что пространство W инвариантно относительно операторов X_α. Более того, это пространство инвариантно относительно всей алгебры $\mathfrak{g}$, так как оно инвариантно относительно $\mathfrak{h}$. Следовательно (полная приводимость!), V разлагается в прямую сумму подпространства W и некоторого $\mathfrak{g}$-подмодуля V'. Допустим, что $V' \neq (0)$. Поскольку k алгебраически замкнуто и $\mathfrak{h}$ — абелева алгебра, в пространстве V' существует хотя бы один ненулевой собственный вектор v алгебры $\mathfrak{h}$. Но тогда v содержится в некотором подпространстве V_χ, а это противоречит тому, что $V' \cap W = (0)$. Итак, $V' = (0)$ и $V = W$. Предложение доказано.

Определение 3. Линейная форма $\chi \in \mathfrak{h}^*$, для которой $V_\chi \neq (0)$, называется *весом* $\mathfrak{g}$-модуля V, а размерность пространства V_χ — *кратностью* веса χ.

Пример 4. Весами $\mathfrak{g}$-модуля $\mathfrak{g}$ (относительно присоединенного представления) являются корни $\alpha \in R$ (кратность их равна единице) и нулевая форма (ее кратность равна $n-1$).

Предложение 5. *Пусть v — некоторый элемент $\mathfrak{g}$-модуля V. Следующие условия равносильны:*

(i) *вектор v является собственным для алгебры Бореля $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$;*

(ii) *вектор v является собственным для алгебры $\mathfrak{h}$, и $X_\alpha v = 0$ для всякого $\alpha \in R_+$.*

Это следует из равенства $\mathfrak{n}_+ = [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$ и того факта, что элементы $X_\alpha (\alpha \in R_+)$ образуют базис алгебры $\mathfrak{n}_+$.

Определение 6. Ненулевой элемент $v \in V$, удовлетворяющий эквивалентным условиям предложения 5, называется *примитивным*.

Заметим, что каждый примитивный элемент определяет некоторый вес $\chi \in \mathfrak{h}^*$.

Предложение 7. *Каждый ненулевой $\mathfrak{g}$-модуль содержит примитивный элемент.*

Для доказательства достаточно применить теорему Ли (см. гл. V) к $\mathfrak{b}$-модулю V.

[Другое доказательство. Обозначим через S множество всех весов $\mathfrak{g}$-модуля V. Используя то обстоятельство, что S конечно и непусто (см. предложение 2), нетрудно усмотреть, что в S содержится элемент χ, такой, что $\chi+\alpha \notin S$, каково бы ни было $\alpha \in R_+$. Ввиду предложения 1 любой ненулевой элемент соответствующего пространства V_χ примитивен.]

§ 3. Неприводимые $\mathfrak{g}$-модули

Теорема 1. *Пусть V — некоторый $\mathfrak{g}$-модуль и v — примитивный элемент веса χ. Обозначим через V_1 подмодуль $(U\mathfrak{g})\,v$ в V, порожденный вектором v. Тогда*

(а) *модуль V_1 неприводим;*

(б) *веса модуля V_1 имеют вид $\chi-\sum\limits_{i=1}^{n-1} m_i\alpha_i$, где α_i — простые корни и m_i — целые неотрицательные числа;*

(в) *любой вектор из V_1 с весом χ коллинеарен вектору v.*

Доказательство. Универсальную обертывающую алгебру $U=U\mathfrak{g}$ можно представить в виде $U\mathfrak{n}_-\otimes U\mathfrak{b}$ (см. следствие 3.4.2). Имеем $(U\mathfrak{b})\,v=kv$, поскольку v — собственный вектор алгебры $\mathfrak{b}$; следовательно, $V_1=(U\mathfrak{g})\,v$ совпадает с $(U\mathfrak{n}_-)\,v$. По теореме Биркгофа — Витта (примененной к алгебре $U\mathfrak{n}_-$) V_1 порождается элементами вида Mv, где M — одночлен от матриц $X_{-\alpha}$ $(\alpha\in R_+)$. Предложение 2.1 показывает, что Mv — собственный вектор алгебры $\mathfrak{h}$ веса $\chi-\sum\limits_{\alpha>0} q_\alpha\alpha$, где q_α — целые неотрицательные числа. Утверждение (б), таким образом, доказано. Что касается утверждения (в), то оно следует из того факта, что равенство всех коэффициентов q_α нулю возможно лишь в том случае, когда степень M равна нулю (т. е. $M=1$), а тогда $Mv=v$.

Осталось доказать (а). Допустим, что V_1 разлагается в прямую сумму двух $\mathfrak{g}$-модулей V' и V''. Пусть $v=v'+v''$ — соответствующее разложение вектора v. Поскольку $(V_1)_\chi = V'_\chi \oplus V''_\chi$, оба вектора v' и v'' имеют вес χ, и потому (утверждение (в)) оба они коллинеарны v. Но тогда один из них, скажем v'', равен нулю, т. е. $v' = v$. Учитывая, что v порождает V_1 (как $\mathfrak{g}$-модуль), получаем $V' = V_1$ и $V'' = (0)$. Теорема доказана.

Теорема 2. (1) *Любой неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль V содержит единственный (с точностью до умножения на элемент из k) примитивный элемент; вес этого элемента называется старшим весом модуля V.*

(2) *Неприводимые $\mathfrak{g}$-модули с одним и тем же старшим весом изоморфны.*

Доказательство. (1) Каждый $\mathfrak{g}$-модуль V содержит хотя бы один примитивный элемент (см. предложение 2.7); обозначим через χ вес этого элемента. Пусть v' — другой примитивный элемент и χ' — его вес. Так как V — неприводимый модуль, вектор v порождает модуль V. По теореме 1

$$\chi - \chi' = \sum_{i=1}^{n-1} m_i \alpha_i,$$

где $m_i \geqslant 0$ для всех i.

Применяя те же рассуждения к v', имеем

$$\chi' - \chi = \sum_{i=1}^{n-1} m'_i \alpha_i,$$

где $m'_i \geqslant 0$. Складывая эти равенства, получаем $m_i = m'_i = 0$, т. е. $\chi = \chi'$. Ввиду утверждения (в) теоремы 3.1 векторы v и v' коллинеарны.

(2) Пусть заданы два неприводимых $\mathfrak{g}$-модуля V_1 и V_2, и пусть v_1 и v_2 — их примитивные элементы, имеющие одинаковый вес χ. Элемент $v = (v_1, v_2)$ пространства $V_1 \times V_2$ тоже примитивен и тоже имеет вес χ. По теореме 1 $\mathfrak{g}$-подмодуль $W \subset V_1 \times V_2$, порожденный вектором v, неприводим. Проекция $\pi_i\colon W \to V_i$ является сюръективным отображением (так как $\pi_i(v) = v_i$), а потому в силу неприводимости W — изоморфизмом. Таким образом, модули V_1 и V_2

изоморфны, поскольку каждый из них изоморфен модулю W. Теорема доказана.

Замечание. Теорема 2 сводит классификацию неприводимых $\mathfrak{g}$-модулей к нахождению линейных форм $\chi \in \mathfrak{h}^*$, являющихся „старшими весами“, т. е. весами примитивных элементов, лежащих в некотором $\mathfrak{g}$-модуле. Эти формы будут найдены в § 4.

§ 4. Нахождение старших весов

Теорема 1. *Пусть χ — некоторый элемент из $\mathfrak{h}^*$; запишем его в виде*

$$\chi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = u_1\lambda_1 + \ldots + u_n\lambda_n.$$

Неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль со старшим весом χ существует в том и только том случае, если $u_i - u_j$ — целое неотрицательное число для всех $i < j$.

Доказательство. 1°. Необходимость. Заметим сначала, что $u_i - u_j = \chi(H_\alpha)$ $(i < j)$, где α — положительный корень $\lambda_i - \lambda_j$. Мы должны показать, что $\chi(H_\alpha)$ — целое неотрицательное число (для $\alpha \in R_+$), если χ — вес примитивного элемента v.

Предложение 2. *Пусть v — примитивный элемент веса χ. Положим $v_m^\alpha = (X_{-\alpha})^m v/m!$ для $m \geqslant 0$ (здесь символ $(X_{-\alpha})^m$ означает m-кратное применение оператора X_α). Тогда имеют место следующие формулы:*

(i) $X_{-\alpha} v_m^\alpha = (m+1)\, v_{m+1}^\alpha$;

(ii) $H v_m^\alpha = (\chi - m\alpha)(H)\, v_m^\alpha$, где $H \in \mathfrak{h}$;

(iii) $X_\alpha v_m^\alpha = (\chi(H_\alpha) - m + 1)\, v_{m-1}^\alpha$.

Доказательство предложения. Формула (i) очевидна, а формула (ii) означает, что v_m^α имеет вес $\chi - m\alpha$ (предложение 2.1). Равенство (iii) докажем индукцией по m. Случай $m = 0$ тривиален (мы можем считать, что $v^{\alpha}_{-1}=0$, и это согласуется с (i) при $m=-1$). Если $m \geqslant 1$, то

$$mX_{\alpha}v^{\alpha}_{m}=X_{\alpha}\cdot X_{-\alpha}v^{\alpha}_{m-1}=H_{\alpha}v^{\alpha}_{m-1}+X_{-\alpha}X_{\alpha}v^{\alpha}_{m-1}=\lambda v^{\alpha}_{m-1},$$

где

$$\lambda=\chi(H_{\alpha})-(m-1)\alpha(H_{\alpha})+(m-1)(\chi(H_{\alpha})-m+2).$$

Окончательно получаем $\lambda=m(\chi(H_{\alpha})-m+1)$ (так как $\alpha(H_{\alpha})=2$), чем равенство (iii) и доказано.

Следствие 3. *Существует такое целое $m \geqslant 0$, что $v^{\alpha}_{m} \neq 0$, а $v^{\alpha}_{m+1}=0$; при этом $\chi(H_{\alpha})=m$.*

Действительно, вектор v^{α}_{m} имеет вес $\chi-m\alpha$, а число всех возможных весов (ненулевой кратности) данного $\mathfrak{g}$-модуля конечно, поэтому $v^{\alpha}_{m}=0$ для достаточно больших m. Значит, существует такое m, что $v^{\alpha}_{m} \neq 0$ и $v^{\alpha}_{m+1}=0$. Применяя формулу (iii) (для $m+1$), приходим к равенству

$$0=X_{\alpha}v^{\alpha}_{m+1}=(\chi(H_{\alpha})-m)\,v^{\alpha}_{m}.$$

Следовательно, $\chi(H_{\alpha})=m$, поскольку $v^{\alpha}_{m} \neq 0$.

Тем самым доказательство необходимости закончено.

2°. Достаточность. Обозначим через $\pi_1, \ldots, \pi_{n-1}$ линейные формы $\lambda_1, \lambda_1+\lambda_2, \ldots, \lambda_1+\ldots+\lambda_{n-1}$. Условие теоремы 4.1 эквивалентно представимости формы χ в виде суммы

$$\chi=\sum_{i=1}^{n-1} m_i\pi_i,$$

где m_i — целые неотрицательные числа.

Предложение 4. *Если χ и χ' — два старших веса неприводимых модулей V и V', то $\chi+\chi'$ — старший вес неприводимого подмодуля $\mathfrak{g}$-модуля $V \otimes V'$.*

Доказательство предложения. Пусть v и v' — примитивные элементы модулей V и V'. Из определения $\mathfrak{g}$-модуля $V \otimes V'$ легко усмотреть, что

$v \otimes v'$ — примитивный элемент модуля $V \otimes V'$ с весом $\chi + \chi'$. Остается заметить, что $\mathfrak{g}$-подмодуль W, порожденный $v \otimes v'$, неприводим (теорема 3.1) и его старший вес равен $\chi + \chi'$.

Следствие 5. *Множество старших весов замкнуто относительно сложения.*

Таким образом, для того чтобы установить, что χ — старший вес, достаточно доказать это для форм π_i. Для этих форм мы можем дать явную конструкцию соответствующего неприводимого $\mathfrak{g}$-модуля.

Предложение 6. *Пусть V — пространство k^n с естественной структурой $\mathfrak{g}$-модуля. Обозначим через V_i i-ю внешнюю степень пространства V. Тогда для $1 \leqslant i \leqslant n-1$ модуль V_i неприводим и его старший вес равен π_i.*

Доказательство предложения. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — канонический базис пространства V. Рассмотрим элемент $v_i = e_1 \wedge \ldots \wedge e_i$. Несложное вычисление показывает, что этот элемент примитивен и весом его является форма π_i. Далее, легко проверяется, что, действуя на вектор v_i одночленами от матриц $X_{-\alpha}$, можно получить любой член вида $e_{m_1} \wedge \ldots \wedge e_{m_i}$, $m_1 < \ldots < m_i$. Следовательно, по теореме 3.1 модуль V_i неприводим.

Итак, предложение 6, а с ним и наша теорема 1 доказаны.

Замечания. 1. Аналогичные результаты справедливы для любой полупростой алгебры Ли. Действительно, все изложенные доказательства (за исключением последнего, использующего явную конструкцию неприводимых модулей) применимы и в общем случае, если считать известными основные свойства „корней“ и „подалгебр Картана“.

2. Теорема 1 показывает, что классы неприводимых $\mathfrak{g}$-модулей находятся во взаимно однозначном соответствии с наборами $(m_1, \ldots, m_{n-1})$ из $n-1$ целых неотрицательных чисел. Явное описание модуля, соот-

ветствующего набору $(m_1, \ldots, m_{n-1})$, читатель может найти, например, в книге Вейля [2*], гл. IV.

3. При $n=2$ каждый такой набор есть просто целое неотрицательное число m. Соответствующим неприводимым модулем является m-я симметрическая степень модуля $V=k^2$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть алгебра $\mathfrak{g}=sl(n)$ разлагается в прямое произведение полупростых алгебр $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$. Доказать, что $\mathfrak{g}$-модуль $V=k^n$ есть тензорное произведение $V_1 \otimes V_2$, где V_i — точный неприводимый $\mathfrak{g}_i$-модуль, $i=1, 2$ (см. гл. VI). Далее, если $n_i=\dim V_i$, то $n= n_1 \cdot n_2$ и $\dim \mathfrak{g}_i \leqslant n_i^2-1$. Показать, что из этих соотношений вытекает равенство $n_i=1$ для одного из двух i. Это означает, что $\mathfrak{g}_i=0$, т. е. что алгебра $\mathfrak{g}$ проста.

2. Показать, что все результаты этой главы справедливы над произвольным полем k нулевой характеристики. [*Указание*: использовать тот факт, что над алгебраическим замыканием k все веса принимают рациональные значения на элементах H_α; этого уже достаточно для того, чтобы установить (над k) предложения 2.2 и 2.7. Дальнейшее не представляет никаких трудностей.]

3. Пусть $k=\mathbf{C}$ — поле комплексных чисел. Группа $G=SL(n, \mathbf{C})$ содержит подгруппу $SU(n)$ унитарных матриц с определителем, равным единице. Показать, что многообразие $G/SU(n)$ гомеоморфно евклидову пространству $\mathbf{R}^N$. [*Указание*: отождествить однородное пространство $G/SU(n)$ с пространством всех положительно определенных эрмитовых форм на $\mathbf{C}^n$.] Показать, что многообразие $SU(n)/SU(n-1)$ гомеоморфно сфере S_{2n-1}. Используя этот факт, доказать (индукцией по $n \geqslant 2$), что группы $SU(n)$ и G связны и односвязны. Таким образом, любое линейное представление алгебры Ли $sl(n) = L(G)$ соответствует аналитическому представлению группы G, и наоборот.

4. В обозначениях упражнения 3 показать, что подалгебра $\mathfrak{h} \subset sl(n)$ соответствует (замкнутой) подгруппе Ли, изоморфной прямому произведению $n-1$ экземпляров группы $\mathbf{C}/\mathbf{Z}$. Использовать этот факт для прямого доказательства того факта, что любой вес алгебры $sl(n)$ есть линейная комбинация с целыми коэффициентами форм π_i.

5. (а) Пусть P (соответственно Q) — подгруппа в $\mathfrak{h}^*$, порожденная элементами π_i (соответственно корнями). Определить точную последовательность

$$0 \to Q \xrightarrow{i} P \xrightarrow{e} \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \to 0,$$

где i — вложение, а $e(\pi_i) = i$ для $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

(б) Пусть $\mathfrak{g} = sl(n)$ и V — неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль. Показать, что все веса пространства V лежат в группе P и имеют (при отображении e) один и тот же образ; обозначим этот образ символом $e(V)$.

(в) Пусть $k = \mathbf{C}$ (см. упражнение 3). Доказать, что центр C группы $G = SL(n, \mathbf{C})$ есть циклическая группа порядка n, состоящая из скалярных матриц w, таких, что $w^n = 1$. Пусть V — неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль; показать, что образ элемента $w \in G$ при соответствующем представлении $G \to GL(V)$ есть умножение на скаляр $w^{e(V)}$.

(г) Используя (в), показать, что неприводимые представления проективной группы $PGL(n, \mathbf{C}) = G/\mathbf{C}$ соответствуют неприводимым $\mathfrak{g}$-модулям V, для которых $e(V) = 0$.

6. Пусть χ — любой элемент из $\mathfrak{h}^*$ и L_χ — одномерный $\mathfrak{b}$-модуль веса χ. Введем соответствующий „индуцированный $\mathfrak{g}$-модуль“

$$E_\chi = L_\chi \otimes_{U\mathfrak{b}} U\mathfrak{g},$$

который, очевидно, имеет бесконечную размерность. Показать, что E_χ содержит примитивный элемент v веса χ. Что можно сказать о других весах модуля E_χ?

Установить существование наибольшего подмодуля H модуля E_χ, не содержащего v. Фактормодуль $V_\chi = E_\chi/H$ неприводим; показать, что V_χ конечномерно тогда и только тогда, когда χ удовлетворяет условию теоремы 4.1. Дать явное описание модуля V_χ при $n = 2$.

7. Пусть $n = 4$ и V — неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль со старшим весом π_2 (см. предложение 4.6). Показать, что $\dim V = 6$ и что на V существует невырожденная инвариантная симметричная билинейная форма. Воспользовавшись этим фактом, построить изоморфизм алгебры $sl(4)$ на алгебру Ли ортогональной группы $o(6)$.

Часть II

Группы Ли

Эту часть книги можно рассматривать как введение в теорию формальных групп и аналитических групп, а также в теорию связи между этими группами и алгебрами Ли (теория Ли). При этом аналитические группы определяются над любым полным полем (вещественным, комплексным или неархимедовым). Теория Ли применима в обоих случаях при условии, что основное поле имеет характеристику нуль.

В процессе работы я существенно использовал неопубликованные рукописи Н. Бурбаки по аналитическим многообразиям и по группам Ли.

Вторую часть моих лекций записал Р. Расала, которому я приношу свою благодарность за отлично проделанную работу; он внес много усовершенствований по сравнению с устным изложением.

Ж.-П. С.

Харвард
осень 1964

Глава I

ПОЛНЫЕ ПОЛЯ

Определение. Пусть k — поле. *Абсолютным значением* на k называется функция $k \to \mathbf{R}$, обозначаемая $x \mapsto |x|$, которая удовлетворяет следующим четырем условиям:

(1) $|x| \geqslant 0$, причем $|x| = 0$ в том и только в том случае, когда $x = 0$;

(2) $|x \cdot y| = |x||y|$;

(3) $|1| = 1$;

(4) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

Примеры. (i) Положим

$$\begin{cases} |x| = 0 & \text{при} \quad x = 0, \\ |x| = 1 & \text{при} \quad x \neq 1. \end{cases}$$

Топология поля k, определяемая этим абсолютным значением, дискретна.

Впредь мы будем иметь дело лишь с *нетривиальными* абсолютными значениями, т. е. такими, что $0 < |x| < 1$ для некоторого $x \in k$.

(ii) обычные абсолютные значения полей $\mathbf{R}$ и $\mathbf{C}$;

(iii) если условие (4) заменить условием

$$(4') \, |x - y| \leqslant \sup \{|x|, |y|\},$$

то мы придем к так называемым *ультраметрическим* или *неархимедовым* абсолютным значениям.

Замечание. Условие (4') равносильно следующему условию: для любого $\varepsilon \geqslant 0$ отношение $|x - y| \leqslant \varepsilon$ есть отношение эквивалентности.

Предположим теперь, что поле k снабжено неархимедовым абсолютным значением и относительно него является полным.

Теорема 1. *Рассмотрим последовательность* $\{x_n\}$ *с* $x_n \in k$. *Ряд* $\sum x_n$ *сходится тогда и только тогда, когда* $x_n \to 0$.

Доказательство непосредственно вытекает из условия (4′) и определения полноты.

Теорема 2 (Островский). *Пусть* k — *поле, полное относительно некоторого абсолютного значения. Тогда либо* k *совпадает с* $\mathbf{R}$ *или* $\mathbf{C}$ (*и соответствующее абсолютное значение имеет вид* $|x|^\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$), *либо данное абсолютное значение неархимедово.*

Доказательство этой теоремы можно найти, например, в книге Бурбаки [2*], Ch. VI, § 6.

Пусть по-прежнему k — поле, полное относительно неархимедова абсолютного значения $|x|$, и пусть ρ — вещественное число, $0 < \rho < 1$. Определим $v(x)$ формулой $|x| = \rho^{v(x)}$. Имеем, очевидно,

1) $v(x) = +\infty \Leftrightarrow x = 0$;
2) $v(xy) = v(x) + v(y)$;
3) $v(1) = 0$;
4) $v(x+y) \geqslant \inf(v(x), v(y))$.

Функция $x \mapsto v(x)$, удовлетворяющая указанным четырем условиям, называется *нормированием* поля k.

Примеры. 1. Пусть $k = \mathbf{C}((T))$ — поле формальных степенных рядов от одной переменной T, и пусть $a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n T^n$, где $a_n \in \mathbf{C}$, $a_n = 0$ при всех достаточно больших $-n$. Положим $v(a)$ равным наименьшему целому n, для которого $a_n \neq 0$. Тогда $a = T^{v(a)}(\alpha_0 + \alpha_1 T + \ldots)$, где $\alpha_0 \neq 0$. Иными словами, соотношение $v(a) \geqslant n$ равносильно равенству $a = T^n b$, где $b \in \mathbf{C}[[T]]$.

Отметим, что $\mathbf{C}((T))$ — полное поле.

2. Пусть $\mathbf{Q}$ — поле рациональных чисел. Зафиксируем простое число p. Любое число $a \in \mathbf{Q}$ можно представить в виде $a = p^n r/s$, где r и s — целые числа, не делящиеся на p. Полагая по определению $v(a) = n$, мы получим так называемое *p-адическое нормирование* поля рациональных чисел.

Пополнение поля $\mathbf{Q}$ по p-адической метрике обозначается через $\mathbf{Q}_p$ и называется полем *p-адических чисел*.

Очевидно, что $a_n \to 0$ (в p-адической топологии) тогда и только тогда, когда $a_n = p^{h_n} b_n$, где $b_n \in \mathbf{Z}$ и $h_n \to \infty$.

Определение. Пусть k — поле и v — его нормирование. Множество

$$A_v = \{x \in k \mid v(x) \geqslant 0\}$$

является кольцом и называется *кольцом нормирования* v.

Пример. Пусть $k = \mathbf{Q}_p$. Кольцо его p-адического нормирования есть не что иное, как кольцо $\mathbf{Z}_p$ *целых p-адических чисел*.

Для каждого действительного числа $\alpha \geqslant 0$ рассмотрим множества

$$I_\alpha = \{x \in A_v \mid v(x) \geqslant \alpha\},$$
$$I'_\alpha = \{x \in A_v \mid v(x) > \alpha\},$$

которые, как легко видеть, являются идеалами кольца A_v. В частности, при $\alpha = 0$ идеал

$$I'_0 = \mathfrak{m}_v = \{x \in A_v \mid v(x) > 0\}$$

максимален; поле $k_v = A_v/\mathfrak{m}_v$ называется *полем вычетов* нормирования v.

Примеры. 1. Пусть $k = \mathbf{C}((T))$. Тогда

$$A_v = \mathbf{C}[[T]],$$
$$\mathfrak{m}_v = (T)\,\mathbf{C}[[T]]$$

$$k_v = A_v/m_v = \mathbf{C}.$$

2. Пусть $k = \mathbf{Q}_p$. Тогда

$$A_v = \mathbf{Z}_p,$$
$$\mathfrak{m}_v = p\mathbf{Z}_p$$

и

$$k_v = \mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}.$$

Теорема 3. *Каждое неархимедово абсолютное значение $x \mapsto |x|$ поля рациональных чисел $\mathbf{Q}$ либо тривиально (т. е. $|x| = 1$ для всех $x \neq 0$), либо совпадает с одним из p-адических нормирований.*

Доказательство. Предположим, что наше абсолютное значение нетривиально. Тогда найдется такое рациональное число $r \in \mathbf{Q}$, что

$$0 < |r| < 1.$$

Из этого обстоятельства сразу вытекает существование простого числа p с $|p| \neq 1$, откуда $0 < |p| < 1$ (заметим, что $|n| \leqslant 1$ для всех целых $n \in \mathbf{Z}$).

Пусть $n \in \mathbf{Z}$, и пусть числа n и p взаимно просты. Как известно, в этом случае можно найти целые числа q, $s \in \mathbf{Z}$, для которых

$$qn + sp = 1.$$

Если предположить, что $|n| < 1$, то, учитывая неравенства $|q| \leqslant 1$, $|s| \leqslant 1$ и $|p| < 1$, мы получим $|1| < 1$, что противоречит определению абсолютного значения. Итак, для любых целых чисел n, взаимно простых с p,

$$|n| = 1.$$

Всякое рациональное число $r \in \mathbf{Q}$ можно представить в виде

$$r = p^{v_p(r)} n/n',$$

где n и n' — целые числа, взаимно простые с p. Отсюда $|r| = \rho^{v_p(r)}$, где $\rho = |p|$, ч. т. д.

Следствие. *Если k — поле, полное относительно неархимедова абсолютного значения, причем характеристика его равна нулю, то k содержит в качестве топологического подпространства либо поле $\mathbf{Q}$ с дискретной топологией, либо поле $\mathbf{Q}_p$.*

Глава II

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Сначала о символике.

1. k будет обозначать поле, полное относительно некоторого нетривиального абсолютного значения, а $k[[X_1, \ldots, X_n]]$ — кольцо формальных степенных рядов от n переменных $X_1, \ldots, X_n$ над k.

2. Мы будем обозначать

а) греческими буквами α, β наборы целых чисел:

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad \alpha_i \geqslant 0, \quad \alpha_i \in \mathbf{Z};$$

б) латинскими буквами r, s наборы вещественных чисел:

$$r = (r_1, \ldots, r_n), \quad r_i > 0, \quad r_i \in \mathbf{R};$$

в) латинскими буквами x, y наборы элементов поля k:

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \quad x_i \in k.$$

3. Положим

$$r^\alpha = r_1^{\alpha_1} \ldots r_n^{\alpha_n},$$
$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n},$$
$$X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n},$$
$$|\alpha| = \sum \alpha_i,$$
$$\alpha! = \prod \alpha_i!,$$
$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}.$$

4. По определению

$|x| \leqslant r$ (соответственно $|x| < r$) $\Leftrightarrow |x_i| \leqslant r_i$ (соответственно $|x_i| \leqslant r_i$), $1 \leqslant i \leqslant n$.

Аналогичный смысл будет вкладываться в соотношения

$$r' \leqslant r, \quad r' < r, \quad \alpha' \leqslant \alpha, \quad \alpha' < \alpha.$$

5. Назовем

множество $P(r)(x) = \{y \in k^n \mid |y - x| \leqslant r\}$ *(замкнутым) полицилиндром* радиуса r с центром в точке x;

множество $P_0(r)(x) = \{y \in k^n \mid |y - x| < r\}$ *открытым полицилиндром* радиуса r с центром в точке x.

Полицилиндры $P(r)(0)$ и $P_0(r)(0)$ будем для краткости обозначать $P(r)$ и $P_0(r)$ соответственно.

Определение. Пусть

$$f = \sum a_\alpha X^\alpha \quad (f \in k[[X_1, \ldots, X_n]]).$$

1) Мы скажем, что ряд f *сходится в полицилиндре* $P(r)$, если

$$\sum |a_\alpha| r^\alpha < +\infty. \tag{1}$$

2) Мы скажем, что ряд f *сходится в открытом полицилиндре* $P_0(r)$, если он сходится в каждом полицилиндре $P(r')$ с $r' < r$.

Лемма. (а) *Если ряд $f = \sum a_\alpha X^\alpha$ сходится в полицилиндре $P(r)$, то существует такая константа M, что*

$$|a_\alpha| r^\alpha \leqslant M \quad \text{для всех} \quad \alpha. \tag{2}$$

(б) *Обратно, пусть существует такая константа M, что неравенство (2) справедливо для всех α. Тогда ряд f сходится в открытом полицилиндре $P_0(r)$ и притом равномерно во всяком полицилиндре $P(r')$ с $r' < r$.*

Доказательство. (а) В качестве константы M можно взять сумму $\sum |a_\alpha| r^\alpha$, которая по условию конечна.

(б) Пусть $r' < r$. Тогда

$$\sum |a_\alpha| r'^\alpha = \sum (|a_\alpha| r^\alpha) \frac{r'^\alpha}{r^\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant M \sum \frac{r'^\alpha}{r^\alpha} = M \prod \left(1 - \frac{r'_i}{r_i}\right)^{-1}.$$

Таким образом, ряд f сходится равномерно в $P(r')$, и, следовательно, сходится в $P_0(r)$. Лемма доказана.

Эта лемма часто фигурирует в литературе под названием *леммы Абеля*.

Определение. Ряд $f = \sum a_\alpha X^\alpha$ называется *сходящимся*, если он сходится в некотором открытом полицилиндре $P_0(r)$, $r > 0$.

Пусть ряд $f = \sum a_\alpha X^\alpha$ сходится в $P_0(r)$. Для всякого $x \in P_0(r)$ ряд $\sum a_\alpha X^\alpha$ сходится абсолютно (и равномерно в $P(r')$, $r' < r$); его сумма $\tilde{f}(x)$ есть непрерывная функция от x.

Лемма. $\tilde{f} = 0 \Rightarrow f = 0$.

Доказательство. Пусть $n = 1$. Предположим, что $f \neq 0$. Тогда

$$f(X) = X^m (c_0 + c_1 X + \ldots),$$

где $c_i \neq 0$ и $m \geqslant 0$. Ряд $\sum c_i X^i$ сходится. Функция, определяемая этим рядом, отлична от нуля в точке $x = 0$, а потому (по непрерывности) и в некоторой окрестности U этой точки. Далее, функция X^m отлична от нуля на множестве $U \setminus \{0\}$. Таким образом, функция $\tilde{f}$ в окрестности U не равна тождественно нулю. Фактически при $m > 0$ точка $x = 0$ есть изолированный нуль функции $\tilde{f}(x)$.

Пусть $n > 1$. Предположим, что для $n - 1$ наша лемма доказана. Пусть $\tilde{f} = 0$, где $f \in k[[X_1, \ldots, X_n]]$. Запишем

$$f = \sum_i c_i (X_1, \ldots, X_{n-1}) X_n^i, \quad c_i \in k[[X_1, \ldots, X_{n-1}]].$$

Так как ряд f сходится в $P_0(r)$, ряды c_i сходятся в $(n-1)$-мерном полицилиндре $P_0(s)$, где $s = (r_1, \ldots, r_{n-1})$. По предположению для любой фиксированной точки $y = (y_1, \ldots, y_{n-1}) \in P_0(s)$ функция g, определенная формулой

$$g(x_n) = \sum_i \tilde{c}_i (y_1, \ldots, y_{n-1}) x_n^i,$$

тождественно равна нулю. Следовательно (см. случай $n = 1$), все выражения $\tilde{c}_i (y_1, \ldots, y_{n-1})$ равна нулю.

Отсюда, согласно предположению индукции, $c_i = 0$ для всех i и, следовательно, $f = 0$. Лемма доказана.

С помощью этой леммы мы можем отождествлять ряд f с соответствующей функцией $\tilde{f}$.

Приступим теперь к изучению аналитических функций.

Определение. Пусть задано открытое множество $U \subset k^n$ и функция φ: $U \to k$. Мы скажем, что функция φ *аналитична* в U, если для каждой точки $x \in U$ найдется формальный ряд f и радиус $r > 0$, такие, что

1) $P_0(r)(x) \subset U$;

(2) f сходится в $P_0(r)$, и $\varphi(x+h) = f(h)$ для $h \in P_0(r)$.

Замечание. Формальный ряд f, соответствующий аналитической функции φ в точке $x \in U$, определяется единственным образом и называется *рядом Тейлора*[1]) этой функции в точке x.

Теорема 1. *Если ряд $f = \sum a_\alpha X^\alpha$ сходится в полицилиндре $P_0(r)$, $r > 0$, то функция f аналитична в этом полицилиндре.*

Доказательство. Пусть $x \in P_0(r)$. Выберем такой радиус r', что $|x| \leqslant r' < r$, и положим $s = r - r'$.

$$(x+h)^\alpha = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} x^{\alpha-\beta} h^\beta .$$

Следовательно,

$$f(x+h) = \sum_\alpha a_\alpha \left(\sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} x^{\alpha-\beta} h^\beta \right), \quad h \in P_0(s).$$

Покажем, что можно изменить порядок суммирования. Для этого достаточно показать, что

$$\sum_\alpha \sum_{\beta \leqslant \alpha} \left| a_\alpha \binom{\alpha}{\beta} x^{\alpha-\beta} h^\beta \right| < \infty, \quad h \in P_0(s). \qquad (*)$$

---

[1]) В оригинале „local expansion“. — *Прим. перев.*

Но, в самом деле, пусть $|h| \leqslant s' < s$. Тогда

$$\left| a_\alpha \binom{\alpha}{\beta} x^{\alpha-\beta} h^\beta \right| \leqslant |a_\alpha| \cdot \left| \binom{\alpha}{\beta} \right| |x|^{\alpha-\beta} |h|^\beta .$$

Заметим теперь, что $\left|\binom{\alpha}{\beta}\right| \leqslant \binom{\alpha}{\beta}$ (под символом $\binom{\alpha}{\beta}$ в левой части неравенства понимается элемент поля k, а в правой — целое положительное число).

Отсюда

$$\sum_{\beta \leqslant \alpha} \left| a_\alpha \binom{\alpha}{\beta} x^{\alpha-\beta} h^\beta \right| \leqslant \sum_{\beta \leqslant \alpha} |a_\alpha| \binom{\alpha}{\beta} r'^{\alpha-\beta} s'^\beta = |a_\alpha| (r' + s')^\alpha .$$

Таким образом, сумма (*) мажорируется рядом

$$\sum_\alpha |a_\alpha| (r' + s')^\alpha ,$$

сумма которого конечна, поскольку f сходится в $P_0(r)$ и $r' + s' < r$.

То, что нам осталость доказать, можно сформулировать в виде отдельной леммы.

Лемма. *Пусть дан формальный ряд $f = \sum a_\alpha X^\alpha$, сходящийся в $P_0(r)$. Для каждого $\beta \leqslant \alpha$ положим*

$$\Delta^\beta f = \sum_{\alpha \geqslant \beta} a_\alpha \binom{\alpha}{\beta} X^{\alpha-\beta} .$$

Тогда

(1) *ряд $\Delta^\beta f$ сходится в $P_0(r)$;*

(2) *ряд $\sum_\beta \Delta^\beta f(x) X^\beta$ сходится в $P_0(r - |x|)$, где $x \in P_0(r)$;*

(3) *при $x \in P_0(r)$ и $h \in P_0(r - |x|)$ имеем*

$$f(x + h) = \sum_\beta \Delta^\beta f(x) h^\beta .$$

Доказательство леммы. Утверждения (1) и (2) непосредственно вытекают из сходимости ряда (*).

Утверждение (3) также следует из этого факта, поскольку

$$\sum_{\alpha} a_\alpha \left(\sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} x^{\alpha-\beta} h^\beta \right) = \\ = \sum_{\beta} \left(\sum_{\alpha \geqslant \beta} a_\alpha \binom{\alpha}{\beta} x^{\alpha-\beta} \right) h^\beta = \sum_{\beta} \Delta^\beta f(x) h^\beta .$$

Тем самым лемма, а вместе с ней наша теорема полностью доказаны.

Понятие аналитической функции можно распространить также на вектор-функции.

Определение. Пусть U — открытое множество в k^m, и пусть $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$: $U \to k^n$. Мы скажем, что отображение φ *аналитично*, если все его компоненты φ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, суть аналитические функции.

Предыдущая лемма есть частный случай следующей теоремы.

Теорема 2. *Если отображения $U \longrightarrow V$ и $V \xrightarrow{g} W$ аналитичны, то и композиция $g \circ f$ этих отображений тоже аналитична (здесь U, V и W — открытые множества в k^m, k^n и k^p соответственно).*

Доказательство. Мы должны показать, что компоненты отображения $g \circ f$ в каждой точке $x \in U$ разлагаются в ряд Тейлора. Применяя предыдущую лемму, легко усмотреть, что аналитичность любой функции $\varphi(x)$ (а также любой вектор-функции) в окрестности точки x равносильна аналитичности функции $\varphi'(h) = \varphi(x+h)$ в некоторой окрестности нуля. Мы можем поэтому, не теряя общности, считать, что $x = 0$, $f(0) = 0$, $g(0) = 0$. Кроме того, в силу определения аналитичности вектор-функции достаточно доказать нашу теорему для $p = 1$.

Пусть $\sum_{\beta > 0} b_\beta Y^\beta$ — ряд Тейлора функции g в точке $x = 0$, сходящийся в $P_0(s)$, где $s = (s_1, \ldots, s_n)$. Пусть $f = (f_1, \ldots, f_n)$, и пусть $\sum_{\alpha > 0} a_{i,\alpha} X^\alpha$ — ряд Тейлора функции f_i. Выберем такой радиус $r = (r_1, \ldots, r_m)$, что

$$\sum_{\alpha > 0} |a_{i,\alpha}| r^\alpha < \frac{s_i}{2}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Тогда при $h \in P_0(r)$

$$g \circ f(h) = \sum_{\beta > 0} b_\beta \Big(\ldots, \sum_{\alpha > 0} a_{i,\alpha} h^\alpha, \ldots \Big)^\beta.$$

Для завершения доказательства нам надо установить, что правая часть этого равенства есть сумма некоторого ряда от h, сходящегося в $P_0(r)$. Однако если в правой части формально раскрыть скобки и привести подобные члены, то окажется, что коэффициентом при h^α будет служить выражение, в которое входит лишь конечное число коэффициентов b_β и $a_{i,\alpha}$. В самом деле, после раскрытия скобок члены с $|\beta| > |\alpha|$ вообще не будут содержать h^α (так как все $a_{i,0} = 0$), поэтому при вычислении коэффициента при h^α нам придется просуммировать лишь конечное число выражений. Итак, функции $f \circ g(h)$ можно сопоставить некоторый ряд от h. Нам остается показать, что ряд

$$\sum_{\beta > 0} b_\beta \Big(\ldots, \sum_{\alpha > 0} a_{i,\alpha} h^\alpha, \ldots \Big)^\beta$$

сходится абсолютно. Но, действительно,

$$\sum_{\beta > 0} |b_\beta| \Big(\ldots, \sum_{\alpha > 0} |a_{i,\alpha}| |h|^\alpha, \ldots \Big)^\beta \leqslant \sum_{\beta > 0} |b_\beta| \Big(\frac{s}{2}\Big)^\beta < +\infty.$$

Теорема доказана.

Замечания. 1. Более подробное доказательство существования искомого степенного ряда читатель может найти в книге Бурбаки [3*], гл. IV, § 5, п. 5.

2. Имеется общий метод, основанный на теореме Островского, с помощью которого часто доказываются такого рода теоремы. Он заключается попросту в том наблюдении, что достаточно рассматривать два случая:

1° $k = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$;

2° поле k неархимедово.

Проиллюстрируем этот метод, дав другое доказательство теоремы 2.

Случай 1°. $k = \mathbf{R}$ *или* $\mathbf{C}$.

а) $k = \mathbf{C}$. Известно, что отображение φ аналитично тогда и только тогда, когда оно есть отображение класса C^1 и его производная $D\varphi$ — *комплексное* линейное отображение. Так как композиция отображений класса C^1 тоже класса C^1, так как композиция производных есть производная композиции и так как композиция комплексных линейных отображений есть снова комплексное линейное отображение, нашу теорему в этом частном случае можно считать доказанной.

б) $k = \mathbf{R}$. Каждую вещественную аналитическую функцию можно локально продолжить до комплексной аналитической функции с помощью ряда Тейлора. Поэтому этот случай сводится к предыдущему.

Случай 2°. *Поле k неархимедово.*

Как и в первоначальном доказательстве теоремы, мы ищем разложение композиции $g \circ f$ в степенной ряд в точке $x = 0$, причем $f(0) = 0$ и $g(0) = 0$. Несложная проверка показывает, что нашу теорему достаточно доказать для композиции отображений $g\left(\frac{y}{\mu}\right)$ и $\mu f\left(\frac{x}{\nu}\right)$, где μ и ν — произвольные фиксированные, отличные от нуля элементы поля k.

Покажем, что μ и ν можно выбрать таким образом, что утверждение теоремы станет тривиальным.

Пусть $g = (g_1, \ldots, g_p)$, и пусть $g_j = \sum\limits_{\beta > 0} b_{j,\beta} Y^\beta$ — ряд Тейлора для функции g_j в точке $y = 0$. Выберем такой радиус s, что каждый ряд g_j сходится в полицилиндре $P_0(s)$. По лемме Абеля найдется константа M, такая, что $|b_{j,\beta}| s^\beta \leqslant N$ для всех j и β. Выберем такой элемент μ поля k, что $|\mu| > \max\limits_j \left(\frac{1}{s_j}(1 + N)\right)$.

Тогда для всех j и β имеем

$$\left| b_{j,\beta} \frac{1}{\mu^{|\beta|}} \right| < |b_{j,\beta}| \cdot \min_j (s_j)^{|\beta|} \frac{1}{1+N} \leqslant |b_{j,\beta}| s^\beta \frac{1}{1+N} < 1.$$

Следовательно, коэффициенты ряда $g(Y/\mu)$ лежат в кольце нормирования A_v поля k и, в частности, ряд $g(Y/\mu)$ сходится в $P_0(1)$.

Применяя аналогичные соображения к μf, мы сможем найти такой элемент $\nu \in k$, что у всех координатных функций $\mu f_i(x/\nu)$ отображения $\mu f(x/\nu)$ коэффициенты рядов Тейлора лежат в кольце A_v.

Итак, все свелось к случаю, когда ряды Тейлора координатных функций отображений f и g лежат в кольце нормирования. Но тогда формальный ряд композиции этих отображений снова имеет коэффициенты в кольце A_v и потому сходится в $P_0(1)$. Доказательство закончено.

Сформулируем теперь явно некоторые утверждения о рядах Тейлора и производных, которые неявно фигурировали в предыдущих рассуждениях.

Определение. Пусть задана вектор-функция φ: $U \to V$, где $U\,(\subset k^m)$ и $V\,(\subset k^n)$ — открытые множества. Линейное отображение L: $k^m \to k^n$ называется *производной* функции φ в точке $x \in U$, если

$$|\varphi(x+h) - \varphi(x) - Lh| = o(|h|),$$

т. е.

$$\lim_{\substack{|h| \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{|\varphi(x+h) - \varphi(x) - Lh|}{|h|} = 0.$$

Замечания. 1. Если функция φ имеет в точке x производную L, то последняя определена однозначно и обозначается $D\varphi(x)$.

2. Образ вектора $\delta_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ (на i-м месте 1, а на остальных нули) при отображении $D\varphi(x)$ называется i-й *частной производной* функции φ в точке x и обозначается $D_i\varphi(x)$.

При изучении дифференцируемости аналитических функций достаточно для начала ограничиться аналитическими функциями со значениями в поле k. Далее, поскольку дифференцируемость — свойство локальное, мы можем рассматривать лишь функции, которые представлены некоторым сходящимся рядом.

Теорема 3. *Пусть* $f=\sum a_\alpha X^\alpha$ — *степенной ряд, сходящийся в* $P_0(r)$, $r>0$. *Тогда соответствующая функция* f *дифференцируема в каждой точке* $x \in P_0(r)$ *и*

$$Df(x)=\begin{Bmatrix} \Delta^{\delta_1} f(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta^{\delta_n} f(x) \end{Bmatrix}.$$

Таким образом, производная аналитической функции существует и аналитична, и, следовательно, всякая аналитическая функция бесконечно дифференцируема.

Доказательство. Если внимательно просмотреть вычисления, выполненные при доказательстве леммы к теореме 1, то мы увидим, что выражение $f(x+h)-f(x)-Df(x)h$ является таким степенным рядом, сходящимся в $P_0(r)$, у которого члены нулевой и первой степеней отсутствуют. Отсюда немедленно следует, что

$$\frac{|f(x+h)-f(x)-Df(x)|}{|h|} \to 0 \quad \text{при} \quad |h| \to 0.$$

Замечание. Положим $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$. Тогда

1) $\alpha!\,\Delta^\alpha = D^\alpha$;

2) ряд $f(x+h)=\sum\limits_\beta \Delta^\beta f(x) h^\beta$ есть обычный ряд Тейлора для случая нулевой характеристики;

3) $\binom{\alpha+\beta}{\alpha}\Delta^{\alpha+\beta}=\Delta^\alpha\Delta^\beta$.

Приступим теперь к доказательству следующего основного результата.

Теорема об обратной функции. *Пусть* $f\colon U \to k^n$ — *аналитическое отображение, где* U — *открытое множество в* k^n. *Допустим, что* $0 \in U$ и $f(0)=0$. *Тогда если производная в нуле* $Df(0)\colon k^n \to k^n$ — *линейный изоморфизм, то отображение* f — *локальный аналитический изоморфизм.*

Доказательство. В случае $k=\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$ теорема общеизвестна. Мы можем поэтому в силу теоремы Островского предполагать, что абсолютное значение поля k неархимедово. Пусть $f=(f_1, \ldots, f_n)$. Умножая, если нужно, отображение f на автоморфизм $Df(0)^{-1}$, мы можем считать, что

$$f_i(X)=X_i-\sum_{|\alpha|>1} a_{i,\alpha}X^{\alpha}=X_i-\varphi_i(X).$$

Заменяя $f(X)$ выражением $\mu f(X/\mu)$, где $\mu\in k$ и $|\mu|$ достаточно мало, мы можем предполагать, что все коэффициенты $a_{i,\alpha}$ лежат в кольце нормирования A_v.

Найти обратное к f аналитическое отображение — это значит найти такие ряды $\psi_i(T)$, $1\leqslant i\leqslant n$, что $X_i=\psi_i(T)$ есть решение уравнения

$$T_i=X_i-\varphi_i(X),\qquad 1\leqslant i\leqslant n. \tag{$*$}$$

Мы решим эту задачу в два приема.

1. Покажем, что уравнение ($*$) имеет единственное формальное решение $\{\psi_i(T)\}$, и найдем соотношения между коэффициентами рядов ψ_i и φ_i.

2. Двумя существенно различными методами мы докажем сходимость полученного формального решения.

Положим $\psi_i=\sum_{\beta>0} b_{i,\beta}T^{\beta}$ и рассмотрим уравнения

$$\psi_i(T)=T_i+\varphi_i(\psi(T)),\qquad 1\leqslant i\leqslant n. \tag{$**$}$$

Нетрудно видеть, что $b_{i,\delta_j}=\delta_{ij}$ (символ Кронекера); вообще для произвольного β коэффициент $b_{i,\beta}$ есть линейная комбинация тех коэффициентов рядов ψ и φ, которые стоят при одночленах степени, *строго меньшей*, чем β. В этих линейных комбинациях участвуют также целые числа (различные биномиальные коэффициенты), не зависящие от φ и ψ. Таким образом, по индукции

$$b_{i,\beta}=p^i_{\beta}(a_{i,\alpha}),$$

где

p^i_{β} — многочлен с целыми положительными коэффициентами, которые не зависят ни от $\{\varphi_i\}$, ни от $\{\psi_i\}$;

в качестве переменных в p^i_β участвуют только $a_{i,\alpha}$ с $|\alpha|<|\beta|$.

Единственность формального решения установлена; остается доказать его (абсолютную) сходимость.

Первый способ доказательства основан на том, что, как мы уже говорили, поле k можно считать неархимедовым. Мы можем также предполагать, что $a_{i,\alpha}\in A_v$ для всех i и α. Поскольку $b_{i,\beta}=p^i_\beta(a_{i,\alpha})$, ясно, что $b_{i,\beta}\in A_v$ для всех i и β. Следовательно, ряды $\{\psi_i\}$ сходятся в полицилиндре $P_0(1)$.

Второй способ доказательства, так называемый *метод мажорант Коши*, пригоден также и для полей **R** и **C**. Допустим, что нам удалось найти такие положительные ряды $\{\bar{\varphi}_i\}$, $\bar{\varphi}_i=\sum\limits_{\alpha>1}\bar{a}_{i,\alpha}X^\alpha$, $1\leqslant i\leqslant n$, что

(1) ряды $\bar{\psi}_i=\sum\limits_{\beta>0}\bar{b}_{i,\beta}T^\beta$, $1\leqslant i\leqslant n$, сходятся, где $\{\bar{\psi}_i\}$ — формальное решение задачи обращения для $\{\bar{\varphi}_i\}$;

(2) $|a_{i,\alpha}|\leqslant\bar{a}_{i,\alpha}$ для всех i и α.

Тогда легко показать, что

(3) $|b_{i,\beta}|\leqslant\bar{b}_{i,\beta}$ для всех i и β.

Действительно, поскольку многочлен p^i_β имеет целые положительные коэффициенты,

$$|b_{i,\beta}|=|p^i_\beta(a_{i,\alpha})|\leqslant p^i_\beta(|a_{i,\alpha}|)\leqslant p^i_\beta(\bar{a}_{i,\alpha})=\bar{b}_{i,\beta}.$$

Очевидно, из свойств (2) и (3) в совокупности следует сходимость всех рядов ψ_i, $1\leqslant i\leqslant n$. Нам остается поэтому подыскать требуемые формальные вещественные ряды $\bar{\varphi}_i$.

Пусть сначала $n=1$. В силу сходимости ряда φ_1 можно подобрать такое достаточно большое натуральное m, что ряд

$$\bar{\varphi}^m=\sum_{i>1}(mX)^i\quad(m>0)$$

удовлетворяет свойству (1) (лемма Абеля). Вычислим в явном виде соответствующий обратный ряд $\bar{\psi}^m$. Для этого нам надо решить уравнение

$$T=X-\frac{(mX)^2}{1-mX}.$$

Решение этого уравнения дается формулой

$$\bar{\psi}^m(T) = \frac{(1+mT) - \sqrt{(1+mT)^2 - 4(m^2+m)T}}{2(m^2+m)},$$

из которой легко усмотреть, что $\bar{\psi}^m(T)$ представляется степенным рядом, сходящимся в окрестности нуля.

Перейдем теперь к общему случаю; пусть n — произвольное натуральное число. Заменяя, если нужно, ряды $\{\varphi_i(X)\}$ на $\{\varphi_i(X/\mu)\}$ (где μ — специально подобранный с помощью леммы Абеля элемент поля k), мы можем считать, что $|a_{i,\alpha}| \leqslant 1$ для всех i и α. Рассмотрим положительные ряды $\bar{\varphi}_i = \sum_{j>1} (X_1 + \ldots + X_n)^j$ и докажем, что они обладают требуемыми свойствами. В силу нашего соглашения свойство (1) выполняется очевидным образом. Соответствующие обратные ряды $\bar{\psi}$ имеют вид

$$\bar{\psi}_i = \frac{1}{n} \sum_{j \neq i} (T_i - T_j) + \bar{\psi}^n\left(\frac{\sum T_j}{n}\right).$$

В самом деле,

$$\sum \bar{\psi}_i = n\bar{\psi}^n\left(\frac{\sum T_j}{n}\right),$$

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_i - \bar{\varphi}_i(\bar{\psi}) &= \frac{1}{n} \sum_{j \neq i} (T_i - T_j) + \\ &\quad + \bar{\psi}^n\left(\frac{\sum T_j}{n}\right) - \bar{\varphi}^n\left(\bar{\psi}^n\left(\frac{\sum T_j}{n}\right)\right) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j \neq i} (T_i - T_j) + \frac{1}{n}\left(\sum T_j\right) = T_i.\end{aligned}$$

Поскольку ряды $\bar{\psi}_i$ сходятся в некоторой окрестности нуля, теорема доказана.

„Опасные повороты". 1. Пусть k — неархимедово поле. Функция φ, равная единице на элементах кольца A_v и нулю на дополнении $k \setminus A_v$, всюду аналитична. Это вытекает из того факта, что множество A_v одновременно открыто и замкнуто в k.

2. Если поле k имеет характеристику $p>0$, то для любой аналитической функции φ, определенной в области $U\subset k^n$, имеем

$$D^\alpha\varphi=0 \quad \text{при} \quad |\alpha|\geqslant(p-1)n+1.$$

В частности, радиус сходимости производной формального ряда может быть *строго больше* радиуса сходимости самого этого ряда.

3. Если функция φ аналитична в области $U\subset k^n$, причем $P_0(r)(x)\subset U$, где $x\in U$, то ряд Тейлора функции φ в точке x вовсе не обязан сходиться во всем полицилиндре $P_0(r)$. Последнее имеет место, вообще говоря, лишь для $k=\mathbf{C}$.

Глава III

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

В этой главе k — поле, полное относительно нетривиального абсолютного значения.

§ 1. Карты и атласы

Пусть X — топологическое пространство.

Картой c пространства X называется тройка $c=(U, \varphi, n)$, где

(1) U — открытое подмножество в X,

(2) n — целое неотрицательное число,

(3) φ — отображение U в k^n, причем множество $\varphi(U)$ открыто в k^n и отображение $\varphi\colon U \to \varphi(U)$ — гомеоморфизм.

Обозначения:

$U = O(c)$ — открытое множество карты c;

$\varphi = M(c)$ — отображение карты c;

$n = \dim_k(c)$ — размерность карты c.

Пусть заданы две карты $c=(U, \varphi, n)$ и $c'=(U', \varphi', n')$ пространства X. Мы скажем, что c и c' *согласованы*, если отображения $\varphi' \circ \varphi^{-1} | \varphi(V)$ и $\varphi \circ \varphi'^{-1} | \varphi'(V)$ аналитичны, где $V = U \cap U'$ (см. диаграмму).

$$\begin{tikzcd}
 & \varphi(V)\subset k^n \arrow[dd, shift right=2, "\varphi'\circ\varphi^{-1}"'] \\
V \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi'"'] & \\
 & \varphi'(V)\subset k^{n'} \arrow[uu, shift right=2, "\varphi\circ\varphi'^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Если c и c' согласованы и $V \neq \varnothing$, то $n = n'$.

Семейство карт $\{c_i\}_{i \in I}$ называется *покрытием* пространства X, если $\bigcup\limits_{i \in I} O(c_i) = X$.

Атласом A пространства X называется такое семейство карт, образующее покрытие пространства X, в котором любые две карты согласованы.

Мы будем говорить, что два атласа A и A' *согласованы*, если выполнено одно из следующих двух эквивалентных условий:

(1) $A \cup A'$ — атлас;

(2) если $c \in A$ и $c' \in A$, то карты c и c' согласованы.

Замечание. Согласованность двух атласов есть отношение эквивалентности. Действительно, рефлексивность и симметричность очевидны; докажем транзитивность. Пусть даны три атласа A_1, A_2 и A_3, причем атлас A_1 согласован с A_2 и атлас A_2 согласован с A_3. Пусть $c_1 \in A_1$ и $c_3 \in A_3$. Мы должны показать, что c_1 и c_3 согласованы. Обозначим через V пересечение $O(c_1) \cap O(c_3)$. Случай $V = \varnothing$, тривиален. Пусть $V \neq \varnothing$, и пусть $\varphi_1 = M(c_1)$ и $\varphi_3 = M(c_3)$. В силу симметрии достаточно установить, что отображение $\varphi_3 \circ \varphi_1^{-1}$ аналитично на $\varphi_1(V)$. Для этого мы покажем, что это отображение аналитично в каждой точке вида $\varphi_1(x)$ $(x \in V)$. Выберем карту $c_2 = (U, \varphi, n) \in A_2$, такую, что $x \in U$. Отображение $\varphi \circ \varphi_1^{-1}$: $\varphi_1(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$ аналитично в точке $\varphi_1(x)$, отображение $\varphi_3 \circ \varphi^{-1}$: $\varphi(U \cap V) \to \varphi_3(U \cap V)$ аналитично в точке $\varphi(x)$. Следовательно, отображение $\varphi_3 \circ \varphi_1^{-1} = (\varphi_3 \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \varphi_1^{-1})$ аналитично в точке $\varphi_1(x)$, что и требовалось доказать.

§ 2. Определение аналитического многообразия

Пусть X — топологическое пространство.

Структурой *аналитического многообразия* в пространстве X называется класс эквивалентности согласованных атласов этого пространства.

Можно дать и другое определение. Будем говорить, что атлас A *полон*, если любая карта c пространства X, согласованная со всеми картами этого атласа, тоже принадлежит этому атласу. Понятно, что класс эквивалентности всех согласованных атласов данного пространства содержит только один полный атлас. Таким образом, мы приходим ко второму определению: структурой *аналитического многообразия* называется полный атлас пространства X.

Всюду в дальнейшем символ X обозначает топологическое пространство, снабженное фиксированной структурой аналитического многообразия; его полный атлас мы будем обозначать через $A(X)$. Говоря о картах этого пространства, мы будем иметь в виду только карты атласа $A(X)$.

Пусть $x \in X$. *Размерностью* $\dim_x X$ *многообразия* X *в точке* x называется размерность любой карты c, такой, что $x \in O(c)$. Функция $x \mapsto \dim_x X$ локально постоянна на X. Если эта функция — глобальная константа, равная n, то мы говорим, что многообразие X имеет всюду одинаковую размерность, и называем его *n-мерным многообразием*.

В частных случаях, представляющих наибольший интерес, принята следующая терминология:

если $k = \mathbf{R}$, говорят, что X — *вещественное аналитическое* многообразие;

если $k = \mathbf{C}$, говорят, что X — *комплексное аналитическое* многообразие;

если $k = \mathbf{Q}_p$, где p — некоторое простое число, говорят, что X есть *p-адическое аналитическое* многообразие.

§ 3. Топологические свойства многообразий

Пусть $x \in k^n$, $n \in \mathbf{Z}$, $n \geqslant 0$, и пусть $r \in \mathbf{R}$, $r > 0$. Обозначим через $B(r)(x)$ шар радиуса r с центром в точке x, т. е. полицилиндр $P(s)(x)$, где $s = (r, \ldots, r)$.

Подмножество $B \subset X$ мы будем называть *шаром* в том случае, когда имеется карта $c = (U, \varphi, n)$, такая, что $B \subset U$ и $\varphi(B)$ — обычный шар в пространстве k^n. Следующие свойства почти очевидны.

(1) Каждая точка $x \in X$ обладает окрестностью, которая является шаром. В частности, X — локально

полное метрическое пространство (и следовательно, пространство Бэра).

(2) Если k — локально компактное поле, то шар пространства X компактен. В частности, если X — хаусдорфово пространство, то оно локально компактно.

(3) Предположим, что X — регулярное пространство, а k — неархимедово поле. Тогда каждая точка $x \in X$ обладает базисом окрестностей, одновременно открытых и замкнутых.

Из всех перечисленных свойств только последнее, пожалуй, не совсем очевидно; докажем его. Пусть B — шар многообразия X, содержащий точку x, и пусть $c = (U, \varphi, n)$ — карта этого многообразия, такая, что $B \subset U$ и $\varphi(B)$ — шар в k^n. В силу известных свойств неархимедовых полей шар $\varphi(B)$ является открытым множеством пространства k^n. Таким образом, само множество B тоже открыто в X. Поскольку пространство X регулярно, найдется окрестность V точки x, такая, что $V \subset B$ и V замкнута в X. Рассмотрим совокупность всех шаров с центром в точке $\varphi(x)$, содержащихся в множестве $\varphi(V)$, и возьмем их прообразы (при отображении φ). Нетрудно видеть, что множество этих прообразов образует фундаментальную систему окрестностей точки x, каждая из которых одновременно открыта и замкнута.

Замечание. В добавлении 1 к этой главе приведен пример Г. Бергмана, показывающий, что свойство 3, вообще говоря, не имеет места, если предполагать пространство X лишь хаусдорфовым.

§ 4. Простейшие примеры многообразий

1. X — дискретное пространство ($n = 0$).

2. $X = V$, где V — конечномерное векторное пространство над k, $\dim_k V = n$. Обозначим через A набор карт вида $c = (V, \varphi, n)$, где $\varphi\colon V \to k^n$ — линейный изоморфизм. Легко проверяется, что все эти карты согласованы, т. е. множество A образует атлас пространства V, которое таким образом наделяется структурой аналитического многообразия.

3. Пусть X — многообразие и U — его открытое подмножество. Возьмем полный атлас $A(X)$ нашего многообразия и рассмотрим множество

$$A_U = \{c \in A(X) \mid O(c) \subset U\}.$$

Очевидно, A_U является полным атласом множества U. Подпространство U вместе с этим атласом называется *открытым подмногообразием* многообразия X.

4. Пусть X — топологическое пространство, и пусть $X = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$. Предположим, что

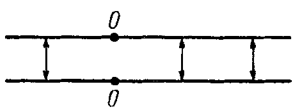
а) все множества U_i открыты в X;

б) каждое подпространство U_i наделено структурой аналитического многообразия;

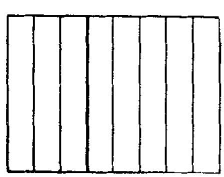
в) для любых i и j структуры аналитического многообразия, индуцированные на $U_i \cap U_j$ многообразиями U_i и U_j, совпадают.

Тогда в пространстве X существует единственная структура аналитического многообразия, индуцирующая на множествах U_i заданную структуру.

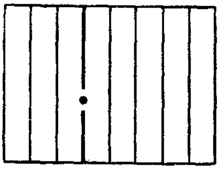
5. Прямая с „двойной точкой". Пусть $k = \mathbf{R}$. Возьмем два экземпляра поля $\mathbf{R}$ и отождествим их во всех точках, кроме нуля:



Полученное многообразие X можно интерпретировать как факторпространство. Для этого рассмотрим плоскость $\mathbf{R}^2$, расслоенную на прямые:



Если отождествить между собой все точки каждого слоя, то факторпространством будет обыкновенная прямая $\mathbf{R}$. Выколем теперь из $\mathbf{R}^2$ начало координат и отождествим только те точки, которые лежат в связной компоненте каждого слоя:



Факторпространством будет в точности прямая с двойным нулем.

Заметим, что построенное многообразие не является хаусдорфовым.

§ 5. Морфизмы

Пусть X и Y — два аналитических многообразия. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *аналитическим* отображением, или *морфизмом*, если

(1) отображение f непрерывно;

(2) отображение f „локально аналитично", т. е. существуют атлас A пространства X и атлас B пространства Y, такие, что для любых двух карт $c = (U, \varphi, m) \in A$ и $d = (V, \psi, n) \in B$ композиция

$$\varphi(W) \xrightarrow{\varphi^{-1}} W \xrightarrow{f} V \xrightarrow{\psi} \psi(V)$$

аналитична (здесь $W = U \cap f^{-1}(V)$).

Замечания. 1. Условие 2 мы назвали „локальной аналитичностью", поскольку в координатной записи композиция $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ задается набором n аналитических функций от m переменных.

2. Свойство непрерывного отображения f быть морфизмом не зависит от выбора атласов A и B. Это можно показать примерно теми же рассуждениями, которые использовались при доказательстве

того факта, что согласованность атласов есть отношение эквивалентности.

Следующие формальные свойства морфизмов почти непосредственно следуют из определения.

1) Композиция морфизмов тоже является морфизмом.

2) Тождественное отображение 1_X: $X \to X$ является морфизмом.

3) Пусть заданы отображения f: $X \to Y$ и g: $Y \to X$, такие, что $g \circ f = 1_X$ и $f \circ g = 1_Y$. Отображение f является *аналитическим изоморфизмом* в том и только в том случае, когда отображения f и g — морфизмы.

Сформулируем без доказательства следующий гораздо более глубокий результат.

Теорема. *Пусть k — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики и f: $X \to Y$ — морфизм аналитических многообразий. Для того чтобы отображение f было аналитическим изоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы оно было гомеоморфизмом.*

Замечание. Утверждение теоремы неверно для $k = \mathbf{R}$. Действительно, противоречащим примером может служить отображение f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, задаваемое формулой $f(x) = x^3$.

§ 6. Произведения и суммы

1. Произведения. Пусть $\{X_i\}_{i \in I}$ — конечное семейство аналитических многообразий. Обозначим через A_i атлас пространства X_i $(i \in I)$. Пусть $c_i = (u_i, \varphi_i, n_i) \in A_i$. Положим

$$\coprod_{i \in I} c_i = \left(\prod_{i \in I} U_i, \prod_{i \in I} \varphi_i, \sum_{i \in I} n_i\right),$$

$$X = \prod_{i \in I} X_i,$$

$$A = \left\{ \prod_{i \in I} c_i \mid c_i \in A_i, i \in I \right\}.$$

Очевидно, X — топологическое пространство и A — его атлас. Пространство X со структурой аналитического многообразия, определенной атласом A, называется *произведением многообразий* $\{X_i\}_{i\in I}$.

Легко проверяется, что справедливо обычное свойство универсальности произведения: для всякого многообразия Y

$$\operatorname{Mor}\left(Y, \prod_{i\in I} X_i\right) = \prod_{i\in I} \operatorname{Mor}(Y, X_i).$$

2. Сумма, или несвязное объединение. Пусть $\{X_i\}_{i\in I}$ — произвольная совокупность многообразий. Обозначим через $\sum\limits_{i\in I} X_i$, или $\coprod\limits_{i\in I} X_i$, несвязное объединение топологических пространств $\{X_i\}_{i\in I}$. В пространстве $X = \coprod X_i$ существует (см. пример 4, § 4) единственная структура аналитического многообразия, согласованная с заданной структурой каждого многообразия X_i; такое аналитическое многообразие X называется *суммой*, или *несвязным объединением* многообразий.

Легко проверяется, что справедливо обычное свойство универсальности суммы: для всякого многообразия Y

$$\operatorname{Mor}\left(\coprod_{i\in I} X_i, Y\right) = \prod_{i\in I} \operatorname{Mor}(X_i, Y_i).$$

В добавлении 2 к этой главе с помощью несвязных объединений будет описано строение компактных аналитических многообразий, определенных над локально компактным неархимедовым полем.

§ 7. Ростки аналитических функций

Пусть $x \in X$, и пусть $\mathscr{F}$ — множество пар вида (U, φ), где U — открытая окрестность точки x и φ — аналитическая функция на U. Множество $\mathscr{F}_x$ иногда называют множеством *локальных функций* в точке x. Мы введем в этом множестве отношение эквивалентности.

Будем говорить, что два элемента $(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathscr{F}_x$ *эквивалентны*, если найдется такая открытая окрестность W точки x, что $W \subset U \cap V$ и $\varphi | W = \varphi | V$. Соответствующее множество классов эквивалентности обозначается через $\mathscr{H}_x$ и называется множеством *ростков аналитических функций в точке* x, или *локальным кольцом точки* x.

В множестве $\mathscr{H}_x$ естественным образом вводится структура кольца. Пусть f и g — ростки функций в точке x, выберем их представителей $(U, \varphi) \in f$ и $(V, \psi) \in g$. Положим $W = U \cap V$. Сумма ростков $f + g$ определяется как класс, содержащий пару $(W, f | W + g | W)$, а произведение $f \cdot g$ — как класс, содержащий пару $(W, (f | W) \cdot (g | W))$. Легко проверяется, что эти определения корректны, т. е. не зависят от выбора представителей.

Имеем каноническое отображение $k \to \mathscr{F}_x$, сопоставляющее элементу $\alpha \in k$ пару (X, c_α), где c_α — аналитическая функция, принимающая всюду на X постоянное значение α. Это отображение индуцирует каноническое вложение i: $k \to \mathscr{H}_x$, которое превращает кольцо $\mathscr{H}_x$ в k-алгебру.

Имеем также другое каноническое отображение $\mathscr{F}_x \to k$, относящее каждой паре $(U, \varphi) \in \mathscr{F}_x$ элемент $\varphi(x)$. Это отображение индуцирует канонический сюръективный гомоморфизм θ: $\mathscr{H}_x \to k$. Образ $\theta(f)$ элемента $f \in \mathscr{H}_x$ обозначим через $f(x)$ и назовем его *значением ростка* f *в точке* x. Ядро $\mathfrak{m}_x$ эпиморфизма θ является, разумеется, максимальным идеалом.

Поскольку $\theta \circ i = \mathrm{id}_k$, постольку k-модуль $\mathscr{H}_x$ разлагается каноническим образом в прямую сумму:

$$\mathscr{H}_x = i(k) \oplus \mathfrak{m}_x.$$

Как правило, мы будем отождествлять $i(k)$ и k.

Нетрудно показать, что $\mathscr{H}_x$ — локальное кольцо. Мы докажем более сильное утверждение.

Лемма. *Пусть* (u, φ, n) — *некоторая карта многообразия в точке* x. *Беря всевозможные композиции отображения* φ *с локальными аналитическими функциями в окрестности точки* $0 \in k^n$, *мы получаем изоморфизм* $\bar{\varphi}$: $\mathscr{H}_0 \to \mathscr{H}_x$, *такой, что* $\bar{\varphi}(\mathfrak{m}_0) = \mathfrak{m}_x$. (*Здесь*

$\mathscr{H}_0$ обозначает кольцо ростков аналитических функций в точке $0 \in k^n$, а $\mathfrak{m}_0$ — его максимальный идеал.) Кольцо $\mathscr{H}_0$ изоморфно локальному кольцу сходящихся степенных рядов от n переменных.

Доказательство. Все утверждения леммы очевидны, за исключением, возможно, последнего, касающегося локальности кольца сходящихся степенных рядов от n переменных. Для того чтобы его доказать, нам надо установить, что любой сходящийся степенной ряд f, для которого $f(0) \neq 0$, обратим в нашем кольце. Поскольку $f(x) = a + \psi(x)$, (где $a \in k$, $a \neq 0$ и $\psi(0) = 0$) и поскольку функция $g(y) = 1/y$ аналитична в точке a, композиция $g \circ f = 1/f$ аналитична в точке $0 \in k^n$. Лемма доказана.

Пусть $f \in \mathscr{H}_x$ $(f \neq 0)$. Наименьшее целое неотрицательное число μ, такое, что $f \notin \mathfrak{m}_x^{\mu+1}$, обозначим $\operatorname{ord}_x f$. Выбрав некоторую карту (u, φ, n) точки x, мы можем с помощью предыдущей леммы интерпретировать число $\mu + 1$ как степень первой ненулевой однородной компоненты ряда $\bar{\varphi}(f)$.

§ 8. Касательное и кокасательное пространства

Пусть $x \in X$. По определению

$T_x^*X = \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ — *кокасательное пространство в точке* x,

$T_xX = (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*$ — *касательное пространство в точке* x.

Касательное пространство допускает еще два эквивалентных описания.

1) *Пространство T_xX канонически изоморфно пространству дифференцирований v: $\mathscr{H}_x \to k$*[1]).

Действительно, пусть $v \in T_xX$. Тогда v представляет собой некоторую линейную форму на $\mathfrak{m}_x$, аннулирующуюся на $\mathfrak{m}_x^2$. Продолжим эту форму на все пространство $\mathscr{H}_x = k \oplus \mathfrak{m}_x$, полагая $v = 0$ на k. По-

[1]) То есть линейных отображений v: $\mathscr{H}_x \to k$, таких, что $v(f \cdot g) = (vf)\, g(x) + f(x)\,(vg)$, где $f, g \in \mathscr{H}_x$. — *Прим. перев.*

кажем, что такая форма v: $\mathscr{H}_x \to k$ является дифференцированием. Поскольку v — линейное отображение (над k), нам надо показать, что

$$v(f \cdot g) = (vf)\, g(x) + f(x)(vg)$$

для любых f, $g \in \mathscr{H}_x$. Заметим, однако, что левая и правая части этого соотношения билинейны по f и g, а потому нам достаточно установить его для трех частных случаев:

(а) f, $g \in k$;

(б) $f \in k$ и $g \in \mathfrak{m}_x$ или $f \in \mathfrak{m}_x$ и $g \in k$;

(в) f, $g \in \mathfrak{m}_x$.

Если имеют место случаи (а) или (в), то обе части нашего соотношения равны нулю; в случае (б) наше соотношение вытекает непосредственно из того факта, что отображение v линейно и обращается в нуль на k.

Обратно, пусть задано дифференцирование θ: $\mathscr{H}_x \to k$. Из свойств дифференцирования легко следует, что θ аннулируется на k и на $\mathfrak{m}_x^2$ и потому однозначно определяет некоторую форму v на пространстве $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$, т. е. некоторый касательный вектор $v \in T_xX$. Описанное соответствие, как легко проверить, является изоморфизмом.

2) *Пространство T_xX канонически изоморфно пространству C_x «классов кривых, касающихся друг друга в точке x».*

Сначала точно определим пространство C_x. Пусть $\mathscr{F}'_x$ — множество пар (N, ψ), где N — открытая окрестность точки $0 \in k$ и ψ: $N \to X$ — морфизм, такой, что $\psi(0) = x$. Введем в множестве $\mathscr{F}'_x$ следующее отношение эквивалентности. Пусть $(N_i, \varphi_i) \in \mathscr{F}'_x$, $i = 1, 2$. Выберем в точке x какую-нибудь карту (u, φ, n). Отображение $\varphi \circ \psi_i$ $(i = 1, 2)$ определено в окрестности нуля $N \cap \psi_i^{-1}(u)$. Мы скажем, что две «кривые» (N_1, ψ_1) и (N_2, ψ_2) *эквивалентны* (или *касаются в точке* x), если $D(\varphi \circ \psi_1)(0) = D(\varphi \circ \psi_2)(0)$. Через C_x обозначим множество соответствующих классов эквивалентности элементов множества $\mathscr{F}'_x$.

Заметим кстати, что отображение, сопоставляющее каждой паре $(N, \psi) \in \mathscr{F}'_x$ производную $D(\varphi \circ \psi)(0)$, определяет биекцию $\bar{\varphi}$: $C_x \to \mathrm{Hom}_k(k, k^n) = k^n$. Наличие таковой позволяет ввести в C_x структуру векторного пространства над полем k.

Нетрудно проверить, что эта структура и само определение множества C_x не зависят от выбора карты (u, φ, n). В самом деле, пусть (u', φ', n) — другая карта в точке x, и пусть $(N, \psi) \in \mathscr{F}'_x$. Легко видеть, что

$$D(\varphi' \circ \varphi)(0) = D(\varphi' \circ \varphi^{-1})(0) \circ D(\varphi \circ \psi)(0).$$

Полученная формула показывает, что эквивалентность двух кривых не зависит от выбора карты. Кроме того, отсюда следует, что $\bar{\varphi}' = D(\varphi' \circ \varphi^{-1})(0) \circ \bar{\varphi}$, а это означает, что структура векторного пространства на множестве C_x тоже определена корректно.

Для того чтобы установить наличие канонического изоморфизма между C_x и T_xX, построим спаривание[1] $C_x \times \overset{*}{T}_x X \xrightarrow{\omega} k$. Для этого рассмотрим вначале естественное спаривание $\mathscr{F}'_x \times \mathscr{F}_x \to k$, сопоставляющее паре элементов $(N, \psi) \in F'_x$, $(V, f) \in \mathscr{F}_x$ элемент $D(f \circ \psi)(0) \in k$. Стандартные выкладки, использующие координатную запись, показывают, что такое спаривание индуцирует *невырожденное* спаривание $C_x \times \overset{*}{T}_x X \xrightarrow{\omega} k$, которое и позволяет отождествить C_x с пространством, двойственным к пространству $\overset{*}{T}_x X$.

Замечания. 1. Спаривание ω можно интуитивно представлять себе просто как дифференцирование данной функции по направлению, касательному к данной кривой.

2. Если бы мы захотели ввести структуру векторного пространства на множестве производных более

---

[1]) *Спариванием* двух векторных пространств V и V' называется билинейное отображение $V \times V' \to k$; спаривание называется *невырожденным*, если индуцированные им отображения $V \to V'^*$ и $V' \to V^*$ суть изоморфизмы. — *Прим. перев.*

высокого порядка так, как мы это делали для множества C_x, то нас постигла бы неудача. Причина кроется в том, что производные более высокого порядка от композиции двух функций уже не зависят билинейным образом от производных этих функций.

Пример. Пусть X — конечномерное векторное пространство V, тогда

$$T_xV = \mathrm{Hom}_k(k, V) = V,$$
$$T_x^*V = \mathrm{Hom}_k(V, k) = V^*.$$

Введем теперь два связанных между собой основных понятия: дифференциал функции и касательное к морфизму отображение.

Пусть $f \in \mathscr{H}_x$; очевидно, $f - f(x) \in \mathfrak{m}_x$. Образ элемента $f - f(x)$ в факторпространстве $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 = T_x^*X$ называется *дифференциалом* локальной функции f в точке x и обозначается df_x.

Пусть $v \in T_xX$. Значение v на элементе df_x называется *производной* локальной функции f *по направлению* v и обозначается $< v, df_x >$ или $v \cdot f_x$. Элемент df_x можно мыслить себе как линейную форму на пространстве T_xX.

Каждая аналитическая функция, заданная в окрестности точки x, определяет элемент кольца $\mathscr{H}_x$, а вместе с ним линейную форму $df_x \in (T_xX)^*$.

Пусть даны два аналитических многообразия X и Y, морфизм $\varphi\colon X \to Y$ и две точки $x \in X$, $y \in Y$, такие, что $\varphi(x) = y$. Определим отображение

$$T_x\varphi\colon T_xX \to T_yY$$

формулой

$$\langle T_x\varphi(v), df_y\rangle = \langle v, d(f \circ \varphi)_x\rangle$$

для всех $v \in T_xX$ и всех $f \in \mathscr{H}_x$. Можно определить отображение $T_x\varphi$ и через его транспозицию

$$T_x^*\varphi\colon T_y^*Y \to T_x^*X;$$

именно для любого $f \in \mathscr{H}_x$ полагаем

$$T_x^*\varphi(df_y) = d(f \circ \varphi)_x.$$

Линейное отображение $T_x\varphi$ называют обычно *касательным отображением* морфизма φ.

В частном случае, когда $Y=k$, а φ — есть аналитическая функция f, имеем $T_x f = Df_x$.

В заключение этого параграфа мы рассмотрим несколько простых свойств касательных пространств произведений многообразий. Пусть X, Y — два аналитических многообразия, и пусть $x \in X$, $y \in Y$. Имеют место следующие две формулы:

$$T_{(x,y)}X \times Y = T_x X \times T_y Y,$$
$$\overset{*}{T}_{(x,y)}X \times Y = \overset{*}{T}_x X \times \overset{*}{T}_y Y.$$

Пусть, далее, $\varphi\colon X \times Y \to Z$ — морфизм, для которого $\varphi(x, y) = z$. Отображение $T_{(x,y)}\varphi$ определяет два других отображения

$$T^X_{(x,y)}\varphi\colon T_x X \to T_z Z$$

и

$$T^Y_{(x,y)}\varphi\colon T_y Y \to T_z Z,$$

удовлетворяющие соотношению

$$T_{(x,y)}\varphi(v, w) = T^X_{(x,y)}\varphi(v) + T^Y_{(x,y)}\varphi(w).$$

Отображения $T^X\varphi$ и $T^Y\varphi$ называются *частными производными* морфизма φ по X и по Y соответственно.

§ 9. Теорема об обратной функции

Пусть $x \in X$ и $f_1, \ldots, f_m$ — аналитические функции, определенные в некоторой окрестности U точки x. Положим $F(y) = (f_1(y), \ldots, f_m(y))$, где $y \in U$. Будем говорить, что набор $\{f_i\}_{1 \leqslant i \leqslant m}$ определяет в точке x *систему координат*, если существует такая открытая окрестность $U' \subset U$, что $(U', F|U', m)$ — карта многообразия X в точке x.

Теорема 1. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) *набор* $\{f_i\}$ *определяет систему координат в точке* x;

(2) *дифференциалы* df_{ix} *образуют базис пространства* $\overset{*}{T}_x X$.

Эта теорема является следствием другой, более общей теоремы.

Теорема 2. *Пусть* $\varphi: X \to Y$ — *морфизм двух многообразий, и пусть* $\varphi(x) = y$ $(x \in X,\ y \in Y)$. *Тогда следующие условия эквивалентны*:

(1) φ — *локальный изоморфизм*;

(2) $T_x\varphi$ — *изоморфизм*;

(2′) $T^*_x\varphi$ — *изоморфизм*.

Доказательство. Импликации $(1) \Rightarrow (2)$ и $(2) \Leftrightarrow (2)'$ очевидны. Импликация $(2) \Rightarrow (1)$ следует из теоремы 4 гл. II, поскольку рассматриваемый вопрос носит локальный характер.

Определение. Морфизм $\varphi: X \to Y$, удовлетворяющий эквивалентным условиям теоремы 2, называется *наложением*[1]) в точке x. Отображение φ, которое является *наложением* в каждой точке $x \in X$, называется просто *наложением*.

§ 10. Регулярные, корегулярные и локально линейные отображения[2])

Определение. Пусть $\varphi: X \to Y$ и $\bar{\varphi}: \bar{X} \to Y$ — два морфизма.

Будем говорить, что они *локально подобны в точках* $x \in X$ и $\bar{x} \in \bar{X}$, если существуют такие открытые окрестности U, V, $\bar{U}$, $\bar{V}$ точек x, $\varphi(x)$, $\bar{x}$, $\bar{\varphi}(\bar{x})$ соответственно и такие изоморфизмы $g: U \to \bar{U}$ и $h: V \to \bar{V}$, что

(1) $\varphi(U) \subset V$ и $\bar{\varphi}(\bar{U}) \subset \bar{V}$;

(2) $g(x) = \bar{x}$ и $h(\varphi(x)) = \bar{\varphi}(\bar{x})$;

(3) диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi} & V \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ \bar{U} & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & \bar{V} \end{array}$$

коммутативна.

---

[1]) В оригинале „étale". — *Прим. перев.*

[2]) В оригинале соответственно „immersions", „submersions", „subimmersions". — *Прим. перев.*

Замечание. Мы будем пользоваться этим определением, как правило, в том случае, когда $\bar{X}$, $\bar{Y}$ — линейные пространства и $\bar{\varphi}$ — линейное отображение; при этом без лишних оговорок будет предполагаться, что $\bar{x}=0$ и $\bar{y}=0$.

Пусть X и Y — два многообразия, $x \in X$, $y \in Y$, $\varphi\colon X \to Y$ — морфизм, для которого $\varphi(x)=y$, и пусть $m=\dim_x X$ и $n=\dim_y Y$.

1. Регулярные отображения. Теорема 1. *Следующие свойства эквивалентны:*

(1) *отображение $T_x\varphi$ инъективно;*

(2) *существуют такие открытые окрестности U точки x, V — точки y, W — точки $0 \in k^{n-m}$ и такой изоморфизм $\psi\colon V \to U \times W$, что*

(а) $\varphi(U) \subset V$;

(б) *коммутативна диаграмма*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "i"'] & V \arrow[d, "\psi"] \\ & U \times W, \end{tikzcd}$$

где i — естественное отображение $U \to U \times \{0\} \subset U \times W$;

(3) *отображение φ локально подобно в точке x линейной инъекции $\bar{\varphi}\colon E \to F$, где E и F — векторные пространства размерностей m и n соответственно;*

(4) *существуют такие функции $\{f_i\}$ и $\{g_j\}$, определяющие системы координат в точках x и y соответственно, что $f_i = g_i \circ \varphi$ при $1 \leqslant i \leqslant m$ и $0 = g_j \circ \varphi$ при $m+1 \leqslant j \leqslant n$;*

(5) *существуют такие открытые окрестности U точки x и V — точки y и такой морфизм $\sigma\colon V \to U$, что $\varphi(U) \subset V$ и $\sigma \circ \varphi = \mathrm{id}_U$.*

Доказательство. Импликации (2)$\Rightarrow$(3)$\Rightarrow$(4)$\Rightarrow$(5)$\Rightarrow$(1) очевидны. Докажем, что (1)$\Rightarrow$(2). Поскольку все рассматривается локально, мы можем предполагать, что а) Y — открытое подмножество в k^n;

б) $\varphi(x) = 0$ и $\operatorname{Im}(T_x\varphi) = k^m \times \{0\} \subset k^m \times k^{n-m} = k^n$.

Обозначим множество $\{0\} \times k^{n-m} (\subset k^n)$ через W. Определим отображение $\varphi'\colon X \times W \to Y$ формулой $\varphi'(x, w) = \varphi(x) + w$. По теореме об обратной функции φ' является локальным изоморфизмом в точке x. Урезая, если нужно, пространства X, Y и W, мы можем считать φ' изоморфизмом. Искомый изоморфизм ψ есть просто отображение φ'^{-1}. Теорема доказана.

Определение. Морфизм φ, удовлетворяющий эквивалентным условиям предыдущей теоремы, называется *регулярным* в точке x. Морфизм, регулярный во всех точках $x \in X$, называется просто *регулярным*.

2. Корегулярные отображения. Теорема 2. *Следующие свойства эквивалентны:*

(1) *отображение $T_x\varphi$ сюръективно;*

(2) *существуют такие открытые окрестности U точки x, V — точки y, W — точки $0 \in k^{m-n}$ и такой изоморфизм $\psi\colon U \to V \times W$, что*

(а) $\varphi(U) = V$;

(б) *коммутативна диаграмма*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & V \\ V \times W \arrow[ur, "p"'] & \end{tikzcd}$$

где p обозначает проекцию $V \times W \to V$;

(3) *отображение φ локально подобно в точке x линейной сюръекции $\bar{\varphi}\colon E \to F$, где E и F — векторные пространства размерностей m и n соответственно;*

(4) *существуют такие наборы функций $\{f_i\}$ и $\{g_j\}$, определяющие системы координат в точках x и y соответственно, что $f_i = g_i \circ \varphi$ для $1 \leqslant i \leqslant n$;*

(5) *существуют такие открытые окрестности U точки x и V — точки y и такой морфизм $\sigma\colon V \to U$, что $\varphi(U) \subset V$ и $\varphi \circ \sigma = \mathrm{id}_V$.*

Доказательство проводится точно так же, как в предыдущей теореме, и предоставляется читателю в качестве упражнения.

Определение. Морфизм φ, удовлетворяющий эквивалентным условиям предыдущей теоремы, называется *корегулярным* в точке x. Морфизм, корегулярный во всех точках $x \in X$, называется просто *корегулярным*.

Замечания. 1. Наложениями являются в точности те морфизмы, которые одновременно регулярны и корегулярны.

2. Иногда мы будем употреблять выражение „морфизм φ имеет максимальный ранг“. Это означает, что отображение $T_x\varphi$ инъективно, если $m \leqslant n$, или сюръективно, если $m \geqslant n$.

3. Вложения. Определение. Морфизм φ называется *вложением*, если

(а) φ — регулярный морфизм;

(б) φ: $X \to \varphi(X)$ — гомеоморфизм.

4. Локально линейные отображения. Определение. Морфизм φ: $X \to Y$ называется *локально линейным в точке* x, если выполнены следующие эквивалентные условия:

(1) морфизм φ в точке x локально подобен композиции морфизмов $\overline{X} \xrightarrow{s} \overline{Z} \xrightarrow{i} Y$, где s — корегулярное, а i — регулярное отображения;

(2) морфизм φ в точке x локально подобен линейному отображению $\bar{\varphi}$: $E \to F$, где E и F — векторные пространства размерностей m и n соответственно.

Если морфизм φ является локально линейным во всех точках $x \in X$, мы будем называть его просто *локально линейным*.

Замечания. 1. Множество точек $x \in X$, в которых морфизм φ: $X \to Y$ регулярен (соответственно корегулярен, локально линеен), есть открытое подмножество многообразия X.

2. Композиция двух регулярных (соответственно корегулярных) морфизмов является регулярным (соответственно корегулярным) морфизмом. Аналогичное утверждение для локально линейных морфизмов неверно.

Теорема 3. *Предположим, что основное поле k имеет нулевую характеристику. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *морфизм φ локально линеен в точке x;*

(2) *ранг отображения $T_{x'}\varphi$ постоянен для всех точек x' из некоторой окрестности U точки x.*

Доказательство. Импликация (1)$\Rightarrow$(2) очевидна. Докажем, что (2)$\Rightarrow$(1).

Обозначим через p размерность образа $\operatorname{Im}(T_x\varphi)$. Поскольку все рассматривается локально, мы можем считать, что

(а) $Y = V_1 \times V_2$ — открытое множество в $k^n = k^p \times k^{n-p}$;

(б) $\varphi(x) = 0$ и $\operatorname{Im}(T_x\varphi) = k^p \times \{0\}$.

Пусть $\pi: k^p \times k^{n-p} \to k^p$ — проекция на первый сомножитель. Очевидно, композиция $\pi \circ \varphi$ корегулярна. Следовательно, мы можем считать, что

(в) $X = V_1 \times U_2$ — открытое множество в $k^p \times k^{m-p} = k^m$, причем $x = 0$;

(г) композиция $\pi \circ \varphi$: $V_1 \times V_2 \to V_1$ есть проекция на первый сомножитель.

Таким образом, морфизм φ имеет следующий вид:

$$\varphi(x_1, x_2) = (x_1, \psi(x_1, x_2)), \quad x_1 \in V_1, \quad x_2 \in U_2.$$

Наконец, мы можем считать, что ранг $T_{x'}\varphi$ постоянен (именно равен p) на всем $V_1 \times U_2$. Докажем, что отображение ψ не зависит от x_2 в некоторой окрестности нуля. Для этого заметим прежде всего, что $D_2\psi(x_1, x_2) = 0$. В противном случае морфизм ψ имел бы в точке (x_1, x_2) ранг, строго больший p. Наше утверждение вытекает теперь из следующей леммы.

Лемма. *Пусть f: $V \times U \to k$ — аналитическая функция, такая, что $D_2 f \equiv 0$. Если поле k имеет* *нулевую характеристику, то функция f локально не зависит от аргумента, пробегающего сомножитель U.*

Доказательство леммы. В окрестности нуля функция f представляется степенным рядом $\sum f_\alpha(y)\, x^\alpha\, (x \in V,\ y \in U)$. Равенство $D_2 f \equiv 0$ означает, что $D_2 f_2 \equiv 0$ для всех α. Нам надо показать, что $f_\alpha \equiv c_\alpha$, где $c_\alpha \in k$. Задача, таким образом, свелась к случаю $f = f_\alpha$. Мы можем считать теперь, что $f = \sum b_\beta y^\beta\, (b_\beta \in k)$. Из свойств степенных рядов и равенства $D_2 f \equiv 0$ вытекает, что $\beta_i b_\beta = 0$, где $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_r)$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Но так как характеристика поля k равна нулю, $b_\beta = 0$, если $\beta \neq 0$, т. е. функция f постоянна, и т. д.

Для того чтобы закончить доказательство теоремы, представим морфизм φ как композицию морфизмов

$$V_1 \times U_2 \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} V_1 \xrightarrow{\mathrm{id}_{V_1} \times \psi} V_1 \times V_2.$$

Очевидно, первый морфизм корегулярен, а второй регулярен. Теорема доказана.

Следствие 1. *Предположим, что поле k имеет нулевую характеристику. Тогда множество точек $x \in X$, в которых морфизм локально линеен, всюду плотно в X.*

Доказательство. Обозначим указанное множество через X' и положим $f(x) = \mathrm{rk}\, T_x\varphi$. Согласно предыдущей теореме, функция f локально постоянна на X'. Наше следствие вытекает теперь непосредственно из двух очевидных свойств функции f:

а) она принимает целочисленные значения и локально ограничена;

б) она полунепрерывна снизу.

Следствие 2. *Предположим, что поле k имеет нулевую характеристику и отображение φ инъективно. Тогда множество точек $x \in X$, в которых морфизм φ регулярен, всюду плотно в X.*