тензорного произведения $V \otimes_k W$ при отображении $x \otimes y \mapsto [x, y]$. Если $V$ и $W$ — идеалы алгебры $\mathfrak{g}$, то $[V, W]$ также является идеалом, что легко следует из тождества Якоби. Рассмотрим, в частности, *убывающий центральный ряд* идеалов: $C^1\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ и $C^n\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, C^{n-1}\mathfrak{g}]$, $n \geqslant 2$. Мы предоставляем читателю проверку включения

$$[C^r\mathfrak{g}, C^s\mathfrak{g}] \subset C^{r+s}\mathfrak{g}.$$

Теорема 1. *Следующие условия эквивалентны:*
(i) *существует целое число $n$, такое, что $C^n\mathfrak{g} = (0)$;*

(ii) *существует такое целое число $n$, что*

$$[x_1, [x_2, [x_3, \ldots, x_n] \ldots]] = (\operatorname{ad} x_1)(\operatorname{ad} x_2) \ldots \ldots (\operatorname{ad} x_{n-1}) x_n = 0$$

*для любого набора $(x_1, \ldots, x_n)$ элементов из $\mathfrak{g}$;*

(iii) *алгебра $\mathfrak{g}$ может быть получена при помощи центральных расширений абелевых групп Ли; иными словами, существует цепочка идеалов*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \supset \mathfrak{a}_2 \supset \ldots \supset \mathfrak{a}_n = (0),$$

*такая, что $\mathfrak{a}_i/\mathfrak{a}_{i+1}$ лежит в центре алгебры $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}_{i+1}$ (т. е. $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_i] \subset \mathfrak{a}_{i+1}$ для каждого $i$).*

Доказательство. Импликации (i)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iii) совершенно очевидны. Заметим, что цепочка идеалов $C^n\mathfrak{g}$ является минимальной из всех возможных цепочек, удовлетворяющих свойству (iii). Другими словами, для любой цепочки идеалов $\{\mathfrak{a}_i\}$, обладающей свойством (iii), $C^n\mathfrak{g} \subset \mathfrak{a}_n$ для всех $n$.

Определение 2. Алгебра Ли, удовлетворяющая одному из эквивалентных условий теоремы 1, называется *нильпотентной*.

Пример. Пусть $V$ — векторное пространство и $\mathscr{F} = \{V_i\}$ — *флаг* этого пространства, т. е. последовательность подпространств $(0) = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n = V$, таких, что $\dim V_i = i$. Положим

$$\mathfrak{n}(\mathscr{F}) = \{u \in \operatorname{End} V \mid uV_i \subset V_{i-1} \text{ для всех } i \geqslant 1\}.$$

Понятно, что элементы из $\mathfrak{n}(\mathscr{F})$ — это те и только те эндоморфизмы $V$, которые переводят $V_i$ в себя и индуцируют нулевое отображение на $V_i/V_{i-1}$ для всех $i \geqslant 1$. Очевидно, что $\mathfrak{n}(\mathscr{F})$ — ассоциативная подалгебра алгебры $\operatorname{End} V$ и, a fortiori, подалгебра Ли относительно коммутирования $[x, y] = xy - yx$. Выберем в пространстве $V$ базис $\{v_i\}$, согласованный с флагом $\mathscr{F}$ (в том смысле, что $V_i = kv_1 + \ldots + kv_i$). Элементами $\mathfrak{n}(\mathscr{F})$ в этом базисе отвечают *строго верхние* треугольные матрицы, т. е. треугольные матрицы с нулями по главной диагонали и ниже ее. Покажем, что алгебра Ли $\mathfrak{n}(\mathscr{F})$ нильпотентна. Рассмотрим идеалы

$$\mathfrak{n}_j(\mathscr{F}) = \{u \in \operatorname{End} V \mid u V_i \subset V_{i-j} \text{ для всех } i \geqslant j\}.$$

Замечая, что $\mathfrak{n}(\mathscr{F})\mathfrak{n}_j(\mathscr{F}) \subset \mathfrak{n}_{j+1}(\mathscr{F})$ и $\mathfrak{n}_j(\mathscr{F})\mathfrak{n}(\mathscr{F}) \subset \subset \mathfrak{n}_{j+1}(\mathscr{F})$, получаем

$$[\mathfrak{n}(\mathscr{F}),\ \mathfrak{n}_j(\mathscr{F})] \subset \mathfrak{n}_{j+1}(\mathscr{F}).$$

Следовательно, наша алгебра нильпотентна, поскольку $\mathfrak{n}_j(\mathscr{F}) = 0$ для достаточно больших $j$.

## § 3. Основные теоремы

Следующая теорема дает некоторое оправдание термина „нильпотентность“.

Теорема 1. *Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ нильпотентна в том и только в том случае, когда эндоморфизм $\operatorname{ad} x$ для каждого $x \in \mathfrak{g}$ нильпотентен.*

С этой теоремой тесно связана следующая

Теорема 2 (Энгель). *Пусть $\rho\colon \mathfrak{g} \to \operatorname{End} V$ — линейное представление $\mathfrak{g}$ в векторном пространстве $V$, причем $\rho(x)$ нильпотентно для каждого $x \in \mathfrak{g}$. В этом случае существует флаг $\mathscr{F} = \{V_i\}$, такой, что $\rho(\mathfrak{g}) \subset \subset \mathfrak{n}(\mathscr{F})$.*

Обращение теоремы 2 тривиально, так как строго треугольные матрицы нильпотентны. Суть теоремы состоит в следующем. Если для каждого данного элемента $x \in \mathfrak{g}$ существует флаг $\mathscr{F}_x = \{V_{x,i}\}$, такой, что $\rho(x) V_{x,i} \subset V_{x,i-1}$, то тогда существует единый флаг $\mathscr{F}$, годный для всех $x$ одновременно.

Утверждением, равносильным теореме 2, является

Теорема 2′. *В условиях теоремы* 3.2 (*при $V \neq (0)$*) *существует ненулевой элемент $v \in V$, такой, что $\rho(x) v = 0$ для всех $x \in \mathfrak{g}$.*

В самом деле, из теоремы 2 очевидным образом следует теорема 2′, так как в качестве искомого $v \in V$ можно взять любой элемент пространства $V_1$

флага $\mathscr{F}$. Обратно, если справедлива теорема 2′, то теорема 2 легко доказывается индукцией по размерности $V$. Именно: натянем на элемент $v$, существование которого утверждается теоремой 2, одномерное подпространство $kv$ и рассмотрим факторпространство $\overline{V}=V/kv$. По предположению индукции в $\overline{V}$ имеется флаг $\overline{\mathscr{F}}=\{\overline{V}_i\}$, такой, что $\rho(\mathfrak{g})\overline{V}_i\subset\overline{V}_{i-1}$. Отсюда легко усмотреть, что соответствующие подпространствам $\overline{V}_i$ подпространства $V_i\subset V$ и прямая $kv$ образуют в совокупности искомый флаг на $V$.

Доказательство теоремы 2′ проведем в семь шагов.

Шаг 1. Поскольку условия и заключение относятся не к самой алгебре $\mathfrak{g}$, а к $\rho(\mathfrak{g})$, мы можем заменить алгебру ее образом, т. е. можем считать, что $\mathfrak{g}\subset\operatorname{End}V$.

Шаг 2. Отображение $\operatorname{ad}x$ нильпотентно для каждого $x\in\mathfrak{g}$. Действительно, $\operatorname{ad}x(y)=L_xy-R_xy$, где $L_x$ и $R_x$ — линейные эндоморфизмы пространства $\operatorname{End}V$, определенные соответственно правилами $\alpha\to x\alpha$ и $\alpha\to\alpha x$. Но так как по условию $L_x$ и $R_x$ нильпотентны, нильпотентна и их разность $L_x-R_x$. (Доказать, что в любом кольце $(\alpha-\beta)^{m+n-1}=0$, если $\alpha^m=\beta^n=0$ и $\alpha\beta=\beta\alpha$.)

Шаг 3. Применяя индукцию по размерности $\mathfrak{g}$, мы можем предполагать теорему 2′ установленной для всех алгебр Ли $\mathfrak{h}$, таких, что $\dim\mathfrak{h}<\dim\mathfrak{g}$.

Шаг 4. Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$ ($\mathfrak{h}\neq\mathfrak{g}$). Обозначим через $\mathfrak{n}=\{x\in\mathfrak{g}\mid\operatorname{ad}x(\mathfrak{h})\subset\mathfrak{h}\}$ *нормализатор* $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$, т. е. максимальную подалгебру в $\mathfrak{g}$, для которой $\mathfrak{h}$ является идеалом. Покажем, что $\mathfrak{n}$ *строго больше* $\mathfrak{h}$. (Читатель, знакомый с теорией $p$-групп, несомненно, заметит здесь некоторую аналогию.) Алгебра Ли $\mathfrak{h}$ действует на пространстве $\mathfrak{h}$ и на $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ при помощи нильпотентных преобразований (присоединенное представление). Поскольку $\dim\mathfrak{h}<\dim\mathfrak{g}$, существует (в силу индуктивного предположения) ненулевой инвариантный (т. е. аннулируемый алгеброй $\mathfrak{h}$) вектор $\bar{x}=x+\mathfrak{h}\in\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Тогда для любого $y\in\mathfrak{h}$ имеем

$$\operatorname{ad}x(y)=-\operatorname{ad}y(x)\in\mathfrak{h}$$

(так как $\operatorname{ad}y(\bar{x})=0$). Итак, $\bar{x}\in\mathfrak{n}/\mathfrak{h}$, и наше утверждение доказано.

Шаг 5. Если $\mathfrak{g}\neq(0)$, существует *идеал* $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$ коразмерности 1. В самом деле, пусть $\mathfrak{h}$ — максимальная подалгебра в $\mathfrak{g}$, отличная от $\mathfrak{g}$. Тогда (см. четвертый шаг) нормализатор подалгебры $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$ совпадает со всей алгеброй $\mathfrak{g}$, т. е. $\mathfrak{h}$ — идеал в $\mathfrak{g}$. Рассмотрим в алгебре $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ какое-нибудь одномерное подпространство и возьмем его полный подобраз в $\mathfrak{g}$. Мы получим подалгебру в $\mathfrak{g}$, строго большую, чем $\mathfrak{h}$, и потому совпадающую с $\mathfrak{g}$, откуда следует, что $\dim\mathfrak{g}/\mathfrak{h}=1$. Выберем такой идеал $\mathfrak{h}$.

Шаг 6. Положим $W=\{v\in V\mid\mathfrak{h}v=0\}$. Пространство $W$ инвариантно относительно $\mathfrak{g}$. В самом деле, пусть $x\in\mathfrak{g}$ и $y\in\mathfrak{h}$, тогда

$$yxv=xyv-[x,\ y]\,v=0\qquad(v\in V),$$

поскольку $\mathfrak{h}$ — идеал.

Шаг 7. По предположению индукции ($\dim\mathfrak{h}<\dim\mathfrak{g}$) $W\neq(0)$. Выберем элемент $y\in\mathfrak{g}$, не принадлежащий $\mathfrak{h}$. Так как $y$ — нильпотентное преобразование, оно аннулирует некоторый ненулевой вектор из $W$, который тем самым аннулируется всей алгеброй $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+ky$. Теорема 2′ доказана.

Доказательство теоремы 1. Если алгебра $\mathfrak{g}$ нильпотентна, то по теореме 2.1 (свойство (ii)) преобразование $\operatorname{ad}x$ нильпотентно для каждого $x\in\mathfrak{g}$. Обратно, пусть $\operatorname{ad}x$ нильпотентно для каждого $x\in\mathfrak{g}$. Применив теорему Энгеля, получим флаг

$$(0)\subset\mathfrak{a}_1\subset\mathfrak{a}_2\subset\ \dots\ \subset\mathfrak{a}_n=\mathfrak{g},$$

состоящий из подпространств $\mathfrak{a}_i$ алгебры $\mathfrak{g}$, таких, что $[\mathfrak{g},\ \mathfrak{a}_i]\subset\mathfrak{a}_{i-1}$ для всех $i$. Отсюда вытекает, согласно критерию (iii) (теорема 2.1), что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ нильпотентна.

## § 3*. Теоретико-групповой аналог теоремы Энгеля

Пусть $V$ — конечномерное векторное пространство над $k$. Элемент $g \in GL(V)$ назовем *унипотентным*, если $g$ удовлетворяет одному из трех эквивалентных условий (доказательство их эквивалентности мы предоставляем читателю в качестве упражнения):

(i) $g = 1 + n$, где элемент $n$ нильпотентен:

(ii) в подходящей системе координат преобразованию $g$ отвечает треугольная матрица с единицами на главной диагонали:

(iii) все собственные значения преобразования $g$ равны единице.

Теорема (Колчин). *Пусть $G$ — подгруппа группы $GL(V)$, причем каждый элемент $g \in G$ унипотентен. Существует флаг $\mathcal{F} = \{V_i\}$ в пространстве $V$, такой, что все подпространства $V_i$ инвариантны относительно $G$.*

Другими словами, найдется система координат, в которой все элементы группы $G$ одновременно представляются треугольными матрицами, на диагонали которых ввиду свойства (iii) обязательно будут стоять единицы.

Доказательство. Теорема будет доказана (индукцией по размерности $V$), если при наших предположениях мы сможем установить существование ненулевого вектора $v \in V$, инвариантного относительно $G$.

Система линейных уравнений

$$(g - 1)\,v = 0 \qquad (g \in G)$$

имеет нетривиальное решение $v$ над $k$ тогда и только тогда, когда она имеет его над алгебраическим замыканием $\bar{k}$ поля $k$, т. е. в пространстве $V \otimes_k \bar{k}$. Поэтому мы можем предполагать, что поле $k$ алгебраически замкнуто. Далее, рассматривая вместо пространства $V$ его подпространство, можно считать, что $V$ — простой $G$-модуль. Из теоремы плотности, или теоремы Бернсайда (Бурбаки [3], гл. VIII, § 4, п. 2 и 3) вытекает, что элементы группы $G$ линейно порождают все пространство $\operatorname{End} V$, ибо $\sum_{g\in G} kg$ является $k$-подалгеброй в $\operatorname{End} V$.

С другой стороны, для каждого $g = 1 + n \in G$ имеем

$$\operatorname{Tr}_V(g) = \operatorname{Tr}_V(1) + \operatorname{Tr}_V(n) = \operatorname{Tr}_V(1),$$

так как след нильпотентного преобразования равен нулю. Итак, след $\operatorname{Tr}_V(g)$ не зависит от $g \in G$, так что для любых двух элементов $g, g' \in G$

$$\operatorname{Tr}_V(ng') = \operatorname{Tr}_V((g-1)g') = \operatorname{Tr}_V(gg' - g') = \\ = \operatorname{Tr}_V(gg') - \operatorname{Tr}_V(g') = 0.$$

Но элементы $g'$ порождают $\operatorname{End} V$, так что $\operatorname{Tr}_V(n\alpha) = 0$ для всех $\alpha \in \operatorname{End} V$. Следовательно, $n = 0$, т. е. $g = 1$. Теорема доказана.

## § 4. Разрешимые алгебры

*Производным рядом* $\{D^n\mathfrak{g}\}$ идеалов в $\mathfrak{g}$ называется цепочка идеалов

$$\mathfrak{g} = D^1\mathfrak{g} \supset D^2\mathfrak{g} \supset \ldots \supset D^n\mathfrak{g} \supset \ldots,$$

определенных индуктивно по формулам $D^1\mathfrak{g} = \mathfrak{g}, D^n\mathfrak{g} = [D^{n-1}\mathfrak{g}, D^{n-1}\mathfrak{g}]$, $n > 1$.

Теорема 1. *Следующие три условия эквивалентны:*

(i) *существует целое $n$, такое, что* $D^n\mathfrak{g} = (0)$;

(ii) *существует целое $n$, такое, что для любого семейства из $2^n$ элементов $x_\nu \in \mathfrak{g}$*

$$[[[\cdots], [\quad]], [[\quad], [\quad]]] = 0;$$

(iii) *алгебра $\mathfrak{g}$ получается последовательными расширениями абелевых алгебр Ли; иными словами, существует последовательность идеалов*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \supset \mathfrak{a}_2 \supset \ldots \supset \mathfrak{a}_n = (0),$$

*такая, что факторы $\mathfrak{a}_i/\mathfrak{a}_{i+1}$ абелевы, т. е. $[\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_i] \subset \mathfrak{a}_{i+1}$ для всех $i$.*

Действительно, импликации (i) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i) очевидны.

Определение 2. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$, удовлетворяющая трем эквивалентным условиям предыдущей теоремы, называется *разрешимой алгеброй Ли.*

Пример. Пусть $\mathscr{F} = \{V_i\}$ — флаг в конечномерном векторном пространстве $V$. Положим

$$\mathfrak{b}(\mathscr{F}) = \{x \in \operatorname{End} V \mid xV_i \subset V_i \text{ для всех } i\}.$$

В координатной системе, связанной с этим флагом, элементы из $\mathfrak{b}(\mathscr{F})$ представляются треугольными матрицами. Легко убедиться в том, что факторалгебра $\mathfrak{b}(\mathscr{F})/\mathfrak{n}(\mathscr{F})$ абелева, так что алгебра $\mathfrak{b}(\mathscr{F})$ разрешима.

## § 5. Основная теорема

На протяжении этого параграфа основное поле $k$ есть поле характеристики нуль.

Основная теорема о разрешимых алгебрах Ли гласит:

Теорема 1 (Ли). *Пусть $\mathfrak{g}$ — разрешимая алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем $k$ нулевой характеристики, и пусть $\rho$ — произвольное линейное представление алгебры $\mathfrak{g}$ в пространстве $V$. Тогда в пространстве $V$ существует флаг $\mathscr{F} = \{V_i\}$, такой, что $\rho(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{b}(\mathscr{F})$.*

Индукцией по размерности $V$ эта теорема сводится к следующей.

Теорема 1′. *В условиях теоремы* 5.1 (*при* $V \neq (0)$) *существует ненулевой вектор $v \in V$, собственный для всех преобразований $\rho(x)$, где $x \in \mathfrak{g}$.*

Заметим, что вектор $v$ с такими свойствами определяет отображение $\chi: \mathfrak{g} \to k$, такое, что $\rho(x)v = \chi(x)v$.

Основная лемма. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над полем $k$ нулевой характеристики, $\mathfrak{h}$ — идеал в $\mathfrak{g}$, $V$ — некоторый $\mathfrak{g}$-модуль, $v \in V$ $(\neq 0)$ и $\chi: \mathfrak{h} \to k$ — такое отображение, что $hv = \chi(h)v$ для всех $h \in \mathfrak{h}$. Тогда $\chi([x, h]) = 0$ при $x \in \mathfrak{g}$ и $h \in \mathfrak{h}$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный элемент $x \in \mathfrak{g}$ $(x \neq 0)$. Обозначим через $V_i$ подпространство пространства $V$, порожденное векторами $v, xv, \ldots$ $\ldots, x^{i-1}v$. Имеем, очевидно,

$$(0) = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_i \subset V_{i+1} \subset \ldots .$$

Пусть $n$ — минимальное целое число, для которого $V_n = V_{n+1}$ $(n > 0)$. Очевидно, $\dim V_n = n$, $xV_n \subset V_{n+1}$ и $V_n = V_{n+k}$ для всех $k \geqslant 0$. Мы утверждаем, что для каждого элемента $h \in \mathfrak{h}$ имеет место сравнение $hx^i v \equiv \chi(h) x^i v \pmod{V_i}$, $i \geqslant 0$. Докажем это индукцией по $i$.

При $i = 0$ наше утверждение верно в силу определения отображения $\chi$.

При $i > 0$ имеем

$$hx^i v = hxx^{i-1}v = xhx^{i-1}v - [x,\ h]\, x^{i-1}v.$$

Но по предположению индукции

$$hx^{i-1}v = \chi(h)\, x^{i-1}v + v'$$

и

$$[x,\ h]\, x^{i-1}v = \chi([x,\ h])\, x^{i-1}v + v'',$$

где $v'$, $v'' \in V$. Учитывая, что $xV_{i-1} \subset V_i$, получаем искомое сравнение.

Из доказанного следует, что каждый эндоморфизм пространства $V_n$, определенный элементом $h \in \mathfrak{h}$, представляется в базисе этого пространства $\{v,\ xv,\ \ldots,\ x^{n-1}v\}$ треугольной матрицей с числами $\chi(h)$ по главной диагонали. Таким образом, $\mathrm{Tr}_{V_n}(h) = n\chi(h)$. Заменяя $h$ на $[x,\ h]$, получаем

$$n\chi([x,\ h]) = \mathrm{Tr}_{V_n}([x,\ h]) = \mathrm{Tr}_{V_n}(xh - hx) = 0$$

(заметим, что $xV_n \subset V_n$).

Доказательство теоремы 1′. Снова применим индукцию по $\dim V$. Если $\dim\ \mathfrak{g} = 0$, наше утверждение тривиально. Пусть $\dim \mathfrak{g} > 0$. Поскольку алгебра $\mathfrak{g}$ разрешима, $D\mathfrak{g} = [\mathfrak{g},\ \mathfrak{g}] \neq \mathfrak{g}$ (в противном случае $\mathfrak{g} = D^n\mathfrak{g}$ для всех $n \geqslant 0$). Рассмотрим подпространство $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$ коразмерности 1, содержащее $D\mathfrak{g}$. По определению алгебры $D\mathfrak{g}$ имеем

$$[\mathfrak{h},\ \mathfrak{g}]\subset D\mathfrak{g}\subset\mathfrak{h},$$

так что $\mathfrak{h}$ — идеал в $\mathfrak{g}$. По предположению индукции найдутся ненулевой вектор $v\in V$ и отображение $\chi$: $\mathfrak{h}\to k$, такие, что $hv=\chi(h)_v$ для всех $h\in\mathfrak{h}$. Положим

$$W=\{w\in V\mid hw=\chi(h)\,w \text{ для всех } h\in\mathfrak{h}\}.$$

По построению $W$ — нетривиальное линейное подпространство в $V$. Покажем, пользуясь основной леммой, что $W$ инвариантно относительно $\mathfrak{g}$. Если $w\in W$ и $x\in\mathfrak{g}$, то для любого $h\in\mathfrak{h}$ имеем

$$hxw=xhw-[x,\ h]\,w=\chi(h)\,xw-\chi([x,\ h])\,w.$$

Поскольку последний член в этом равенстве равен 0, получаем $xw\in W$.

Выберем теперь элемент $x\in\mathfrak{g}$, не лежащий в $\mathfrak{h}$. Так как поле $k$ алгебраически замкнуто, то для эндоморфизма $x: W\to W$ существует собственный вектор $v_0\in W$. Полученный вектор является искомым, поскольку $v_0$ будет собственным для всех элементов алгебры $kx+\mathfrak{h}=\mathfrak{g}$. Теорема доказана.

Заметим, что теорема Ли неверна в случае поля характеристики, отличной от нуля. В качестве примера рассмотрим алгебру Ли $sl(2)$ квадратных матриц второго порядка с нулевым следом над полем характеристики 2. Легко показать, что эта трехмерная алгебра нильпотентна, однако ее стандартное представление в пространстве векторов-столбцов длины 2 не имеет собственных векторов.

Мы закончим этот параграф двумя следствиями из теоремы Ли.

Следствие 2. *В разрешимой алгебре Ли существует флаг из идеалов этой алгебры.*

Для доказательства достаточно применить теорему Ли к присоединенному представлению.

Следствие 3. *Если поле $k$ имеет характеристику нуль и $\mathfrak{g}$ — разрешимая алгебра Ли, то алгебра $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ нильпотентна.*

Доказательство. Заметим, что наше утверждение *линейно.* Если $k'$ — расширение поля $k$ и $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} \otimes_k k'$, то ясно, что разрешимость (соответственно нильпотентности) алгебры $\mathfrak{g}'$ равносильна разрешимости (соответственно нильпотентности) алгебры $\mathfrak{g}$, так как $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]' = [\mathfrak{g}', \mathfrak{g}']$ и т. д. Поэтому можно предполагать, что поле $k$ алгебраически замкнуто. Согласно предыдущему следствию, существует флаг идеалов алгебры $\mathfrak{g}$

$$\mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}_1 \supset \mathfrak{g}_2 \supset \ldots \supset \mathfrak{g}_n = (0).$$

Пусть $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Легко видеть, что $\operatorname{ad} x \mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{g}_{i+1}$, поскольку алгебра Ли $\operatorname{End}(\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}) \simeq k$ коммутативна. Следовательно, $\operatorname{ad} x$ нильпотентен на $\mathfrak{g}$, а тем более на $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Нильпотентность алгебры $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ следует теперь из теоремы 3.1.

Замечание. Обратно, если алгебра $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ нильпотентна, то алгебра $\mathfrak{g}$, очевидно, разрешима.

## § 5*. Теоретико-групповой аналог теоремы Ли

Группа $G$ называется *разрешимой*, если она может быть получена посредством конечного числа расширений абелевых групп.

Рассмотрим ряд подгрупп

$$G = G^{(1)} \supset G^{(2)} \supset \ldots \supset G^{(n)},$$

где $G^{(1)} = G$ и $G^{(n)} = (G^{(n-1)}, G^{(n-1)})$ при $n > 1$. Тогда разрешимость группы $G$ эквивалентна равенству $G^{(n)} = 1$ для некоторого $n$.

Пусть $G$ — топологическая группа и $\rho\colon G \to GL(V)$ — непрерывный гомоморфизм группы $G$ в группу автоморфизмов конечномерного векторного пространства $V$ над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$.

Теорема 1*. *Если группа $G$ разрешима и связна, то в пространстве $V$ существует флаг $\mathcal{F}$, инвариантный относительно $\rho(x)$ для всех $x \in G$.*

Представление $\rho$ называется *неприводимым*, если в пространстве $V\,(\neq(0))$ нет иных подпространств, инвариантных относительно всех $\rho(x)$, кроме $V$ и $(0)$. Из теоремы 1* непосредственно вытекает

Следствие 2*. *Если группа $G$ разрешима и связна, а представление $\rho$ неприводимо, то* $\dim V=1$.

Обратно, с помощью индукции по $\dim V$ наша теорема легко получается из этого следствия.

Следствие 3*. *Всякая компактная разрешимая топологическая группа абелева.*

Доказательство. По теореме Петера — Вейля для любой компактной группы $G$ существует семейство неприводимых представлений $\rho_\alpha$: $G\to \mathrm{GL}(V_\alpha)$, такое, что отображение $G\to\prod\limits_\alpha GL(V_\alpha)$ инъективно. Но $\dim V_\alpha=1$, так что $G$ — абелева группа.

Прежде чем доказывать теорему, условимся о следующей терминологии.

Элемент $v\in V$ назовем *собственным* для подгруппы $H\subset G$, если $v\neq 0$ и $hv\in \mathbf{C}v$ для всех $h\in H$. Собственный вектор $v$ определяет *характер* $\chi_v$: $H\to\mathbf{C}^*$, для которого $\rho(h)v=\chi v(h)v$, где $h\in H$. Разумеется, функция $\chi_v$ непрерывна, поскольку непрерывно отображение $\rho$. Число *различных* характеров $\chi_v$, отвечающих собственным векторам $v\in V$, не превышает размерности $V$ (и следовательно, конечно). В самом деле, допустим, что $\{v_1, \ldots, v_r\}$ — максимальная линейно независимая система собственных векторов для группы $H$ и $\{\chi_1, \ldots, \chi_r\}$ — соответствующая система характеров. Пусть $v$ — произвольный собственный вектор с характером $\chi$. Тогда $v=\sum a_iv_i$, где $a_i\in\mathbf{C}$, и, применяя $\rho(h)$ к этому равенству, мы получаем $a_i\chi(h)=a_i\chi_i(h)$ при любом $i$.

Следовательно, $\chi=\chi_i$ для некоторого $i$, поскольку не все $a_i$ равны нулю.

Основная лемма*. *Пусть $G$ — связная топологическая группа и $v$ — собственный вектор для ее* *нормального делителя $H$. Тогда $\chi_v(x^{-1}hx)=\chi_v(h)$ для всех $x \in G$ и $h \in H$.*

(Читатель, конечно, заметит аналогию с основной леммой предыдущего параграфа.)

Доказательство. Несложное вычисление показывает, что $\chi_v(x^{-1}hx)=\chi_{xv}(h)$. Как уже было выяснено раньше, существует лишь конечное число характеров группы $H$ вида $\chi_{xv}$. Поэтому подгруппа $S=\{x \in G \mid \chi_{xv}=\chi_v\}$ имеет в группе конечный индекс. Однако $S$, будучи множеством общих нулей функций $\chi_v(x^{-1}hx)-\chi_v(h)$ на группе $G$ ($h$ пробегает $H$), является замкнутым множеством. Таким образом, $G$ есть объединение конечного числа попарно непересекающихся замкнутых множеств (смежных классов по $S$). Ввиду связности $G$ это означает совпадение $S$ и $G$, ч. т. д.

Доказательство теоремы 1*. Воспользуемся индукцией по наименьшему числу $n$, для которого $G^{(n)}=(1)$. Если $n=1$, то $G=(1)$ и теорема очевидна. Пусть $n>1$, тогда $G^{(2)} \neq G^{(1)}=G$ (в противном случае $G^{(n)}=G$ для всех $n$). Докажем сначала связность $G^{(2)}$, а затем применим к этой группе предположение индукции. Обозначим через $C$ множество всех коммутаторов группы $G$; это множество, очевидно, связно как образ связного топологического пространства $G \times G$ при отображении $(x, y) \mapsto xyx^{-1}y^{-1}$. Положим

$$C^m=\{x \in G \mid x=y_1 \dots y_m, \text{ где } y_1, \dots, y_m \in C\}.$$

Множество $C^m$ есть образ произведения $C \times \dots \times C$ ($m$ раз) и потому тоже связно. Поскольку включения $u \in C$ и $u^{-1} \in C$ выполняются одновременно, группа $G^{(2)}$, порожденная $C$, есть объединение множеств $C^m$. Таким образом, $G^{(2)}$ — связная группа, ибо все $C^m$ связны и имеют общую точку 1.

По предположению индукции существует собственный вектор $v_0 \in V$ для группы $G^{(2)}$. Обозначим через $\chi_0$: $G^{(2)} \to \mathbf{C}^*$ соответствующий характер. В силу основной леммы множество

$$\{v \in V \mid \rho(h)\, v = \chi_0(h)\, v, \quad \text{где} \quad h \in G^{(2)}\}$$

инвариантно относительно $\rho(G)$. Однако по предположению $\rho$ неприводимо, поэтому $\rho(h)\, v = \chi_0(h)\, v$ для всех $v \in V$ и $h \in G^{(2)}$.

Пусть $x \in G$. Рассмотрим подгруппу $H \subset G$, порожденную $G^2$ и элементом $x$. Легко видеть, что $H$ — нормальный делитель ($H \supset G^{(2)}$). Так как поле $\mathbf{C}$ алгебраически замкнуто, оператор $\rho(x)$ имеет собственный вектор $v_1 \in V$. По приведенным выше соображениям $v_1$ — собственный вектор для $G^{(2)}$ и, следовательно, для $H$. Пусть $\chi_1$: $H \to \mathbf{C}^*$ — соответствующий характер. Применяя опять основную лемму, находим, что множество

$$\{v \in V \mid \rho(h)\, v = \chi_1(h)\, v, \quad h \in H\}$$

инвариантно относительно $\rho(G)$ и, следовательно, совпадает со всем пространством $V$. В частности, $\rho(x)\, v \in \mathbf{C}v$ для любого $v \in V$. Поскольку элемент $x$ выбирался в группе $G$ произвольно, мы заключаем, что $\dim V = 1$. Тем самым следствие 2* и теорема 1 доказаны.

Замечание. Фактически теорема Ли и ее теоретико-групповой аналог эквивалентны друг другу. Если исходить, например, из групповой теоремы, то соответствующее утверждение для алгебр Ли сразу получается (при $k = \mathbf{C}$) рассмотрением связной[1]) группы Ли, соответствующей данной алгебре Ли. Случай произвольного алгебраически замкнутого поля $k$ нулевой характеристики сводится к случаю $k = \mathbf{C}$ с помощью принципа Лефшеца. Именно: возьмем подполе $k' \subset k$, конечно, порожденное (над $\mathbf{Q}$) структурными константами алгебры $\mathfrak{g}$ и отображения $\mathfrak{g} \times V \to V$. Вложим затем поле $k'$ в $\mathbf{C}$ и осуществим спуск от $\mathbf{C}$ к $\bar{k}'$.

[1]) И односвязной. — *Прим. перев.*

Обратно, пусть мы исходим из теоремы Ли. Теорема 1* получится, если рассмотреть замыкание группы $\rho(G)$ в $\mathrm{GL}(V)$ как вещественную группу Ли и применить к ее алгебре Ли теорему Ли.

## § 6. Леммы об эндоморфизмах

Пусть $k$ — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики и $V$ — конечномерное векторное пространство над $k$. Элемент $u \in \mathrm{End}\, V$ называется *полупростым*, если пространство $V$ имеет базис, состоящий из его собственных векторов, или, что то же самое, если в некоторой системе координат $u$ представляется диагональной матрицей.

Лемма 1. *Для каждого $u \in \mathrm{End}\, V$ существуют полупростой элемент $s$ и нильпотентный элемент $n$ из алгебры $\mathrm{End}\, V$, такие, что $sn = ns$ и $u = s + n$, причем $s$ и $n$ однозначно определяются этими двумя условиями. Кроме того, существуют многочлены $S(T)$ и $N(T)$ (зависящие от $u$), такие, что $S(0) = N(0) = 0$, $s = S(u)$ и $n = N(u)$.*

Доказательство. Пусть $\prod\limits_i (T - \lambda_i)^{m_i}$ — разложение характеристического многочлена оператора $u$ в произведение степеней различных линейных множителей $T - \lambda_i$. Для каждого $i$ обозначим через $V_i$ ядро эндоморфизма $(u - \lambda_i)^{m_i}$: $V \to V$. Тогда $V = \bigoplus V_i$ (прямая сумма), $\dim V_i = m_i$ и $uV_i \subset V_i$. Пусть искомые $s$ и $n$ уже найдены. Перестановочность $s$ и $n$ влечет за собой перестановочность $s$ и $u$, а тем самым $s$ и $(u - \lambda_i)^{m_i}$; поэтому $sV_i \subset V_i$ для каждого $i$. Из нильпотентности эндоморфизма $u - s$ [1]) вытекает, что $u$ и $s$ имеют на $V_i$ одинаковые собственные значения. Но по построению оператор $u$ имеет в пространстве $V_i$ единственное собственное значение $\lambda_i$. Поэтому полупростота $s$ означает, что ограничение этого оператора

[1]) А также из перестановочности $u$ и $s$. — *Прим. перев.*

на $V_i$ есть просто оператор умножения на скаляр $\lambda_i$. Таким образом, единственность эндоморфизмов $n$ и $s$ доказана. С другой стороны, определяя $s$ указанным способом и полагая $n = u - s$, мы получаем решение нашей задачи (так как ограничение оператора $n$ на $V_i$ имеет вид $u - \lambda_i$ и является, следовательно, нильпотентным по определению $V_i$).

Рассмотрим, наконец, многочлен $S(T)$, удовлетворяющий следующей системе сравнений:

$$S(T) \equiv \lambda_i (\operatorname{mod} (T - \lambda_i)^{m_i}), \quad S(T) \equiv 0 (\operatorname{mod} T).$$

(Заметим, что эти условия согласованы, если $\lambda_i = 0$ для некоторого $i$.)

Очевидно, что $S(0) = 0$ и $S(u) = s$. Полагая $N(T) = T - S(T)$, мы получим $N(0) = 0$ и $N(u) = u - s = n$, ч. т. д.

Следствие 2. *Пусть $u = s + n$ — разложение из предыдущей леммы, и пусть $A$ и $B$ — два подпространства в $V$, такие, что $A \subset B$ и $B \subset A$. Тогда $sB \subset A$ и $nB \subset A$.*

Действительно, в силу предыдущей леммы достаточно заметить, что для любого многочлена $P(T)$ без свободного члена имеем $P(u) B \subset A$.

Обозначим через $V^*$ двойственное к $V$ пространство $\operatorname{Hom}_k(V, k)$ и положим для любых целых $p, q \geqslant 0$

$$V_{p,q} = \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{p \text{ раз}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{q \text{ раз}}.$$

Пространство $V_{p,q}$ можно рассматривать как модуль над алгеброй Ли $\operatorname{End} V$ относительно *диагонального действия* (см. § 1). Для каждого $u \in \operatorname{End} V$ обозначим через $u_{p,q}$ соответствующий эндоморфизм пространства $V_{p,q}$.

Например,

$$u_{1,2} = u \otimes 1 \otimes 1 - 1 \otimes u^* \otimes 1 - 1 \otimes 1 \otimes u^*,$$

где $u^* \in \operatorname{End} V^*$ — сопряженный к $u$ эндоморфизм, определяемый формулой $\langle u^* y, x \rangle = \langle y, u x \rangle$ (мы пишем здесь $\langle y, x \rangle$ вместо $y(x)$ для $y \in V^*$, $x \in V$).

В частном случае $p = q = 1$ имеется канонический изоморфизм $V_{1,1} \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}\, V$, который сопоставляет паре $x \otimes y$ эндоморфизм $x' \longmapsto x \langle y, x' \rangle$. Несложное вычисление показывает, что при этом изоморфизме элементу $u_{1,1} \in \mathrm{End}\, V_{1,1}$ соответствует элемент $\mathrm{ad}\, u \in \mathrm{End}(\mathrm{End}\, V)$.

Лемма 3. *Пусть $u = s + n$ — каноническое разложение эндоморфизма $u$, указанное в лемме 1. Тогда $u_{p,q} = s_{p,q} + n_{p,q}$ есть каноническое разложение эндоморфизма $u_{p,q}$ для любых $p$ и $q$.*

Доказательство. Прежде всего $[s_{p,q}, n_{p,q}] = [s, n]_{p,q} = 0_{p,q} = 0$, так что $s_{p,q}$ и $n_{p,q}$ коммутируют. Если $\{x_i\}$ — базис $V$, состоящий из собственных векторов оператора $s$, то двойственный базис $\{x_i^*\}$ пространства $V^*$ и базис $\{x_{i_1} \otimes \ldots \otimes x_{i_p} \otimes x_{j_1}^* \otimes \ldots \otimes x_{j_p}^*\}$ пространства $V_{p,q}$ состоят соответственно из собственных векторов операторов $s^*$ и $s_{p,q}$. Таким образом, эндоморфизм $s_{p,q}$ полупрост. Оператор $n_{p,q}$ нильпотентен, будучи равен сумме операторов вида $1 \otimes \ldots \otimes n \otimes \ldots \otimes 1$ и $1 \otimes \ldots \otimes n^* \otimes \ldots \otimes 1$, которые нильпотентны и попарно перестановочны. Равенство $u_{p,q} = s_{p,q} + n_{p,q}$ тоже имеет место, поскольку отображение $u \longmapsto u_{p,q}$ линейно. Остается учесть единственность канонического разложения.

Пусть $s \in \mathrm{End}\, V$ — полупростой элемент, $V = \bigoplus V_i$ — соответствующее разложение в прямую сумму, такое, что $s | V_i = \lambda_i$, и пусть $\varphi\colon k \to k$ — некоторое $\mathbf{Q}$-линейное отображение.

Определение 4. Символом $\varphi(s)$ будем обозначать полупростой эндоморфизм пространства $V$, для которого $\varphi(s) | V_i = \varphi(\lambda_i)$. (Другими словами, если эндоморфизм $s$ представлен диагональной матрицей, то матрица, соответствующая $\varphi(s)$, получится, если применить $\varphi$ к ее элементам.)

Существует многочлен $P(T)$ (зависящий от $\varphi$ и $s$), для которого $\varphi(s) = P(s)$ и $P(0) = 0$. (Нахождение такого многочлена сводится к решению интерполяционной задачи $P(\lambda_i) = \varphi(\lambda_i)$ для всех $i$ и $P(0) = 0$.) До сих пор мы использовали лишь тот факт, что $\varphi$ отображает $k$ в $k$ и $\varphi(0) = 0$. Для того чтобы доказать следующую лемму, нам понадобится линейность $\varphi$.

Лемма 5. *Для любых $p$ и $q$ имеет место формула*

$$(\varphi(s))_{p,q} = \varphi(s_{p,q}).$$

Доказательство. Пространство $V_{p,q}$ разлагается в прямую сумму подпространств вида $V_{i_1} \otimes \ldots \otimes V_{i_p} \otimes \overset{*}{V}_{j_1} \otimes \ldots \otimes \overset{*}{V}_{j_q}$. На каждом таком подпространстве

$s_{p,q}$ есть оператор умножения на скаляр $\lambda_{i_1} + \ldots + \lambda_{i_p} - \lambda_{j_1} - \ldots - \lambda_{j_q}$,

$\varphi(s_{p,q})$ есть оператор умножения на скаляр $\varphi(\lambda_{i_1} + \ldots + \lambda_{i_p} - \lambda_{j_1} - \ldots - \lambda_{j_p})$,

$\varphi(s)_{p,q}$ есть оператор умножения на скаляр $\varphi(\lambda_{i_1}) + \ldots + \varphi(\lambda_{i_p}) - \varphi(\lambda_{j_1}) - \ldots - \varphi(\lambda_{j_p})$.

Следствие 6. *Пусть $u = s + n$ — каноническое разложение эндоморфизма $u \in \operatorname{End} V$, и пусть $A$ и $B$ — подпространства в $V_{p,q}$, такие, что $A \subset B$ и $u_{p,q}B \subset A$. Тогда для любого $\mathbf{Q}$-линейного отображения $\varphi$: $k \to k$ имеет место включение $\varphi(s)_{p,q}B \subset A$.*

Доказательство. Ввиду леммы 3 и следствия 2 $s_{p,q}B \subset A$. Лемма становится теперь очевидной, если учесть замечание (перед леммой 5) о том, что эндоморфизм $\varphi(s)_{p,q} = \varphi(s_{p,q})$ представляется многочленом от $s_{p,q}$ без свободного члена.

Лемма 7. *Пусть $u = s + n$ — каноническое разложение из леммы 1. Если $\operatorname{Tr}_V(u\varphi(s)) = 0$ для всех $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathbf{Q}}(k, k)$, то оператор $u$ нильпотентен.*

Доказательство. Используя те же обозначения, что и при доказательстве леммы 1, получаем

$$\mathrm{Tr}_V(u\varphi(s)) = \sum m_i\lambda_i\varphi(\lambda_i) = 0$$

для всех $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}}(k, k)$. Пусть $\varphi$ таково, что $\varphi(k) \subset \mathbf{Q}$. Тогда, применяя повторно $\varphi$, мы придем к тождеству $\sum m_i\varphi(\lambda_i)^2 = 0$, из которого следует, что $\varphi(\lambda_i) = 0$ для каждого $i$. Но включение $\varphi(k) \subset \mathbf{Q}$ выполняется, например, для любых $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}}(k, \mathbf{Q})$, так что $\lambda_i = 0$ для всех $i$, т. е. $s = 0$ и $n = u$, как и утверждалось.

Замечание (Бергман). Если $k = \mathbf{C}$, достаточно предполагать, что равенство $\mathrm{Tr}_V(u\varphi(s)) = 0$ выполняется лишь для одного-единственного $\varphi$, а именно для отображения комплексного сопряжения.

Эндоморфизмы вида $\varphi(s)$ называются (по терминологии Шевалле) *репликами* эндоморфизма $s$.

Мы предоставляем читателю в качестве упражнения следующую характеризацию реплик.

Теорема 7. *Пусть $s$ и $s'$ — полупростые элементы пространства* $\mathrm{End}\,V$. *Тогда $s'$ является репликой $s$ (т. е. существует преобразование $\varphi$, такое, что $\varphi(s) = s'$) в том и только в том случае, если для любых $p$ и $q$ каждый элемент пространства $V_{p,q}$, аннулируемый $s_{p,q}$, аннулируется и $s'_{p,q}$.*

Имеется еще одно, более красивое описание реплик в терминах алгебраических групп. Пусть $\mathfrak{g}$ — множество всех реплик эндоморфизма $s$. Можно показать, что $\mathfrak{g}$ есть алгебра Ли наименьшей *алгебраической* подгруппы $G \subset \mathrm{GL}(V)$, алгебра Ли которой содержит $s$. В самом деле, группа $G$ (или, точнее, группа $G(k)$ точек группы с координатами из поля $k$) состоит из всех автоморфизмов $x$ пространства $V$, таких, что для каждого $i$ ограничение $x\,|\,V_i$ есть оператор умножения на скаляр $x_i \in k^*$, причем эти скаляры удовлетворяют соотношению $\Pi x_i^{n_i} = 1$ для всякого целочисленного вектора $(\ldots, n_i, \ldots)$, такого, что $\sum n_i\lambda_i = 0$ (см. Шевалле [2], гл. II, §§ 13—14, или Шевалле [6]).

## § 7. Критерий Картана

Часто бывает полезным следующий критерий разрешимости.

Теорема 1. *Пусть $k$ — поле нулевой характеристики, $V$ — конечномерное векторное пространство над $k$ и $\mathfrak{g}$ — подалгебра Ли алгебры* $\operatorname{End} V$. *Следующие условия эквивалентны:*

(i) *алгебра $\mathfrak{g}$ разрешима;*

(ii) $\operatorname{Tr}_V(xy) = 0$ *для всех* $x \in \mathfrak{g}$ *и* $y \in D\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Доказательство. Заметим сначала, что утверждение теоремы линейно, т. е. $k$ можно предполагать алгебраически замкнутым (объяснение этому было дано выше при доказательстве следствия 5.3). Далее, применяя „принцип Лефшеца" (т. е. выбирая конечно порожденное подполе $k' \subset k$, над которым определены $V$ и $\mathfrak{g}$, и вкладывая $k'$ в $\mathbf{C}$), мы можем свести случай произвольного поля $k$ к случаю $k = \mathbf{C}$.

(i)$\Rightarrow$(ii). По теореме Ли в пространстве $V$ существует флаг $\{V_i\}$, инвариантный относительно $\mathfrak{g}$. Но

$$\operatorname{Tr}_V(xy) = \sum_i \operatorname{Tr}_{V_i/V_{i+1}}(xy) = 0,$$

потому что элемент $y \in D\mathfrak{g}$ должен аннулировать одномерный $\mathfrak{g}$-модуль $V_i/V_{i+1}$.

(ii)$\Rightarrow$(i). Пусть $u \in D\mathfrak{g}$. По теореме Энгеля (см. замечание к следствию 5.3) достаточно показать, что $u$ нильпотентен. Напишем каноническое разложение $u = s + n$. Принимая во внимание лемму 6.7, нам надо лишь показать, что $\operatorname{Tr}_V(u\varphi(s)) = 0$ для всех $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathbf{Q}}(k, k)$. Дело осложняется тем, что $\varphi(s)$ не обязательно лежит в $\mathfrak{g}$. Пусть $u = \sum c_\alpha [x_\alpha, y_\alpha]$, где $c_\alpha \in k$ и $x_\alpha, y_\alpha \in \mathfrak{g}$. Воспользовавшись тождеством $\operatorname{Tr}_V([a, b]c) = \operatorname{Tr}_V(b[c, a])$, получаем

$$\operatorname{Tr}_V(u\varphi(s)) = \sum c_\alpha \operatorname{Tr}_V([x_\alpha, y_\alpha]\varphi(s)) = \\ = \sum c_\alpha \operatorname{Tr}_V(y_\alpha[\varphi(s), x_\alpha]).$$

Таким образом, нам достаточно установить, что $[\varphi(s), x_\alpha] \in D\mathfrak{g}$. Используем для этого канонический изоморфизм $\operatorname{End} V \simeq V \otimes V^* = V_{1,1}$ и применим следствие 6.6 (с $p = q = 1$), положив $A = D\mathfrak{g}$ и $B = \mathfrak{g}$. Имея в виду отождествление $\operatorname{End} V = V_{1,1}$, можно написать $u_{1,1}(x) = ux - xu = [u, x]$ (см. замечание перед леммой 6.3). Следовательно, $u_{1,1}(\mathfrak{g}) \subset D\mathfrak{g}$. Отсюда, по лемме 6.6, $\varphi(s)_{1,1}(\mathfrak{g}) \subset D\mathfrak{g}$, т. е. $[\varphi(s), x] \in D\mathfrak{g}$ для всех $x \in \mathfrak{g}$, ч. т. д.

## УПРАЖНЕНИЯ

**1.** Класс нильпотентных (соответственно разрешимых) алгебр Ли замкнут относительно перехода к подалгебрам, факторалгебрам и конечным произведениям. Что можно сказать о расширениях?

**2.** Нильпотентная алгебра размерности 2 абелева. В неабелевой двумерной алгебре Ли существует базис $\{x, y\}$, такой, что $[x, y] = x$.

**3.** Неабелева нильпотентная алгебра Ли размерности 3 имеет базис $\{x, y, z\}$, такой, что $[x, y] = z$, $[x, z] = [y, z] = 0$.

# Глава VI

# ПОЛУПРОСТЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ

На протяжении этой главы $k$ — поле нулевой характеристики и все алгебры и модули имеют над $k$ конечную размерность.

## § 1. Радикал

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — ее разрешимые идеалы. Идеал $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ тоже разрешим, поскольку он является расширением алгебры $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}/\mathfrak{a} \simeq \mathfrak{b}/\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$ с помощью идеала $\mathfrak{a}$. В алгебре $\mathfrak{g}$ имеется, следовательно, разрешимый идеал, содержащий все другие разрешимые идеалы. Этот наибольший разрешимый идеал $\mathfrak{r}$ называют *радикалом* алгебры $\mathfrak{g}$.

## § 2. Полупростые алгебры Ли

Мы будем говорить, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ *полупроста*, если ее радикал $\mathfrak{r}$ равен нулю. Эквивалентное определение: алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста, если она *не содержит ненулевых абелевых идеалов*. Действительно, если $\mathfrak{r} \neq (0)$, то последний нетривиальный член производного ряда радикала $\mathfrak{r}$ будет абелевым идеалом алгебры $\mathfrak{g}$.

Другой критерий полупростоты дает следующая

Теорема 1. *Алгебра $\mathfrak{g}$ полупроста в том и только в том случае, когда ее форма Киллинга невырождена.*

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{u}$ пространство всех $x \in \mathfrak{g}$, для которых $\operatorname{Tr}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y)=0$

при любом $y \in \mathfrak{g}$. Несложное вычисление, использующее инвариантность формы Киллинга (см. гл. V, § 1, пример 2), показывает, что множество $\mathfrak{n}$ является идеалом в алгебре $\mathfrak{g}$. Если $x \in \mathfrak{n}$, то $\operatorname{Tr}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y) = 0$ для всех $y \in \mathfrak{g}$ и, в частности, для $y \in D\mathfrak{n}$. Отсюда, согласно критерию Картана, вытекает, что $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{n}$ — разрешимая подалгебра алгебры $\operatorname{End} \mathfrak{g}$. Но $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{n}$ есть факторалгебра алгебры $\mathfrak{n}$ по центру алгебры $\mathfrak{g}$, так что и сам идеал $\mathfrak{n}$ тоже разрешим. Таким образом, если $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра, то идеал $\mathfrak{n}$ равен нулю.

Обратно, допустим, что $\mathfrak{a}$ — абелев идеал в $\mathfrak{g}$, и покажем, что $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{n}$. В самом деле, пусть $\sigma = \operatorname{ad} x \circ \operatorname{ad} y$, где $x \in \mathfrak{a}$ и $y \in \mathfrak{g}$, тогда $\sigma\mathfrak{g} \subset \mathfrak{a}$ и $\sigma\mathfrak{a} = (0)$. Поэтому $\sigma^2 = 0$ и $\operatorname{Tr} \sigma = 0$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли, $\mathfrak{a}$ — ее идеал и $\mathfrak{a}^{\perp}$ — ортогональное дополнение к идеалу $\mathfrak{a}$ в алгебре $\mathfrak{g}$ относительно формы Киллинга. Тогда $\mathfrak{a}^{\perp}$ — идеал алгебры $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^{\perp}$ (прямая сумма).*

Доказательство. Стандартное рассуждение, использующее инвариантность формы Киллинга, показывает, что $\mathfrak{a}^{\perp}$ — идеал в алгебре $\mathfrak{g}$. Аналогично тому, как это делалось в предыдущей теореме, доказывается, что $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp}$ — разрешимый идеал. Последнее означает ввиду полупростоты алгебры $\mathfrak{g}$, что $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp} = 0$. Теорема доказана.

Определение 1. Алгебра Ли $\mathfrak{s}$ называется *простой*, если она

(i) неабелева;

(ii) не содержит собственных идеалов.

Заметим, что в предыдущей теореме $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^{\perp}] = (0)$, так как $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{a}^{\perp}$ — идеалы в $\mathfrak{g}$. Поэтому из разложения $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^{\perp}$ следует изоморфизм алгебр Ли $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{a} \times \mathfrak{a}^{\perp}$. Таким образом, любой идеал в $\mathfrak{a}$ будет идеалом и в $\mathfrak{g}$, и потому идеал $\mathfrak{a}$ полупрост. Алгебра $\mathfrak{g}/\mathfrak{a} \simeq \mathfrak{a}^{\perp}$ также полупроста. Применяя индукцию по $\dim \mathfrak{g}$, получаем

Следствие 1. *Полупростая алгебра Ли изоморфна прямому произведению простых алгебр Ли.*

Для простых алгебр $\mathfrak{s}$ имеет место очевидное равенство $D\mathfrak{s}=\mathfrak{s}$. Из него вытекает

Следствие 2. *Если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста, то $D\mathfrak{g}=\mathfrak{g}$.*

Заметим, что разложение $\mathfrak{g}$ в произведение простых алгебр определено *однозначно* в буквальном смысле (а не только с точностью до изоморфизма). Иными словами, пусть $\mathfrak{g}=\bigoplus \mathfrak{a}_\alpha$ — разложение в прямую сумму простых идеалов и $\varphi\colon \mathfrak{g}\to\mathfrak{s}$ — некоторый сюръективный гомоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на простую алгебру Ли $\mathfrak{s}$. Тогда для некоторого индекса $\beta$ ограничение $\varphi|\mathfrak{a}_\beta\colon \mathfrak{a}_\beta\to\mathfrak{s}$ есть изоморфизм, причем для $\alpha\neq\beta$ ограничение $\varphi|\mathfrak{a}_\alpha=0$. В самом деле, образ $\varphi(\mathfrak{a}_\alpha)$ — идеал в $\mathfrak{s}$, так как $\mathfrak{a}_\alpha$ — идеал в $\mathfrak{g}$ и гомоморфизм $\varphi$ сюръективен. В силу простоты алгебры $\mathfrak{s}$ гомоморфизм $\varphi|\mathfrak{a}_\alpha$ либо нулевой, либо сюръективный. В последнем случае $\varphi|\mathfrak{a}_\alpha$ будет изоморфизмом, так как идеал $\mathfrak{a}_\alpha$ прост. Множество тех $\alpha$, для которых $\varphi|\mathfrak{a}_\alpha$ — изоморфизм, непусто, поскольку $\varphi$ — ненулевой гомоморфизм. С другой стороны, ограничения $\varphi|\mathfrak{a}_\alpha$ и $\varphi|\mathfrak{a}_\beta$ не могут быть изоморфизмами для двух различных индексов $\alpha$ и $\beta$ ввиду равенств

$$[\mathfrak{a}_\alpha,\ \mathfrak{a}_\beta]=0,$$
$$\varphi[\mathfrak{a}_\alpha,\ \mathfrak{a}_\beta]=[\varphi(\mathfrak{a}_\alpha),\ \varphi(\mathfrak{a}_\beta)]=[\mathfrak{s},\ \mathfrak{s}]=\mathfrak{s}.$$

Следствие 3. *Если $\mathfrak{g}=\bigoplus \mathfrak{a}_\alpha$ — представление алгебры в виде прямой суммы простых идеалов, то любой идеал алгебры есть прямая сумма некоторых из идеалов $\mathfrak{a}_\alpha$.*

Примеры полупростых алгебр Ли. 1. Алгебра $\mathfrak{sl}(V)$ эндоморфизмов пространства $V$ с нулевым следом проста, если $\dim V\geqslant 2$.

2. Алгебра $\mathfrak{sp}(V)$ эндоморфизмов пространства $V$, оставляющих инвариантной невырожденную кососимметричную форму, проста, если $\dim V=2n\ (n\geqslant 1)$.

3. Алгебра $\mathfrak{o}(V)$ эндоморфизмов пространства $V$, оставляющих инвариантной невырожденную симметрическую форму, полупроста, если $\dim V\geqslant 3$, и даже

проста, за исключением того случая, когда $\dim V = 4$ и дискриминант этой формы является квадратом.

## § 3. Полная приводимость

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $V$ — некоторый $\mathfrak{g}$-модуль и $\rho: \mathfrak{g} \to \operatorname{End} V$ — соответствующее представление.

Определение. Модуль $V$ (или представление $\rho$) называется *простым* (или *неприводимым*), если $V \neq (0)$ и если в модуле $V$ нет подмодулей, отличных от $(0)$ и $V$.

Модуль $V$ (или представление $\rho$) называется *полупростым* (или *вполне приводимым*), если $V$ разлагается в прямую сумму простых подмодулей, или, что то же самое, если каждый подмодуль обладает дополнительным подмодулем.

Предостережение! Алгебра $\mathfrak{g}$ может быть полупростым $\mathfrak{g}$-модулем, не будучи полупростой алгеброй Ли, как показывает пример $\mathfrak{g} = k$.

Теорема (Г. Вейль). *Если алгебра $\mathfrak{g}$ полупроста, то все $\mathfrak{g}$-модули (конечной размерности) полупросты.*

Замечание. В своем доказательстве Вейль использовал так называемый *унитарный прием*, который состоит в следующем. Пусть $k = \mathbf{C}$, $G$ — связная и односвязная комплексная группа Ли, соответствующая алгебре $\mathfrak{g}$, и пусть $K$ — максимальная компактная подгруппа в $G$. Можно показать, что любая комплексная (замкнутая) подгруппа Ли группы $G$, содержащая $K$, совпадает с $G$. Отсюда выводится, что любой $K$-подмодуль модуля $V$ является в то же время и $G$-подмодулем. Поскольку $K$ компактно, на $V$ существует $K$-инвариантная эрмитова форма, с помощью которой строится дополнительный подмодуль (ортогональное дополнение). В случае $G = SL(n)$ в качестве $K$ можно взять $SU(n)$ — специальную унитарную группу; отсюда и название „унитарный прием“. Чисто алгебраическое доказательство теоремы Вейля было найдено лишь несколько лет спустя.

Доказательство теоремы мы осуществим в несколько шагов.

Шаг 1. Если алгебра $\mathfrak{g}$ полупроста и отображение $\rho\colon \mathfrak{g} \to \operatorname{End} V$ инъективно, то форма $B_\rho(x, y) = \operatorname{Tr}_V(\rho(x)\rho(y))$ невырождена. В самом деле, согласно критерию Картана, идеал

$$\mathfrak{n} = \{x \in \mathfrak{g} \mid B_\rho(x, y) = 0 \text{ для всех } y \in \mathfrak{g}\}$$

разрешим и, следовательно, равен нулю.

Шаг 2. Допустим, что на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ задана невырожденная, инвариантная, симметрическая, билинейная форма $B(x, y)$. Пусть $\{e_i\}$ и $\{f_j\}$ — два базиса этой алгебры, сопряженных относительно $B$, т. е. $B(e_i, f_j) = \delta_{ij}$ (символ Кронекера). Рассмотрим в универсальной обертывающей алгебре $U\mathfrak{g}$ элемент $b = \sum e_i f_i$. Утверждается, что элемент $b$ лежит в центре алгебры $U\mathfrak{g}$ и не зависит от выбора базисов $\{e_i\}$, $\{f_j\}$. Действительно, возьмем отображение $\mathfrak{g} \otimes_k \mathfrak{g} \xrightarrow{\Phi} \operatorname{Hom}_k(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$, при котором $\Phi(x \otimes y) = \varphi$, где $\varphi(z) = B(y, z)x$. Используя невырожденность формы $B(x, y)$, легко показать, что отображение $\Phi$ — изоморфизм и даже изоморфизм $\mathfrak{g}$-модулей (последнее проверяется прямым вычислением). Нетрудно усмотреть, что при этом отображении элемент $\sum e_i \otimes f_i$ переходит в тождественный гомоморфизм $\mathrm{id}_\mathfrak{g}$. Таким образом, $b$ есть образ элемента $\mathrm{id}_\mathfrak{g}$ при композиции $\mathfrak{g}$-гомоморфизмов

$$\operatorname{Hom}_k(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \xrightarrow[\sim]{\Phi^{-1}} \mathfrak{g} \otimes_k \mathfrak{g}^* \xrightarrow{B} \mathfrak{g} \otimes_k \mathfrak{g} \to U\mathfrak{g}.$$

Поскольку элемент $\mathrm{id}_\mathfrak{g}$ аннулируется алгеброй $\mathfrak{g}$, элемент $b$ обладает тем же свойством, т. е. лежит в центре $U\mathfrak{g}$ (так как $\mathfrak{g}$ порождает алгебру $U\mathfrak{g}$). Элемент $b$ мы будем называть *элементом Казимира*, соответствующим форме $B$.

Шаг 3. Предположим, что мы находимся в условиях первого шага и что $b$ — элемент Казимира, соответствующий форме $B_\rho$. Тогда элемент $b$ определяет эндоморфизм $\mathfrak{g}$-модуля $V$ и $\operatorname{Tr}_V(b) = \dim \mathfrak{g}$. Действительно, $b$ коммутирует с действием алгебры $\mathfrak{g}$ на $V$, поскольку $b$ лежит в центре алгебры $U\mathfrak{g}$.

Далее, имеем

$$\mathrm{Tr}_V(b) = \sum \mathrm{Tr}_V(\rho(e_i)\rho(f_i)) = \sum B_\rho(e_i, f_i) = \dim \mathfrak{g}.$$

Шаг 4. Пусть на предыдущем шаге $\mathfrak{g}$-модуль $V$ прост. Тогда $\rho(b)$ — автоморфизм модуля $V$, если только алгебра $\mathfrak{g}$ ненулевая (в случае $\mathfrak{g}=0$ пространство $V$ одномерно). В самом деле, по лемме Шура эндоморфизм простого модуля либо нулевой, либо является автоморфизмом, но $\rho(b)$ — ненулевой оператор (при $\mathfrak{g} \neq (0)$), так как $\mathrm{Tr}_V(\rho(b)) = \dim \mathfrak{g}$, а поле $k$ имеет характеристику нуль.

Шаг 5. Пусть $0 \to V \to W \to k \to 0$ — точная последовательность $\mathfrak{g}$-модулей, причем на модуле $k$ алгебра $\mathfrak{g}$ действует тривиально (ничего другого, впрочем, и быть не может, так как в силу полупростоты $\mathfrak{g} = D\mathfrak{g}$). Мы хотим доказать, что эта последовательность расщепляется, иными словами, что в пространстве $W$ существует одномерное подпространство, инвариантное относительно $\mathfrak{g}$ и дополнительное к пространству $V$, т. е. отображающееся на $k$. Этот частный случай нашей теоремы, так называемый *принцип подъема инвариантов*, является центральным, поскольку общий случай сводится к нему использованием модулей гомоморфизмов (см. ниже). Мы расчленим пятый шаг на три подшага.

Шаг 5а. Редукция к случаю, когда $V$ — простой $\mathfrak{g}$-модуль. Эта редукция проводится индукцией по размерности $V$. Пусть $V_1 \subset V$, но $V_1 \neq (0)$ и $V_1 \neq V$. Рассмотрим точную последовательность $0 \to V/V_1 \to W/V_1 \to k \to 0$; по предположению индукции она расщепляется, т. е. в пространстве $W/V_1$ найдется прямая $V'/V_1$, дополнительная к $V/V_1$. Снова используя предположение индукции и вторую точную последовательность $0 \to V_1 \to V' \to k \to 0$, получаем существование дополнительной прямой к $V_1$ в пространстве $V'$, которая по построению будет также дополнять и $V$ в пространстве $W$.

Шаг 5б. Редукция к случаю точного представления ($\operatorname{Ker}\rho=(0)$). Пусть $\mathfrak{a}=\operatorname{Ker}(\mathfrak{g}\to\operatorname{End}V)$. Для $x\in\mathfrak{a}$, очевидно, имеем $xW\subset V$ и $xV=(0)$, так что $D\mathfrak{a}$ аннулирует $W$. Но $D\mathfrak{a}=\mathfrak{a}$, потому что идеал полупростой алгебры тоже полупрост. Следовательно, в пространстве $W$ можно определить представление факторалгебры $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$, которое является по построению точным в пространстве $V$. При этом полупростота сохраняется, поскольку факторалгебра полупростой алгебры полупроста.

Шаг 5в. Пусть теперь $V$ — простой $\mathfrak{g}$-модуль и отображение $\rho\colon \mathfrak{g}\to\operatorname{End}V$ инъективно. Ассоциированная билинейная форма $B_\rho$ невырождена (шаг 1). Пусть $b\in U\mathfrak{g}$ — соответствующий ей элемент Казимира, который дает нам некоторый $\mathfrak{g}$-эндоморфизм пространства $W$. Заметим, что $bW\subset V$, так как $b$ действует тривиально на $W/V\simeq k$. Если $\mathfrak{g}=0$, то наша теорема очевидна. В противном случае (см. шаг 4) $bV=V$, откуда следует, что $\operatorname{Ker}(b\colon W\to W)$ и есть искомая прямая в пространстве $W$, дополнительная к $V$ и инвариантная относительно $\mathfrak{g}$.

Шаг 6. Общий случай. Пусть $0\to E_1\to E\to E_2\to 0$ — точная последовательность $\mathfrak{g}$-модулей. Мы должны показать, что она расщепляется. Обозначим через $W$ подмодуль модуля $\operatorname{Hom}_k(E, E_1)$, состоящий из гомоморфизмов, ограничение которых на $E_1$ является гомотетией (т. е. умножением на элемент поля); соответственно через $V$ обозначим множество гомоморфизмов, ограничение которых на $E_1$ равно нулю. В результате мы получаем точную последовательность

$$0\to V\to W\to k\to 0$$

(если только модуль $E_1$ ненулевой, но этот случай тривиален). Применяя утверждение, доказанное на шаге 5, мы находим элемент $\varphi\in W$, инвариантный относительно $\mathfrak{g}$ и отображающийся в единицу поля $k$. Иными словами, существует $\mathfrak{g}$-гомоморфизм $\varphi\colon E\to E_1$, такой, что $\varphi\,|\,E_1=\operatorname{id}_{E_1}$. Теорема доказана.

С точки зрения гомологической алгебры шаг 5 является доказательством того, что $\mathrm{Ext}^1_U(k, U)=0$, где $U=U\mathfrak{g}$. Мы сделали это на шаге 5в, вычислив действие центрального элемента $b$ на $\mathrm{Ext}^1_U$ двумя способами. Поскольку $b$ аннулирует $k$, он аннулирует $\mathrm{Ext}^1_U$, и поскольку $b$ — автоморфизм модуля $V$, он дает автоморфизм пространства $\mathrm{Ext}^1_U$. Следовательно, $\mathrm{Ext}^1_U=(0)$. Вообще, можно определить группы $H^r(\mathfrak{g}, V)=\mathrm{Ext}^r_V(k, V)$; они называются *группами когомологий* алгебры Ли $\mathfrak{g}$. На шаге 6 мы фактически доказали, что $\mathrm{Ext}^1_U(E_2, E_1)=H^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_k(E_2, E_1))=(0)$.

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростой идеал в некоторой объемлющей алгебре Ли $\mathfrak{h}$. Существует единственный идеал $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{h}$, такой, что $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{a}$ (прямая сумма).*

Доказательство. Поскольку алгебра $\mathfrak{h}$ (как $\mathfrak{g}$-модуль) вполне приводима, существует $k$-подпространство $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{h}$, дополнительное к $\mathfrak{g}$ и устойчивое относительно $\mathrm{ad}\,x$ $(x\in\mathfrak{g})$. Утверждается, что $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}]=(0)$. Действительно, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}]\subset\mathfrak{g}$ и $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}]\subset\mathfrak{a}$, потому что $\mathfrak{g}$ — идеал и $\mathfrak{a}$ устойчив относительно $\mathfrak{g}$, следовательно, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}]\subset\mathfrak{g}\cap\mathfrak{a}=(0)$. Отсюда вытекает, что $\mathfrak{a}$ состоит *в точности* из тех элементов $y\in\mathfrak{h}$, для которых $[\mathfrak{g}, y]=0$. В самом деле, $y=x+a$, где $x\in\mathfrak{g}$ и $a\in\mathfrak{a}$, и, значит, $[\mathfrak{g}, y]=[\mathfrak{g}, x]$, но равенство $[\mathfrak{g}, x]=(0)$ влечет равенство $x=0$, так как центр алгебры $\mathfrak{g}$ нулевой. Из сказанного ясно, что $\mathfrak{a}$ определено единственным образом (даже как $\mathfrak{g}$-подмодуль) и, кроме того, является идеалом в $\mathfrak{h}$, будучи аннулятором $\mathfrak{h}$-модуля $\mathfrak{g}$.

Следствие 2. *Если $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли, то каждое ее дифференцирование имеет вид* $\mathrm{ad}\,x$, *где* $x\in\mathfrak{g}$.

Доказательство. Положим $\mathfrak{h}=\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ и применим предыдущее следствие. Заметим при этом, что $\mathfrak{g}$ является идеалом в алгебре $\mathfrak{h}$, поскольку

$[D, \operatorname{ad} x] = \operatorname{ad}(Dx)$ для любых $D \in \operatorname{Der}(\mathfrak{g})$ и $x \in \mathfrak{g}$. Итак, $\operatorname{Der}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a}$, где идеал $\mathfrak{a}$ состоит из всех дифференцирований, коммутирующих с $\operatorname{ad} \mathfrak{g}$. Покажем, что $\mathfrak{a} = (0)$. Пусть $D \in \mathfrak{a}$, тогда $\operatorname{ad}(Dx) = [D, \operatorname{ad} x] = 0$ и, следовательно, $Dx = 0$ (так как $\mathfrak{g}$ — алгебра с нулевым центром). Значит, $\mathfrak{a} = (0)$.

## § 4. Теорема Леви

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли.

Теорема 1 (Леви). *Пусть $\varphi$ — сюръективный гомоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$ на полупростую алгебру Ли $\mathfrak{s}$. Тогда существует гомоморфизм* $\varepsilon$: $\mathfrak{s} \to \mathfrak{g}$, *такой, что* $\varphi \circ \varepsilon = \operatorname{id}_{\mathfrak{s}}$.

Доказательство. Будем считать, что $\mathfrak{s} = \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$, где $\mathfrak{a} = \operatorname{Ker} \varphi$.

*Основной частный случай* нашей теоремы — это случай, когда идеал $\mathfrak{a}$ абелев и является простым $\mathfrak{g}$- (или $\mathfrak{s}$-) модулем с нетривиальным действием.

Первый шаг доказательства будет состоять в сведении теоремы к этому основному случаю. Допустим, что в $\mathfrak{g}$ найдется ненулевой идеал $\mathfrak{a}_1$, содержащийся в $\mathfrak{a}$. Рассмотрим сюръективный гомоморфизм $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}_1 \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a} = \mathfrak{s}$ с ядром $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}_1$. Предположим, что для такого гомоморфизма наша теорема верна, т. е. существует подалгебра $\mathfrak{g}_1/\mathfrak{a}_1 \simeq \mathfrak{s}$, дополнительная к $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}_1$ в фактор-алгебре $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}_1$. Мы получаем еще один сюръективный гомоморфизм $\mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{s}$ с ядром $\mathfrak{a}_1$. Предположим, что и для него теорема справедлива, т. е. в алгебре $\mathfrak{g}_1$ существует подалгебра $\mathfrak{s}' \simeq \mathfrak{s}$, дополнительная к $\mathfrak{a}_1$. Несложная проверка показывает, что алгебра $\mathfrak{s}'$ будет искомым дополнением к идеалу $\mathfrak{a}$ в алгебре $\mathfrak{g}$. Поэтому (учитывая, что $\dim \mathfrak{a}_1 < \dim \mathfrak{a}$ и $\dim \mathfrak{a}/\mathfrak{a}_1 < \dim \mathfrak{a}$) мы можем, проводя индукцию по $\dim \mathfrak{a}$, считать идеал $\mathfrak{a}$ простым $\mathfrak{g}$-модулем.

Далее, радикал $\mathfrak{r}$ алгебры $\mathfrak{g}$ лежит в идеале $\mathfrak{a}$, так как $\varphi(\mathfrak{r})$ — разрешимый идеал в $\mathfrak{s}$ и, следовательно, $\varphi(\mathfrak{r}) = 0$. Но идеал $\mathfrak{a}$ прост, поэтому могут представиться два случая: $\mathfrak{r} = 0$ или $\mathfrak{r} = \mathfrak{a}$. Если $\mathfrak{r} = 0$, то $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра, и утверждение нашей теоремы вытекает из теоремы 2.2. Если $\mathfrak{r}=\mathfrak{a}$, то $\mathfrak{a}$ — разрешимый идеал, и потому $\mathfrak{a} \neq [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$. В этом случае из простоты идеала $\mathfrak{a}$ следует, что $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]=0$, т. е. $\mathfrak{a}$ — абелев идеал. Если $\mathfrak{g}$ действует тривиально на $\mathfrak{a}$, то $\mathfrak{a}$ лежит в центре алгебры $\mathfrak{g}$. Поэтому присоединенное представление алгебры $\mathfrak{g}$ можно заменить действием факторалгебры $\mathfrak{g}/\mathfrak{a} \simeq \mathfrak{s}$ на алгебре $\mathfrak{g}$. Таким образом, алгебра $\mathfrak{g}$ оказывается вполне приводимым $\mathfrak{s}$-модулем (теорема Вейля); в частности, в этой алгебре найдется идеал, дополнительный к $\mathfrak{a}$.

Осталось разобрать *основной случай*. Итак, пусть $\mathfrak{a}$ — абелев идеал и простой нетривиальный $\mathfrak{s}$-модуль.

Если бы в нашем распоряжении была теория когомологий и если бы мы знали, что расширения алгебры $\mathfrak{s}$ с помощью идеала $\mathfrak{a}$ классифицируются элементами группы $H^2(\mathfrak{s}, \mathfrak{a}) = \mathrm{Ext}_{U_\mathfrak{s}}(k, \mathfrak{a})$, то нам оставалось бы только провести обычное рассуждение с использованием элемента Казимира, доказывающее тривиальность группы $\mathrm{Ext}_{U_s}$. Однако такой теории у нас нет, и мы прибегнем к следующему способу, предложенному Бурбаки.

Лемма. *Пусть дан некоторый $\mathfrak{g}$-модуль $W$ и в нем элемент $w \in W$, удовлетворяющий двум условиям:*

а) *отображение $a \mapsto aw$ есть биекция $\mathfrak{a} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{a}w$;*

б) $\mathfrak{g}w = \mathfrak{a}w$.

*Обозначим через $\mathfrak{i}_w$ множество $\{x \in \mathfrak{g} \mid xw=0\}$. Тогда $\mathfrak{i}_w$ — подалгебра Ли в $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{i}_w$ (прямая сумма векторных пространств).*

Эта лемма совершенно тривиальна. Наша задача состоит в том, чтобы построить подходящий элемент $w$.

Положим $W = \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ и обычным образом определим на этом пространстве структуру $\mathfrak{g}$-модуля посредством представления

$$\sigma\colon\ \mathfrak{g} \to \mathrm{End}\, W = \mathrm{End}\,\mathrm{End}\,\mathfrak{g},$$

где

$$\sigma(x)\varphi = \mathrm{ad}\, x \circ \varphi - \varphi \circ \mathrm{ad}\, x = [\mathrm{ad}\, x, \varphi].$$

Рассмотрим следующие подпространства $P \subset Q \subset R \subset W$:

$$P = \{\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, a \mid a \in \mathfrak{a}\},$$
$$Q = \{\varphi \in W \mid \varphi(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{a} \text{ и } \varphi(\mathfrak{a}) = (0)\},$$
$$R = \{\varphi \in W \mid \varphi(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{a} \text{ и } \varphi \mid \mathfrak{a} - \text{гомотетия}\}.$$

Читатель без труда проверит, что $P$, $Q$ и $R$ являются на самом деле $\mathfrak{g}$-подмодулями. Таким образом, мы приходим к точной последовательности $\mathfrak{g}$-модулей

$$0 \to Q \xrightarrow{i} R \xrightarrow{\tau} k \to 0,$$

где $i$ — вложение, а $\tau$ сопоставляет каждому элементу $r \in R$ скаляр, оператором умножения на который является $r$. Если $x \in \mathfrak{a}$ и $\varphi \in R$, то

$$\sigma(x)\varphi = \mathrm{ad}\, x \circ \varphi - \varphi \circ \mathrm{ad}\, x = -\lambda\, \mathrm{ad}\, x,$$

где $\lambda = \tau(\varphi) \in k$. Поэтому $\sigma(x) R \subset P$ (при $x \in \mathfrak{a}$), и точную последовательность

$$0 \to Q/P \xrightarrow{i} R/P \xrightarrow{\bar{\tau}} k \to 0$$

можно рассматривать как точную последовательность $\mathfrak{s}$-модулей, где $\mathfrak{s} = \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$. Согласно „принципу подъема инвариантов“, найдется элемент $\bar{w} \in R/P$, инвариантный относительно $\mathfrak{s}$ и такой, что $\bar{\tau}(\bar{w}) = 1$. Пусть $w$ — какой-нибудь прообраз $\bar{w}$ в $R$. Мы утверждаем, что $w$ удовлетворяет условиям нашей леммы.

а) Пусть $a \in \mathfrak{a}$. Тогда $\sigma(a) w = -\mathrm{ad}\, a$. Если $\sigma(a) w = 0$, то $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, a = 0$, т. е. $[a, x] = 0$ для всех $x \in \mathfrak{g}$. Отсюда уже следует, что $a = 0$, поскольку $\mathfrak{a}$ — простой идеал и алгебра $\mathfrak{g}$ действует на нем нетривиально.

б) Пусть $x \in \mathfrak{g}$. Мы должны показать, что $\sigma(x) w$ можно представить в виде $\sigma(a) w$ с $a \in \mathfrak{a}$. Так как $\sigma(a) w = -\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, a$, нам надо лишь установить, что $\sigma(x) w \in P$. Но последнее включение эквивалентно инвариантности элемента $\bar{w}$.

Следствие 1. *Каждая алгебра Ли есть полупрямое произведение радикала $\mathfrak{r}$ и полупростой алгебры.*

Достаточно применить теорему 1 к гомоморфизму $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{r}$.

Замечание. К этому следствию примыкает следующий результат, принадлежащий Мальцеву. Если $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ — две подалгебры в $\mathfrak{g}$, такие, что $\mathfrak{r} \oplus \mathfrak{g}_i = \mathfrak{g}$ ($i = 1, 2$), то существует автоморфизм $\sigma$ алгебры $\mathfrak{g}$, переводящий $\mathfrak{g}_1$ в $\mathfrak{g}_2$ (причем $\sigma$ можно выбрать в форме $e^{\operatorname{ad} a}$, где $a \in \mathfrak{r}$ и преобразование $\operatorname{ad} a$ нильпотентно). В случае когда радикал $\mathfrak{r}$ абелев, доказательство этого факта сводится к доказательству тривиальности группы $H^1(\mathfrak{g}/\mathfrak{r}, \mathfrak{r})$; общий случай получается „отвинчиванием“ (подробности см. Бурбаки [1]).

Пусть алгебра Ли $\mathfrak{g}$ обладает тем свойством, что $\mathfrak{g} \neq D\mathfrak{g}$. Если подпространство $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ коразмерности 1 содержит $D\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{a}$ является идеалом в $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus kx$ для любого $x \notin \mathfrak{a}$. Поскольку прямая $kx$ автоматически является подалгеброй Ли, мы получаем

Следствие 2. *Всякая ненулевая алгебра Ли (если только она не проста и не одномерна) разлагается в полупрямое произведение двух алгебр Ли строго меньшей размерности.*

## § 5. Полная приводимость (продолжение)

Следующая теорема дает критерий полной приводимости представления алгебры Ли.

Теорема 1. *Пусть поле $k$ алгебраически замкнуто, $V$ — векторное пространство над $k$ и $\mathfrak{g}$ — некоторая подалгебра Ли в алгебре* $\operatorname{End} V$. *Пространство $V$ вполне приводимо как $\mathfrak{g}$-модуль тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

(а) *алгебра $\mathfrak{g}$ разлагается в прямое произведение $\mathfrak{a} \times \mathfrak{s}$, где идеал $\mathfrak{a}$ абелев, а подалгебра $\mathfrak{s}$ полупроста;*

(б) *в надлежащем базисе элементы идеала $\mathfrak{a}$ представляются диагональными матрицами.*

Замечания. 1. Пусть поле $k$ не является алгебраически замкнутым. Утверждение останется справедливым, если предположить, что элементы идеала $\mathfrak{a}$ полупросты (т. е. диагонализуемы над алгебраическим замыканием $\bar{k}$).

2. Неопределенность, содержащаяся в условии (б), только кажущаяся. Если каждый элемент из идеала $\mathfrak{a}$ в отдельности представляется диагональной матрицей в некотором базисе, то существует единый базис, в котором все элементы из $\mathfrak{a}$ диагональны, поскольку $\mathfrak{a}$ — коммутативный идеал.

Доказательство. Пусть $V$ — вполне приводимый $\mathfrak{g}$-модуль, $\mathfrak{r}$ — радикал алгебры $\mathfrak{g}$. Согласно теореме Ли (гл. $V$, § 5), в пространстве $V$ существует одномерное подпространство, инвариантное относительно $\mathfrak{r}$ (мы исключаем тривиальный случай $V=(0)$), или, что то же самое, существует линейная форма $\chi\colon \mathfrak{r}\to k$, такая, что собственное подпространство

$$V_\chi=\{v\in V \mid xv=\chi(x)\,v \text{ для всех } x\in\mathfrak{r}\}$$

отлично от нуля. По основной лемме, использованной при доказательстве теоремы Ли (см. выше), пространство $V_\chi$ инвариантно относительно $\mathfrak{g}$. Ввиду полной приводимости имеем $V=V_\chi\oplus V'$, где $V'$ также является $\mathfrak{g}$-модулем. Применяя аналогичное рассуждение к $V'$ и т. д., мы получаем

$$V=V_{\chi_1}\oplus V_{\chi_2}\oplus\ldots\oplus V_{\chi_m} \text{ (прямая сумма)} \qquad (*)$$

для некоторого набора характеров $\chi_i$ радикала $\mathfrak{r}$. Из этого разложения видно, что $\mathfrak{r}$ действует диагонально, коммутируя с действием алгебры $\mathfrak{g}$. Таким образом, $\mathfrak{r}$ содержится в центре и, следовательно, совпадает с ним, т. е. $\mathfrak{a}=\mathfrak{r}$. Для того чтобы получить окончательное представление $\mathfrak{g}=\mathfrak{a}\times\mathfrak{s}$, можно сослаться на теорему Леви, а можно и непосредственно использовать присоединенное представление.

Обратно, пусть условия (а) и (б) выполнены. Согласно последнему условию, векторное пространство $V$ имеет разложение вида (*), где $\chi_i$ — характеры идеала $\mathfrak{a}$. Но поскольку $\mathfrak{a}$ — центр алгебры $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{s}$, собственные подпространства $V_{\chi_i}$ инвариантны относительно $\mathfrak{g}$, а в каждом пространстве такого вида любой $\mathfrak{s}$-подмодуль будет также и $(\mathfrak{a} \times \mathfrak{s})$-подмодулем. Остается применить теорему Вейля.

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{s}$, где идеал $\mathfrak{a}$ абелев и подалгебра $\mathfrak{s}$ полупроста. $\mathfrak{g}$-модуль $W$ полупрост тогда и только тогда, когда действие идеала $\mathfrak{a}$ на $W$ представляется диагональными матрицами.*

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{g}$ — произвольная алгебра Ли и $V$ — некоторый $\mathfrak{g}$-модуль. Если модуль $V$ вполне приводим, то вполне приводимы и все тензорные модули*

$$V_{p,q} = \otimes^p V \otimes^q V^*.$$

Действительно, образ $\bar{\mathfrak{g}}$ алгебры $\mathfrak{g}$ в $\operatorname{End} V$ имеет вид $\mathfrak{a} \times \mathfrak{s}$, где идеал $\mathfrak{a}$ действует диагонально на $V$, а следовательно, и на каждом модуле $V_{p,q}$.

Аналогичным рассуждением доказывается

Следствие 3. *Тензорное произведение вполне приводимых $\mathfrak{g}$-модулей вполне приводимо.*

Теперь мы можем доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть $V$ — конечномерное векторное пространство над $k$ и $\mathfrak{g} \subset \operatorname{End} V$ — некоторая алгебра эндоморфизмов. Если алгебра $\mathfrak{g}$ полупроста, то она однозначно определяется своими тензорными инвариантами (другими словами, существует набор элементов $v_\alpha \in V_{p_\alpha, q_\alpha}$, такой, что*

$$\mathfrak{g} = \{x \in \operatorname{End} V \mid x v_\alpha = 0 \text{ для всех } \alpha\}).$$

Доказательство. Стандартные соображения, использующие линейность, позволяют считать поле $k$ алгебраически замкнутым. Положим

$$V'_{p,q} = \{v \in V_{p,q} \mid \mathfrak{g} v = 0\}.$$

Обозначим через $\mathfrak{h}$ множество всех $x \in \operatorname{End} V$, аннулирующих каждое пространство $V'_{p,q}$. Ясно, что

$\mathfrak{g} \subset \mathfrak{h} \subset \operatorname{End} V$. Мы должны доказать, что $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$. Доказательство проведем в четыре шага.

Шаг 1. Всякий линейный $\mathfrak{g}$-гомоморфизм $u$: $V_{p,p} \to V_{r,s}$ является в то же время $\mathfrak{h}$-гомоморфизмом. Действительно, $\operatorname{Hom}_k(V_{p,q}, V_{r,s})$ канонически отождествляется с $V_{q+r,\,p+s}$ (как $\operatorname{End} V$-модуль). Но свойство линейного отображения $u$ быть $\mathfrak{h}$-гомоморфизмом равносильно тому факту, что $u$ аннулируется алгеброй $\mathfrak{h}$, или, что то же самое, алгеброй $\mathfrak{g}$, так как $\operatorname{Hom}_k(V_{p,q}, V_{r,s}) \simeq V_{q+r,\,p+s}$.

Шаг 2. Подпространство $W \subset V_{p,q}$, инвариантное относительно $\mathfrak{g}$, инвариантно также относительно $\mathfrak{h}$. В самом деле, ввиду полной приводимости $V_{p,q}$ над $\mathfrak{g}$ имеется эндоморфизм $\mathfrak{g}$-модулей $u$: $V_{p,q} \to V_{p,q}$, проектирующий $V_{p,q}$ на $W$. Как мы уже знаем, $u$ является $\mathfrak{h}$-гомоморфизмом, поэтому образ $W$ эндоморфизма $u$ инвариантен относительно $\mathfrak{h}$.

Шаг 3. Имеем $\mathfrak{h} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{c}$, где $\mathfrak{c}$ — центр алгебры $\mathfrak{h}$. Действительно, полагая в предыдущем шаге $\mathfrak{g} = W$ и $p = q = 1$ и используя отождествление $V_{1,1} = \operatorname{End} V$, заключаем, что $\mathfrak{g}$ есть идеал в $\mathfrak{h}$. По следствию 1 и теореме Вейля (§ 3), имеет место разложение $\mathfrak{h} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{c}$, где $\mathfrak{c}$ — идеал алгебры $\mathfrak{h}$, перестановочный с $\mathfrak{g}$. Отсюда (см. шаг 1) вытекает, что $\mathfrak{c}$ коммутирует с $\mathfrak{h}$, т. е. $\mathfrak{c}$ лежит в центре $\mathfrak{h}$ (и тем самым с ним совпадает).

Шаг 4. Пусть $W$ — неприводимый $\mathfrak{g}$-подмодуль пространства $V$. Ясно, что $W$ инвариантно относительно $\mathfrak{c}$ (шаг 2), и, кроме того (лемма Шура), элементы центра $\mathfrak{c}$, ограниченные на $W$, являются гомотетиями. Мы покажем, что это нулевые гомотетии, а так как $V$ есть прямая сумма неприводимых пространств, тем самым мы докажем искомое равенство $\mathfrak{c} = (0)$. Поскольку характеристика основного поля равна нулю, достаточно показать, что след нашей гомотетии нулевой.

Лемма 3. *Пусть* $\mathfrak{g}$ — *алгебра Ли и* $W$ — *некоторый* $\mathfrak{g}$-*модуль размерности* $m$. *Тогда* $m$-*я внешняя степень* $\overset{m}{\wedge} W$, *рассматриваемая как факторпространство пространства* $\overset{m}{\otimes} W$ (*или как его подпространство, если характеристика поля равна* 0), *является* $\mathfrak{g}$-*модулем, причем для каждого* $x \in \mathfrak{g}_m$ *соответствующее преобразование одномерного пространства* $\overset{m}{\wedge} W$ *есть умножение на скаляр* $\mathrm{Tr}_W(x)$.

Доказательство леммы мы предоставляем читателю в качестве упражнения. Считая лемму доказанной, рассуждаем следующим образом. Раз алгебра $\mathfrak{g}$ полупроста, мы можем считать, что пространство $\overset{m}{\wedge} W$ вложено как $\mathfrak{g}$-подмодуль в $\overset{m}{\otimes} W$, т. е. $\overset{m}{\wedge} W \subset \overset{m}{\otimes} W \subset \overset{m}{\otimes} V = V_{m,0}$. Далее (снова в силу полупростоты), алгебра $\mathfrak{g}$ действует тривиально на любом одномерном модуле ($D\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$!), так что алгебра $\mathfrak{g}$ аннулирует $\overset{m}{\wedge} W$. Следовательно, по определению алгебры $\mathfrak{h}$ все элементы алгебры $\mathfrak{c}$ аннулируют $\overset{m}{\wedge} W$, и, следовательно, $\mathrm{Tr}_W(x) = 0$ для всех $x \in \mathfrak{c}$. Теорема доказана.

Следствие 4. *Рассмотрим полупростую алгебру* $\mathfrak{g} \subset \mathrm{End}\, V$. *Пусть* $x \in \mathfrak{g}$ *и* $x = n + s$ — *каноническое разложение оператора* $x$ *на полупростую и нильпотентную составляющие, причем* $[n, s] = 0$ (*см.* гл. V). *Тогда*

а) $n$ *и* $s$ *принадлежат* $\mathfrak{g}$;

б) $\varphi(s)$ *принадлежит* $\mathfrak{g}$ *для любого* $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}}(k, k)$.

Следует лишь заметить, что любой элемент из $V_{p,q}$, аннулируемый эндоморфизмом $x \in \mathfrak{g}$, аннулируется также $n$, $s$ и $\varphi(s)$.

Определение 5. Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли. Элемент $x \in \mathfrak{g}$ называется *полупростым* (соответственно *нильпотентным*), если преобразование $\operatorname{ad} x$ полупросто (соответственно нильпотентно).

Теорема 6. *Если алгебра $\mathfrak{g}$ полупроста, то любой элемент $x \in \mathfrak{g}$ однозначно представляется в виде $x = n + s$, где $s$, $n \in \mathfrak{g}$, причем элемент $n$ нильпотентен, $s$ полупрост и $[n, s] = 0$.*

Для доказательства достаточно применить следствие 4 к присоединенному представлению ($V = \mathfrak{g}$).

Теорема 7. *Если $\varphi$: $\mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ — гомоморфизм полупростых алгебр Ли, то образ полупростого (соответственно нильпотентного) элемента также полупрост (соответственно нильпотентен).*

Доказательство. Заметим прежде всего, что $\mathfrak{g}_2$ можно с помощью $\varphi$ наделить структурой $\mathfrak{g}_1$-модуля. Пусть $V$ — прямая сумма $\mathfrak{g}_1$-модулей $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$. Применяя к $V$ следствие 4, мы видим, что любой элемент $x \in \mathfrak{g}$ записывается в виде $x = n + s$, причем $n \in \mathfrak{g}_1$, $s \in \mathfrak{g}_1$, $[n, s] = 0$, $\operatorname{ad} n$ и $\operatorname{ad}(\varphi(n))$ нильпотентны, $\operatorname{ad}(s)$ и $\operatorname{ad}(\varphi(s))$ полупросты. Если элемент $x$ полупрост (соответственно нильпотентен), то $n = 0$ (соответственно $s = 0$), и, следовательно, $\varphi(x)$ нильпотентен (соответственно полупрост).

## § 6. Связь с компактными группами Ли над полями R и C

Теорема 1. *Связная компактная комплексная группа Ли $G$ является комплексным тором, т. е. изоморфна группе вида $\mathbf{C}^n/\Gamma$, где $\Gamma$ — дискретная подгруппа в $\mathbf{C}^n$ ранга $2n$.*

Доказательство. По принципу максимума на группе $G$ не существует аналитических функций, отличных от констант. Поэтому любое аналитическое отображение $G$ в $\operatorname{End}_{\mathbf{C}} \mathfrak{g} \simeq \mathbf{C}^{n^2}$, где $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы $G$ и $n = \dim \mathfrak{g}$, постоянно. Внутренний автоморфизм $x \mapsto gxg^{-1}$, задаваемый элементом $g \in G$, индуцирует некоторый автоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$, обозначаемый $\operatorname{Ad} g$. Отображение

$$g \mapsto \operatorname{Ad} g \in \mathbf{C}^{n^2}$$

аналитично и, следовательно, постоянно, т. е. $\mathrm{Ad}\, g = \mathrm{Ad}\, 1 = 1$ для всех $g \in G$. Если элемент $x \in \mathfrak{g}$ находится в достаточно малой окрестности нуля, то имеет место равенство

$$g(\exp x)\, g^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}\, g(x)).$$

Поскольку экспоненциальное отображение является гомеоморфизмом окрестности нуля в $\mathfrak{g}$ на окрестность единицы в $G$, заключаем, что группа $G$ локально абелева, а потому и просто абелева, поскольку она связна. Таким образом, $\mathbf{C}^n$ есть универсальное накрытие группы $G$, и $G \simeq \mathbf{C}^n/\Gamma$, где $\Gamma$ — дискретная подгруппа и притом подгруппа максимального ранга $2n$ ввиду компактности $G$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть $G$ — вещественная компактная группа Ли и $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Тогда $\mathfrak{g} = \mathfrak{c} \times \mathfrak{s}$, где $\mathfrak{c}$ — абелева, а $\mathfrak{s}$ — полупростая алгебра с отрицательно определенной формой Киллинга.*

Справедливо также и обратное утверждение:

Теорема 3. *Если вещественная алгебра Ли допускает представление в виде $\mathfrak{g} = \mathfrak{c} \times \mathfrak{s}$, где $\mathfrak{c}$ — абелева, а $\mathfrak{s}$ — полупростая алгебра с отрицательно определенной формой Киллинга, то существует вещественная компактная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. При этом если $\mathfrak{c} = 0$, то любая связная группа $G$ с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ компактна.*

Доказательство теоремы 2. Как мы уже видели при доказательстве теоремы 1, группа $G$ действует (посредством Ad) на алгебре $\mathfrak{g}$. В силу компактности $G$ в пространстве $\mathfrak{g}$ можно ввести евклидову метрику (положительно определенную квадратичную форму), инвариантную относительно $G$ (и тем самым относительно $\mathfrak{g}$). Таким образом, алгебра $\mathfrak{g}$ вполне приводима как $\mathfrak{g}$-модуль. Поэтому она разлагается в прямую сумму минимальных ненулевых идеалов $\mathfrak{a}_i$ и, значит, изоморфна прямому произведению алгебр $\mathfrak{a}_i$. Каждый из идеалов $\mathfrak{a}_i$ либо одномерен (абелев), либо прост, так что $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{c} \times \mathfrak{s}$, где алгебра $\mathfrak{c}$ абелева, а алгебра $\mathfrak{s}$ полупроста. Остается показать, что форма Киллинга алгебры $\mathfrak{s}$ отрицательно определена. Обозначим через $(x, y)$ скалярное произведение на $\mathfrak{g}$ и положим $u = \operatorname{ad}_{\mathfrak{s}} x$, где $x \in \mathfrak{s}$. Ввиду инвариантности нашей евклидовой структуры имеем $(uy, z) + (y, uz) = 0$ для любых $y, z \in \mathfrak{s}$. При $z = uy$ получаем $(y, u^2y) = -(uy, uy)$. Выберем в пространстве $\mathfrak{s}$ ортонормальный базис $y_i$. Тогда

$$\operatorname{Tr}_{\mathfrak{s}}(u^2) = \sum_i (y_i, u^2 y_i) = -\sum_i |uy_i|^2.$$

Если $x \neq 0$, то $u = \operatorname{ad} x \neq 0$ (так как центр алгебры $\mathfrak{s}$ нулевой) и $\operatorname{Tr}_{\mathfrak{s}}(u^2) < 0$, что и доказывает отрицательную определенность формы Киллинга алгебры $\mathfrak{s}$.

Доказательство теоремы 3. В качестве компактной вещественной группы Ли для алгебры $\mathfrak{c}$ можно взять вещественный тор $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^n$. Для того чтобы найти соответствующую группу для алгебры $\mathfrak{s}$, рассмотрим группу $\operatorname{Aut} \mathfrak{s}$ автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{s}$. Ясно, что $\operatorname{Aut} \mathfrak{s}$ — замкнутая подгруппа ортогональной группы линейных преобразований пространства $\mathfrak{s}$, оставляющих инвариантной форму Киллинга. Поскольку эта форма строго определена, последняя группа (а вместе с ней и группа $\operatorname{Aut} \mathfrak{s}$) компактна. Алгеброй Ли группы $\operatorname{Aut} \mathfrak{s}$, как легко усмотреть, является алгебра дифференцирований $\operatorname{Der}(\mathfrak{s})$, которая изоморфна алгебре $\mathfrak{s}$ по следствию 2 теоремы Вейля (§ 3). Таким образом, первая часть теоремы доказана.

Пусть теперь $\mathfrak{c} = 0$ (т. е. $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра) и $G$ — связная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Имеет место канонический гомоморфизм

$$\operatorname{Ad}: G \to \operatorname{Aut} \mathfrak{g}.$$

Как мы уже видели, $\operatorname{Aut} \mathfrak{g}$ — компактная группа Ли с той же алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, поэтому отображение Ad является накрытием. Очевидно, $H = \operatorname{Im}(\operatorname{Ad})$ — связная компонента группы $\operatorname{Aut} \mathfrak{g}$, причем $H = G/Z$, где $Z = \operatorname{Ker}(\operatorname{Ad})$ — дискретная группа. Заметим теперь, что группа $H$ компактна и коммутант $(H, H)$ всюду плотен в $H$ — это вытекает (по теории Ли) из равенства $\mathfrak{g}=[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Следовательно, группа $G$ компактна (см. Бурбаки [1], Ch. VII, § 3, Pr. 5)[1]).

## УПРАЖНЕНИЯ

**1.** Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{r}$ — ее радикал и $\mathfrak{i}$ — пересечение ядер всех неприводимых представлений алгебры $\mathfrak{g}$.

а) Доказать, что $\mathfrak{i}=[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]=D\mathfrak{g}\cap\mathfrak{r}$. [*Указание*: пользуясь теоремой Леви, показать, что $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]=D\mathfrak{g}\cap\mathfrak{r}$.]

б) Доказать, что элемент $x\in\mathfrak{r}$ принадлежит $\mathfrak{i}$ тогда и только тогда, когда эндоморфизм $\rho(x)$ нильпотентен для каждого представления $\rho$ алгебры $\mathfrak{g}$.

**2.** Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли и $B(x, y)$ — невырожденная инвариантная симметричная билинейная форма на $\mathfrak{g}$.

а) Пусть $x, y\in\mathfrak{g}$. Доказать равносильность следующих условий:

(i) $y\in\operatorname{Im}\operatorname{ad}(x)$;

(ii) $B(y, z)=0$ для всех $z$, коммутирующих с $x$.

б) Предположим, что $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра. Пусть $x\in\mathfrak{g}$, и пусть $\operatorname{ad}x$ — нильпотентный эндоморфизм. Показать, что найдется элемент $h\in\mathfrak{g}$, такой, что $[h, x]=x$. Используя этот факт, доказать, что для любого представления алгебры $\mathfrak{g}$ оператор $\rho(x)$ нильпотентен.

**3.** Привести пример алгебры Ли с ненулевым радикалом, на которой задана невырожденная инвариантная симметричная билинейная форма.

**4.** Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $V$ — неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль и $K$ — кольцо всех $\mathfrak{g}$-эндоморфизмов пространства $V$. Доказать, что $K$ — алгебра с делением. Привести пример алгебры $\mathfrak{g}$ с некоммутативным кольцом $K$.

---

[1]) См. также Семинар „Софус Ли", гл. 17, п. 1, теорема 2. — *Прим. перев.*

**5.** Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли, и $K$ — кольцо всех $\mathfrak{g}$-эндоморфизмов алгебры (относительно присоединенного представления). Обозначим через $\bar{k}$ алгебраическое замыкание поля $k$.

а) Пусть $k = \bar{k}$ и $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{h} \mathfrak{s}_i$, где все идеалы $\mathfrak{s}_i$ просты. Показать, что кольцо $K$ изоморфно прямому произведению $h$ экземпляров поля $k$.

б) Пусть $k$ — произвольное поле нулевой характеристики. Показать, что $[K : k] = h$, где $h$ — число простых компонент алгебры $\mathfrak{g} \otimes_k \bar{k}$ (над $\bar{k}$), а $K$ изоморфно прямому произведению $m$ полей, где $m$ — число простых компонент алгебры $\mathfrak{g}$.

в) Мы будем говорить, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ *абсолютно проста*, если проста алгебра $\mathfrak{g} \otimes_k \bar{k}$ (над $\bar{k}$). Показать, что это эквивалентно равенству $K = k$. Показать, далее, что из простоты алгебры $\mathfrak{g}$ вытекает коммутативность кольца $K$, а также абсолютная простота алгебры $\mathfrak{g}$ относительно заданной на ней естественной структуры алгебры Ли над $K$.

г) Обратно, пусть $K$ — конечное расширение поля $k$ и $\mathfrak{g}$ — абсолютно простая алгебра Ли над $K$. Доказать, что $\mathfrak{g}$ проста как алгебра Ли над $k$.

д) Рассмотрим алгебру Ли ортогональной группы, соответствующей квадратичной форме от четырех переменных, дискриминант $d$ которой не является квадратом. Показать, что $K$ есть квадратичное расширение $k(\sqrt{d})$.

**6.** Пусть $G$ — связная комплексная группа Ли, и $H$ — ее вещественная замкнутая подгруппа Ли. Обозначим через $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ алгебры Ли групп $G$ и $H$ соответственно (алгебра $\mathfrak{g}$ определена над $\mathbf{C}$, а алгебра $\mathfrak{h}$ — над $\boldsymbol{R}$).

а) Допустим, что $\mathfrak{h} + i\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$. Показать, что любая комплексная замкнутая подгруппа Ли, содержащая $H$, совпадает со всей группой $G$.

б) Проверить, что условие пункта а) выполняется в следующих случаях:

(i) $G = SL(n, \mathbf{C})$ и $H = SU(n)$ — специальная унитарная группа;

(ii) $G = SO(n, \mathbf{C})$ и $H = SO(n)$ — специальная вещественная ортогональная группа;

(iii) $G = Sp(2n, \mathbf{C})$ и $H = SU(2n) \cap G$ — кватернионная унитарная группа.

**7.** Пусть основное поле $k$ алгебраически замкнуто, и пусть заданы две алгебры Ли (над $k$) $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$. Положим $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$.

а) Допустим, что $V_i$ — неприводимый $\mathfrak{g}_i$-модуль ($i = 1, 2$). Показать, что тензорное произведение $V_1 \otimes_k V_2$ является неприводимым $\mathfrak{g}$-модулем.

б) Показать, что любой неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль изоморфен модулю вида $V_1 \otimes_k V_2$, рассмотренному выше.

в) Что будет, если $k$ не является алгебраически замкнутым?

8. Пусть $\mathfrak{g}$ — вещественная алгебра Ли с положительно определенной формой Киллинга. Доказать, что $\mathfrak{g} = (0)$.

## Глава VII

# ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АЛГЕБРЫ $sl(n)$

В этой главе $k$ — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики. Все алгебры Ли и все модули над $k$ имеют конечную размерность.

## § 1. Обозначения

Пусть $n$ — целое число $\geqslant 2$. Обозначим через $\mathfrak{g}$ алгебру $sl(n)$ квадратных матриц порядка $n$ с нулевым следом. Эта алгебра полупроста, так как центр ее равен нулю, а пространство $k^n$ неприводимо как $\mathfrak{g}$-модуль (теорема 6.5.1). Этот результат можно получить и непосредственным вычислением формы Киллинга. Фактически алгебра $\mathfrak{g}$ даже проста (см. упражнение 1), однако этот факт нам в дальнейшем не понадобится.

Введем следующие обозначения:

$\mathfrak{h}$ — алгебра Ли диагональных матриц $H$ вида $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ [для удобства мы будем писать $H = (\lambda_1, \ldots$ $\ldots, \lambda_n)$] с $\sum\limits_i \lambda_i = 0$;

$\mathfrak{n}_+$ — алгебра Ли строго верхних треугольных матриц (т. е. матриц $(x_{ij})$, для которых $x_{ij} = 0$ при $i \geqslant j$);

$\mathfrak{n}_-$ — алгебра Ли строго нижних треугольных матриц (т. е. матриц $(x_{ij})$, для которых $x_{ij} = 0$ при $i \leqslant j$). Алгебра $\mathfrak{g}$ очевидным образом разлагается в прямую сумму

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+.$$

Заметим, что алгебра $\mathfrak{h}$ абелева, а алгебры $\mathfrak{n}_+$ и $\mathfrak{n}_-$ нильпотентны (см. гл. V, § 4). При $n=2$ эти алгебры имеют вид

$$\mathfrak{h}=\left\{\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & -* \end{pmatrix}\right\}, \quad \mathfrak{n}_+=\left\{\begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}, \quad \mathfrak{n}_-=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Обозначим еще через $\mathfrak{b}$ алгебру $\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}_+$ треугольных матриц с нулевым следом; $\mathfrak{b}$ — разрешимая алгебра (каноническая „подалгебра Бореля") и ее производная алгебра $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$ совпадает с $\mathfrak{n}_+$.

Пусть $\mathfrak{h}^*$ — двойственное к $\mathfrak{h}$ пространство. Всякий элемент $\chi\in\mathfrak{h}^*$ можно записать в виде

$$\chi(H)=u_1\lambda_1+\ \dots\ +u_n\lambda_n, \text{ где } (\lambda_1, \dots, \lambda_n)=H \text{ и } u_i\in k.$$

Поскольку $\sum\lambda_i=0$, набор $(u_1, \dots, u_n)$ определен с точностью до аддитивной константы.

Обозначим через $R_+$ подмножество в $\mathfrak{h}^*$, состоящее из линейных форм $\lambda_i-\lambda_j$ $(i<j)$, и через $R$ — объединение $R_+\cup(-R_+)$. Элементы $\alpha$ множества $R$ (соответственно $R_+$) мы будем называть *корнями* (соответственно *положительными корнями*). Положительные корни

$$\alpha_1=\lambda_1-\lambda_2,\ \alpha_2=\lambda_2-\lambda_3,\ \dots,\ \alpha_{n-1}=\lambda_{n-1}-\lambda_n$$

называются *простыми* корнями. Всякий положительный корень $\alpha=\lambda_i-\lambda_j$ $(i<j)$ может быть представлен в виде суммы простых корней:

$$\alpha=\alpha_i+\alpha_{i+1}+\ \dots\ +\alpha_{j-1}.$$

Пусть $\alpha=\lambda_i-\lambda_j$ $(i\neq j)$ — некоторый корень. Рассмотрим следующие два элемента $H_\alpha$ и $X_\alpha$ алгебры $\mathfrak{g}$:

$X_\alpha$ — матрица, у которой на $(i, j)$-м месте стоит 1, а на остальных — нули;

$H_\alpha$ — диагональная матрица (из $\mathfrak{h}$), у которой $i$-й диагональный элемент равен 1, $j$-й диагональный элемент равен $-1$, а остальные элементы равны нулю.

Заметим, что $\alpha(H_\alpha)=2$.

Предложение 1.

(а) *Элементы* $X_\alpha(\alpha\in R_+)$ *образуют базис в* $\mathfrak{n}_+$, *а элементы* $X_{-\alpha}(\alpha\in R_+)$ — *базис в* $\mathfrak{n}_-$.

(б) *Если* $H \in \mathfrak{h}$ *и* $\alpha \in R$, *то* $[H, X_\alpha] = \alpha(H) X_\alpha$.

(в) $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$.

Доказательство. Утверждение (а) очевидно. Докажем (б). Пусть $H = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — диагональная матрица и $\alpha$ — линейная форма вида $\lambda_i - \lambda_j$. Перемножая матрицы $H$ и $X_\alpha$, получаем $H \cdot X_\alpha = \lambda_i X_\alpha$ и $X_\alpha \cdot H = \lambda_j X_\alpha$, откуда $[H, X_\alpha] = (\lambda_i - \lambda_j) X_\alpha = \alpha(H) X_\alpha$. Аналогичным вычислением доказывается (в).

Пример. При $n = 2$ имеется в точности один положительный корень $\alpha = \lambda_1 - \lambda_2$. Элементы

$$H_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_{-\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

образуют базис алгебры $sl(2)$.

## § 2. Веса и примитивные элементы

Пусть $V$ — некоторый $\mathfrak{g}$-модуль. Для каждой формы $\chi \in \mathfrak{h}^*$ положим

$$V_\chi = \{v \in V \mid H(v) = \chi(H) v \text{ для всех } H \in \mathfrak{h}\}.$$

Элементы пространства $V_\chi$ мы будем называть *собственными векторами алгебры* $\mathfrak{h}$ (*веса* $\chi$).

Предложение 1. Если $\alpha \in R$ и $v \in V_\chi$, то $X_\alpha v \in V_{\chi+\alpha}$.

Доказательство. Для любого $H \in \mathfrak{h}$ имеем

$$HX_\alpha v = [H, X_\alpha] v + X_\alpha H v = \\ = \alpha(H) X_\alpha v + \chi(H) X_\alpha v = (\chi + \alpha)(H) X_\alpha v.$$

Предложение 2. Пространство $V$ есть прямая сумма собственных подпространств $V_\chi$ $(\chi \in \mathfrak{h}^*)$.

Доказательство. Как хорошо известно, ненулевые собственные векторы линейного оператора, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы. Таким образом, сумма $W = \sum_{\chi \in \mathfrak{h}^*} V_\chi$ является прямой суммой. Предложение 1 показывает,