Это вытекает из следствия 1 и того факта, что инъективное локально линейное отображение регулярно.

§ 11. Конструирование многообразий. Прообразы

1. Принцип единственности. Теорема 1. *Пусть X — топологическое пространство, A и B — два его полных атласа. Обозначим через X_A (соответственно X_B) аналитическое многообразие, определенное в пространстве X атласом A (соответственно атласом B). Следующие условия эквивалентны:*

(1) $X_A = X_B$, *т. е.* $A = B$;

(2) *для любого многообразия* Y

$$\operatorname{Mor}(Y,\ X_A) = \operatorname{Mor}(Y,\ X_B);$$

(3) *для любого многообразия* Y

$$\operatorname{Mor}(Y,\ X_A) = \operatorname{Mor}(Y,\ X_B).$$

Доказательство. Настоящая теорема есть частный случай общей теоремы, согласно которой функтор определяет объект однозначно с точностью до изоморфизма. Тем не менее мы приведем доказательство ввиду его большой простоты.

Импликация (1)$\Rightarrow$(2) очевидна.

Покажем, что (2)$\Rightarrow$(1). Положим $Y = X_A$. Очевидно, тождественное отображение id_X: $X_B \to X_A$ является морфизмом; аналогично морфизмом является также отображение id_X: $X_A \to X_B$. Значит, атласы A и B согласованы и, следовательно, совпадают, поскольку они полны.

Доказательство эквивалентности (1)$\Leftrightarrow$(3) также просто.

Сформулируем теперь две леммы, которые понадобятся, когда мы будем применять предыдущую теорему.

Пусть f: $X \to Y$ — морфизм двух многообразий, Z — произвольное третье многообразие.

Лемма 1. *Пусть f — регулярный морфизм. Отображение $g\colon Z \to X$ является морфизмом тогда и только тогда, когда*

(1) *отображение g непрерывно*;

(2) $f \circ g \in \mathrm{Mor}(Z, Y)$.

Лемма 2. *Пусть f — корегулярный морфизм. Тогда*

(1) *отображение f открыто*; *в частности, множество $f(X)$ открыто в Y*;

(2) *если $f(X) = Y$, то*

$$g \in \mathrm{Mor}(Y, Z) \Leftrightarrow g \circ f \in \mathrm{Mor}(X, Z).$$

Леммы 1 и 2 непосредственно следуют из локального описания регулярных и корегулярных морфизмов, данного в § 10.

2. Прообразы. Пусть X — топологическое пространство, Y — многообразие и $f\colon X \to Y$ — *непрерывное* отображение.

Теорема 2. *Пусть пространство X можно снабдить структурой аналитического многообразия, так чтобы отображение f было регулярным морфизмом. Тогда эта структура единственна.*

Доказательство. По лемме 1 для всякого многообразия Z множество $\mathrm{Mor}(Z, X)$ определяется лишь топологической структурой пространства X и аналитической структурой многообразия Y. Следовательно, согласно теореме 1, структура многообразия в пространстве X определена однозначно, ч. т. д.

Пусть $x \in X$. Мы скажем, что пара (X, f) *удовлетворяет условию* (Im) *в точке* x, если

(Im) существуют открытая окрестность U точки x в пространстве X, карта (V, φ, n) многообразия Y и линейное подпространство $E \subset k^n$, такие, что

(а) $f(U) \subset V$ и $f\colon U \to f(U)$ — гомеоморфизм;

(б) $\varphi(f(U)) = E \cap \varphi(V)$.

Если это условие выполняется для всех точек $x \in X$, то мы скажем, что пара (X, f) *удовлетворяет условию* (Im).

Теорема 3. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) *в пространстве X существует структура аналитического многообразия, относительно которой отображение f является регулярным морфизмом;*

(2) *пара (X, f) удовлетворяет условию* (Im).

Доказательство. Импликация $(1) \Rightarrow (2)$ следует из теоремы 1 § 10.

Покажем, что, обратно, $(2) \Rightarrow (1)$. Выберем открытое покрытие $\{U_i\}_{i \in I}$ пространства X, такое, что для каждого индекса $i \in I$ найдутся карта $c_i = (V_i, \varphi_i, n_i)$ и линейное подпространство $E_i \subset k^{n_i}$, удовлетворяющие следующим двум условиям:

(а) $f(U_i) \subset V_i$ и $f\colon U_i \to f(U_i)$ — гомеоморфизм;

(б) $\varphi_i(f(U_i)) = E \cap \varphi_i(V_i)$.

Каждое множество U_i естественным образом наделяется структурой аналитического многообразия, относительно которой отображение $f \mid U_i$ регулярно. Далее, по теореме 2 структуры, индуцированные множествами U_i и U_j на пересечении $U_i \cap U_j$, совпадают. Но, как мы знаем (§ 4, пример 4), пространство X можно снабдить структурой аналитического многообразия, согласованной с первоначальными структурами на множествах U_i. Остается заметить, что отображение f является регулярным морфизмом относительно введенной структуры. Теорема доказана.

Пусть пара (X, f) удовлетворяет условию (Im). Из теоремы 1 и 2 в совокупности вытекает, что пространство X обладает единственной структурой аналитического многообразия, при которой отображение f становится регулярным морфизмом. Эту аналитическую структуру в пространстве X мы будем называть *структурой прообраза* (относительно f) или просто *индуцированной структурой*. Соответствующее аналитическое многообразие будем обозначать через X_f в тех случаях, когда мы захотим подчеркнуть зависимость этой структуры от f.

Рассмотрим несколько приложений предыдущих результатов.

А. Подмногообразия. Пусть Y — некоторое многообразие, X — его подпространство (наделенное индуцированной топологией), и пусть $i\colon X \to Y$ — отображение вложения. Мы будем говорить, что X — *подмногообразие* в Y, если пара (X, f) удовлетворяет условию (Im). Заметим, что из этого условия, в частности, вытекает, что пространство X локально замкнуто в Y.

Пусть $x \in X$. Мы будем говорить, что X является *локальным подмногообразием* в точке x, если выполнено одно из трех эквивалентных условий:

(1) пара (X, i) удовлетворяет условию (Im) в точке x;

(2) существует открытая окрестность $U \subset Y$ точки x, такая, что $U \cap X$ — подмногообразие в U;

(3) в некоторой подходящей локальной системе координат $(x_1, \ldots, x_n)$ в точке x множество X в некоторой окрестности этой точки задается уравнениями $x_1 = \ldots = x_p = 0$ $(p \leqslant n)$.

Б. Локальный гомеоморфизм. Если отображение $f\colon X \to Y$ — локальный гомеоморфизм, то пара (X, f) удовлетворяет условию (Im). Морфизм $f\colon X_f \to Y$ в этом случае является наложением.

В. Прообразы точек. Пусть $f\colon X \to Y$ — морфизм многообразий, и пусть $b \in Y$. Обозначим через X_b прообраз $f^{-1}(b)$. Изучим вложение $X_b \subset X$ в окрестности некоторой точки $a \in X_b$.

Теорема 4. *Для того чтобы множество X_b в точке a было локальным подмногообразием в X, достаточно выполнения любого из следующих трех условий:*

(1) *морфизм f корегулярен в окрестности точки a;*

(2) *существует подмногообразие $W \subset X$, такое, что*

(а) $W \subset X_b (a \in W)$,

(б) $T_a W = \operatorname{Ker} \left(T_a X \xrightarrow{T_a f} T_b Y\right)$;

(3) (А. Вейль) *существуют многообразие Z, точка $c \in Z$ и морфизм $g\colon Z \to X$, такие, что*

(а) $f \circ g(z) = b$ *для всех* $z \in Z$,

(б) $g(c) = a$,

(в) *последовательность линейных отображений*

$$T_cZ \xrightarrow{T_cg} T_aX \xrightarrow{T_af} T_bY$$

точна.

В каждом из этих трех случаев имеем

$$T_a(X_b) = \operatorname{Ker}\left(T_aX \xrightarrow{T_af} T_bY\right).$$

Доказательство. (1) Наше утверждение немедленно вытекает из локального описания корегулярного морфизма.

(2) Докажем более сильное утверждение: существует открытая окрестность $U \subset X$ точки a, такая, что $U \cap X_b = U \cap W$.

Ввиду локального характера нашей задачи мы можем считать, что X — открытая окрестность точки $0 \in k^m$ и что $X = W \times V$. Определим отображение

$$F\colon X \to W \times Y$$

формулой

$$F(w, v) = (w, f(w, v)),$$

Поскольку морфизм F регулярен в точке 0, мы можем считать, урезая, если нужно, X, что F инъективно. Тогда

$$X_b \subset F^{-1}(W \times \{b\}) = W \times \{0\} = W.$$

т. е. $X_b = W$ в окрестности точки a.

(3) Докажем более сильное утверждение: существуют открытая окрестность $W \subset Z$ точки c, открытая окрестность $U \subset X$ точки a, разложение $W = W_1 \times W_2$ и морфизм $\varphi\colon W_1 \to X$, такие, что

(а′) φ — изоморфизм W_1 на подмногообразие $\varphi(W_1) \subset X$;

(б′) морфизм g представим в виде композиции

$$W_1 \times W_2 \xrightarrow{pr_1} W_1 \xrightarrow{\varphi} X;$$

(в′) $U \cap X_b = g(W)$.

Тем самым, в частности, будет доказана корегулярность морфизма g в точке c.

В силу локального характера задачи мы можем предполагать, что Z — открытая окрестность точки $c=0$ в пространстве k^p. Можно считать, что эта окрестность имеет вид $Z=W_1\times W_3$, причем $T_0^{W_1}(g)$ — изоморфизм, а $T_0^{W_3}(g)$ — нулевое отображение. Положим $\varphi=g\,|\,W_1$. Поскольку морфизм φ регулярен в нуле, можно предполагать, урезая, если нужно, множество W_1, что φ есть изоморфизм W_1 на подмногообразие в X. Ввиду свойств (а) и (в) образ $\varphi(W_1)$ удовлетворяет условию (2). В силу доказанного выше найдется открытая окрестность $U\subset X$ точки a, такая, что $U\cap X_b=U\cap\varphi(W_1)$. Открытое множество $g^{-1}(U)=W$ является окрестностью нуля в $W_1\times W_3$, причем $g(W)\subset U\cap X_b$.

Ясно, что морфизм g отображает W в $\varphi(W_1)$. Нетрудно видеть также, что отображение $g\colon W\to\varphi(W_1)$ корегулярно в точке 0. Урезав подходящим образом W_1 и W_2, мы получим разложение $W=W_1\times W_2$, удовлетворяющее условиям (а) и (б). Для того чтобы выполнялось свойство (в), достаточно сузить окрестность U.

Теорема доказана.

Г. Трансверсальные подмногообразия. Пусть X — многообразие, Y_1 и Y_2 — его подмногообразия и $x\in Y_1\cap Y_2$.

Теорема 5. *Следующие три свойства равносильны:*

(1) $T_xX=T_xY_1+T_xY_2$;

(2) *точка x обладает картой $c=(U,\varphi,n)$, такой, что*

$$\varphi(U)=V_1\times V_2\times W,$$

$$\varphi(U\cap Y_1)=V_1\times\{0\}\times W,$$

$$\varphi(U\cap Y_2)=\{0\}\times V_2\times W;$$

(3) *в точке x существуют локальные координаты $(x_1,\ldots,x_n)$, такие, что в окрестности этой точки Y задается уравнениями $x_1=\ldots=x_p=0$, а Y_2 — уравнениями $x_{p+1}=\ldots=x_{p+q}=0$, где p, q — целые неотрицательные числа, $p+q\leqslant n$.*

Доказательство. Импликации (2)$\Leftrightarrow$(3) и (2)$\Rightarrow$(1) очевидны. Докажем, что (1)$\Leftrightarrow$(3).

Поскольку Y_1 и Y_2 — подмногообразия в X, можно (урезав, если надо, пространство X) найти такие корегулярные морфизмы

$$f_1\colon X \to k^p, \quad f_2\colon X \to k^q,$$

что $Y_i = f_i^{-1}(0)$, $i = 1, 2$. Условие (1) показывает, что отображение $(f_1, f_2)\colon X \to k^p \times k^q$ корегулярно в точке x. Это позволяет отождествить координаты $(x_1, \ldots, x_{p+q})$ произведения $k^p \times k^q$ с частью локальных координат $(x_1, \ldots, x_n)$ в точке x. Следовательно, (1)$\Rightarrow$(3). Теорема доказана.

Если Y_1 и Y_2 удовлетворяют одному из эквивалентных условий предыдущей теоремы, то говорят, что подмногообразия Y_1 и Y_2 *трансверсальны в точке* x.

Следствие. *Пусть подмногообразия Y_1 и Y_2 трансверсальны в точке x. Тогда*

(1) *Y_1 и Y_2 трансверсальны в некоторой окрестности этой точки;*

(2) *пересечение $Y_1 \cap Y_2$ является локальным подмногообразием многообразия X в точке x;*

(3) $T_x(Y_1 \cap Y_2) = T_xY_1 \cap T_xY_2$.

Д. Трансверсальные морфизмы. Рассмотрим пару морфизмов $f_i\colon Y_i \to X$, $i = 1, 2$. Положим

$$Y_1 \times {}_XY_2 = \{(y_1, y_2) \in Y_1 \times Y_2 \mid f_1(y) = f_2(y)\}.$$

Это множество называется *расслоенным произведением* Y_1 и Y_2 над X. Положим

$$f = f_1 \circ p_1 = f_2 \circ p_2,$$

где

$$p_i\colon Y_1 \times {}_XY_2 \to Y_i$$

ограничение отображения

$$\mathrm{pr}_i\colon Y_1 \times Y_2 \to Y_i$$

(см. диаграмму).

$$\begin{tikzcd} Y_1 \times_X Y_2 \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] \arrow[dr, dashed, "f"] & Y_2 \arrow[d, "f_2"] \\ Y_1 \arrow[r, "f_1"'] & X \end{tikzcd}$$

Пусть $(y_1, y_2) \in Y_1 \times_X Y_2$, и пусть $x = f(y_1, y_2)$. Будем говорить, что морфизмы f_1 и f_2 *трансверсальны в точке* $y = (y_1, y_2)$, если $T_X X = \operatorname{Im}(T_{y_1} f_1) + \operatorname{Im}(T_{y_2} f_2)$,

Теорема 6. *Пусть морфизмы f_1 и f_2 трансверсальны в точке y. Тогда*

(1) *морфизмы f_1 и f_2 трансверсальны в некоторой окрестности точки y в $Y_1 \times_X Y_2$;*

(2) *множество $Y_1 \times_X Y_2$ в точке y является локальным подмногообразием в $Y_1 \times Y_2$;*

(3) $T_y(Y_1 \times_X Y_2) = T_{y_1}(Y_1) \times_{T_x(X)} T_{y_2}(Y_2)$.

Набросок доказательства. Положим $Y = Y_1 \times Y_2$ и $Z = Y_1 \times_X Y_2$. Обозначим через δ_i: $Y \to Y \times X$ отображение $(\mathrm{id}_Y, f_i \circ \mathrm{pr}_i)$ и положим $\delta = \delta_i | Z$. Теорема вытекает из следующих трех утверждений:

а) морфизмы δ_1 и δ_2 являются изоморфизмами многообразия Y на подмногообразия в $Y \times X$;

б) подмногообразия $\delta_1(Y)$ и $\delta_2(Y)$ трансверсальны в точке $\delta(y)$;

в) $\delta(Z) = \delta_1(Y) \cap \delta_2(Y)$.

Подробности предоставляем читателю.

Замечания. 1. Если хотя бы одно из отображений f_i корегулярно, то морфизмы f_1 и f_2 всюду трансверсальны.

2. Если в описанной выше ситуации f_1 есть вложение *подмногообразия* Y_1 в многообразие X и если f_1 и f_2 трансверсальны в точке y, то мы будем говорить, что морфизм f_2 *трансверсален над* Y_1 в точке y.

§ 12. Конструирование многообразий. Фактормногообразия

Пусть X — многообразие и $R \subset X \times X$ — некоторое отношение эквивалентности. Обозначим через X/R множество классов эквивалентности относительно R

и через p: $X \to X/R$ — каноническую проекцию. Снабдим множество X/R обычной фактортопологией. Именно: множество $\bar{U} \subset X/R$ открыто в том и только в том случае, если множество $p^{-1}(\bar{U}) \subset X$ открыто.

Теорема 1. *Если в пространстве X/R существует структура аналитического многообразия, относительно которой отображение p является корегулярным морфизмом, то такая структура единственна.*

Доказательство. По лемме 2 из § 11 множество $\mathrm{Mor}(X/R, Z)$ для любого многообразия Z зависит лишь от аналитической структуры пространства X. Следовательно, по теореме 1 из § 11 структура многообразия на факторпространстве X/R определена однозначно, ч. т. д.

Если ситуация, описанная в предыдущей теореме, имеет место, то мы называем пространство X/R *фактормногообразием* (или просто многообразием), а отношение R — регулярным отношением эквивалентности.

Теорема 2 (Годеман). *Следующие условия эквивалентны:*

(1) *отношение R регулярно* (*т. е.* X/R) — *многообразие*;

(2) (а) R — *подмногообразие в* $X \times X$;

(б) pr_2: $R \to X$ — *корегулярный морфизм.*

Доказательство (1)$\Rightarrow$(2). Пусть выполнено условие (1). Покажем, что тогда выполнено условие (2). Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} & X \\ {\scriptstyle \mathrm{pr}_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \xrightarrow[p]{} & X/R \end{array}$$

Очевидно, множество R совпадает с $X \times_{X/R} X$. Поскольку отображение p корегулярно, множество R является подмногообразием в $X \times X$ (см. теорему 6 из § 11 и замечание 1). Далее, если $(x, y) \in R$ и $z = p(x) = p(y)$, то

$$T_{x,\, y}(R) = T_x(X) \times_{T_z(X/R)} T_y(X).$$

Последнее равенство, в частности, показывает, что отображение $T_{(x,\, y)}(R) \to T_y(X)$ сюръективно, и, следовательно, ограничение проекции pr_2 на R — корегулярный морфизм (ср. с упражнением 5 ниже).

(2)$\Rightarrow$(1). Для удобства доказательство этой импликации будет представлено в виде последовательности лемм.

Пусть U — подмножество в X. Положим $R_U = R \cap (U \times U)$. Напомним, что подмножество $U \subset X$ называется *насыщенным* относительно отношения эквивалентности R, если $U = p^{-1}p(U)$.

Лемма 1. *Пусть* $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, *где каждое подмножество* U_i *открыто и насыщено в* X, *причем факторпространство* U_i/R_{U_i} — *многообразие. Тогда* X/R *также является многообразием.*

Доказательство. По условию все отображения $U_i \to U_i/R_{U_i}$ корегулярны. Поэтому для любых двух индексов $i, j \in I$ структуры аналитических многообразий, индуцированные многообразиями U_i/R_i и U_j/R_j на $U_i \cap U_j/R_{U_i \cap U_j}$, совпадают (теорема 1). На множестве X/R имеется, следовательно, единственная структура многообразия, согласованная с заданными структурами на множествах U_i/R_{U_i}. Наконец, отображение p корегулярно, так как для всех i ограничение $p \mid U_i$ является корегулярным морфизмом.

Лемма 2 *Отображение* p *открыто (т. е. если подмножество* $U \subset X$ *открыто, то открытым будет и подмножество* $p^{-1}p(U)$).

Доказательство. $p^{-1}p(U) = \mathrm{pr}_2\,((U \times X) \cap R)$. Но множество $\mathrm{pr}_2((U \times X) \cap R)$ открыто в X, поскольку проекция pr_2 корегулярна (лемма 2 из § 11).

Лемма 3. *Если существует такое открытое подмножество $U \subset X$, что $p^{-1}p(U) = X$ и U/R_U — многообразие, то факторпространство X/R также является многообразием.*

Доказательство. Каноническое отображение $\alpha: U/R_U \to X/R$ — гомеоморфизм. Если мы докажем теперь, что $\beta: X \to U/R_U$ — корегулярный морфизм, то, перенеся структуру аналитического многообразия с U/R_U на X/R, мы превратим факторпространство X/R в аналитическое многообразие, причем отображение p будет корегулярно. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} & (U \times X) \cap R \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_2"] & \\ U \arrow[dr, "\beta \mid U"'] & & X \arrow[dl, "\beta"] \\ & U \mid R_U & \end{tikzcd}$$

Отображение $(\beta \mid U) \circ \mathrm{pr}_1 = \beta \circ \mathrm{pr}_2$, как легко видеть, корегулярно. Значит, поскольку проекция pr_2 корегулярна, отображение β является морфизмом, и даже корегулярным (лемма 11.2).

Комбинируя леммы 1, 2 и 3, мы получаем следующее утверждение.

Лемма 4. *Если существует такое открытое покрытие $\{U_i\}_{i \in I}$ многообразия X, что все U_i/R_i — многообразия, то факторпространство X/R также является многообразием.*

Суть леммы 4 заключается в том, что наша задача о построении структуры многообразия на факторпространстве X/R (при условии корегулярности отображения p) приобрела теперь локальный характер. Остальные две леммы будут посвящены решению этой локальной задачи. Именно: мы покажем, что для каждой точки $x_0 \in X$ найдется такая ее открытая окрестность $U \subset X$, что фактормножество U/R_U обладает структурой многообразия, относительно которой проекция $U \to U/R_U$ корегулярна.

Лемма 5. *Пусть* $x_0 \in X$. *Тогда существуют открытая окрестность* U *точки* x_0, *подмногообразие* $W \subset U$ *и морфизм* $r: U \to W$, *такие, что для любой точки* $u \in U$ *имеет место сравнение* $r(u) \equiv u \pmod{R}$, *причем* $r(u)$ — *единственный элемент из* W, *удовлетворяющий этому сравнению.*

Доказательство. Обозначим через N множество всех касательных векторов $\xi \in T_{x_0}(X)$, таких, что $(\xi, 0) \in T_{(x_0, x_0)}(R)$. Выберем подмногообразие $W' \subset X$, проходящее через точку x_0, касательное пространство $T_{x_0}W' = K$ к которому является дополнительным к подпространству $N \subset T_{x_0}X$. Положим $\Sigma = (W' \times X) \cap R$.

Мы утверждаем, что

1°. Σ — подмногообразие в R;

2°. pr_2: $\Sigma \to X$ — наложение в точке (x_0, x_0).

Сразу заметим, что pr_1: $R \to X$ — корегулярный морфизм, поскольку морфизм pr_2 корегулярен и R — симметричное отношение. Утверждение 1° получается применением теоремы 6 из § 11 к проекции pr_1: $R \to X$ и вложению i: $W' \to X$.

Далее, из определения N ясно, что

$$\mathrm{Ker}\,(T_{(x_0, x_0)}(\mathrm{pr}_2)) \simeq N \cap K.$$

Поскольку $N \cap K = (0)$, заключаем, что $T_{(x_0, x_0)}(\mathrm{pr}_2)$ — инъекция. С другой стороны, отображение $T_{(x_0, x_0)}(\mathrm{pr}_2)$ сюръективно. Действительно, пусть $\eta \in T_{x_0}X$. Возьмем любой вектор $\xi \in T_{x_0}X$ (например, $\xi = \eta$), такой, что $(\xi, \eta) \in T_{(x_0, x_0)}R$. Представим ξ в виде $\xi = \xi_1 + \xi_2$, где $\xi_1 \in N$ и $\xi_2 \in K$. Тогда $(\xi_2, \eta) \in T_{(x_0, x_0)}R$, поскольку $N \times \{0\} \subset T_{(x_0, x_0)}R$. Следовательно, элемент (ξ_2, η) лежит в пересечении $T_{x_0}W' \cap T_{(x_0, x_0)}R$. Остается заметить, что $T_{x_0}W' \cap T_{(x_0, x_0)}R = T_{(x_0, x_0)}\Sigma$ (теорема 5 из § 11) и $T_{(x_0, x_0)}(\mathrm{pr}_2)(\xi_2, \eta) = \eta$.

Итак, доказано, что наше отображение есть локальный изоморфизм в точке (x_0, x_0). Поэтому найдутся такие окрестности U_1 и U_2 точки x_0, что

$pr_2\colon \Sigma \cap (U_1 \times U_1) \to U_2$ — изоморфизм. Обозначим через f обратное отображение. A priori морфизм f имеет вид: $f(x) = (r(x), x)$. Заметим, что $U_2 \subset U_1$ и $r(x) = x$, если $x \in U_2 \cap W'$. Первое очевидно, а второе вытекает из того обстоятельства, что точки (x, x), $(r(x), x)$ лежат в $\Sigma \cap (U_1 \times U_1)$ и их образы в U_2 совпадают.

Положим, наконец,

$$U = \{x \in U_2 \mid r(x) \in U_2 \cap W'\}$$

и

$$W = U \cap W'.$$

Множество U, очевидно, является открытым.

Мы должны установить, что

(а) $r(U) \subset W$,

(б) $r(x)$ — единственный элемент в W, эквивалентный элементу x $(x \in U)$.

Установим это.

(а) Пусть $x \in U$. Нужно показать, что $r(x) \in U$, т. е. $r(x) \in U_2$ и $r(r(x)) \in U_2 \cap W'$. Первое очевидно; что же касается второго, то достаточно заметить, что $r(x) \in U_2 \cap W'$ и $r(r(x)) = r(x)$.

(б) Если $y \equiv r(x)$ и $y \in W$, то $(y, x) \in R \cap (W \times U)$. Но поскольку $(r(x), x) \in R \cap (W \times U)$ и проекция $pr_2\colon R \cap (W \times U) \to U$ инъективна, точки $r(x)$ и y совпадают.

Лемма 6. *Если тройка (U, W, r) удовлетворяет условиям предыдущей леммы, то пространство U/R_U является фактормногообразием.*

Доказательство. Морфизм $r\colon U \to W$ обладает обратным справа (вложение W в U), поэтому отображение r корегулярно. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "r"] \arrow[dr] & & W \arrow[dl, "\alpha"] \\ & U/R_U & \end{tikzcd}$$

Очевидно, отображение α — гомеоморфизм. Остается перенести структуру многообразия с W на U/R_U.

Теорема доказана.

Замечание. Если отношение R регулярно, то фактормногообразие X/R является хаусдорфовым тогда и только тогда, когда множество R замкнуто в $X\times X$ (это непосредственно следует из леммы 2).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть задана конечная группа G автоморфизмов многообразия X; обозначим через X^G множество неподвижных точек (относительно действия этой группы). Предположим, что порядок группы G взаимно прост с характеристикой p поля k. Показать, что

а) любая точка $x\in X^G$ обладает локальной системой координат, относительно которой действие группы G записывается линейно;

б) X^G — подмногообразие в X и

$$T_x(X^G)=T_x(X)^G\,(x\in X^G).$$

2. Пусть k — совершенное поле характеристики $p\neq 0$, и X — произвольное многообразие над полем k. Доказать, что на топологическом пространстве X существует единственная структура многообразия (обозначим ее X^p) со следующими свойствами:

(i) для всякого многообразия Y множество $\operatorname{Mor}(X^p, Y)$ состоит из всех морфизмов $f\colon X\to Y$, таких, что $T_x(f)=0$ для всех $x\in X$;

(ii) отображение $f\colon X\to k$ есть X^p-морфизм в том и только в том случае, когда отображение $f^{\frac{1}{p}}\colon X\to k$ $\left(\text{где } f^{\frac{1}{p}}(x)=f(x)^{\frac{1}{p}}\right)$ является X-морфизмом.

Показать затем существование многообразия $X^{p^{-1}}$, такого, что $\left(X^{p^{-1}}\right)^p=X$.

Доказав эти утверждения, определить по индукции многообразия X^q, где $q=p^n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Показать, что $\operatorname{Mor}(X^q, Y^q)=\operatorname{Mor}(X, Y)$. Равенство $X^q=X$ имеет место тогда и только тогда, когда $q=1$ или X дискретно (т. е. $\dim X=0$).

3. Пусть k — локально компактное неархимедово поле, A_v — его кольцо нормирования, $\mathfrak{m}_v = \pi A_v$ — максимальный идеал этого кольца, $k_v = A_v/\mathfrak{m}_v$ и $q = \operatorname{Card} k_v$. Обозначим через B единичный шар $(A_v)^N$ размерности N и положим $B_n = (A_v/\pi^n A_v)^N$, так что $B = \varprojlim B_n$. Пусть X — некоторое подмногообразие в B. Предположим также, что X во всех точках имеет одинаковую размерность d. Пусть X_n — образ многообразия X в B_n и $c_n = \operatorname{Card} X_n$.

а) Доказать существование таких целых чисел $n_0 \geqslant 0$ и $A > 0$, что

$$c_n = A \cdot q^{nd}, \quad n \geqslant n_0.$$

б) Показать, что $A \equiv a (\operatorname{mod} (q-1))$, где $a \in \mathbf{Z}/(q-1)\mathbf{Z}$ — инвариант многообразия X, определенный ниже в добавлении 2 (при этом предполагается также, что $d \geqslant 1$).

4. Пусть X — многообразие и $\{X_i\}_{i \in I}$ — некоторый конечный набор его подмногообразий. Пусть $\bigcap_{i \in I} X_i \neq \varnothing$, и пусть $x \in \bigcap_{i \in I} X_i$. Предположим, что подпространства $T_x(X_i) \subset T_x(X)$ линейно независимы (иными словами, сумма их является прямой). Показать, что найдется карта $c = (U, \varphi, n)$ многообразия $X (x \in U)$, такая, что $\varphi(U \cap X_i)$ есть пересечение $\varphi(U)$ с линейным подпространством пространства k^n.

5. Пусть f_i: $X_i \to X$ $(i = 1, 2)$ — трансверсальные морфизмы и p_i: $X_1 \times_X X_2 \to X_i$ — проекции. Показать, что морфизм p_2 регулярен (соответственно корегулярен или локально линеен), если таковым является морфизм f_1.

6. Пусть f: $X \to Y$ — морфизм многообразий. Предположим, что отображение f открыто и характеристика поля k равна нулю. Доказать, что множество точек пространства X, в которых морфизм f корегулярен, всюду плотно в X.

Добавление 1

ПРИМЕР ХАУСДОРФОВА МНОГООБРАЗИЯ НАД НЕАРХИМЕДОВЫМ ПОЛЕМ k, ОБЛАДАЮЩЕГО ТОЧКОЙ, НЕ ИМЕЮЩЕЙ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ОКРЕСТНОСТЕЙ, ОТКРЫТЫХ И ЗАМКНУТЫХ ОДНОВРЕМЕННО

Настоящий пример принадлежит Бергману.

Пусть k — полное неархимедово поле и A — его кольцо нормирования.

Допустим, что в кольце A имеется такой ненулевой элемент $x \in A$, что факторкольцо A/xA бесконечно.

Мы утверждаем, что A как многообразие аналитически изоморфно многообразию $A \setminus \{0\}$. Для того чтобы это установить, мы покажем, что пространства A и $A \setminus \{0\}$ могут быть представлены в виде несвязного объединения одного и того же числа многообразий, изоморфных A.

Заметим прежде всего, что любой класс смежности по подгруппе $x^\mu A$ ($\mu \in \mathbf{Z}$) аналитически изоморфен A. Очевидно, A есть несвязное объединение всех смежных классов по подгруппе xA. В то же время $A \setminus \{0\}$ есть несвязное объединение следующего набора смежных классов (по подгруппам $x^\mu A$, где μ пробегает все целые числа):

1° смежные классы по подгруппе xA, за исключением самой подгруппы xA;

2° смежные классы группы xA по подгруппе x^2A, за исключением самой подгруппы x^2A;

. . .

μ^0 смежные классы группы $x^{\mu-1}A$ по подгруппе $x^\mu A$, за исключением самой подгруппы $x^\mu A$;

. . .

Поскольку факторкольцо A/xA бесконечно, оба описанные семейства смежных классов имеют одну и ту же мощность.

Приведенную выше конструкцию можно рассматривать также как некую операцию присоединения точки P к шару A:

$$A \subset A \cup \{P\} \simeq A$$

(точке P соответствует во втором экземпляре шара A точка 0). Подобная операция присоединения обладает тремя важными свойствами:

1) $A \cup \{P\}$ — хаусдорфово аналитическое многообразие;

2) точка P принадлежит замыканию множества A;

3) точка P не лежит в замыкании ни одного смежного класса по идеалу $\mathfrak{m}$.

Последнее свойство есть следствие того факта, что точка 0 находится „достаточно далеко“ от любого из смежных классов, которые были введены выше при разбиении пространства $A \backslash \{0\}$.

Повторим указанную операцию счетное число раз. Именно: сначала к пространству A присоединим точку P_0, затем (воспользовавшись аналитическим изоморфизмом $xA \simeq A$) аналогичным образом присоединим точку P_1 к пространству xA и склеим пространства $A \cup \{P_0\}$ и $xA \cup \{P_1\}$ по их общему открытому подмножеству xA. Полученное пространство $A \cup \{P_0\} \cup \{P_1\}$ является хаусдорфовым, так как по свойству 3) точки P_0 и P_1 „достаточно далеко“ отстоят друг от друга. Пусть пространство $A \cup \{P_0\} \cup \{P_1\} \cup \ldots \cup \{P_\mu\}$ уже построено. Пространство $A \cup \{P_0\} \cup \ldots \cup \{P_\mu\} \cup \{P_{\mu+1}\}$ мы определим как результат склеивания пространств $A \cup \{P_0\} \cup \ldots \cup \{P_\mu\}$ и $x^{\mu+1}A \cup \{P_{\mu+1}\}$ по их общему открытому подмножеству $x^{\mu+1}A$. В результате мы приходим к счетной возрастающей последовательности хаусдорфовых многообразий, таких, что каждое последующее содержит предыдущее в качестве своего открытого подмножества. Объединение этих многообразий — множество X — наделяется естественной топологией, относительно которой все его подмножества $A \cup \{P_0\} \cup \ldots \cup \{P_\mu\}$ открыты и обладают исходной топологией.

Так как по нашему построению точки P_0, $P_1, \ldots, P_\mu, \ldots$ находятся „достаточно далеко“ друг от друга, пространство X, получаемое в пределе, является хаусдорфовым. Покажем, что точка $0 \in X$ не имеет фундаментальной системы окрестностей, состоящей из множеств, открытых и замкнутых одновременно. Если бы такая система существовала, то одна из ее окрестностей U содержалась бы в пространстве A. Поскольку совокупность $\{x^\mu A\}$ образует фундаментальную систему окрестностей точки 0, найдется такое целое число μ, что $x^\mu A \subset U$. Обозначив через $\overline{x^\mu A}$ замыкание подмножества $x^\mu A \subset X$, мы видим, что, с одной стороны, $\overline{x^\mu A} \subset U \subset A$, а с другой, $P_\mu \in \overline{x^\mu A}$. Тем самым мы получаем противоречие, поскольку по построению $P_\mu \notin A$.

Замечание. Мы предполагали существование такого полного неархимедова поля k и такого ненулевого элемента $x \in A$, что факторкольцо A/xA бесконечно. Читатель без труда проверит, что поле k обладает этим свойством в том и только в том случае, когда выполняется одно из следующих условий:

1) поле вычетов k_v бесконечно;

2) нормирование поля k имеет недискретную область значений.

Заметим, что неархимедовы поля, не удовлетворяющие ни одному из этих условий, исчерпываются конечными расширениями поля p-адических чисел и полей вида $\mathbf{F}((X))$, где $\mathbf{F}$ — конечное поле.

Добавление 2

СТРОЕНИЕ p-АДИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ

При изучении многообразий над *локально компактным неархимедовым* полем k основную роль играет понятие несвязного объединения.

Пусть X — некоторое аналитическое многообразие; допустим, что его размерность всюду одинакова и равна $n\,(n \geqslant 0)$. Предположим также, что пространство X хаусдорфово и непусто.

Символ $B(r)(x)$ будет, как и прежде, обозначать шар в линейном пространстве k^n радиуса r $(r \in R)$ с центром в точке $x \in k^n$.

Лемма 1. *Шар $B(r)(x)$ $(r>0)$ является открытым и компактным подмножеством пространства k^n. Этим свойством обладает, следовательно, любой шар многообразия X.*

Доказательство. 1°. Компактность. Так как поле k локально компактно, точка x обладает компактной окрестностью U. Мы можем считать поэтому, что для достаточно малого $\varepsilon \in \mathbf{R}$ $(\varepsilon > 0)$ все шары вида $B(s)(x)$, где $s < \varepsilon r$, содержатся в U. Такие шары компактны ввиду их замкнутости. Поскольку абсолютное значение поля k нетривиально, найдется такой ненулевой элемент $\alpha \in k$, что $|\alpha| < \varepsilon$. Преобразование $f(y) = x + \alpha(y - x)$ есть гомеоморфизм шара $B(r)(x)$ на шар $B(|\alpha| r)(x)$, что и доказывает компактность первого шара.

2°. Открытость. Для того чтобы показать, что множество $B(r)(x)$ открыто, приходится существенно пользоваться неархимедовостью поля k. Пусть $y \in B(r)(x)$. Мы утверждаем, что $B(r)(y) = B(r)(x)$. (Это, в частности, означает, что шар $B(r)(x)$ — окрестность точки y.) Поскольку $x \in B(r)(y)$, нам достаточно в силу симметрии доказать включение $B(r)(y) \subset B(r)(x)$. Пусть $x \in B(r)(y)$, тогда

$$|z - x| \leqslant \max(|z - y|, |y - x|) \leqslant r,$$

так что $z \in B(r)(x)$, как и утверждалось.

Замечание. Подобными рассуждениями можно установить следующий факт. Пусть B_1 и B_2 — шары радиусов r_1 и r_2 соответственно, причем $r_1 \leqslant r_2$. Тогда возможны лишь два случая: либо шар B_1 содержится в шаре B_2, либо не пересекается с ним.

Лемма 2. *Пусть B — некоторый шар в пространстве k^n, и пусть U — открытое и замкнутое подмно-*

жество этого шара. Существует такое положительное число r, не превышающее радиуса шара B, что множество U представляется в виде несвязного объединения конечной совокупности шаров радиуса r.

Доказательство. Поскольку множество U открыто, оно может быть представлено в виде объединения некоторой совокупности шаров. Но так как множество U замкнуто и лежит в B, оно является компактным. Следовательно, упомянутую выше совокупность можно считать конечной, а ввиду предыдущего замечания — даже несвязной. Тот факт, что все шары могут быть выбраны одного радиуса, почти очевиден, так как каждый шар радиуса s может быть (в силу замечания и леммы 1) представлен в виде конечного несвязного объединения шаров любого радиуса $s' \leqslant s$.

Замечание. Пусть B — некоторый шар многообразия X, и пусть U — открытое и замкнутое подмножество этого шара. Из доказанной леммы 2 непосредственно вытекает, что U есть несвязное объединение конечного числа шаров.

Теорема 1. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) *многообразие X паракомпактно;*

(2) *многообразие X представляется в виде несвязного объединения шаров.*

Доказательство.

Импликация (2)$\Rightarrow$(1) очевидна, так как несвязное объединение компактных пространств паракомпактно.

Докажем, что (1)$\Rightarrow$(2). Покажем вначале, что пространство X обладает локально конечным покрытием, состоящим из шаров. Так как X — многообразие, оно покрывается некоторой совокупностью шаров $\{U_\lambda\}_{\lambda \in L}$. По условию в это покрытие можно вписать локально конечное открытое покрытие $\{V_\mu\}_{\mu \in M}$. Пользуясь известными теоремами общей топологии, впишем в это покрытие локально конечное замкнутое покрытие $\{W_\nu\}_{\nu \in N}$. Пусть $\varphi: M \to L$ и $\psi: N \to M$ — такие отображения, что $V_\mu \subset U_{\varphi(\mu)}$ и $W_\nu \subset V_{\psi(\nu)}$. Для каждого индекса $\nu \in N$ имеем

$$W_\nu \subset V_{\psi(\nu)} \subset U_{\varphi\psi(\nu)}.$$

Множество W_ν замкнуто и лежит в компактном шаре $U_{\varphi\psi(\nu)}$, следовательно, оно само компактно. Поскольку множество $V_{\varphi(\nu)}$ открыто, найдется конечный набор шаров $B_{\nu,i}$, $i \in I_\nu$, лежащих в $V_{\varphi(\nu)}$ и покрывающих W_ν. Воспользовавшись локальной конечностью покрытия $\{V_\mu\}_{\mu \in M}$, мы можем выбрать указанные шары таким образом, что каждый шар $B_{\nu,i}$ будет пересекаться лишь с конечным числом множеств V_μ. Таким образом, совокупность шаров $\{B_{\nu,i}\}_{\nu \in N,\, i \in I_\nu}$ образует локально конечное покрытие многообразия X, такое, что любой шар $B_{\nu,i}$ пересекается лишь с конечным числом шаров из этой совокупности.

Построенное покрытие обозначим просто $\{U_i\}_{i \in I}$. Обозначим, далее, через $F(I)$ множество всех конечных подмножеств множества I. Для каждого элемента $J \in F(I)$ положим

$$U_J = \bigcap_{i \in J} U_i \cap \Big(X \setminus \bigcup_{j \notin J} U_j\Big).$$

Очевидно, что

$$U_i \cap \Big(X \setminus \bigcup_{j \notin J} U_j\Big) = \bigcap_{j \notin J} (U_i \setminus U_j), \quad i \in J \ (J \neq \varnothing).$$

В правой части лишь для конечного числа членов $U_i \cap U_j \neq \varnothing$. Каждое множество вида $U_i \setminus U_j$ открыто и компактно; следовательно, и множество $U_i \cap \cap \Big(X \setminus \bigcup_{j \in J} U_j\Big)$, будучи пересечением конечного числа множеств $U_i \setminus U_j$, также открыто и компактно. Из всего сказанного следует, что каждое множество U_J (если оно непусто) является открытым компактным подмножеством шара и потому представимо в виде несвязного объединения шаров. Остается заметить, что множества U_J, $J \in F(I)$, по построению попарно не пересекаются. Теорема доказана.

Теорема 2. *Обозначим через q число элементов поля вычетов k_v. Предположим, что многообразие X компактно, непусто и имеет во всех точках одинаковую размерность $n \geqslant 1$. Тогда*

(1) *X есть несвязное объединение конечного числа шаров;*

(2) *число шаров, участвующих в представлении пространства X в виде несвязного объединения, имеет вычет по модулю $(q-1)$, не зависящий от выбора этого представления.*

(Следовательно, такое многообразие X определяется, с точностью до изоморфизма, элементом кольца $\mathbf{Z}/(q-1)\mathbf{Z}$.)

Набросок доказательства. Утверждение (1) есть очевидное следствие компактности многообразия X и теоремы 1.

Что касается утверждения (2), то сначала мы осуществим ряд несложных редукций, которые сведут нашу теорему к некоторому частному случаю. Все проводимые редукции основываются на следующем замечании: любой шар можно разбить на q^i шаров, где i — целое положительное число, не изменив вычета числа шаров по модулю $q-1$.

Итак, пусть X представлено двумя способами в виде конечных несвязных объединений шаров $\{U_i\}_{i \in I}$ и $\{V_j\}_{j \in J}$. Мы должны показать, что $\mathrm{Card}(I) \equiv \mathrm{Card}(J) \pmod{q-1}$.

Шаг 1. Редукция к случаю, когда покрытие $\{U_i\}_{i \in I}$ вписано в покрытие $\{V_j\}_{j \in J}$.

Шаг 2. Редукция к случаю $X = V_j$ и $J = \{j\}$. После этого шага ситуация такова:

а) X — шар в пространстве k^n;

б) U_i — шар в пространстве k^n, $i \in I$;

в) существует набор аналитических изоморфизмов φ_i: $U_i \to X$, $j \in I$, таких, что X есть несвязное объединение множеств $\{\varphi_i U_i\}$.

Шаг 3. Редукция к случаю, когда все отображения φ_i задаются сходящимися степенными рядами.

Шаг 4. Редукция к случаю $\varphi_i = L_i \circ \psi_i$, где L_i — линейный изоморфизм, а ψ_i — аналитический изоморфизм шара на шар. После этого шага мы можем считать, что $\varphi_i = L_i$.

Шаг 5. Чуть ниже мы докажем следующее утверждение. Пусть U — шар в пространстве k^n и L — линейный изоморфизм. Тогда существует такое число r $(r > 0)$, что

1) LU есть несвязное объединение шаров радиуса s, где s — любое положительное число, не превышающее r;

2) число шаров, участвующих в любом таком разложении, равно степени q.

Посмотрим, как из этого утверждения вытекает наша теорема. Пользуясь конечностью множества I и приведенным выше утверждением, мы можем выбрать такое положительное число r, что все множества L_iU_i представляются как несвязные объединения шаров радиуса r. Число шаров, участвующих в разбиении каждого множества L_iU_i, равно q^{m_i}, а число шаров в разбиении всего пространства X (т. е. общее число шаров) равно q^m. Итак,

$$1 \equiv q^m = \sum_{i \in I} q^{m_i} \equiv \sum_{i \in I} 1 = \operatorname{Card}(I) \ (\operatorname{mod}(q-1)),$$

что и доказывает теорему в этом частном случае.

Нам осталось установить справедливость сформулированного выше утверждения. Отметим прежде всего, что число смежных классов по идеалу $\mathfrak{m}_v^\mu$, $\mu \in \mathbf{Z}$, $\mu > 0$ (т. е. число всевозможных сдвигов этого идеала) конечно и равно $\operatorname{Card}(A_v/\mathfrak{m}_v^\mu) = q^\mu$.

Производя подходящие сдвиги и гомотетии, мы можем считать, что центром шара U служит точка 0, $U \subset A_v^n$ и $L \in GL(n, A_v)$, при этом, очевидно, $LU \subset A_v^n$. Используя неархимедовость поля k, легко усмотреть, что шар U, а вместе с ним и множество LU являются

A_v-подмодулями модуля A_v^n. Обозначим через h' число $\operatorname{Card}(A_v^n/LU)$. Это число конечно, так как $h' = \operatorname{Card}(A_v^n/U)$, а пространство A_v^n компактно. Мы видим, таким образом, что множество A_v^n есть несвязное объединение сдвигов подмножества LU.

В силу леммы 2 существует положительное число r, удовлетворяющее требованию 1) нашего утверждения. Докажем, что выполняется и требование 2).

Возьмем любое положительное число $s \leqslant r$ и представим LU в виде несвязного объединения шаров радиуса s; число их обозначим через h. Используя представления A_v^n в виде несвязного объединения сдвигов множества LU, разобьем A_v^n на hh' непересекающихся шаров радиуса s. Мы должны показать, что целое число h имеет вид q^m, где $m \in \mathbf{Z}$ и $m \geqslant 0$. Для этого достаточно установить, что таким свойством обладают числа h' и hh'.

Относительно h' это очевидно. Действительно, $h' = \operatorname{Card}(A_v^n/LU)$, но A_v^n/LU — периодический модуль над кольцом главных идеалов A_v и, следовательно, разлагается в прямое произведение модулей вида $A_v/\mathfrak{m}_v^\mu$. Из числа построенных выше шаров радиуса s выберем тот шар, который содержит точку 0; он, очевидно, имеет вид $(\mathfrak{m}_v^\mu)^n$. Следовательно, $hh' = \operatorname{Card}(A_v^n/(\mathfrak{m}_v^\mu)^n) = (q^\mu)^n$, что и требовалось доказать.

Замечание. Другое доказательство теоремы 2 (использующее аппарат интегрирования дифференциальных форм) читатель сможет прочесть в новом выпуске журнала „Topology“ [1]).

Добавление 3

ТРАНСФИНИТНАЯ p-АДИЧЕСКАЯ ПРЯМАЯ

В связи с теоремой 1 стоит заметить, что существуют непаракомпактные хаусдорфовы многообразия над локально компактным неархимедовым полем k.

---

[1]) См. Серр [1]. — *Прим. перев.*

Мы приведем здесь пример такого многообразия, принадлежащий Бергману.

Мы построим индуктивную систему пространств $\{X_\gamma\}$, индексы которой пробегают первое несчетное (вполне упорядоченное) множество. Индуктивный предел $\varinjlim X_\gamma$ даст нам искомое непаракомпактное многообразие.

В качестве многообразия X_γ мы возьмем экземпляр кольца нормирования A_v поля k. Отображения $X_\delta \to X_\gamma$ для $\delta < \gamma$ мы определим трансфинитной индукцией по γ.

Выберем фиксированный простой элемент π кольца A_v.

1°. $\gamma = 0$. Условие $\delta < \gamma$ в этом случае бессодержательно.

2°. $\gamma = \gamma' + 1$, где γ' — некоторое порядковое число. Отображение $X_{\gamma'} \to X_\gamma$ есть по определению умножение на элемент π. Для производных индексов $\delta < \gamma$ определим отображение $X_\delta \to X_\gamma$ как композицию $X_\delta \to X_{\gamma'} \to X_\gamma$.

3°. γ — предельное порядковое число.

Пусть $Y_\gamma = \varinjlim\limits_{\delta < \gamma} X_\delta$. Пространство Y_γ есть объединение счетного семейства открытых, компактных подпространств $X_\delta\,(\delta < \gamma)$; в частности, пространство Y_γ паракомпактно. По теореме 1 оно есть несвязное объединение шаров. Число этих шаров объязательно должно быть счетным, так как несвязное объединение всегда локально конечно, а в любом локально конечном покрытии лишь конечное число элементов этого покрытия может пересекаться с заданным множеством X_γ. Поскольку пространство $A\setminus\{0\}$ также может быть представлено в виде объединения счетного числа шаров, существует аналитический изоморфизм $\varphi_\gamma\colon Y_\gamma \to A\setminus\{0\}$. Определим для $\delta < \gamma$ отображение $X_\delta \to X_\gamma$ как композицию отображений

$$X_\delta \to Y_\gamma \xrightarrow{\varphi_\gamma} A\setminus\{0\} \subset A = X_\gamma.$$

Таким образом, дано полное индуктивное определение отображений $X_\delta \to X_\gamma\ (\delta < \gamma)$.

Многообразие $X = \varinjlim X_\gamma$ обладает следующими основными свойствами.

1) *Любое счетное семейство $\{K_n\}$ компактных подмножест пространства X содержится в некотором компактном множестве.*

2) *Пространство X некомпактно.*

Доказательство.

1) Поскольку $K_n = \bigcup\limits_\gamma (K_n \cap X_\gamma)$ и поскольку множество X_γ открыто в X, существует номер γ_n, такой, что $K_n \subset X_{\gamma_n}$. Выбрав индекс γ таким образом, чтобы $\gamma_n \leqslant \gamma$ для всех n, мы видим, что $K_n \subset X_\gamma$, а множество X_γ компактно.

2) Некомпактность пространства X очевидна, так как $X_\gamma \neq X$ для любого индекса γ.

Мы предоставляем читателю доказать, что локальное компактное пространство X, обладающее свойствами 1) и 2), не является паракомпактным.

Глава IV

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

Как и прежде, k — поле, полное относительно некоторого нетривиального абсолютного значения.

§ 1. Определение аналитической группы

Пусть множество G наделено одновременно структурой топологической группы и структурой аналитического многообразия (над полем k). Мы будем называть G *аналитической группой* или *группой Ли* (над полем k), если

(1) отображение $G \times G \to G$, задаваемое правилом $(x, y) \mapsto xy$, является морфизмом;

(2) отображение $G \to G$, задаваемое правилом $x \mapsto x^{-1}$, является морфизмом

Замечание 1. *Предположим, что G — аналитическая группа. Тогда*

(а) *пространство G хаусдорфово*;

(б) *пространство G метризуемо*;

(в) *пространство G является полным относительно левой и правой равномерных структур.*

Доказательство.

(а) Известно (см., например, Бурбаки [4*], гл. 3, § 1, п. 2), что пространство топологической группы хаусдорфово тогда и только тогда, когда пересечение всех окрестностей единицы e равно $\{e\}$. В нашем случае это условие выполняется, поскольку пространство G локально изоморфно открытой области в пространстве k^n.

(б) Очевидно, что e обладает счетной фундаментальной системой окрестностей. Метризуемость группы

Ли G есть следствие этого факта и хаусдорфовости пространства G (см. Бурбаки [4*], гл. 9, § 3, п. 1).

(в) Достаточно доказать утверждение только для правой равномерной структуры. Для этого достаточно показать, что единица группы G обладает окрестностью V, полной относительно индуцированной равномерной структуры (см. Бурбаки [4*], гл. 3, § 3, п. 3). Пусть (U, φ, n) — некоторая карта в точке e, причем $\varphi(e)=0$. Выберем такую окрестность V_1 элемента e, что $V_1 \cdot V_1 \subset U$. Закон композиции индуцирует (посредством φ) аналитическое отображение

$$F\colon \varphi(V_1) \times \varphi(V_1) \to \varphi(U).$$

Ясно, что $F(\bar{y}, 0) - F(0, 0) = \bar{y} - 0 = \bar{y}$, где $\bar{y} \in \varphi(V_1)$. Поскольку отображение F аналитично, мы можем найти такую замкнутую окрестность $V \subset V_1$ точки e, что

$$\frac{1}{2}|\bar{y}| \leqslant |F(\bar{y}, \bar{x}) - F(0, \bar{x})| \leqslant 2|y|$$

для всех пар $(\bar{y}, \bar{x}) \in \varphi(V) \times \varphi(V)$. На множестве V возникает кроме первоначальной еще одна равномерная структура, индуцированная (посредством φ) аддитивной структурой линейного пространства k^n. Мы докажем полноту нашей окрестности V, установив согласованность обеих структур. По определению фундаментальную систему окружений правой равномерной структуры пространства V образуют множества $V_W \subset V \times V$, где

1°. W — окрестность точки e, причем $W \subset V$ и $\varphi(W)$ — шар радиуса ε с центром в точке 0;

2°. $V_W = \{(w \cdot x, x) \in V \times V \mid x \in V, w \in W, wx \in V\}$.

С другой стороны, множества

$$N_\delta = \{(\bar{y}, \bar{x}) \in \varphi(V) \times \varphi(V) \,\|\, \bar{y} - \bar{x} | < \delta\} \quad (\delta > 0)$$

образуют фундаментальную систему окружений пространства $\varphi(V)$ относительно равномерной структуры, индуцированной аддитивной структурой линейного пространства k^n. Приведенное выше неравенство означает, что

$$N_{\frac{\varepsilon}{2}} \subset (\varphi \times \psi) V_W \subset N_{2\varepsilon}.$$

Таким образом, мы показали, что две рассматриваемые равномерные структуры пространства V согласованы. Тем самым наше утверждение полностью доказано, поскольку равномерная структура, индуцированная линейным пространством k^n, является полной, а множество V замкнуто.

Примечание. Таким образом, установлено, что левые и правые равномерные структуры локально согласованы с равномерными структурами, индуцированными картами многообразия G.

Замечание 2. Об аксиомах аналитической группы.

(а) *Из аксиомы* (1) *следует, что отображение* $y \mapsto xy$ *при фиксированном* $x \in G$ *есть изоморфизм относительно аналитической структуры многообразия* G.

(б) *Аксиома* (2) *есть следствие аксиомы* (1).

(в) *Из аксиомы* (2) *вытекает, что отображение* $x \mapsto x^{-1}$ *есть изоморфизм*.

Доказательство. Обозначим через $\varphi\colon G \times G \to G$ закон композиции группы G, через $\varphi_x\colon G \to G$ — отображение, задаваемое формулой $\varphi_x(y) = \varphi(x, y)$, и через $\psi\colon G \to G$ — отображение $x \mapsto x^{-1}$. Пусть $T^1\varphi$ и $T^2\varphi$ — первая и вторая частные производные морфизма φ (см. гл. 3, § 8).

Утверждение (а) почти очевидно. Действительно, отображение φ_x является морфизмом, поскольку оно является композицией морфизма $y \mapsto (x, y)$ и морфизма φ. Далее, обратным к этому отображению является морфизм $\varphi_{x^{-1}}$. Заметим, кстати, что линейное отображение $T_y\varphi_x\colon T_yG \to T_{xy}G$ естественным образом отождествляется с отображением $T^2_{(x, y)}\colon T_yG \to T_{xy}G$. Отсюда, в частности, вытекает, что вторая производная $T^2\varphi$ является изоморфизмом.

Утверждение (б) доказывается следующим образом. Рассмотрим морфизм $\theta\colon G \times G \to G \times G$, задаваемый формулой $\theta(x, y) = (x, xy) = (x, \varphi(x, y))$. Отображение θ, как нетрудно видеть, является наложением [1]).

[1]) В категории групп Ли *наложение* совпадает с *накрытием*. — *Прим. перев.*

Действительно, в любой точке (x, y) касательное отображение $T(\theta)$ — изоморфизм, поскольку

$$T(\theta)=\begin{pmatrix} T\mathrm{id}_G & 0 \\ T^1\varphi & T^2\varphi \end{pmatrix}.$$

Пусть $\sigma=\theta^{-1}$. Тогда $\sigma(x, e)=(x, x^{-1})=(x, \psi(x))$ для всех $x\in G$, и, следовательно, отображение ψ является морфизмом.

Утверждение (в) вытекает из соотношения $\psi^2=\mathrm{id}_G$, которое означает, что $\psi^{-1}=\psi$.

§ 2. Простейшие примеры аналитических групп

1. Полные линейные группы. Пусть R — некоторая ассоциативная k-алгебра с единицей, имеющая над k конечную размерность. *Полной линейной* [1]) группой над R называется группа $G_m(R)$ обратимых элементов алгебры R. Мы утверждаем, что $G_m(R)$ — во-первых, аналитическая группа, а во-вторых, открытое подмножество в R. Для доказательства последнего нам достаточно установить, что множество $G_m(R)$ содержит некоторую окрестность единицы в пространстве R. Но в этом пространстве существует такая окрестность U точки 0, что ряд $\sum x^n$ сходится для всех точек $x\in U$. Очевидно, множество $V=\{1-x \mid x\in U\}$ является окрестностью единицы и лежит в $G_m(R)$.

Осталось установить, что группа $G_m(R)$ относительно индуцированной топологии аналитична. Для этого нужно показать, что закон композиции $G_m(R)\times G_m(R)\to$ $\to G_m(R)$ есть аналитическое отображение. Но это очевидно, так как в алгебре R умножение билинейно.

В том частном случае, когда R — кольцо эндоморфизмов $\operatorname{End} V$ конечномерного векторного пространства V над полем k, группа $G_m(R)$ называется *полной линейной группой пространства* V и обозначается

---

[1]) В оригинале „general linear group". — *Прим. перев.*

$GL(V)$. Если $V = k^n$, мы будем писать $GL(n, k)$ вместо $GL(V)$. Каждому элементу $\alpha \in GL(n, k)$ соответствует квадратная обратимая матрица n-го порядка. Поэтому группу $GL(n, k)$ называют также *полной линейной группой матриц n-го порядка над k.*

Предположим, что поле k неархимедово; обозначим через A его кольцо нормирования. Пусть $\alpha = (\alpha_{ij}) \in GL(n, k)$. Следующие условия эквивалентны:

1) матрица α определяет автоморфизм пространства A^n;

2) (а) коэффициенты α_{ij} лежат в кольце A;

(б) определитель матрицы α — обратимый элемент кольца A.

Множество всех матриц $\alpha \in GL(n, k)$, удовлетворяющих этим условиям, обозначим $GL(n, A)$. В силу условия 2) множество $GL(n, A)$ открыто и замкнуто в множестве всех матриц с коэффициентами в A. Следовательно, это множество является также открытым и замкнутым в пространстве $\operatorname{End}(k^n)$. Согласно условию 1), множество $GL(n, A)$ образует группу. Ввиду сказанного выше эта группа аналитична. Мы будем называть ее *полной линейной группой матриц порядка n над A.*

Предположим теперь дополнительно, что поле k локально компактно. В этом случае $GL(n, A)$ — открытая компактная подгруппа группы $GL(n, k)$. В добавлении 1 нами будет доказана следующая

Теорема. *Группа $GL(n, A)$ — максимальная компактная подгруппа группы $GL(n, k)$. Всякая другая максимальная компактная подгруппа этой группы сопряжена с $GL(n, A)$.*

2. Индуцированные аналитические группы. Пусть G — аналитическая группа, H — топологическая группа и i: $H \to G$ — непрерывный гомоморфизм. Предположим, что пара (H, i) удовлетворяет условию (Im) (см. гл. 3, § 11). Группа H является многообразием с индуцированной структурой. Мы утверждаем, что H — аналитическая группа (относительно этой структуры). В самом деле, пусть φ_G и φ_H — законы композиции в группах G и H соответственно. Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H \times H & \xrightarrow{\varphi_H} & H \\ {\scriptstyle i\times i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i} \\ G \times G & \xrightarrow{\varphi_G} & G \end{array}$$

очевидно, коммутативна. Композиция $\varphi_G \circ (i \times i)$ — морфизм, а следовательно, и отображение φ_H — тоже морфизм, поскольку морфизм i регулярен. Аналитичность отображения φ_H, как отмечалось выше, выражает в точности тот факт, что H — аналитическая группа.

Замечания. 1. Проверку того, что пара (H, i) удовлетворяет условию (Im), достаточно проделать только в одной точке e_H (единице группы H). В самом деле, пусть условие (Im) выполнено в e_H. Рассмотрим произвольный элемент $h \in H$ и его образ $g = i(h)$. Введем два отображения φ: $H \to H$ и ψ: $G \to G$, положив $\varphi(x) = h^{-1} \cdot x$ и $\psi(y) = g \cdot y$. Очевидно, $\varphi(h) = e_H$, $\varphi(e_G) = g$ и $i = \psi \circ i \circ \varphi$. Далее, композиция $\psi \circ i$ удовлетворяет условию (Im) в точке e_H, так как ψ — аналитический изоморфизм, а отображение i удовлетворяет условию (Im) в точке e_H. Но поскольку φ — гомеоморфизм, отображение i удовлетворяет условию (Im) также в точке h.

2. Как мы знаем, пара (H, i) удовлетворяет условию (Im), если i — локальный гомеоморфизм (см. гл. 3, § 11). Если, кроме того, i — эпиморфизм, причем $k = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, то мы говорим, что группа H *накрывает* группу G.

3. Подгруппы Ли [1]. Пусть заданы аналитическая группа G и ее подгруппа H, которая в то же время является подмногообразием группы G. Вложение

[1]) В оригинале „group submanifolds". Заметим, что в отечественной литературе по теории групп Ли подгруппами Ли часто называют аналитические группы, индуцированные мономорфизмами, в смысле автора (см. выше). — *Прим. ред.*

i: $H \to G$ есть регулярный гомоморфизм. В силу п. 2 H — аналитическая группа. В такой ситуации мы будем говорить, что H — *подгруппа Ли* группы G.

Замечание. Подгруппа Ли является замкнутым подмножеством объемлющей аналитической группы. Для доказательства этого факта достаточно учесть два хорошо известных факта:

а) любое подмногообразие локально замкнуто в объемлющем многообразии;

б) локально замкнутая подгруппа топологической группы всегда замкнута (см., например, Бурбаки [4], гл. 3, § 2, п. 1, предложение 4).

§ 3. Локальные группы[1])

Топологической локальной группой называется топологическое пространство X, снабженное отмеченным элементом $e \in X$, открытой окрестностью $U \subset X$ этого элемента и парой отображений φ: $U \times U \to X$ и ψ: $U \to U$, таких, что

(1) в некоторой окрестности $V_1 \subset U$ точки e выполняется тождество $x = \varphi(x, e) = \varphi(e, x)$;

(2) в некоторой окрестности $V_2 \subset U$ точки e выполняется тождество $e = \varphi(x, \psi(x)) = \varphi(\psi(x), x)$;

(3) для некоторой окрестности $V_3 \subset U$ точки e выполняется включение $\varphi(V_3 \times V_3) \subset U$, причем $\varphi(x, \varphi(y, z)) = \varphi(\varphi(x, y), z)$, где x, y, z — любые элементы окрестности V_3.

Мы будем говорить о *строгой локальной группе*, если равенства (1), (2), (3) имеют место всякий раз, когда определены обе их части.

Сузив окрестность U, мы всегда можем локальную группу превратить в строгую локальную группу.

В дальнейшем, если это не вызовет недоразумений, мы часто будем писать xy и x^{-1} вместо $\varphi(x, y)$ и $\psi(x)$ соответственно.

Пусть X и Y — две локальные группы. *Локальным гомоморфизмом* f: $X - - \to Y$ называется непрерывное

---

[1]) В оригинале „group chanks“. — *Прим. ред.*

отображение $f: U \to Y$, где U — окрестность точки e_X, такое, что $f(e_X) = e_Y$ и $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ в некоторой окрестности единицы e_X.

Два локальных гомоморфизма $f, f': X \dashrightarrow Y$ назовем *эквивалентными*, если они совпадают в некоторой окрестности точки e_X.

Две локальные группы X и Y называются *эквивалентными*, если существуют такие локальные гомоморфизмы $f: X \dashrightarrow Y$ и $g: X \dashrightarrow X$, что произведения $f \circ g$ и $g \circ f$ эквивалентны тождественным отображениям id_Y и id_X соответственно.

Аналогичные определения можно дать в аналитическом случае. Для этого надо все пространства считать многообразиями, а все отображения — морфизмами.

Пример. Пусть G — топологическая группа и X — открытая окрестность единицы e с очевидной структурой локальной группы. Локальная группа X эквивалентна топологической группе G.

Может возникнуть вопрос: всякая ли локальная группа эквивалентна топологической группе? Положительный ответ можно дать для двух типов локальных групп: для конечномерных аналитических и для метризуемых локально компактных (см. Якоби [1]). Однако ответ отрицателен в случае банаховых локальных аналитических групп (см. Эст и Кортхаген [1]).

§ 4. Продолжение локальных подгрупп

Пусть G — топологическая группа и X — некоторое ее подмножество, содержащее единицу e. Мы скажем, что X — *локальная подгруппа* группы G, если у точки e найдется такая окрестность U в X, что $xy \in X$ и $x^{-1} \in X$ для любых элементов $x, y \in U$.

Пусть X — локальная подгруппа группы G. Рассмотрим множество N всех элементов $g \in G$, для каждого из которых существует такая окрестность U точки e, что $U \cap X = U \cap g^{-1}Xg$. Ясно, что N — подгруппа группы G, содержащая некоторую окрестность единицы (пространства X).

Обозначим через i: $N \to G$ гомоморфизм вложения.

Теорема 4.1. *Пусть* $F = \{U \cap N \mid U$ — *окрестность точки* e *в* $X\}$. *Тогда*

(1) $\mathcal{F}$ *удовлетворяет аксиомам базы фильтра окрестностей единицы, согласованной с групповой структурой в множестве* N;

(2) *относительно топологии, которую* $\mathcal{F}$ *определяет в* N, *отображение* i *непрерывно; оно устанавливает эквивалентность локальных групп* N *и* X.

Доказательство.

(1) Проверим аксиомы (GV'_I), (GV'_{II}), (GV'_{III}) (см. Бурбаки [4*], гл. 3, § 1, п. 2).

Выше было замечено, что некоторая окрестность пространства X содержится в N. Мы можем поэтому считать, что все рассматриваемые окрестности единицы пространства X лежат в N. Возьмем произвольную окрестность $U \in \mathcal{F}$. Мы должны доказать следующие три свойства:

а) существует окрестность $V \in \mathcal{F}$, такая, что $V \cdot V \subset U$;

б) существует окрестность $V \in \mathcal{F}$, такая, что $V^{-1} \subset U$;

в) для любого элемента $g \in N$ найдется окрестность $V \in \mathcal{F}$, такая, что $V \subset gUg^{-1}$.

Первые два утверждения суть очевидные следствия того факта, что отображения $(x, y) \mapsto x \cdot y$ и $x \mapsto x^{-1}$ непрерывны в G, а следовательно, и в X. Утверждение в) вытекает из определения множества N.

(2) По определению топологии в группе N отображение i является локальным гомеоморфизмом пространств N и X в окрестности точки e. В частности, отображение i: $N \to G$ непрерывно в единице, а значит, и всюду (см. Бурбаки [4], гл. 3, § 2, п. 8).

Теорема доказана.

В качестве следствия доказанной теоремы получаем, что любая локальная подгруппа эквивалентна топологической группе.

Замечание. Отображение i: $N \to i(N)$, вообще говоря, не является гомеоморфизмом. Например, если $X = \{e\}$, то N есть G с дискретной топологией.

Предположим теперь, что G — аналитическая группа и X — ее локальная аналитическая подгруппа. Поскольку X — подмногообразие в G, а N и X локально гомеоморфны в единице e_N, пара (N, i) удовлетворяет условию (Im) в точке e_N, а значит, и всюду (см. § 2, п. 2).

Замечание. Таким образом, группа N однозначно наделяется структурой аналитической группы, относительно которой вложение i становится регулярным морфизмом. В частности, локальные аналитические группы N и X эквивалентны.

Рассмотрим более подробно случай архимедовых полей: $k = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$.

В этом случае N локально связна, так что связная компонента H единицы в N является открытой и замкнутой подгруппой Ли группы N. Мы будем говорить, что *H — аналитическая группа, порожденная локальной подгруппой X*. Предположим, что образ $i(H)$ замкнут в G. Мы утверждаем, что отображение i в этом случае является гомеоморфизмом, т. е. на самом деле H — это подгруппа Ли группы G. Действительно, множество $i(H)$ замкнуто в G и потому является пространством Бэра. Далее, группа H локально компактна и связна и, следовательно, представима в виде объединения счетного числа компактов. Наше утверждение свелось, таким образом, к следующей лемме.

Лемма 1. *Пусть A и B — две топологические группы. Предположим, что*

(1) *группа A локально компактна и представима в виде объединения счетного числа компактов;*

(2) *группа B — пространство Бэра;*

(3) *i: $A \to B$ — непрерывный изоморфизм.*

Тогда i является гомеоморфизмом.

Лемма 1 вытекает в свою очередь из следующей леммы.

Лемма 2. *Предположим, что*

(1) *A — локально компактная топологическая группа, представимая в виде объединения счетного числа компактов;*

(2) *B — пространство Бэра;*

(3) *группа A транзитивно и непрерывно действует на B (обозначим это действие через φ: $A \times B \to B$).*

Тогда для каждого элемента $b \in B$ отображение φ индуцирует гомеоморфизм факторпространства A/N_b на B, где N_b — стационарная подгруппа точки b (т. е.

$$N_b = \{x \in A \mid \varphi(x, b) = b\}).$$

Доказательство. См. Бурбаки [5], Ch. 7, app. 1).

§ 5. Однородные пространства и орбиты

Пусть G — группа Ли и H — ее подгруппа Ли. Рассмотрим пространство левых смежных классов G/H. Оно определяется как факторпространство группы G по отношению эквивалентности

$$R = \{(x, y) \in G \times G \mid x^{-1}y \in H\}.$$

Теорема 1. *Отношение эквивалентности R регулярно. Таким образом, пространство G/H однозначно наделяется структурой аналитического многообразия, относительно которой каноническое отображение π: $G \to G/H$ является корегулярным морфизмом.*

Доказательство. Согласно теореме 3.12.2, мы должны проверить, что

1) R — подмногообразие в $G \times G$;

2) проекция pr_2: $R \to G$ — корегулярный морфизм.

Для доказательства первого утверждения рассмотрим отображение p: $G \times G \to G$, определенное формулой $p(x, y) = x^{-1}y$. Очевидно, $R = p^{-1}H$. Ввиду теоремы 3.11.4 нам достаточно показать, что морфизм p корегулярен во всех точках. Пусть $(x, y) \in G \times G$. Введем морфизм φ: $G \to G \times G$, определяемый формулой $\varphi(z)=(x, xz)$. Как видно из определения, $\varphi(x^{-1}y)=(x, y)$ и $p\circ\varphi=\mathrm{id}_G$. Следовательно, морфизм p корегулярен в точке (x, y) (см. гл. III, § 10).

Для доказательства второго утверждения рассмотрим композицию морфизмов

$$G\times H\xrightarrow{\psi}R\xrightarrow{\mathrm{pr}_2}G,$$

где $\psi(x, h)=(xh, x)$. Очевидно, $\mathrm{pr}_2\circ\psi$ есть просто проекция $G\times H\to G$, которая, конечно, является корегулярным морфизмом. Но тогда морфизм pr_2 тоже корегулярен, поскольку ψ отображает $G\times H$ на все R.

Теорема доказана.

Замечания. 1. Каноническое действие группы G на пространстве G/H аналитично. В самом деле, имеет место следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd} G\times G \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_G\times\pi"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\ G\times G/H \arrow[r] & G/H \end{tikzcd}$$

Оба вертикальных отображения этой диаграммы корегулярны, а верхнее отображение аналитично. Отсюда следует аналитичность нижнего отображения.

2. Предположим дополнительно, что H — нормальный делитель группы G. В этом случае G/H — аналитическая группа. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} G\times G \arrow[r] \arrow[d, "\pi\times\pi"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\ G/H\times G/H \arrow[r] & G/H \end{tikzcd}$$

из которой следует аналитичность отображения $G/H\times G/H\to G/H$.

Пусть G — группа Ли, X — аналитическое многообразие и φ: $G\times X\to X$ — некоторый морфизм. Мы скажем, что группа G *действует на X посредством* φ, если

(1) $\varphi(e, x) = x$ для всех $x \in X$;

(2) $\varphi(g, \varphi(h, x)) = \varphi(gh, x)$ для всех $x \in X$ и всех $g, h \in G$.

(В подобной ситуации мы часто будем писать $g(x)$ вместо $\varphi(g, x)$.)

Введем для удобства следующие морфизмы:

$$L_g\colon G \to G, \quad h \mapsto gh \qquad (g \in G);$$
$$M_g\colon G \to G, \quad x \mapsto gx \qquad (g \in G);$$
$$\varphi_x\colon G \to X, \quad g \mapsto gx \qquad (x \in X).$$

Очевидно, L_g и M_g — аналитические изоморфизмы, причем $\varphi_x = M_g \circ \varphi_x \circ L_{g^{-1}}$.

Воспользовавшись последним соотношением, можно сформулировать следующий принцип однородности.

(ПО) *Пусть P — некоторое локальное свойство. Тогда φ_x обладает свойством P в том и только в том случае, если φ_x обладает этим свойством (хотя бы) в одной точке группы G.*

Зафиксируем точку $x_0 \in X$ и обозначим через H стационарную подгруппу этой точки:

$$H = \{h \in G \mid hx_0 = x_0\}.$$

Далее, условимся вместо φ_{x_0} писать просто φ_0.

Теорема 2. *Предположим, что φ_0 — локально линейный морфизм. Тогда*

(1) *H — подгруппа Ли группы G;*

(2) *индуцированное отображение $\bar{\varphi}_0\colon G/H \to X$ — регулярный морфизм.*

Доказательство. Первое свойство вытекает из определения локально линейного морфизма и теоремы 3.11.4. В силу той же теоремы $\operatorname{Ker} T_g\varphi_0 = T_g(gH)$.

Отсюда ясно, что отображение $T_{\pi g}\bar{\varphi}_0$ инъективно и, следовательно, $\bar{\varphi}_0$ — регулярный морфизм.

Следствие. *Пусть $\psi\colon G_1 \to G_2$ — гомоморфизм аналитических групп, и пусть $K = \operatorname{Ker}\psi$. Тогда если отображение ψ локально линейно, то*

(1) *K — подгруппа Ли группы G;*

(2) *индуцированный гомоморфизм аналитических групп* ψ: $G_1/K \to G_2$ *регулярен.*

Теорема 3. *Если поле k имеет нулевую характеристику, то морфизм φ_0 локально линеен.*

Доказательство. Выберем точку $g_0 \in G$, в которой ранг n касательного отображения $T\varphi_0$ максимален. Очевидно, ранг отображения $T\varphi_0$ равен n и в некоторой окрестности точки g_0. Сформулируем теперь следующее свойство (P_g) точки $g \in G$:

(P_g) существует окрестность U точки g, такая, что во всех ее точках ранг отображения $T\varphi_0$ равен n.

Свойство (P_g) локально и выполняется в точке $g = g_0$. Согласно принципу однородности, свойство (P_g) справедливо для всех точек $g \in G$. Иными словами, ранг морфизма есть величина постоянная, и по теореме 3.10.3 морфизм локально линеен, поскольку характеристика поля k равна нулю.

Теорема 4. *Предположим, что группа Ли G локально компактна и представима в виде объединения счетного числа компактов, а также что множество $\varphi_0(G) = Gx_0$ локально замкнуто в X. Тогда*

(1) *индуцированное отображение $\bar{\varphi}_0$: $G/H \to Gx_0$ — гомеоморфизм;*

(2) *если морфизм φ_0 локально линеен, то Gx_0 — подмногообразие в X и $\bar{\varphi}_0$ — аналитический изоморфизм.*

Для доказательства достаточно применить лемму 4.2.

Следствие. *Пусть характеристика поля k равна нулю. Множество Gx_0 является подмногообразием в X тогда и только тогда, когда Gx_0 локально замкнуто в X.*

Приступим теперь к изучению главных расслоений со структурной группой G. Мы будем предполагать, что

1° отображения φ_x взаимно однозначны и регулярны для всех $x \in X$;

2° заданы аналитическое многообразие B и морфизм ψ многообразия X на B, такие, что $\psi(X)=B$ и $Gx=\psi^{-1}\psi(x)$ для всех $x\in X$.

Введем в множестве X отношение эквивалентности $R\subset X\times X$, полагая $(y, x)\in R$ в том и только в том случае, когда $y=gx$ для некоторого элемента $g\in G$. Отображение ψ индуцирует непрерывное взаимно однозначное отображение $\bar{\psi}$ факторпространства X/R на многообразие B.

Систему (X, φ, G, ψ, B) будем называть *расслоением*, многообразие X — *расслоенным пространством* (или *пространством расслоения*), группу Ли G — *слоем*, а многообразие B — *базой*. Иногда для краткости мы будем писать вместо (X, φ, G, ψ, B) просто X.

Теорема 5. *Следующие свойства системы* (X, φ, G, ψ, B) *эквивалентны*:

(1) ψ — *корегулярный морфизм*;

(2) R — *регулярное отношение эквивалентности и* $\bar{\psi}$ — *аналитический изоморфизм*;

(3) *для каждой точки* $b\in B$ *существуют такая ее окрестность* U_b *и такое аналитическое отображение* σ_b: $U_b\to\psi^{-1}(U_b)$, *что* $\psi\circ\sigma_b=\mathrm{id}_{U_b}$;

(4) *для каждой точки* $b\in B$ *существуют такая ее окрестность* U_b *и такой аналитический изоморфизм* θ_b: $G\times U_b\to\psi^{-1}U_b$, *что*

(4a) *диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} G\times U_b & \xrightarrow{\theta_b} & \psi^{-1}(U_b) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_2} & & \downarrow{\scriptstyle \psi} \\ U_b & \xrightarrow{\mathrm{id}} & U_b \end{array}$$

коммутативна;

(4б) $\theta_b(gh, a)=g\theta_b(h, a)$ *для любых элементов* g, $h\in G$ *и* $a\in U_b$.

Доказательство. Равносильность первых двух свойств непосредственно вытекает из определений.

Импликация $(1)\Rightarrow(3)$ также есть следствие определения корегулярного морфизма (см. гл. III, § 10, п. 5 теорема 3.10.2).

Докажем импликацию (3)$\Rightarrow$(4). Определим отображение θ_b: $G \times U_b \to \psi^{-1}(U_b)$ формулой $\theta_b(g, a) = g \circ \sigma_b(a)$. Отображение θ_b аналитично и отображает $G \times U_b$ взаимно однозначно на $\psi^{-1}(U_b)$. Легко видеть, что это отображение удовлетворяет условиям (4а) и (4б). Нам остается показать, что θ_b — аналитический изоморфизм. Для этого достаточно проверить, что θ_b является наложением в любой точке $(g, a) \in G \times U_b$. Пусть $x = \theta_b(g, a) = g \cdot \sigma_b(a)$ и $\sigma = M_g \circ \sigma_b = g \cdot \sigma_b$. Морфизм ψ корегулярен в точке x ввиду равенства $\psi \circ \sigma = \mathrm{id}_{U_b}$. Последнее равенство позволяет также усмотреть, что $T_a\sigma$ — мономорфизм и T_xX — прямая сумма пространств $\mathrm{Im}(T_a\varphi)$ и $\mathrm{Ker}(T_x\psi)$. Но так как $\psi^{-1}(a) = Gx$ и так как φ_x — регулярный морфизм, то $\mathrm{Ker}\, T_x\psi = T_x(Gx) = \mathrm{Im}(T_e\varphi_x)$. Заметим, наконец, что

$$T_{(g,\,a)}\theta_b = T_e\varphi_x \times T_a\sigma.$$

Суммируя все сказанное, заключаем, что $T_{(g,\,a)}\theta_b$ — изоморфизм.

Импликация (4)$\Rightarrow$(1) очевидна.

Определение. Предположим, что система (X, φ, G, ψ, B) удовлетворяет эквивалентным условиям предыдущей теоремы. В этом случае многообразие X будет называться *главным расслоенным пространством со структурной группой G и базой B.*

Замечание. Действие группы G на множестве X записывалось нами слева. Таким образом, определенный нами объект является *левым* главным расслоением. Аналогичные определения можно сформулировать для правого действия группы G.

Теорема 6. *Пусть G — группа Ли и H — ее подгруппа Ли. Рассмотрим канонический морфизм π: $G \to G/H$ и морфизм умножения φ: $G \times H \to G$. Относительно этих морфизмов группа G есть правое главное расслоенное пространство со структурной группой H и базой G/H.*

Это частный случай теоремы 5.

§ 6. Формальные группы. Определения и простейшие примеры

Пусть R — коммутативное кольцо с единицей и $R[[X_1, \ldots, X_n]] = R[[X]]$ — кольцо формальных степенных рядов от n переменных. Пусть $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ — еще один набор n переменных.

Определение. *Формальным групповым законом* (для n переменных) называется система $F = (F_i)$ из n формальных степенных рядов $F_i \in R[[X, Y]]$, таких, что

(1) $F(X, 0) = X$ и $F(0, Y) = Y$;

(2) $F(U, F(V, W)) = F(F(U, V), W)$.

Приведем некоторые примеры.

1. Аддитивная группа: $F_i(X, Y) = X_i + Y_i$.

2. Мультипликативная группа ($n = 1$): $F(X, Y) = X + Y + XY$. Отметим, что этот групповой закон получается из обычного закона умножения, если перенести 1 в 0:

$$(1 + X)(1 + Y) = 1 + X + Y + XY.$$

3. Частный случай группы Витта для простого числа p ($n = 2$):

$$F_1(X_1, X_2, Y_1, Y_2) = X_1 + X_2,$$

$$F_2(X_1, X_2, Y_1, Y_2) = X_2 + Y_2 + \frac{1}{p}\left(X_1^p + Y_1^p - (X_1 + Y_1)^p\right).$$

Укажем теперь некоторые элементарные свойства формальных групп.

(i) Каждый ряд F_i имеет вид

$$F_i(X, Y) = X_i + Y_i + \sum_{\substack{|\alpha| \geqslant 1 \\ |\beta| \geqslant 1}} c_{\alpha, \beta} X^\alpha Y^\beta.$$

Это легко вытекает из аксиомы 1 формальной группы.

(ii) Существует единственный набор $\varphi(X) = (\varphi_1(X), \ldots, \varphi_n(X))$, где $\varphi_i(X) \in R[[X]]$, такой, что $\varphi(0) = 0$ и

$$F(X, \varphi(X)) = 0 = F(\varphi(X), X).$$

Действительно, из того факта, что $D^2F(0) = \mathrm{id}_{R^n}$, следует существование единственного набора рядов $\varphi(X)$, для которого $\varphi(0)=0$ и $F(X, \varphi(X))=0$ (см. Бурбаки [3*], гл. IV, § 5, п. 9). Аналогично существует единственный набор рядов $\psi(X)$, удовлетворяющий соотношению $F(\psi(X), X)=0$. Но тогда

$$\psi(X) = F(\psi(X), 0) = F(\psi(X), F(X, \varphi(X))) = \\ = F(F(\psi(X), X), \varphi(X)) = F(0, \varphi(X)) = \varphi(X).$$

Замечание. Укажем теперь, где формальные группы могут представить интерес для нас. Имеются два важных случая:

1) $R = k$, где k — полное поле;

2) $R = A$, где A — кольцо нормирования полного неархимедова поля.

В первом случае мы определим естественный функтор

$$\text{Аналитические группы} \xrightarrow{T} \text{Алгебры Ли}$$

из категории аналитических групп в категорию алгебр Ли. Мы хотим далее определить функтор S из категории алгебр Ли в категорию аналитических групп, такой, что $T \circ S = \mathrm{id}$. Задача построения функтора S — это в точности задача построения аналитической группы с заданной алгеброй Ли. Нам будет полезно знать, что над полем нулевой характеристики категория формальных групп и категория алгебр Ли эквивалентны:

$$\text{Алгебры Ли} \longleftrightarrow \text{Формальные группы}$$

Изучение случая 2) окажется полезным при исследовании аналитических групп над полным неархимедовым полем k. При этом мы получим следующую коммутативную диаграмму функторов:

$$\begin{tikzcd}
\begin{matrix}\text{Аналитические}\\ \text{Группы над } k\end{matrix} \arrow[rr] & & \begin{matrix}\text{Формальные}\\ \text{Группы над } k\end{matrix} \arrow[dl, shift left] \\
& \begin{matrix}\text{Формальные}\\ \text{Группы над } A\end{matrix} \arrow[ul] \arrow[ur, shift left] &
\end{tikzcd}$$

Оказывается, что всякая аналитическая группа, рассматриваемая локально, есть в точности формальная группа над кольцом A.

§ 7. Формальные группы. Формулы

Мы будем использовать символ $o(d^0 \geqslant n)$ для обозначения формальных степенных рядов с нулевыми однородными компонентами степеней, строго меньших n. Символом $F(X, Y)$ мы, если не оговорено противное, будем обозначать формальный групповой закон над кольцом R.

1°. $F(X, Y) = X + Y + B(X, Y) + o(d^0 \geqslant 3)$, где B — билинейная форма. Это непосредственно следует из основного выражения для закона формальной группы (§ 6), поскольку коэффициенты $c_{\alpha, \beta}$ отличны от нуля только при $|\alpha|, |\beta| \geqslant 1$.

Положим

$$[X, Y] = B(X, Y) - B(Y, X).$$

2°. Пусть $\varphi(X)$ — обратная операция, соответствующая закону F. Тогда

$$\varphi(X) = -X + B(X, X) + o(d^0 \geqslant 2).$$

Действительно, запишем $\varphi(X)$ в виде

$$\varphi(X) = \varphi^1(X) + \varphi^2(X) + \ldots,$$

где $\varphi^i(X)$ — однородная компонента степени i. Имеем

$$0 = F(X, \varphi(X)) = X + \varphi^1(X) + o(d^0 \geqslant 2).$$

Следовательно, $\varphi^1(X) = -X$. Используя этот факт, получаем

$$0 = F(X, \varphi(X)) = X + (-X + \varphi^2(X) + \ldots) +$$
$$+ B(X, -X + \ldots) + \ldots = \varphi_2(X) - B(X, X) + o(d^0 \geqslant 3),$$

Следовательно, $\varphi^2(X) = B(X, X)$.

13*

3°. $XYX^{-1} = Y + [X, Y] + o(d^0 \geqslant 3)$. В самом деле,

$$\begin{aligned} XYX^{-1} &= (X + Y + B(X, Y) + \ldots) + \\ &+ (-X + B(X, X) + \ldots) + \\ &+ B(X + Y + \ldots, -X + \ldots) + \ldots \\ &= Y + [X, Y] + o(d^0 \geqslant 3). \end{aligned}$$

Введем (это пригодится впоследствии) обозначения[1]) для членов высшего порядка ряда XYX^{-1}. Именно: положим

$$XYX^{-1} = Y + [X, Y] + \sum d_{\alpha,\beta} X^{\alpha} Y^{\beta},$$

где $|\alpha| \geqslant 1$, $|\beta| \geqslant 1$, $|\alpha| + |\beta| \geqslant 3$.

4°. $Y^{-1}XY = X + [X, Y] + o(d^0 \geqslant 3)$. Доказательство аналогично предыдущему.

5°. $X^{-1}Y^{-1}XY = [X, Y] + o(d^0 \geqslant 3)$.

Доказательство проводится так же, как и для формулы 3°, с использованием формулы 4°.

6°. *Тождество Якоби*

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Для доказательства применим тождество Холла (см. часть I, гл. II, § 1):

$$(X^Y, (Y, Z))(Y^Z, (Z, X))(Z^X, (X, Y)) = 0.$$

Мы утверждаем, что

$$\begin{aligned} (X^Y, (Y, Z)) &= [X, [Y, Z]] + o(d^0 \geqslant 4), \\ (Y^Z, (Z, X)) &= [Y, [Z, X]] + o(d^0 \geqslant 4), \\ (Z^X, (X, Y)) &= [Z, [X, Y]] + o(d^0 \geqslant 4). \end{aligned}$$

В силу симметрии достаточно доказать, например, первую формулу. Для этого заметим, что

$$X^Y = X + o(d^0 \geqslant 2) \quad \text{(формула 4°)},$$

$$(Y, Z) = [Y, Z] + o(d^0 \geqslant 3) \quad \text{(формула 5°)}.$$

---

[1]) Далее автор часто будет употреблять выражение XY вместо $F(X, Y)$. В частности, $XYX^{-1} = F(F(X, Y), \varphi(X))$. — *Прим. перев.*

Следовательно, повторно применяя формулу 5°, получаем

$$(X^Y, (Y, Z)) = [X, [Y, Z]] + o(d^0 \geqslant 4).$$

Наконец, рассматривая тождество Холла с точностью до элементов третьего порядка, мы получаем тождество Якоби.

7°. *Возведение в m-ю степень.* Определим по индукции последовательность $\{f_m(X)\}$, полагая $f_0(X) = 0$ и $f_{m+1}(X) = F(X, f_m(X))$. Эти определения можно распространить на отрицательные m, полагая $f_m = \varphi \circ f_{-m}$ для $m < 0$. При этом первоначальное рекуррентное соотношение останется справедливым. Из индуктивных соображений вытекает, что

$$f_m(X) = mX + o(d^0 \geqslant 2).$$

Имеет место более общая

Теорема 1 (Лазар). *Существует и единственно семейство степенных рядов*

$$\psi_1(X) = (\psi_1^{(1)}(X), \ldots, \psi_1^{(m)}(X)),$$
$$\vdots$$
$$\psi_i(X) = (\psi_i^{(1)}(X), \ldots, \psi_i^{(n)}(X)),$$
$$\vdots$$

такое, что

(1) $\psi_1(X) = X$;

(2) *порядок* $\psi_i(X)$ *больше или равен* i;

(3) *для всех* $m \in \mathbf{Z}$

$$f_m(X) = \sum_{i=1}^{\infty} \binom{m}{i} \psi_i(X).$$

Доказательство. Единственность решения этой задачи легко вытекает из свойства (3), если применить его к натуральным числам $m = 1, 2, \ldots$ (заметим, что $\binom{m}{i} = 0$ для $m > i > 0$).

Для доказательства существования несколько видоизменим нашу задачу.

Пусть с самого начала нам задана система $F(X, Y)$ из n формальных степенных рядов, причем

(а) $F(X, Y) = X + Y + o(d \geqslant 2)$,

(б) $F(0, Y) = Y$.

Соотношения $f_0(X) = 0$ и $f_{m+1}(X) = F(X, f_m(X))$ определяют элементы $f_m(X)$ для всех $m \in \mathbf{Z}$.

Запишем

$$f_m(X) = \sum a_\alpha(m) X^\alpha,$$

где a_α — отображение $\mathbf{Z}$ в произведение $R \times \ldots \times R = R^n$. Покажем, что все отображения a_α являются биномиальными полиномиальными функциями степени, не превосходящей $|\alpha|$, иными словами, что существуют такие элементы $a_\alpha^i \in R \times \ldots \times R$, что

$$a_\alpha(m) = \sum_{i \leqslant |\alpha|} a_\alpha^i \binom{m}{i}, \quad m \in \mathbf{Z}.$$

Доказав это утверждение, мы тем самым докажем нашу теорему, так как элементы $\psi_i(X) = \sum_{|\alpha| \geqslant i} a_\alpha^i X^\alpha$ будут удовлетворять требуемому условию. Доказательство будем вести индукцией по числу $|\alpha|$. Пусть $|\alpha| = 0$. В этом случае $a_\alpha = 0$, поскольку свободные члены рядов f_m равны нулю.

Пусть $|\alpha| \geqslant 1$. Допустим, что для индексов β с $|\beta| < |\alpha|$ утверждение справедливо. Покажем, что $a_\alpha(m)$ — биномиальный полином (от целого аргумента m) степени, не превосходящей $|\alpha|$. Для этого, как известно, достаточно показать, что $(\Delta a_\alpha)(m) = a_\alpha(m+1) - a_\alpha(m)$ есть биномиальный полином, степень которого не больше $|\alpha| - 1$. Пусть

$$F(X, Y) = X + Y + \sum c_{\gamma\delta} X^\gamma Y^\delta.$$

По предположению $|\gamma| \geqslant 1$ и $|\gamma| + |\delta| \geqslant 2$. Далее,

$$f_{m+1}(X) + X + f_m(X) + \sum c_{\gamma\delta} X^\gamma (f_m(X))^\delta.$$

Если $|\alpha|=1$, то $a_\alpha(m+1)=a_\alpha(m)+1$, что и утверждалось. Если $|\alpha|>1$, то из предыдущего равенства мы видим, что $a_\alpha(m+1)=a_\alpha(m)+S_\alpha(m)$, где $S_\alpha(m)$ — сумма коэффициентов при X^α в выражениях $c_{\gamma\delta}X^\gamma(f_m(X))^\delta$. Так как $|\gamma|\geqslant 1$, нам надо брать только те выражения, у которых $|\delta|<|\alpha|$. Рассмотрим степень $(f_m(X))^\delta$ с $|\delta|<|\alpha|$. Коэффициент при $X^{\alpha-\gamma}$ в этом произведении имеет координаты вида $\sum\prod\limits_\nu b_{i_\nu}(m)$, где $b_{i_\nu}(m)$ — координаты коэффициента при X^{i_ν} в $f_m(X)$. Согласно предположению индукции, $b_{i_\nu}(m)$ — биномиальные полиномы степени, не превосходящей i_ν. Однако, как легко проверить (см., например, упражнение 2), произведение биномиальных полиномов является снова биномиальным полиномом. Более того, неравенство $\sum i_\nu=|\alpha|-|\gamma|<|\alpha|$ показывает, что степень функции $\prod\limits_\nu b_{i_\nu}$ строго меньше $|\alpha|$.

Таким образом, $S_\alpha=\Delta a_\alpha$ есть биномиальный полином, причем степень его строго меньше $|\alpha|$. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть p — простое число. Имеет место сравнение $f_p\equiv\psi_p\ (\mathrm{mod}\ p)$. В частности, порядок f_p (по модулю p) не меньше p.*

§ 8. Формальные группы над кольцом полного нормирования

Пусть k — полное неархимедово поле, A — кольцо нормирования и $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал этого кольца.

Пусть $F(X, Y)$ — формальный групповой закон над кольцом A. Обозначим через G полицилиндр

$$P_0(1, \ldots, 1)=\{(x_1, \ldots, x_n)\,|\,x_i\in\mathfrak{m}\}.$$

Определим в множестве G умножение, полагая $x\cdot y=F(x, y)$. Мы утверждаем, что G — аналитическая группа. Для этого нам нужно установить

1) ассоциативный закон;

2) наличие нейтрального элемента: им будет 0;

3) существование обратной операции: $\varphi(x)=x^{-1}$, где $\varphi(X)$ — формальный ряд и

$$F(x,\ \varphi(x))=0=F(\varphi(x),\ x).$$

Все три утверждения вытекают из соответствующих аксиом формальных групп и следующей леммы.

Лемма. *Допустим, что $f\in A[[X_1,\ \ldots,\ X_p]]$ и $g_i\in A[[Y_1,\ \ldots,\ Y_q]]$, $1\leqslant i\leqslant p$, причем $g_i(0)=0$ для всех i. Рассмотрим композицию рядов $h=f(g_1,\ \ldots$ $\ldots,\ g_p)\in A[[Y_1,\ \ldots,\ Y_q]]$. Тогда для любых $x_1,\ \ldots$ $\ldots,\ x_q\in\mathfrak{m}$ имеем*

$$h(x)=f(g_1(x),\ \ldots,\ g_p(x)).$$

Доказательство. См. Бурбаки [2*], Ch. 3, § 4, п. 5.

Определение. Аналитическая группа G, построенная указанным выше способом, называется *стандартной*.

Теорема 1. *Всякая локальная аналитическая группа содержит открытую подгруппу, изоморфную стандартной.*

Доказательство. Пусть G — локальная аналитическая группа. Выбрав в окрестности единицы локальные координаты, мы можем считать, что G — открытая окрестность точки 0 в пространстве k^n. Умножение в локальной группе G задается набором степенных рядов $F(X,\ Y)$, сходящихся в шаре радиуса ε. Как и раньше,

$$F(X,\ Y)=X+Y+\sum c_{\alpha,\ \beta}X^{\alpha}Y^{\beta},$$

где $|\alpha|\geqslant 1$, $|\beta|\geqslant 1$, а коэффициенты $c_{\alpha,\ \beta}$ — векторы в пространстве k^n. Посмотрим, как меняется групповой закон при умножении всех координат на множитель $\mu\in k$. Именно, пусть $x,\ y\in G$, причем произ-