законы, индуцированные картами c_1 и c_2 этих групп в точках e_1 и e_2 соответственно. Тогда любой формальный гомоморфизм этих групп τ: $F_1 \to F_2$ сходится, т. е. определяет локальный гомоморфизм τ: $G_1 \dashrightarrow G_2$.

Доказательство. Формальные законы F_1 и F_2 сходятся, так как они лишь запись соответствующих сходящихся законов умножения в G_1 в локальных координатах. Поскольку заключение теоремы является локальным, мы можем предполагать, что G_i — открытая окрестность точки $0 \in k^{n_i}$ $(n_i = \dim_{e_i} G_i,\ i = 1, 2)$ и что умножение определяется функциями $F_i\ (X, Y)$. Мы рассмотрим сначала частный, а потом общий случай.

Частный случай. $G_1 = k$, $F_1 =$ „$+$“, $G_2 = G$, $F_2 = F$. Утверждение о том, что τ — формальный гомоморфизм, сводится к следующим формальным равенствам:

$$\tau(s+t) = F(\tau(s), \tau(t)),$$
$$\tau(0) = 0.$$

Дифференцируя это равенство формально по t и полагая $t = 0$, мы видим, что τ удовлетворяет следующему формальному дифференциальному уравнению:

$$\tau'(s) = D_2F(\tau(s), 0) \cdot \tau'(0).$$

Так как $D_2F(\tau(0), 0) = D_2F(0, 0) = \mathrm{id}_{k^n}$, написанное выше уравнение формально непротиворечиво при $s = 0$. Положим $\varphi(X) = D_2F(X, 0)\tau'(0)$, где $\tau'(0)$ — любой фиксированный вектор из k^n. Сходимость гомоморфизма τ есть частный случай следующей теоремы, которая будет доказана в добавлении к этой главе.

Теорема 7.2. *Пусть $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ — набор из n формальных сходящихся степенных рядов от n переменных. Тогда формальное дифференциальное уравнение $\tau'(s) = \varphi(\tau(s))$ $(\tau(0) = 0)$ обладает единственным формальным решением, и решение это сходится.*

Общий случай. Пусть F — сходящийся формальный групповой закон, соответствующий локальной группе G, и X — элемент алгебры $\mathfrak{g} = L(G)$. Этот элемент однозначно определяет гомоморфизм алгебр Ли $L_X\colon k \to \mathfrak{g}$, такой, что $L_X(1) = X$. Согласно теореме 6.3 существует единственный формальный гомоморфизм $\varphi_X\colon k^+ \to F$, такой, что $\varphi'_X(0) = X$. В частном случае мы видели, что гомоморфизм φ_X сходится.

Пусть $\mathfrak{g}_i = L(G_i)$ $(i = 1, 2)$ и $t = L(\tau)\colon \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$. Конструкция гомоморфизма φ_X обладает следующим функториальным свойством: для $X \in \mathfrak{g}_1$

$$\varphi_{t(X)} = \tau \circ \varphi_X \left(X \in \mathfrak{g}_1\right) \text{ (формально).}$$

Выберем базис $\{X_\mu\}$ алгебры $\mathfrak{g}_1$ и положим $Y_\mu = t(X_\mu)$. Определим два локальных морфизма

$$\begin{tikzcd} & G_1 \\ k^{n_1} \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\varphi_2"'] & \\ & G_2 \end{tikzcd}$$

формулами

$$\varphi_1(t_1, \ldots, t_{n_1}) = \varphi_{X_1}(t_1) \ldots \varphi_{X_{n_1}}(t_{n_1}),$$

$$\varphi_2(t_1, \ldots, t_{n_1}) = \varphi_{Y_1}(t_1) \ldots \varphi_{Y_{n_1}}(t_{n_1}).$$

Касательное отображение $L(\varphi_1)\colon k^{n_1} \to \mathfrak{g}_1$ есть изоморфизм, поскольку оно переводит μ-й (стандартный) базисный вектор $D_\mu \in k^{n_1}$ в вектор X_μ. Следовательно, φ_1 — наложение и потому локальный изоморфизм (в окрестности точки $0 \in k^{n_1}$).

Формальное равенство $\tau \circ \varphi_1 = \varphi_2$ можно переписать теперь так: $\tau = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$. Однако правая часть этого равенства, как мы только что видели, сходится, значит, сходится и τ.

Теорема полностью доказана.

Следствие 1. *Пусть G_1 и G_2 — локальные аналитические группы, алгебры Ли которых $L(G_1)$ и $L(G_2)$ изоморфны. Тогда*

1) *любой изоморфизм* $L(G_1) \to L(G_2)$ *индуцирует локальный изоморфизм* $G_1 \to G_2$;

2) *в неархимедовом случае локальные группы* G_1 *и* G_2 *содержат изоморфные открытые подгруппы.*

Доказательство. Первое утверждение является следствием доказанной теоремы и теоремы 3 § 6. Второе утверждение непосредственно вытекает из первого и из теоремы 4.8.1.

Следствие 2. *Пусть* G — *локальная аналитическая группа,* $\mathfrak{g} = L(G)$ *и* $CH(\mathfrak{g})$ — *локальная аналитическая группа, построенная по алгебре* $\mathfrak{g}$ *при помощи формулы Кэмпбелла — Хаусдорфа* (см. § 4). *Тогда существует единственный локальный изоморфизм* $CH(\mathfrak{g}) \to G$, *такой, что* $L(\exp) = \mathrm{id}$.

Замечание. Пусть $G = GL(V)$, где V — конечномерное векторное пространство над полем k. Положим

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots .$$

Мы утверждаем, что $\exp(x) = e^x$ в окрестности точки $0 \in \mathfrak{g} = \operatorname{End} V$. В самом деле, в силу конструкции формулы Кэмпбелла — Хаусдорфа ряд e^X определяет формальный гомоморфизм $CH(\mathfrak{g}) \to G$, причем $L(e^X) = \mathrm{id}$. Следовательно, в силу единственности $\exp(X) = e^X$, как и утверждалось.

Изучим отображение exp в случае, когда $k = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$ и G — аналитическая группа. Пользуясь тем, что в (формальной) группе $CH(\mathfrak{g})$ операция возведения в n-ю степень выглядит особенно просто: $f_n(X) = nX$, мы можем продолжить отображение exp на все пространство $\mathfrak{g}$. Пусть U — область определения отображения exp, и пусть $x \in \mathfrak{g}$. Поскольку k — числовое поле, существует такое целое $n > 0$, что $\frac{1}{n} x \in U$. Положим

$$\exp(x) = \exp\left(\frac{1}{n} x\right)^n . \qquad (*)$$

Мы имеем

$$\exp\left(\frac{1}{n} x\right)^n = \exp\left(\frac{1}{nm} x\right)^{nm} .$$

Следовательно, приведенное выше определение не зависит от выбора числа n:

$$\exp\left(\frac{1}{n}x\right)^n = \exp\left(\frac{1}{nm}x\right)^{nm} = \exp\left(\frac{1}{m}x\right)^m.$$

Для каждого $x_0 \in \mathfrak{g}$ можно в некоторой его окрестности ограничиться единым числом n в формуле (*). Отсюда видно, что отображение exp аналитично. Как известно, оно является наложением в точке $0 \in \mathfrak{g}$, однако это верно не во всех точках, и, вообще говоря, отображение exp не биективно.

Следствие 3. *Пусть $k = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, и G — аналитическая группа над k с абелевой алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Тогда*

(1) *если группа G связна, то она абелева;*

(2) *в общем случае группа G содержит открытую абелеву подгруппу Ли.*

Доказательство. Очевидно, (1) $\Rightarrow$ (2). Докажем (1). Поскольку $\mathfrak{g}$ — абелева алгебра, группа $CH(\mathfrak{g})$ совпадает с ее аддитивной группой $\mathfrak{g}^+$. Мы утверждаем, что (глобальное) отображение exp определяет гомоморфизм групп. Действительно, пусть $x, y \in \mathfrak{g}$. Выберем такое целое $n > 0$, что $\frac{1}{n}x$, $\frac{1}{n}y$, $\frac{1}{n}(x+y)$ лежат в той области, где exp является локальным изоморфизмом. Тогда

$$\exp\left(\frac{1}{n}x\right)\exp\left(\frac{1}{n}y\right) = \exp\left(\frac{1}{n}(x+y)\right) = \exp\left(\frac{1}{n}y\right)\exp\left(\frac{1}{n}x\right).$$

Но поскольку элементы $\exp\left(\frac{1}{n}x\right)$ и $\exp\left(\frac{1}{n}y\right)$ перестановочны, мы получаем, возводя в n-ю степень,

$$\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y).$$

Итак, exp — гомоморфизм; следовательно, это отображение является наложением во всех точках, так что $\exp(\mathfrak{g})$ — открытая абелева подгруппа в G. Если группа G связна, то $\exp(\mathfrak{g}) = G$, так как всякая открытая подгруппа замкнута.

Следствие 4. *Пусть k — неархимедово поле. Тогда всякая аналитическая группа G с абелевой алгеброй Ли $\mathfrak{g} = L(G)$ содержит открытую подгруппу, изоморфную группе A^n, где A — кольцо нормирования поля k и $n = \dim G$.*

Доказательство. Наш результат вытекает из следующих двух фактов: во-первых, группа $CH(\mathfrak{g})$ совпадает с аддитивной группой $\mathfrak{g}^+$; во-вторых, $CH(\mathfrak{g})$ содержит открытую подгруппу, изоморфную открытой подгруппе в G.

Пример (к следствию 4). G — группа точек абелевого многообразия, определенного над полем $\mathbf{Q}_p$.

§ 8. Третья теорема Ли

В этом параграфе $k = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$.

Теорема 1. *Пусть G — связная и односвязная аналитическая группа (над k), G' — любая другая аналитическая группа над k, и пусть $\mathfrak{g} = L(G)$ и $\mathfrak{g}' = L(G')$ — соответствующие алгебры Ли. Тогда отображение $\mathrm{Hom}_{AG}(G, G') \to \mathrm{Hom}_{LA}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}')$ биективно.*

Доказательство. Пусть t: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ — гомоморфизм алгебр Ли. Мы должны показать, что $t = L(\varphi)$, где φ: $G \to G'$ — однозначно определенный аналитический гомоморфизм. Мы знаем, что гомоморфизм t единственным образом продолжается до локального гомоморфизма f: $G \dashrightarrow G'$ (теорема 3.6 и теорема 1.7). График этого отображения $\Gamma_f \subset G \times G'$ является локальной аналитической подгруппой. Пусть (H, i) — аналитическая группа, индуцированная локальной группой Γ_f (см. гл. IV, § 4). Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\psi"'] & G \times G' \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\ & G \end{tikzcd}$$

где $\psi = \mathrm{pr}_1 \circ i$. Очевидно, ψ — локальный изоморфизм. Далее, поскольку группа H связна, а группа G односвязна, ψ является изоморфизмом на открытую подгруппу группы G. В силу связности последней отображение ψ сюръективно. Положим $\varphi = \mathrm{pr}_2 \circ i \circ \psi^{-1}$. Легко видеть, что отображения φ и f локально совпадают; тем самым существование требуемого гомоморфизма доказано. Осталось заметить, что два гомоморфиза φ_1 и φ_2: $G \to G'$, для которых $L(\varphi_1) = L(\varphi_2)$, совпадают в некоторой окрестности единицы, а следовательно, совпадают и всюду на G, так как множество $\{x \in G / \varphi_1(x) = \varphi_2(x)\}$ открыто и замкнуто в G.

Теорема 2. *Категория связных односвязных аналитических групп (вещественных или комплексных) эквивалентна категории конечномерных алгебр Ли.*

Доказательство. Теорема вытекает из теоремы 1 и следующей теоремы 3.

Теорема 3 (третья теорема Ли). *Для всякой конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ существует связная односвязная аналитическая группа G, такая, что $L(G) = \mathfrak{g}$.*

Доказательство. Эта теорема была впервые полностью доказана Картаном. Мы дадим набросок его доказательства, но сначала приведем более простое доказательство, основанное на мощной теореме Адо. Заметим прежде всего, что нам достаточно найти какую-нибудь группу Ли G, такую, что $L(G) = \mathfrak{g}$, поскольку универсальная накрывающая группа связной компоненты точки $e \in G$ будет удовлетворять всем требуемым условиям.

Доказательство 1. Воспользуемся теоремой Адо (см. Бурбаки [1], гл. I, § 8, п. 3, или Джекобсон [1], гл. 6, § 2).

Теорема (Адо). *Всякая конечномерная алгебра Ли обладает точным конечномерным линейным представлением.*

Рассмотрим теперь локальную группу H, построенную с помощью формулы Кэмпбелла — Хаусдорфа по алгебре $\mathfrak{g}$. Указанное в теореме Адо точное представление t: $\mathfrak{g} \to \operatorname{End} V$ индуцирует некоторый локальный гомоморфизм f: $H - - \to GL(V)$. Но поскольку t — точное представление, гомоморфизм f регулярен в точке e, и, следовательно, H соответствует локальной подгруппе группы $GL(V)$. Но в этом случае локальная группа H эквивалентна аналитической группе (см. гл. IV, § 4).

Доказательство 2. Частные случаи. Теорема верна в следующих частных случаях:

1° алгебра $\mathfrak{g}$ полупроста;

2° алгебра $\mathfrak{g}$ абелева.

Действительно, в случае 1° отображение $\operatorname{ad}: \mathfrak{g} \to \operatorname{End}(\mathfrak{g})$ инъективно, и мы можем повторить предыдущее рассуждение, не прибегая к теореме Адо. Проще, однако, заметить, что $\operatorname{Im}(\operatorname{ad}) = \operatorname{Der}(\mathfrak{g})$ и, следовательно, $\mathfrak{g} = L(\operatorname{Aut}(\mathfrak{g}))$ (см. § 3, п. 4, (iv)).

Случай 2° тривиален, так как в качестве группы G можно взять аддитивную группу самой алгебры $\mathfrak{g}$.

Общий случай. Доказательство будем вести индукцией по $\dim \mathfrak{g}$. Если имеет место случай 1° или 2°, то все доказано. В противном случае, как мы знаем (см. ч I, гл. VI, § 4), алгебра $\mathfrak{g}$ есть полупрямое произведение своих подалгебр $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$, причем $\mathfrak{g}_1$ — идеал алгебры $\mathfrak{g}$. Очевидно, $\dim \mathfrak{g}_i < \dim \mathfrak{g}$, $i = 1, 2$.

Пусть φ: $\mathfrak{g}_2 \to \operatorname{Der}(\mathfrak{g}_1)$ — гомоморфизм, определяющий структуру полупрямого произведения. По индукции существуют связные односвязные группы Ли G_1 и G_2, такие, что $L(G_1) = \mathfrak{g}_1$, $L(G_2) = \mathfrak{g}_2$. Покажем, что $\mathfrak{g} = L(G)$, где G — полупрямое произведение групп G_1 и G_2.

Основные этапы доказательства:

а) $\operatorname{Der}(\mathfrak{g}_1) = L(A_1)$, где $A_1 = \operatorname{Aut}(\mathfrak{g}_1)$;

б) $A_1 = \operatorname{Aut}(G_1)$ по теореме 1;

в) группа Ли A_1 аналитически действует на группе G_1.

В самом деле, пусть $a \in A_1$ и $g \in G$. Найдем окрестность $N \subset A_1$ точки a и окрестность U точки g, такие, что соответствующее отображение $N \times U \to G$ аналитично. Пусть $W_1 \subset \mathfrak{g}_1$ — окрестность нуля, в которой сходится формула Кэмпбелла — Хаусдорфа. Выберем окрестность $N \subset A_1 (a \in N)$ и окрестность $W_2 \subset W_1$ $(0 \in W_2)$, для которых $N(W_2) \subset W_1$. Положим

$V = \exp(W_2)$. Действие $N \times V \to G$ индуцировано действием $N \times W_2 \to W_1$. Последнее отображение, очевидно, аналитично, значит, аналитично и первое.

Поскольку группа G_1 связна, существует такое целое $n > 0$, что $g \in V^{(n)}$, где $V^{(n)}$ — множество всевозможных произведений n элементов из V. Мы можем считать множество V открытым. Множество $V^{(n)}$, будучи объединением сдвигов окрестности V, тоже будет открытым. Пусть $U = V^{(n)}$, и пусть θ: $A_1 \times G_1 \to G_1$ — действие группы A_1 на G_1. Покажем, что отображение θ аналитично на $N \times U$. Рассмотрим декартово n-кратное произведение V^n и n-кратное умножение μ: $V^n \to U$. Определим отображение $\bar\theta$: $N \times V^n \to G$, положив

$$\theta_1(b, g_1, \ldots, g_n) = \theta(bg_1) \ldots \theta(bg_n).$$

При таком определении диаграмма

$$\begin{tikzcd} N \times V^n \arrow[d, "1\times\mu"'] \arrow[dr, "\bar\theta"] & \\ N \times U \arrow[r, "\theta"'] & G \end{tikzcd}$$

коммутативна. Далее, отображение θ аналитично, и отображение μ: $V^n \to U$ есть корегулярный морфизм, причем $\mu(V^n) = U$. Отсюда следует, что θ аналитично.

г) Ввиду связности и односвязности группы G_2 отображение φ определяет аналитический гомоморфизм ψ: $G_2 \to A_1$. Введем на многообразии $G_1 \times G_2$ структуру полупрямого произведения по формуле

$$(e_1, h)(g_2, e_2)(e_1, h)^{-1} = (\psi(h)g, e_2).$$

Определенная таким образом группа G является группой Ли, поскольку действие $A_1 \times G_1 \to G_1$ и гомоморфизм ψ аналитичны. Наконец, несложная проверка показывает, что $L(G) = \mathfrak{g}$. Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть G — связная и односвязная группа Ли. Для любого идеала $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g} = L(G)$ существует замкнутая связная и односвязная подгруппа Ли $H \subset G$, такая, что $L(H) = \mathfrak{h}$.*

Доказательство. Пусть K — произвольная аналитическая группа с алгеброй Ли $L(K) = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Проекция $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ индуцирует аналитический гомоморфизм φ: $G \to K$, так как группа G связна и односвязна. Связная компонента единицы H ядра $\operatorname{Ker} \varphi$ является связной замкнутой подгруппой Ли, причем $L(H) = \mathfrak{h}$. Для доказательства односвязности полученной группы надо воспользоваться тем фактом, что $\pi_2(G/H) = 0$ (поскольку G/H — аналитическая группа)[1]. Из точной гомотопической последовательности

$$\begin{array}{ccccc} \ldots \to \pi_2(G/H) & \to & \pi_1(H) & \to & \pi_1(G) \\ \| & & & & \| \\ 0 & & & & 0 \end{array}$$

получаем $\pi_1(H) = 0$.

Замечание. Вероятно, не существует „простого“ доказательства третьей теоремы Ли. Если бы такое „простое“ доказательство не использовало существенно локальной компактности полей **R** и **C**, то оно распространялось бы на банаховы аналитические группы. Однако в случае банаховых пространств третья теорема Ли *неверна* (как недавно было замечено ван Эстом и другими). Действительно, теорема 4, которая является формальным следствием теоремы 3, неверна. Противоречащий пример таков.

Пусть $G = GL(H) \times GL(H)$, где H — бесконечномерное банахово пространство над полем **C**. Известно, что группа $GL(H)$ связна и односвязна. Центр группы G содержит $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*$ и, следовательно, $S^1 \times S^1$. Положим $Z = S^1 \times S^1$. Алгебра Ли $\mathfrak{z} = L(Z)$ содержится в центре алгебры Ли $L(G)$, а потому любое одномерное подпространство $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{z}$ является идеалом в $L(G)$. В качестве $\mathfrak{h}$ возьмем алгебру Ли одномерной подгруппы

$$\{(\mu, \nu) \in S^1 \times S^1 \mid \nu = \alpha\mu\} \subset S^1 \times S^1,$$

где α — иррациональное число. Указанная подгруппа связна и односвязна, однако не замкнута в G.

---

[1]) См. Милнор [1*], гл. 4, § 21, теорема Ботта. — *Прим. перев.*

§ 9. Теоремы Картана

Предположим, что поле k имеет нулевую характеристику и подполе $\mathbf{Q} \subset k$ плотно в k.

Теорема 1. *Всякая замкнутая*[1]) *(в топологическом смысле) локальная подгруппа H аналитической группы G аналитична.*

Следствие. *Замкнутая подгруппа аналитической вещественной или p-адической группы аналитична.*

Теорема 2. *Всякий непрерывный гомоморфизм $\varphi\colon G_1 \to G_2$ групп Ли над k является аналитическим.*

Доказательство. 1°. Теорема 1 $\Leftrightarrow$ Теорема 2. Действительно, так как отображение φ непрерывно, его график $\Gamma_\varphi \subset G_1 \times G_2$ является замкнутой подгруппой, которая по теореме 1 аналитична. Проекция $p = \mathrm{pr}_1 | \Gamma_\varphi$ есть аналитический гомоморфизм с тривиальным ядром, так что отображение $L(p)$ инъективно и морфизм p регулярен. Но p — гомеоморфизм и, следовательно, аналитический изоморфизм. Поскольку $\varphi = \mathrm{pr}_2 \circ p^{-1}$, аналитичность φ доказана.

2°. Доказательство теоремы 1 для случая $k = \mathbf{Q}_p$. На основании следствия 2 теоремы 4.3.1 и следствия теоремы 5.7.1 мы можем (взяв достаточно малую окрестность единицы) предполагать, что группа G изоморфна группе U $(\subset \mathfrak{g} = L(G))$, построенной с помощью формулы Кэмпбелла—Хаусдорфа, и что H — замкнутая подгруппа в G. Отождествим группы G и U. Операция „возведения в n-ю степень“ имеет вид $f_n(x) = nx$ $(n \in \mathbf{Z},\ n > 0)$. Поэтому элементы вида nx (где $x \in H$) лежат в группе H, причем ввиду замкнутости последней это верно для всех $n \in \mathbf{Z}_p$.

Выберем максимальную линейно независимую систему $x_1, \ldots, x_m \in H$ над полем $\mathbf{Q}_p$. Обозначим через V подпространство, порожденное этой системой. Очевидно, $H \subset V$, так как иначе система $\{x_i\}$ не

[1]) Точнее, *локально* замкнутая. — *Прим. перев.*

была бы максимальной. Наше утверждение будет доказано, если мы покажем, что H содержит окрестность нуля в пространстве V. Рассмотрим отображение

$$f\colon \mathbf{Z}_p^m \to V,$$

задаваемое формулой

$$f(t_1, \ldots, t_m) = (t_1 x_1) \ldots (t_m x_m).$$

Отображение f аналитично; касательное отображение $Df(0)$ — изоморфизм по построению. Следовательно, f — наложение в точке 0. Но так как $\operatorname{Im}(f) \subset H$, это означает, что H содержит окрестность нуля в пространстве V.

3°. Доказательство теоремы 1 в случае $k = \mathbf{R}$.

Пусть $L(G) = \mathfrak{g}$. Мы можем считать, что H — замкнутая локальная подгруппа локальной группы $U \subset \mathfrak{g}$, построенной посредством формулы Кэмпбелла—Хаусдорфа. Можно также предполагать, что H — строгая подгруппа, т. е.

а) $x, y \in H$ и $xy \in U \Rightarrow xy \in H$;

б) $x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$.

Положим

$$V = \{x \in \mathfrak{g} \mid tx \in H \text{ для достаточно малых } t\}.$$

Иными словами, V содержит такие точки $x \in \mathfrak{g}$, для которых некоторая окрестность нуля прямой, проходящей через точку x, лежит в H. Имеет место

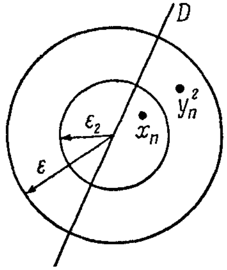
Лемма. (1) *Пространство V является подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{g}$.*

(2) *Допустим, что $x_n \in H$, $x_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Обозначим через D_n прямую (в пространстве $\mathfrak{g}$), проходящую через точку x_n (и точку 0). Предположим, что $x_n \to 0$ и $D_n \to D$ при $n \to \infty$. Тогда $D \subset V$.*

Доказательство. Начнем с конца (2). Зафиксируем некоторый шар радиуса ε с центром в точке 0, содержащийся в U. Пусть m — целое положительное число и $\varepsilon_m = \dfrac{\varepsilon}{m}$. Положим

$$S_i = \{x \in \mathfrak{g} \mid (i-1)\varepsilon_m \leqslant |x| \leqslant i\varepsilon_m\}.$$

В частности, S_1 — шар радиуса ε_m. Существует такая константа K_m, что $x_n \in S_1$ для всех $n \geqslant K_m$. Возьмем любое целое положительное число i, такое, что $1 < i \leqslant m$. Для каждого целого $n \geqslant K_m$ найдется элемент $y_n^{(i)}$ вида μx_n ($\mu \in \mathbf{Z}$, $\mu > 0$), лежащий в S_i.



Случай $m = 2$

Так как $D_n \to D$ при $n \to \infty$, некоторая подпоследовательность $\{y_{n_k}^{(i)}\}$ сходится к точке $x \in S_i \cap D$. В силу а) $x \in H$, поскольку H замкнуто, а $y_n^{(i)} \in H$. Итак, мы доказали следующее утверждение:

(*) для любых целых положительных чисел m и i, таких, что $1 < i \leqslant m$, существует элемент $x \in H \cap D$, для которого $(i-1)\varepsilon_m \leqslant |x| \leqslant i\varepsilon_m$.

На основании б) множество $H \cap D$ располагается на прямой D симметрично относительно нуля. Из этого замечания и из утверждения (*) вытекает, что множество H всюду плотно в интервале прямой D длины 2ε с центром в точке 0. Но поскольку H замкнуто, пересечение $H \cap D$ содержит указанный интервал, откуда и следует, что $D \subset V$.

(I) Покажем, что множество V замкнуто относительно сложения и коммутирования. Пусть $x, y \in V$. Как показывает формула Кэмпбелла — Хаусдорфа,

$$\lim_{n\to\infty} n\left\{\left(\frac{1}{n}x\right)\left(\frac{1}{n}y\right)\right\} = x + y,$$

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left\{\left[\frac{1}{n}x,\ \frac{1}{n}y\right]\right\} = [x,\ y]$$

(см. также гл. IV, § 7, п. 5). Далее, $x+y \in V$ и $[x, y] \in V$, так как прямые, проходящие через $x+y$ и $[x, y]$, удовлетворяют условиям (2) леммы.

Итак, V — подалгебра Ли алгебры $\mathfrak{g}$. Следовательно, пересечение $V \cap U$ является локальной подгруппой, которая строится по алгебре V с помощью формулы Кэмпбелла — Хаусдорфа. Используя условия а) и б), легко усмотреть, что $H \supset V \cap U$. Наше доказательство будет закончено, если мы покажем, что H содержится в некоторой окрестности нуля пространства V. Предположим противное. Тогда существует последовательность $\{x_n\}$, такая, что $x_n \in H \setminus V$ и $x_n \to 0$ при $n \to \infty$. Выберем в $\mathfrak{g}$ прямое дополнение W к V. Поскольку (локальное) отображение $(W \cap U) \times (V \cap U) \to U\ ((w, v) \longmapsto w \cdot v)$ является по построению наложением в точке 0 (т. е. локальным изоморфизмом), при достаточно большом n имеется однозначное разложение $x_n = w_n \cdot v_n$, где $w_n \in W$ и $v_n \in V$. При этом w_n и $v_n \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому для достаточно больших n имеем

$$v_n \in H$$

(так как $H \supset V \cap U$) и $w_n \in H$ (ввиду условий а) и б)). Мы можем, таким образом, с самого начала считать, что последовательность $\{x_n\}$ лежит в W. Пусть D_n — прямая, проходящая через точку x_n. В силу компактности проективного пространства $\mathbf{P}(W)$ подпоследовательность этих прямых сходится к некоторой прямой D. Но, согласно утверждению (2) нашей леммы, прямая D содержится в V, — противоречие. Теорема доказана.

Замечание. Теорему 2 можно сформулировать так: категория аналитических групп (над $\mathbf{R}$ или $\mathbf{Q}_p$) является полной подкатегорией в категории всех локально компактных топологических групп.

В связи с этим уместен вопрос: при каких условиях локально компактная топологическая группа является вещественной или p-адической группой Ли? Вопрос этот имеет смысл, так как ввиду теоремы 2 структура аналитической группы на локальной компактной топологической группе определена однозначно.

Ответ на этот вопрос таков.

1) *Вещественный случай* (Глисон — Монтгомери — Зиппин — Ямабе). Группа G не должна содержать „малых“ подгрупп (т. в группе G должна существовать окрестность единицы, которая не содержит никаких подгрупп, кроме тривиальной);

2) *p-адический случай* (Лазар[1]). Группа G должна содержать открытую подгруппу U со следующими свойствами:

а) U — конечно порожденная про-p-группа;

б) коммутант (U, U) лежит в U^{p^2} (множестве p^2-х степеней).

Необходимость в обоих случаях доказывается несложно (см. упражнение 4).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть k — поле характеристики $p \neq 0$, F — формальный групповой закон (над k), U — соответствующая биалгебра точечных распределений и $\mathfrak{g}$ — соответствующая алгебра Ли (очевидно, $\mathfrak{g} \subset U$).

а) Показать, что $\mathfrak{g}$ порождает в U подалгебру размерности p^n, где $n = \dim \mathfrak{g}$.

б) Показать, что $x^p \in \mathfrak{g}$, если $x \in \mathfrak{g}$ (здесь x^p обозначает p-ю степень x в алгебре U). Показать затем, что $\operatorname{ad}(x^p) = \operatorname{ad}(x)^p$.

в) Пусть a — элемент поля k, не лежащий в простом подполе $\mathbf{F}_p$. Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{h}$ с базисом $\{X, Y, Z\}$ и соотношениями $[X, Y] = Y$, $[X, Z] = aZ$, $[Y, Z] = 0$. Показать, что не существует элемента $y \in \mathfrak{h}$, для которого $\operatorname{ad}(y) = \operatorname{ad}(X)^p$. Доказать, что $\mathfrak{h}$ не может быть алгеброй Ли никакой формальной группы.

2. Пусть $H_1 = k[[X]]$ и $H_2 = k[[Y]]$.

а) Предположим, что k — поле. Показать, что любой гомоморфизм алгебр φ: $H_2 \to H_1$ допустим (см. § 6).

[1] См. Лазар [3*]. — *Прим. перев.*

б) Предположим, что кольцо k не содержит нильпотентных элементов (отличных от нуля). Показать, что любой гомоморфизм алгебр $\varphi: H_2 \to H_1$ допустим.

3. Пусть k — числовое поле (т. е. $k=\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$), и пусть $\mathfrak{h}$ — полупростая подалгебра алгебры Ли группы $GL(n, k)$. Показать, что $\mathfrak{h}$ соответствует подгруппе Ли $H \subset GL(n, k)$. [*Указание*: использовать теорему 1.6.5.2.]

4. Пусть G — стандартная p-адическая группа Ли (см. гл. IV), и пусть $\{G_n\}$ — каноническая фильтрация. Показать, что

$$(G_n, G_n) \subset G_n^{p^n}, \qquad n \geqslant 2.$$

5. Пусть G — вещественная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ — подалгебра в $\mathfrak{g}$ и H — аналитическая подгруппа в G, соответствующая подалгебре $\mathfrak{h}$ [1]). Предположим, что H плотна в G.

а) Показать, что $\mathrm{Ad}(g)\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}$ для всех $g \in G$ и что $\mathfrak{h}$ идеал в $\mathfrak{g}$.

б) Пусть $\widehat{G}$ — универсальное накрытие группы G, Z — ядро эпиморфизма $\widehat{G} \to G$ и $\widehat{H}$ — аналитическая подгруппа группы $\widehat{G}$, соответствующая подалгебре $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. Известно (теорема 8.4), что $\widehat{H}$ — замкнутая подгруппа. Показать, что $\widehat{H} \cdot Z$ плотно в $\widehat{G}$ и что $\widehat{G}/\widehat{H}$ — абелева группа (и, значит, $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ — абелева алгебра Ли).

в) Допустим, что алгебра $\mathfrak{g}$ полупроста. Доказать, что $\widehat{G}$ (как аналитическое многообразие) изоморфно $\widehat{H} \times \mathbf{R}^n$, где n — некоторое целое число. До-

---

[1]) Если H_1 — локальная группа, соответствующая алгебре $\mathfrak{h}$, то вложение $\mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ индуцирует локальный аналитический гомоморфизм $f: H_1 \to G$, который определяет локальную аналитическую подгруппу $f(H_1)$. Согласно § 4 гл. IV, эту локальную подгруппу можно продолжить до аналитической группы $H \subset G$, которую и имеет в виду автор. Она, вообще говоря, не является подгруппой Ли, но является индуцированной аналитической группой в смысле § 2 гл. IV. — *Прим. ред.*

казать затем, что $n=0$ (т. е. $G=H$), если центр группы H конечен.

г) Пусть $H_0=SL(2, \mathbf{R})$. Показать, что $\pi_1(H_0)=\mathbf{Z}$. Доказать, что универсальное накрытие H группы H_0 может быть вложено в качестве всюду плотной аналитической подгруппы в группу Ли произвольной размерности $\geqslant 3$.

6. Пусть G — вещественная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, и пусть $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$ — произвольная подалгебра. Возьмем соответствующую аналитическую подгруппу H и рассмотрим ее замыкание $\overline{H}$, которое по теореме Картана является подгруппой Ли. Обозначим через $\overline{\mathfrak{h}}$ алгебру Ли $L(\overline{H})$.

а) Показать, что $\mathfrak{h}\subset\overline{\mathfrak{h}}$, $\overline{\mathfrak{h}}=\overline{\overline{\mathfrak{h}}}$, $\overline{\mathfrak{h}_1\cap\mathfrak{h}_2}\subset\overline{\mathfrak{h}}_1\cap\overline{\mathfrak{h}}_2$.

б) Показать, что $\mathfrak{h}$ — идеал в $\overline{\mathfrak{h}}$ и что алгебра $\overline{\mathfrak{h}}/\mathfrak{h}$ абелева. [*Указание*: использовать упражнение 5.]

Добавление

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Предположим, что k — поле нулевой характеристики.

Теорема. *Пусть $\varphi=(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ — система n сходящихся формальных степенных рядов от n переменных. Тогда формальное дифференциальное уравнение*

$$\tau'(s)=\varphi(\tau(s)), \quad \tau(0)=0_r,$$

имеет единственное (формальное) решение, и это решение сходится.

Доказательство. Рассмотрим два случая.

Случай 1. $k=\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$. Запишем

$$\tau(s)=\sum_{n\geqslant 1} a_n s^n,$$

$$\varphi(X)=\sum c_\alpha X^\alpha.$$

В этих обозначениях наше дифференциальное уравнение принимает вид

$$\sum_{n\geqslant 1} n a_n s^{n-1} = \sum c_\alpha \Big(\sum_{m\geqslant 1} a_m s^m\Big)^\alpha.$$

Приравнивая коэффициенты, мы видим, что существуют однозначно определенные многочлены $Q_n(c_\alpha, a_m)$, где $|\alpha| < n$ и $m < n$, с целыми положительными коэффициентами, такие, что

$$a_n = \frac{1}{n} Q_n(c_\alpha, a_m).$$

Таким образом, индукцией по n устанавливается существование и единственность формального решения.

Для доказательства сходимости используем метод мажорант. Предположим, что $|c_\alpha| \leqslant d_\alpha$, где d_α — неотрицательное вещественное число. Пусть $\bar{\tau} = \sum b_n t^n$ — формальное решение для $\bar{\varphi}(X) = \sum d_\alpha X^\alpha$. Справедлива

Лемма. *Сходимость ряда $\bar{\tau}$ влечет за собой сходимость ряда τ. Точнее, $\bar{\tau}$ — мажоранта для τ.*

Доказательство леммы. Докажем по индукции, что $|a_n| \leqslant b_n$. При $n = 0$ имеем

$$a_0 = b_0 = 0.$$

Пусть для всех $k < n$ лемма доказана. Тогда

$$|a_n| = \left|\frac{1}{n}\right| \cdot |Q_n(c_\alpha, a_m)| \leqslant \frac{1}{n} Q_n(|c_\alpha|, |a_m|) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n} Q_n(d_\alpha, b_m) = b_n.$$

Лемма доказана.

Заметим, что мы пользовались равенством $\left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$, верным только для числовых полей.

Для того чтобы применить лемму, нам надо построить подходящее семейство рядов $\bar{\varphi} = (\bar{\varphi}_i)$ и явно вычислить соответствующее решение $\bar{\tau}$. Поскольку ряды $\varphi(X)=(\varphi_i(X))$ сходятся, существуют положительные константы M и R, такие, что

$$\sum |c_\alpha| R^{|\alpha|} < M.$$

Пусть $d_\alpha = \frac{M}{R^{|\alpha|}}$. Ясно, что $|c_\alpha| \leqslant d_\alpha$. Далее,

$$\bar{\varphi}(X) = \sum M\left(\frac{X}{R}\right)^\alpha = \frac{M}{\prod_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{X_i}{R}\right)}. \tag{*}$$

В силу единственности решение $\bar{\tau}(s)$ можно искать в виде $\bar{\tau}(s)=(\sigma(s), \ldots, \sigma(s))$, где $\sigma(s)$ — формальное решение одного дифференциального уравнения

$$\sigma'(s) = \frac{M}{\left(1 - \frac{\sigma(s)}{R}\right)^n}.$$

Для $\sigma(s)$ можно указать явную формулу, из которой и будет вытекать сходимость. Именно:

$$\sigma(s) = R\left(1 - \left\{1 - (n+1) M \frac{s}{R}\right\}^{\frac{1}{n+1}}\right).$$

Действительно, дифференцируя равенство

$$1 - \frac{\sigma(s)}{R} = \left\{1 - (n+1) M \frac{s}{R}\right\}^{\frac{1}{n+1}}$$

и используя формулу (*), мы видим, что $\sigma(s)$ удовлетворяет требуемому дифференциальному уравнению.

Случай 2. Поле k неархимедово.

Так как ряды $\varphi(X)=(\varphi_i(X))$ сходятся, мы можем (применяя, если надо, преобразование подобия) считать, что все коэффициенты лежат в кольце нормирования A.

Запишем

$$\tau(s) = \sum_{n \geqslant 1} a_n \frac{s^n}{n!},$$

$$\varphi(X) = \sum c_\alpha X^\alpha.$$

Наше дифференциальное уравнение принимает вид

$$\sum_{n\geqslant 0} a_{n+1}\frac{s^n}{n!}=\sum c_\alpha\left(\sum_{m\geqslant 1} a_m\frac{s^m}{m!}\right)^\alpha.$$

Используя тот факт, что биномиальные коэффициенты лежат в $\mathbf{Z}$, находим, что

$$a_n=Q_n(c_\alpha,\ a_m),\quad |\alpha|<n,\quad m<n,$$

где Q_n — однозначно определенные многочлены с целыми коэффициентами. Это доказывает единственность и существование формального решения. По индукции все коэффициенты a_n лежат в A, так как $c_\alpha\in A$. Следовательно, по лемме 4 § 4 $\tau(s)$ мажорируется вещественным рядом

$$\sum\frac{r^n}{a^n},$$

где $0<a\leqslant 1$. Этот ряд как геометрическая прогрессия сходится при достаточно малых r, что и завершает доказательство.

Часть III

Комплексные полупростые алгебры Ли

Посвящаю
Клодин и Лиз

Эти заметки — запись курса лекций, прочитанного мной в Алжире с 10 по 21 мая 1965 г. Содержание их следующее.

Первые две главы представляют собой сводку результатов (без доказательств), относящихся к общим свойствам нильпотентных, разрешимых и полупростых алгебр Ли[1]). Результаты эти хорошо известны, и читатель может их найти, например, в первой главе книги Бурбаки или в моем харвардском курсе. Доказательства основных теорем довольно подробны. В нескольких местах мне показалось целесообразным привести без доказательства некоторые дополнительные факты; они отмечены звездочкой.

В последней главе указывается, без доказательств, как переходить от алгебр Ли к группам Ли (комплексным, а также компактным). Эта глава — лишь простое введение, призванное подвести читателя к теории алгебраических групп и топологии групп Ли.

Я счастлив выразить здесь признательность Пьеру Жигору и Даниэлю Леману, отредактировавшим первоначальный вариант заметок, а также мадемуазель Франсуаз Пеша, отпечатавшей рукопись.

Ж.-П. С.

---

[1]) При переводе эти две главы опущены. — *Прим. перев.*

Глава III[1])

ПОДАЛГЕБРЫ КАРТАНА

В этой главе (за исключением § 6) основным полем является поле **C** комплексных чисел. Все рассматриваемые алгебры Ли имеют над полем **C** конечную размерность.

§ 1. Определение подалгебр Картана

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли и $\mathfrak{a}$ — ее подалгебра. Напомним, что *нормализатором* подалгебры $\mathfrak{a}$ в алгебре $\mathfrak{g}$ называется множество

$$\mathfrak{n}(\mathfrak{a}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid \operatorname{ad} x(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{a}\}.$$

Нормализатор является наибольшей подалгеброй в $\mathfrak{g}$, содержащей алгебру $\mathfrak{a}$ в качестве идеала.

Определение 1. Подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ называется *подалгеброй Картана* (алгебры $\mathfrak{g}$), если она удовлетворяет следующим условиям:

(а) $\mathfrak{h}$ — нильпотентная алгебра;

(б) $\mathfrak{h}$ совпадает со своим нормализатором (т. е. $\mathfrak{h} = \mathfrak{n}(\mathfrak{h})$).

Немного позже (§ 3) мы увидим, что любая алгебра обладает подалгеброй Картана.

§ 2. Регулярные элементы. Ранг

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли. Для каждого элемента $x \in \mathfrak{g}$ обозначим через $P_x(T)$ характеристический многочлен эндоморфизма $\operatorname{ad} x$ алгебры $\mathfrak{g}$:

$$P_x(T) = \det(T - \operatorname{ad} x).$$

[1]) Напомним, что главы I и II при переводе опущены. — *Прим. ред.*

Многочлен $P_x(T)$ можно расписать по степеням T:

$$P_x(T) = \sum_{i=0}^{i=n} a_i(x) T^i,$$

где $n = \dim \mathfrak{g}$. Если в алгебре $\mathfrak{g}$ зафиксировать некоторый базис, то любому элементу $x \in \mathfrak{g}$ будет отвечать набор комплексных чисел $(x_1, \ldots, x_n)$, так что коэффициенты $a_i(x)$ мы можем рассматривать как функции от n комплексных переменных $x_1, \ldots$ $\ldots, x_n$. Непосредственно проверяется, что эти функции являются однородными многочленами от $x_1, \ldots$ $\ldots, x_n$ степени $n - i$.

Определение 2. Назовем *рангом* алгебры $\mathfrak{g}$ минимальное целое число l, для которого функция $a_l(x)$, определенная выше, не равна тождественно нулю. При этом элемент $x \in \mathfrak{g}$ мы будем называть *регулярным*, если $a_l(x) \neq 0$.

Замечание. Поскольку $a_n = 1$, то заведомо $l \leqslant n$; равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g}$ нильпотентна. С другой стороны, для любого ненулевого элемента алгебры $\mathfrak{g}$ имеем $\operatorname{ad} x(x) = 0$. Это показывает, что число 0 является собственным значением эндоморфизма $\operatorname{ad} x$. Поэтому $a_0 = 0$ и $l \geqslant 1$ (при условии, что $\mathfrak{g} \neq 0$).

Предложение 1. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли. Множество $\mathfrak{g}_r$ ее регулярных элементов открыто, всюду плотно в $\mathfrak{g}$ и связно (относительно обычной топологии, которой наделяется любое конечномерное комплексное векторное пространство).*

Доказательство. По определению $\mathfrak{g}_r = \mathfrak{g} \setminus V$, где V — множество нулей полиномиальной функции a_l. Очевидно, V — замкнутое множество, а $\mathfrak{g}_r$ — открытое. Если бы множество V имело внутреннюю точку, то в ее окрестности многочлен a_l обращался бы в нуль и потому равнялся бы нулю тождественно, что невозможно по определению ранга. Пусть, наконец, x, y — любые два элемента из множества $\mathfrak{g}_r$. Комплексная прямая D, проходящая через x и y, пересекает V в конечном числе точек. Отсюда следует, что пересечение $D \cap \mathfrak{g}_r$ связно, так что точки x и y лежат в одной связной компоненте множества $\mathfrak{g}_r$. Таким образом, множество $\mathfrak{g}_r$ связно, поскольку точки x и у выбирались произвольно.

§ 3. Подалгебра Картана, ассоциированная с регулярным элементом

Пусть x — элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и λ — любое комплексное число. Обозначим через $\mathfrak{g}_x^\lambda$ *ниль-пространство* оператора $\operatorname{ad}(x) - \lambda$, т. е. множество таких элементов $y \in \mathfrak{g}$, которые аннулируются достаточно большой степенью оператора $\operatorname{ad}(x) - \lambda$.

В частности, $\mathfrak{g}_x^0$ является ниль-пространством эндоморфизма $\operatorname{ad} x$. Размерность этого пространства равняется кратности нулевого корня многочлена $P_x(T)$[1]), т. е. наименьшему целому числу i, для которого $a_i(x) \neq 0$.

Предложение 2. *Пусть $x \in \mathfrak{g}$. Тогда*

(а) *алгебра $\mathfrak{g}$ разлагается в прямую сумму пространств $\mathfrak{g}_x^\lambda$;*

(б) $[\mathfrak{g}_x^\lambda, \mathfrak{g}_x^\mu] \subset \mathfrak{g}_x^{\lambda+\mu}$, *где $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$;*

(в) $\mathfrak{g}_x^0$ — *подалгебра Ли алгебры $\mathfrak{g}$.*

Доказательство. Утверждение (*а*) получается применением к $\operatorname{ad} x$ стандартных свойств эндоморфизмов векторных пространств. Для доказательства свойства (б) нам нужно установить, что $[y, z] \in \mathfrak{g}_x^{\lambda+\mu}$, если $y \in \mathfrak{g}_x^\lambda$ и $z \in \mathfrak{g}_z^\mu$. Имеет место рекуррентная формула

$$(\operatorname{ad} x - \lambda - \mu)^n [y, z] = \sum_{p=0}^{n} C_n^p \left[(\operatorname{ad} x - \lambda)^p y, (\operatorname{ad} x - \mu)^{n-p} z\right]$$

(справедливость ее легко доказывается индукцией по n). При достаточно большом n все члены справа обращаются в нуль, и мы получаем, что $[y, z] \in \mathfrak{g}_x^{\lambda+\mu}$.

---

[1]) См. часть I, гл. V, § 6. — *Прим. перев.*

Свойство (в) есть частный случай свойства (б) при $\lambda=\mu=0$.

Теорема 1. *Если x — регулярный элемент, то алгебра $\mathfrak{g}_x^0$ является подалгеброй Картана алгебры $\mathfrak{g}$; размерность этой подалгебры равна l (рангу алгебры $\mathfrak{g}$).*

Доказательство. Покажем вначале, что алгебра $\mathfrak{g}_x^0$ *нильпотентна*. Для этого, согласно теореме Энгеля, нужно показать, что ограничение любого эндоморфизма $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} y$ на $\mathfrak{g}_x^0$ $(y\in\mathfrak{g}_x^0)$ нильпотентно. Обозначим через $\operatorname{ad}^1 y$ это ограничение, а через $\operatorname{ad}^2 y$ — соответствующий эндоморфизм факторпространства $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x^0$. Положим

$$U=\{y\in\mathfrak{g}_x^0 \mid \text{оператор } \operatorname{ad}^1 y \text{ не нильпотентен}\},$$
$$V=\{y\in\mathfrak{g}_x^0 \mid \text{оператор } \operatorname{ad}^2 y \text{ обратим}\}.$$

Множества U и V открыты в $\mathfrak{g}_x^0$, причем множество V непусто, так как оно содержит элемент x. Поскольку V является дополнением к алгебраическому подмногообразию (над $\mathbf{C}$) в пространстве $\mathfrak{g}_x^0$, то это множество всюду плотно в $\mathfrak{g}_x^0$. По аналогичным соображениям множество U тоже всюду плотно (если оно непусто!), и, следовательно, $U\cap V\neq\varnothing$. Пусть $y\in U\cap V$. Эндоморфизм $\operatorname{ad}^1 y$ имеет 0 своим собственным значением, однако кратность его строго меньше $\dim\mathfrak{g}_x^0$, так как $y\in U$. Как уже отмечалось, $\dim\mathfrak{g}_x^0=l$. С другой стороны, $y\in V$, и поэтому число 0 не является собственным значением эндоморфизма $\operatorname{ad}^2 y$. Отсюда легко вытекает, что кратность нуля как собственного значения оператора $\operatorname{ad} y$ та же, что и для $\operatorname{ad}^1 y$, и, следовательно, строго меньше l. Последнее противоречит определению числа l, и мы заключаем, что множество U пусто, т. е. алгебра $\mathfrak{g}_x^0$ нильпотентна.

Покажем теперь, что алгебра $\mathfrak{g}_x^0$ совпадает со своим нормализатором $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}_x^0)$. Пусть $z\in\mathfrak{n}(\mathfrak{g}_x^0)$. Тогда $\operatorname{ad} z(\mathfrak{g}_x^0)\subset\mathfrak{g}_x^0$ и, в частности, $[z, x]\in\mathfrak{g}_x^0$. По определению алгебры $\mathfrak{g}_x^0$ существует такое целое p, что

$(\mathrm{ad}\, x)^p([z,\ x]) = 0$. Последнее равенство равносильно тому, что $(\mathrm{ad}\, x)^{p+1} z = 0$, а это и означает, что $z \in \mathfrak{g}_x^0$.

Замечание. Приведенная выше теорема позволяет строить подалгебры Картана вида $\mathfrak{g}_x^0$; как мы увидим дальше, такими подалгебрами исчерпываются *все* подалгебры Картана.

§ 4. Сопряженность подалгебр Картана

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли. Обозначим через G группу *внутренних автоморфизмов* этой алгебры, т. е. подгруппу группы $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, порожденную элементами вида $e^{\mathrm{ad}\, y}$, где $y \in \mathfrak{g}$.

Теорема 2. *Группа G действует транзитивно на множестве всех подалгебр Картана алгебры $\mathfrak{g}$.*

Из теорем 1 и 2 вытекает

Следствие 1. *Размерность любой подалгебры Картана равна рангу алгебры $\mathfrak{g}$.*

Следствие 2. *Все подалгебры Картана имеют вид $\mathfrak{g}_x^0$, где x — регулярный элемент алгебры $\mathfrak{g}$.*

Доказательство теоремы разобьем на две части.

Первая часть доказательства. Пусть $\mathfrak{h}$ — некоторая подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}$. Символом $\mathrm{ad}^1 x$ (соответственно $\mathrm{ad}^2 x$), где x — элемент алгебры $\mathfrak{h}$, обозначим эндоморфизм пространства $\mathfrak{h}$ (соответственно $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$), индуцированный эндоморфизмом $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x$.

Лемма 1. *Множество*

$$V = \{x \in \mathfrak{h} \mid \mathrm{ad}_x^2 - \textit{обратимый оператор}\}$$

непусто.

Доказательство. Применяя теорему Ли к $\mathfrak{h}$-модулю $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, получаем флаг подпространств

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_m = \mathfrak{g}/\mathfrak{h},$$

инвариантных относительно $\mathfrak{h}$. Действие алгебры $\mathfrak{h}$ на одномерном пространстве V_i/V_{i-1} задается линейной формой α_i, такой, что

$$xv \equiv \alpha_i(x)\, v \,(\operatorname{mod} V_{i-1}), \text{ где } x \in \mathfrak{h} \text{ и } v \in V_i.$$

(Для простоты мы пишем здесь xv вместо $\operatorname{ad}^2 x(v)$.) Числа $\alpha_1(x), \ldots, \alpha_m(x)$ являются, таким образом, собственными значениями оператора $\operatorname{ad}^2 x$. Нам остается, следовательно, показать, что *ни одна из форм α_i не равна тождественно нулю.* Пусть, напротив, $\alpha_1 \neq 0, \ldots, \alpha_{k-1} \neq 0$, но $\alpha_k = 0$. Выберем такой элемент $x_0 \in \mathfrak{h}$, что $\alpha_1(x_0) \neq 0, \ldots, \alpha_{k-1}(x_0) \neq 0$. Ограничение эндоморфизма $\operatorname{ad}^2 x_0$ на V_{k-1} является обратимым эндоморфизмом; ограничение эндоморфизма $\operatorname{ad}^2 x_0$ на V_k уже необратимо и имеет число 0 своим собственным значением (кратности 1). Ниль-пространство V' оператора $\operatorname{ad}^2 x_0$ (в пространстве V_k) имеет поэтому размерность 1 и является прямым дополнением к пространству V_{k-1}:

$$V_k = V_{k-1} \oplus V'.$$

Покажем, что любой элемент $v' \in V'$ аннулируется произвольным эндоморфизмом вида $\operatorname{ad}^2 x$, где $x \in \mathfrak{h}$. В случае когда $x = x_0$, это очевидно. С другой стороны, для любого n имеет место формула

$$x_0^n(xv') = ((\operatorname{ad} x_0)^n x)\, v' \; (x \in \mathfrak{h},\; v' \in V')$$

(она легко доказывается по индукции). Так как алгебра $\mathfrak{h}$ нильпотентна, то при достаточно большом n имеем $(\operatorname{ad} x_0)^n x = 0$. Отсюда видно, что элемент xv' лежит в ниль-пространстве оператора $\operatorname{ad}^2 x_0$, т. е. $xv' \in V'$. Вспомним теперь, что $\operatorname{ad}^2 x$ отображает V_k в V_{k-1}. Но если так, то $xv' \in V_{k-1} \cap V'$, т. е. $xv' = 0$. Итак, мы доказали, что алгебра $\mathfrak{h}$ аннулирует V'. Возьмем в V' произвольный *ненулевой* элемент v' и выберем любого его представителя z в алгебре $\mathfrak{g}$. Равенство $xv' = 0$ (для всех $x \in \mathfrak{h}$) означает, что $[x, z] \in \mathfrak{h}$ (для всех $x \in \mathfrak{h}$).

Таким образом, z лежит в нормализаторе $\mathfrak{n}(\mathfrak{h})$. Однако по условию $z \notin \mathfrak{h}$ (так как $v' \neq 0$), что немедленно приводит к противоречию, поскольку $\mathfrak{n}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ по определению подалгебры Картана.

Лемма 2. *Множество* $W = G(V) = \bigcup_{g \in G} gV$ *всех элементов, получаемых из элементов множества V автоморфизмами из группы G, открыто в $\mathfrak{g}$.*

Доказательство. Пусть $x \in V$. Нам нужно показать, что W содержит некоторую окрестность элемента x. Рассмотрим отображение $(g, v) \longmapsto gv$ произведения $G \times V$ в алгебру $\mathfrak{g}$. Обозначим через θ дифференциал этого отображения в точке $(1, x)$ (т. е. соответствующее отображение касательных пространств). Нам надо установить, что образ θ заполняет все пространство $\mathfrak{g}$. Этот образ содержит во всяком случае касательное пространство к V, т. е. пространство $\mathfrak{h}$. С другой стороны, касательным вектором кривой

$$t \longmapsto e^{t\,\mathrm{ad}\,(y)}(x) = 1 + t\,[y,\ x] + \ \ldots \qquad (y \in G)$$

в точке 0 является элемент $[y, x]$. Отсюда вытекает, что $\mathrm{ad}\,x(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{Im}(\theta)$. Но так как $\mathrm{ad}\,x$ определяет автоморфизм пространства $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ ($x \in V!$), мы получаем

$$\mathrm{ad}\,x(\mathfrak{g}) + \mathfrak{h} = \mathfrak{g},$$

что ввиду сказанного выше дает равенство $\mathrm{Im}(\theta) = \mathfrak{g}$. По известной теореме о неявных функциях заключаем, что отображение $G \times V \to \mathfrak{g}$ является открытым в точке $(1, x)$, а это по существу и есть утверждение нашей леммы.

Лемма 3. *Существует регулярный элемент $x \in \mathfrak{g}$, такой, что $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_x^0$.*

Доказательство. Сохраним все предыдущие обозначения. Леммы 1 и 2 показывают, что множество W открыто и непусто. Таким образом, множество $\mathfrak{g}_r$ регулярных элементов алгебры $\mathfrak{g}$ (см. предложение 1) имеет с множеством W непустое пересечение. Ясно, что элемент x регулярен ($x \in V$), если регулярен элемент $gx\,(g \in G)$. Мы можем считать поэтому, что V содержит по крайней мере один регулярный элемент x. Замечая, что $\mathrm{ad}^1 x$ — нильпотентный эндоморфизм, а $\mathrm{ad}^2 x$ — обратимый, мы получаем, что $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_x^0$.

Вторая часть доказательства. В силу леммы 3 все подалгебры Картана в алгебре $\mathfrak{g}$ имеют вид $\mathfrak{g}_x^0$ $(x \in \mathfrak{g}_r)$. Введем в множестве $\mathfrak{g}_r$ следующее отношение эквивалентности R:

$R(x, y) \Leftrightarrow$ алгебры $\mathfrak{g}_x^0$ и $\mathfrak{g}_y^0$ сопряжены относительно G.

Лемма 4. *Классы эквивалентности отношения R являются открытыми множествами.*

Доказательство. Пусть $x \in \mathfrak{g}_r$. Мы должны найти такую окрестность U этого элемента в $\mathfrak{g}_r$, что любой элемент $y \in U$ эквивалентен x. Применим результаты, полученные в первой части, к подалгебре Картана $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_x^0$. Соответствующее множество V содержит, конечно, элемент x (см. предложение 2). По лемме 2 множество $G(V)$ открыто в $\mathfrak{g}$ и имеет с открытым всюду плотным множеством $\mathfrak{g}_r$ непустое пересечение. Положим $U = G(V) \cap \mathfrak{g}_r$. Если $y \in U$, то y есть регулярный элемент и имеет вид gx', где $g \in G$ и $x' \in V$ (следовательно, x' тоже регулярный элемент). Имеем

$$\mathfrak{g}_y^0 = g(\mathfrak{g}_{x'}^0) = g(\mathfrak{h}) = g(\mathfrak{g}_x^0),$$

а это и означает эквивалентность элементов x и y.

Итак, *связное* (предложение 1) множество $\mathfrak{g}_r$ распадается в сумму *непересекающихся* открытых множеств (классов эквивалентности). Из сказанного ясно, что класс эквивалентности может быть только один. Теорема 2, таким образом, полностью доказана.

Замечание. Теорема 2 остается справедливой, если группу G заменить подгруппой, порожденной элементами $e^{\mathrm{ad}\, y}$, где $\mathrm{ad}\, y$ — нильпотентный эндоморфизм. В такой форме эта теорема была распространена Шевалле на случай произвольного основного поля (алгебраически замкнутого нулевой характеристики). Доказательство читатель сможет найти, например, в главе 12 семинара „Софус Ли“.

§ 5. Случай полупростой алгебры

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда*

(а) *$\mathfrak{h}$ — абелева алгебра;*

(б) *все элементы подалгебры $\mathfrak{h}$ полупросты;*

(в) *централизатор подалгебры $\mathfrak{h}$ (т. е. множество*

$$\{x \in \mathfrak{g} \mid \operatorname{ad} x(\mathfrak{h}) = (0)\}$$

совпадает с $\mathfrak{h}$;

(г) *ограничение формы Киллинга на $\mathfrak{h}$ невырождено.*

Доказательство. (г) По следствию 2 теоремы 2 найдется регулярный элемент x, такой, что $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_x^0$. Пусть

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_x^0 \oplus \sum_{\lambda \neq 0} \mathfrak{g}_x^\lambda$$

— разложение, соответствующее эндоморфизму $\operatorname{ad} x$ (см. предложение 2). Несложное вычисление показывает, что пространства $\mathfrak{g}_x^\lambda$ и $\mathfrak{g}_x^\mu$ ортогональны друг другу (относительно формы Киллинга B) в том и только в том случае, когда $\lambda + \mu \neq 0$. Отсюда видно, что алгебра $\mathfrak{g}$ разлагается в прямую сумму попарно ортогональных подпространств:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_x^0 \oplus \sum_{\lambda \neq 0} (\mathfrak{g}_x^\lambda \oplus \mathfrak{g}_x^{-\lambda}).$$

Так как форма B невырождена, ее ограничение на каждое из этих подпространств, и в частности на $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_x^0$, тоже невырождено.

(а) Применяя критерий Картана (см. часть I, гл. V, § 7) к представлению $\operatorname{ad}\colon \mathfrak{h} \to \operatorname{End} \mathfrak{g}$, получаем $\operatorname{Tr}(\operatorname{ad} x \circ \operatorname{ad} y) = 0$, если $x \in \mathfrak{h}$ и $y \in [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$. Иными словами, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ ортогонально к $\mathfrak{h}$ относительно формы Киллинга. Поскольку свойство (г) уже доказано, это влечет за собой равенство $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0$.

(в) Так как подалгебра $\mathfrak{h}$ абелева, она содержится в своем централизаторе $\mathfrak{c}(\mathfrak{h})$. С другой стороны, ясно, что $\mathfrak{c}(\mathfrak{h})$ лежит в нормализаторе $\mathfrak{n}(\mathfrak{h})$. Но известно, что $\mathfrak{h} = \mathfrak{n}(\mathfrak{h})$, поэтому $\mathfrak{c}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.

(б) Пусть $x \in \mathfrak{h}$, и пусть $x = s + n$ — каноническое разложение на полупростую и нильпотентную компоненты соответственно (см. часть I, гл. VI, § 5). Любой элемент $y \in \mathfrak{h}$ коммутирует с x (см. (а)), поэтому он коммутирует с его компонентами s и n, т. е. s и n лежат в $\mathfrak{c}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. С другой стороны, поскольку y и n коммутируют, а $\operatorname{ad} n$ — нильпотентный оператор, мы видим, что $\operatorname{ad} y \circ \operatorname{ad} n$ — тоже нильпотентный оператор и его след $B(y, n)$ равен нулю. Таким образом, элемент n, принадлежащий подалгебре $\mathfrak{h}$, ортогонален ко всем ее элементам. Ввиду (г) это означает, что $n = 0$, т. е. элемент $x = s$ полупрост, как и утверждалось.

Свойство (в) можно переформулировать так:

Следствие 1. *Подалгебра Картана является максимальной абелевой подалгеброй полупростой алгебры* $\mathfrak{g}$.

Следствие 2. *Каждый регулярный элемент в полупростой алгебре полупрост.*

Для доказательства следует лишь заметить, что любой регулярный элемент x содержится в подалгебре Картана $\mathfrak{g}_x^0$.

Замечание. Можно было бы показать, что всякая максимальная абелева подалгебра, состоящая из полупростых элементов, является подалгеброй Картана. Напротив, существуют при $\mathfrak{g} \neq 0$ максимальные абелевы подалгебры алгебры $\mathfrak{g}$, содержащие ненулевые нильпотентные элементы и тем самым не являющиеся подалгебрами Картана.

§ 6. Вещественные алгебры Ли

Пусть $\mathfrak{g}_0$ — алгебра Ли над полем вещественных чисел $\mathbf{R}$, а алгебра $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ — ее комплексификация. Определения подалгебры Картана, регулярного элемента и ранга для вещественных алгебр формулируются точно так же, как и для комплексных. Заметим, что ранг алгебры $\mathfrak{g}_0$ (над $\mathbf{R}$) и ранг алгебры $\mathfrak{g}$ (над $\mathbf{C}$) равны и что подалгебра $\mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{g}_0$ тогда и только тогда является подалгеброй Картана, когда ее комплексификация $\mathfrak{h}_0 \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ является подалгеброй Картана в $\mathfrak{g}$. Хотя теоремы 1 и 3 остаются верными и в вещественном случае (первая, в частности, доказывает существование подалгебр Картана), этого уже нельзя сказать о теореме 2. Можно только утверждать, что подалгебры Картана алгебры $\mathfrak{g}_0$ распадаются на конечное число классов сопряженности относительно внутренних автоморфизмов. (Последнее объясняется тем, что множество регулярных элементов алгебры $\mathfrak{g}_0$ не обязательно связно, а является лишь объединением конечного числа связных открытых множеств.) Явное описание этих классов можно найти в работе Костанта [1].

Глава IV[1])

АЛГЕБРА $sl(2)$ И ЕЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

В этой главе (за исключением § 6) основным полем является поле $\mathbf{C}$ комплексных чисел.

§ 1. Алгебра Ли $sl(2)$

Эта алгебра состоит, как известно, из квадратных матриц второго порядка с нулевым следом; обозначим ее для краткости через $\mathfrak{g}$. Легко проверяется, что алгебра $\mathfrak{g}$ проста, имеет ранг 1 и естественный базис из трех элементов

$$X=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad H=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Непосредственное вычисление показывает, что

$$[X, Y]=H,\quad [H, X]=2X,\quad [H, Y]=-2Y.$$

Отсюда видно, что эндоморфизм $\operatorname{ad}(H)$ полупрост и имеет три собственных значения: 2, 0, -2. Прямая $\mathfrak{h}=\mathbf{C}\cdot H$, проходящая через H, является подалгеброй Картана, которую называют также *канонической* подалгеброй.

Элементы X и Y нильпотентны. Подалгебра $\mathfrak{b}\subset\mathfrak{g}$, порожденная H и X, разрешима ($\mathfrak{b}$ есть не что иное, как подалгебра Бореля алгебры $\mathfrak{g}$)[2]).

---

[1]) Основная часть результатов этой главы содержится по существу в гл. VII ч. I. Однако в дальнейшем автору понадобятся в явном виде свойства алгебры $sl(2)$. Поэтому было признано целесообразным перевести настоящую главу. — *Прим. перев.*

[2]) Определение подалгебры Бореля будет дано в гл. VI. — *Прим. перев.*

§ 2. Модули, веса, примитивные элементы

Пусть V — некоторый $\mathfrak{g}$-модуль (не обязательно конечной размерности). Пусть V^λ ($\lambda \in \mathbf{C}$) — собственное подпространство оператора H в пространстве V с собственным значением λ, т. е.

$$V^\lambda = \{x \in V \mid Hx = \lambda x\}.$$

Об элементах из V^λ мы будем говорить, что они *имеют вес* λ.

Предложение 1. (а) *Сумма* $\sum\limits_{\lambda \in \mathbf{C}} V^\lambda$ *(в пространстве V) является прямой суммой.*

(б) *Если элемент x имеет вес λ, то Xx имеет вес $\lambda + 2$, а Yx — вес $\lambda - 2$.*

Доказательство. Свойство (а) выражает лишь тот известный факт, что векторы, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы.

Далее, если $Hx = \lambda x$, то

$$HXx = [H, H]\, x + XHx = 2X,$$

т. е. вектор Xx имеет вес $\lambda + 2$.

Аналогичное вычисление показывает, что вектор Yx имеет вес $\lambda - 2$.

Замечание. Если пространство V конечномерно, то сумма $\sum\limits_{\lambda \in \mathbf{C}} V^\lambda$ равна V (см. предложение 1.7.2.2). Это, вообще говоря, уже неверно в бесконечномерном случае.

Определение 1. Пусть V — произвольный $\mathfrak{g}$-модуль и λ — комплексное число. Мы скажем, что элемент $e \in V$ является *примитивным элементом веса* λ, если $x \neq 0$ и если

$$Xe = 0 \text{ и } He = \lambda e.$$

Предложение 2. *Для того чтобы ненулевой вектор e модуля V был примитивен, необходимо и достаточно, чтобы прямая, проходящая через вектор e, была инвариантна относительно подалгебры Бореля $\mathfrak{b}$.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Если прямая $\mathbf{C}e$ инвариантна относительно алгебры $\mathfrak{b}$, то $Xe = \mu e$ и $He = \lambda e$, где $\mu, \lambda \in \mathbf{C}$. Из формулы $[H, X] = 2X$ видно, что $2\mu = 0$, т. е. $\mu = 0$, и, значит, элемент e примитивен.

Предложение 3. *Каждый $\mathfrak{g}$-модуль конечной размерности содержит примитивный элемент.*

Для доказательства достаточно применить теорему Ли (см. ч. I, гл. V, § 5).

[Другое доказательство. Рассмотрим произвольный собственный (относительно H) вектор x и возьмем последний ненулевой элемент в последовательности

$$x,\ Xx,\ X^2x,\ \ldots .$$

Он и будет примитивным.]

§ 3. Строение подмодуля, порожденного примитивным элементом

Теорема 1. *Пусть V — некоторый $\mathfrak{g}$-модуль и $e \in V$ — его примитивный элемент веса λ. Положим $e_n = Y^n e/n!$ при $n \geqslant 0$ и $e_{-1} = 0$. Тогда*

$$\text{(i)}\quad He_n = (\lambda - 2n)\, e_n,$$

$$\text{(ii)}\quad Ye_n = (n+1)\, e_{n+1},$$

$$\text{(iii)}\quad Xe_n = (\lambda - n + 1)\, e_{n-1}$$

для всех $n \geqslant 0$.

Доказательство. Формула (i), выражающая тот факт, что вектор e_n имеет вес $\lambda - 2n$, есть прямое следствие предложения 1.

Формула (ii) очевидна.

Формула (iii) доказывается индукцией по n. При $n = 0$ формула справедлива, так как $e_{-1} = 0$ и $Xe = 0$. При $n \geqslant 0$ имеем

$$\begin{aligned} nXe_n &= XYe_{n-1} = [X, Y]\, e_{n-1} + YXe_{n-1} = \\ &= He_{n-1} + (\lambda - n + 2)\, Ye_{n-2} = \\ &= \left((\lambda - 2n + 2) + (\lambda - n + 2)(n-1) \right) e_{n-1} = \\ &= n(\lambda - n + 1)\, e_{n-1}. \end{aligned}$$

Деля это равенство на n, получаем формулу (iii).

Следствие 1. *Возможны только два случая:*

(а) *все векторы* $\{e_n\}$ $(n \geqslant 0)$ *линейно независимы;*

(б) *вес* λ *вектора* e *есть целое число* $m \geqslant 0$, *такое, что векторы* $e_0, \ldots, e_m$ *линейно независимы и* $e_i = 0$ *при* $i > m$.

Доказательство. Поскольку все элементы в последовательности

$$e_0 = e,\ e_1,\ e_2,\ \ldots$$

имеют различные веса, ненулевые элементы этой последовательности линейно независимы. Если все элементы отличны от нуля, то мы, очевидно, приходим к случаю (а). В противном случае существует такое целое число $m \geqslant 0$, что $e_0, \ldots, e_m$ не равны нулю, а $e_{m+1} = 0$ (и тем более $e_{m+2} = e_{m+3} = \ldots = 0$). Применяя формулу (iii) при $n = m + 1$, получаем

$$Xe_{m+1} = (\lambda - m)\, e_m.$$

Но по условию $e_{m+1} = 0$ и $e_m \neq 0$, откуда и вытекает, что $\lambda = m$.

Следствие 2. *Допустим, что модуль* V *имеет конечную размерность (т. е. случай* (а) *следствия 1 исключается). Тогда подпространство* $W \subset V$, *порожденное векторами* $\{e_0, \ldots, e_m\}$, *является* $\mathfrak{g}$*-подмодулем (т. е. инвариантно относительно* $\mathfrak{g}$*), и притом неприводимым.*

Доказательство. Формулы (i), (ii) и (iii) показывают, что подпространство W инвариантно относительно $\mathfrak{g}$. Согласно (i), собственные значения оператора H равны $m, m-2, m-4, \ldots, -m$, причем кратность их равна 1. Поэтому если W содержит подпространство W', инвариантное относительно H, то один из векторов e_i $(0 \leqslant i \leqslant m)$ лежит в W'. Если, кроме того, пространство W' инвариантно относительно $\mathfrak{g}$, то оно содержит в силу формулы (iii) векторы $e_{i-1}, \ldots, e_0 = e$, а в силу формулы (ii) — векторы $e_i, e_{i+1}, \ldots$. Следовательно, $W' = W$, т. е. W — неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль.

§ 4. Модули W_m

Пусть m — целое неотрицательное число и W_m — векторное пространство размерности $m+1$ с фиксированным базисом $\{e_0, \ldots, e_m\}$. Определим действие элементов X, Y, H на пространстве W_m следующими формулами:

$$\text{(i)}\ He_n = (m-2n)\,e_n,$$

$$\text{(ii)}\ Ye_n = (n+1)\,e_{n+1},$$

$$\text{(iii)}\ Xe_n = (m-n+1)\,e_n.$$

(Мы считаем здесь, что $e_{m+1} = e_{-1} = 0$.) Простая проверка показывает, что

$$HXe_n - XHe_n = 2Xe_n,$$

$$HYe_n - YHe_n = -2Ye_n,$$

$$XYe_n - YXe_n = He_n.$$

Другими словами, эндоморфизмы X, Y, H наделяют W_m структурой $\mathfrak{g}$-модуля.

Теорема 2. (а) *W_m — неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль.*

(б) *Всякий неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль размерности $m+1$ изоморфен W_m.*

Доказательство. (а) легко следует из следствия 2 теоремы 1, если заметить, что e_0 — примитивный элемент веса m.

(б) Пусть V — неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль, $\dim V = m+1$. Согласно следствию 3, V содержит примитивный элемент. Следствие 2 теоремы 1 показывает, что вес элемента e есть целое неотрицательное число m' и подмодуль W, порожденный вектором e, имеет размерность $m'+1$. Так как V неприводим, W совпадает с V и $m' = m$. Изоморфизм $\mathfrak{g}$-модулей V и W_m следует теперь из формул (i), (ii), (iii) теоремы 3.1.

Примеры. Модуль W_0 есть тривиальный $\mathfrak{g}$-модуль размерности 1. Пространство $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$, наделенное естественной структурой $\mathfrak{g}$-модуля, изоморфно W_1. Алгебра $\mathfrak{g}$, рассматриваемая как $\mathfrak{g}$-модуль относительно присоединенного представления, изоморфна W_2.

Замечание. Можно показать, что модуль W_m изоморфен m-й симметрической степени модуля $W_1 = \mathbf{C}^2$.

§ 5. Строение конечномерных $\mathfrak{g}$-модулей

Теорема 3. *Всякий $\mathfrak{g}$-модуль конечной размерности изоморфен прямой сумме модулей вида W_m.*

Доказательство. В самом деле, по теореме Вейля (см. ч. I, гл. VI, § 3) любой конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль есть прямая сумма своих неприводимых подмодулей. Наша теорема вытекает поэтому из доказанного ранее утверждения о том, что неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль изоморфен модулю вида W_m.

Теорема 4. *Пусть V — некоторый $\mathfrak{g}$-модуль конечной размерности. Тогда*

(а) *Эндоморфизм пространства V, определенный элементом H, полупрост. Его собственные значения являются целыми числами. Если n — собственное значение оператора H, то таковыми являются также числа $n-2$, $n-4$, …, $-n$.*

(б) *Линейные отображения*

$$Y^n\colon V^n \to V^{-n} \quad \text{и} \quad X^n\colon V^{-n} \to V^n$$

являются изоморфизмами. В частности, V^n и V^{-n} имеют одинаковую размерность.

(Напомним, что V^n обозначает множество всех элементов пространства V, имеющих вес n.)

Доказательство. Теорема 3 позволяет свести все эти утверждения к случаю, когда $V = W_m$. Но в этом частном случае, как показывают формулы теоремы 1, свойства (а) и (б) очевидны.

Замечания. 1. Тот факт, что пространства V^n и V^{-n} имеют одну и ту же размерность, можно было бы доказать, воспользовавшись автоморфизмом $\theta = e^X e^Y e^{-X}$ пространства V. (Заметим, что X и Y — нильпотентные операторы на V, так что все экспоненты суть многочлены.) Легко показать, что

$$\theta \circ X = -Y \circ \theta, \quad \theta \circ Y = -\theta \circ X, \quad \theta \circ H = -H \circ \theta.$$

Из последнего соотношения вытекает, что θ переводит V^n в V^{-n}.

2. Укажем одно применение теорем 3 и 4, не связанное с интерпретацией алгебры $sl(2)$ как алгебры Ли группы $SL(2)$. Пусть A — компактное кэлерово многообразие (комплексной) размерности n, и пусть V — пространство когомологий $H^*(A, \mathbf{C})$. Согласно теории Ходжа, с кэлеровой структурой на многообразии A ассоциируются эндоморфизмы Λ и L пространства V (см. Вейль А. [1*], гл. IV); обозначим их через X и Y. Действие элемента H на V определим формулой $Hx = (n - p)x$, где $x \in H^p(A, \mathbf{C})$. Такое определение снабжает пространство V структурой $\mathfrak{g}$-модуля (см. цитированную выше книгу Вейля). Применяя к этому модулю теоремы 3 и 4, мы приходим к известным теоремам Ходжа о „примитивных" классах когомологий.

§ 6. Топологические свойства группы $SL(2)$

Рассмотрим группу $SL(2)$ комплексных квадратных матриц второго порядка с определителем 1; она является комплексной группой Ли, и ее алгеброй Ли служит алгебра $sl(2)$. Элементы $X, Y, H \in sl(2)$ определяют в группе $SL(2)$ однопараметрические подгруппы

$$e^{tX} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e^{tY} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}, \quad e^{tH} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Далее, в группе $SL(2)$ содержится подгруппа $SU(2)$, состоящая из унитарных матриц; это вещественная компактная группа Ли, алгебру Ли которой мы обозначим через $su(2)$.

Теорема 5. (а) *Группа $SL(2)$ изоморфна (как вещественное аналитическое многообразие) прямому произведению $SU(2) \times \mathbf{R}^3$.*

(б) *Группа $SU(2)$ изоморфна (как группа Ли) группе кватернионов с единичной нормой и гомеоморфна (как топологическое пространство) сфере $\mathbf{S}^3$.*

(в) *Группы $SU(2)$ и $SL(2)$ связны и односвязны.*

(г) *Алгебра Ли $sl(2)$ естественным образом отождествляется с комплексификацией вещественной алгебры Ли $su(2)$, т. е. $sl(2) = su(2) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} = su(2) \oplus \oplus isu(2)$.*

Доказательство. Утверждение (б) хорошо известно и мы не будем на нем останавливаться.

Далее, алгебра $su(2)$ есть не что иное, как алгебра Ли *косоэрмитовых* матриц со следом 0. При этом очевидно, что $sl(2) = su(2) \oplus P$, где через P мы обозначили множество эрмитовых матриц с нулевым следом. Свойство (г), таким образом, тоже доказано.

С другой стороны, элементарные вычисления показывают, что отображение

$$(U, P) \longmapsto U \cdot e^P$$

устанавливает изоморфизм (вещественных аналитических многообразий) $SU(2) \times P$ и $SL(2)$. Но множество P, будучи трехмерным векторным пространством, изоморфно $\mathbf{R}^3$, так что $SL(2)$, как и утверждалось в пункте (а), гомеоморфно $\mathbf{R}^3$.

Утверждение (в) вытекает из (б), если учесть, что сфера $\mathbf{S}^3$ связна и односвязна.

„Унитарный прием“ Вейля принимает, таким образом, следующий вид:

Теорема 6. *Для всякой комплексной группы Ли G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ указанные ниже канонические отображения суть биекции:*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(SL(2), G) & \xrightarrow{\alpha} & \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(SU(2), G) \\ \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(sl(2), \mathfrak{g}) & \xrightarrow{\gamma} & \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(su(2), \mathfrak{g}) \end{array}$$

(Символ $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(SL(2), G)$ обозначает здесь множество аналитических комплексных гомоморфизмов группы $SL(2)$ в группу G; соответственно символ $\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(su(2), \mathfrak{g})$ обозначает множество $\mathbf{R}$-гомоморфизмов алгебры Ли $su(2)$ в алгебру Ли $\mathfrak{g}$ и т. д. Отображения α и γ суть не что иное, как отображения ограничения; отображения β и δ определяются стандартным функтором, переводящим группы Ли в соответствующие алгебры Ли.)

Доказательство. Отображения β и δ биективны, поскольку группы $SL(2)$ и $SU(2)$ связны и односвязны. Отображение γ биективно, поскольку $sl(2)$ — комплексификация вещественной алгебры $su(2)$. Наконец, биективность отображения α (заранее не очевидная) вытекает из коммутативности нашей диаграммы.

Следствие. *Конечномерные линейные представления групп и алгебр Ли $SL(2)$, $SU(2)$, $sl(2)$, $su(2)$ находятся в биективном соответствии друг с другом.*

Для доказательства достаточно применить теорему 6 к линейной группе $G = GL(n, \mathbf{C})$, $n = 0, 1, \ldots$.

§ 7. Приложения

Глобальные результаты предыдущего параграфа позволяют иначе доказать некоторые свойства $sl(2)$-модулей. Например:

(i) Полная приводимость конечномерных $sl(2)$-модулей вытекает из следствия теоремы 6, согласно которому эти модули биективно соответствуют линейным представлениям *компактной* группы $SU(2)$.

(ii) Тот факт, что собственными значениями оператора H могут быть лишь целые числа, можно установить следующим образом. Пусть V — произвольный $sl(2)$-модуль конечной размерности, и пусть $x \in V$ — собственный вектор оператора H с собственным значением λ. По следствию теоремы 6 группа $SL(2)$ действует на V_n; в частности, элемент $e^{tH} \in SL(2)$ переводит x в $e^{t\lambda}x$. Положим $t = 2\pi i$, тогда $e^{tH} = 1$ и $e^{tH}x = x$. Следовательно, $e^{t\lambda} = 1$ при $t = 2\pi i$, а это и означает, что λ — *целое* число.

(iii) Автоморфизм θ, введенный в конце § 5, есть не что иное, как действие элемента $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ группы $SL(2)$.

Глава V

СИСТЕМЫ КОРНЕЙ

В этой главе (за исключением § 17) основным полем является поле $\mathbf{R}$ вещественных чисел. Все рассматриваемые векторные пространства имеют конечную размерность.

§ 1. Отражения

Пусть V — векторное пространство и α — его ненулевой элемент. *Отражением* (относительно вектора α) мы назовем автоморфизм s пространства V, удовлетворяющий следующим двум условиям:

(i) $s(\alpha) = -\alpha$;

(ii) множество H элементов пространства V, инвариантных при автоморфизме s, является гиперплоскостью в V.

Очевидно, что V разлагается в прямую сумму подпространства H и прямой $\mathbf{R}\alpha$, что автоморфизм s имеет порядок 2 и что отражение s однозначно определяется заданием прямой $\mathbf{R}\alpha$ и гиперплоскости H.

Пусть V^* — двойственное к V пространство и α^* — его элемент, такой, что

$$\alpha^*(H) = 0 \quad \text{и} \quad \alpha^*(\alpha) = 2.$$

Имеем

$$s(x) = x - \langle \alpha^*, x \rangle \alpha \quad \text{для всех} \quad x \in V$$

Последнее равенство можно переписать еще так:

$$s = 1 - \alpha^* \otimes \alpha,$$

где $\operatorname{End} V$ отождествляется с $V \otimes V^*$.

Обратно, если $\alpha \in V$ и $\alpha^* \in V^*$, причем

$$\langle \alpha^*, \alpha \rangle = 2,$$

то элемент $1-\alpha^* \otimes \alpha$ есть отражение относительно вектора α.

Лемма 1. *Пусть α — ненулевой вектор пространства V и R — конечный набор векторов, порождающих V. Тогда существует не более одного отражения (относительно вектора α) переводящего множество R в себя.*

Доказательство. Пусть s и s' — два таких отражения и u — их произведение. Автоморфизм u обладает следующими свойствами:

$u(R)=R$,

$u(\alpha)=\alpha$,

u индуцирует тождественный эндоморфизм на факторпространстве $V/\mathbf{R}\alpha$.

Два последних свойства показывают, что все собственные значения оператора u равны 1. С другой стороны, так как R конечно, существует целое число $n \geqslant 1$, такое, что $u^n(x)=x$ для всех $x \in R$. Отсюда следует, что $u^n=1$, поскольку множество R порождает V, и, значит, эндоморфизм u диагонализуем. Поскольку все собственные значения оператора u равны 1, заключаем, что $u=1$ и $s=s'$.

§ 2. Определение системы корней

Определение 1. Пусть V — векторное пространство и R — некоторое его подмножество. Мы скажем, что R есть *система корней* в пространстве V, если выполнены следующие условия:

1) R — конечное множество, порождающее пространство V и не содержащее нулевого вектора;

2) для любого вектора $\alpha \in R$ существует отражение s_α (относительно α), переводящее множество R в себя (в силу леммы 1 такое отражение единственно);

3) для любых $\alpha, \beta \in R$

$$s_\alpha(\beta)-\beta=n\alpha, \quad \text{где } n \in \mathbf{Z}.$$

Размерность пространства V называется *рангом* системы R, а элементы множества R — *корнями* пространства V (относительно системы R). Как было установлено в § 1, отражение s_α, соответствующее корню α, записывается следующим (единственным) образом:

$$s_\alpha = 1 - \alpha^* \otimes \alpha, \quad \text{где} \quad \langle \alpha^*, \alpha \rangle = 2.$$

Элемент $\alpha^* \in V^*$ мы назовем корнем, *двойственным* (или *обратным*) к α. Условие 3) можно теперь переформулировать так:

3′) Для любых $\alpha, \beta \in R$ число $\langle \alpha^*, \beta \rangle$ является целым.

Заметим, что $-\alpha \in R$, если $\alpha \in R$. Это вытекает из 2) или 3), так как $-\alpha = s_\alpha(\alpha)$.

Определение 2. Система корней R называется *приведенной*, если при любом $\alpha \in R$ вектор $-\alpha$ является единственным корнем, коллинеарным α.

Если R не является приведенной системой, то в ней содержатся два корня вида α и $t\alpha$ с $0 < t < 1$. Применяя свойство 3) к корню $\beta = t\alpha$, мы видим, что $2t \in \mathbf{Z}$, так что $t = 1/2$.

Таким образом, корни, коллинеарные вектору α, имеют вид

$$-\alpha, \ -\alpha/2, \ \alpha/2, \ \alpha.$$

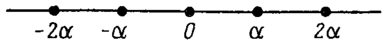
Замечание. Приведенные системы корней соответствуют в теории алгебр Ли (или алгебраических групп) полупростому случаю при условии, что основное поле алгебраически замкнуто. Именно с такими системами мы и будем в дальнейшем встречаться. Неприведенные системы появляются лишь тогда, когда основное поле алгебраически не замкнуто.

§ 3. Первые примеры

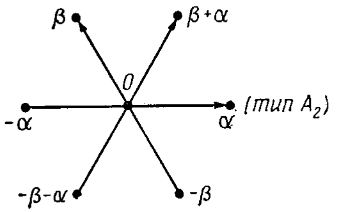
(Другие будут указаны в § 16.)

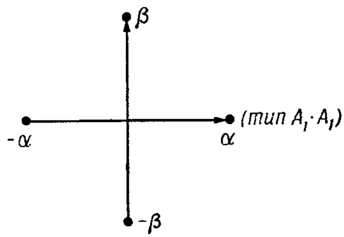
Единственной приведенной системой корней ранга 1 является система

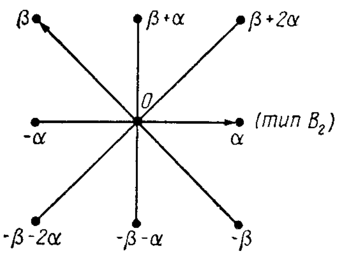
Существует также неприведенная система ранга 1:

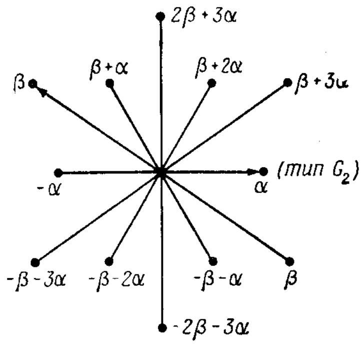


Можно показать (см. § 8, 15), что всякая приведенная система ранга 2 изоморфна одному из следующих четырех типов:









Упражнение. Пополнить систему корней типа B_2 так, чтобы получить неприведенную систему. Можно ли сделать то же самое с системами A_2 и G_2?

§ 4. Группа Вейля

Определение 3. Пусть R — система корней в векторном пространстве V. Назовем *группой Вейля* системы R подгруппу W в полной линейной группе $GL(V)$, порожденную отражениями s_α, $\alpha \in R$.

Группа W является, очевидно, подгруппой группы $\mathrm{Aut}(R)$ автоморфизмов пространства V, переводящих R в себя. Поскольку R порождает V, обе эти группы отождествляются с некоторыми подгруппами в группе всех подстановок множества R. В частности, обе эти группы конечны.

Пример. В том случае, когда R есть приведенная система ранга 2, группа W изоморфна *диэдральной* группе порядка $2n$, где $n=2$ (для типа $A_1\times A_1$), $n=3$ (для типа A_2), $n=4$ (для типа B_2) и $n=6$ (для типа G_2). При этом $\mathrm{Aut}(R)=W$, если R имеет тип B_2 или G_2, и $(\mathrm{Aut}(R): W)=2$, если R имеет тип $A_1\times A_1$ или A_2.

§ 5. Инвариантные квадратичные формы

Предложение 1. *Пусть R — система корней в пространстве V. Существует невырожденная билинейная симметрическая положительно определенная форма $(\ ,\ )$ в пространстве V, инвариантная относительно группы Вейля W системы R.*

Доказательство. В самом деле, W — конечная группа. Возьмем на V произвольную билинейную невырожденную симметричную положительно определенную форму $B(x, y)$ и рассмотрим форму

$$(x, y)=\sum_{w\in W} B(wx, wy).$$

Легко видеть, что форма (x, y) инвариантна относительно W и $(x, x)>0$, если $x\neq 0$.

Всюду в дальнейшем через $(\ ,\ )$ будет обозначаться именно такая форма.

Таким образом, пространство V оказалось снабженным структурой евклидова пространства, относительно которой элементы группы Вейля (в частности, отражения s_α) являются ортогональными преобразованиями. Легко видеть, что

$$s_\alpha(x)=x-2\frac{(x, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha \text{ для всех } x\in V.$$

Наша форма (,) определяет изоморфизм $V \to V^*$. Пусть α' — элемент пространства V, соответствующий элементу α^* при этом изоморфизме. По определению

$$s_\alpha(x) = x - (\alpha', x)\alpha \text{ для всех } x \in V,$$

откуда (сравнивая с написанной выше формулой) получаем

$$\alpha' = \frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)}.$$

(Итак, α' получается из α обычной „инверсией степени 2“, которая рассматривается в элементарной геометрии.)

Условие 3), наложенное на систему корней, записывается в виде

$$2\frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbf{Z}, \quad \text{где } \alpha, \beta \in R.$$

Здесь мы, наконец, возвращаемся к традиционному определению системы корней (см. Джекобсон [1] или Семинар „Софус Ли“ [1]). Определение § 2 взято по существу у Бурбаки [1]; по сравнению с традиционным оно имеет лишь то преимущество, что строго разграничены роли пространств V и V^*.)

§ 6. Дуальная система

Пусть R — система корней пространства V.

Предложение 2. *Множество R^*, состоящее из двойственных корней α^* ($\alpha \in R$), является системой корней пространства V^*. Кроме того, $\alpha^{**} = \alpha$ для всех $\alpha \in R$.*

Доказательство. Ясно, что R^* конечно и не содержит 0. Для доказательства того, что R^* порождает V^*, достаточно (ввиду изоморфизма $V \to V^*$) установить, что V порождается векторами вида $\alpha' = 2\alpha/(\alpha, \alpha)$. Но это очевидно. В качестве отражения s_{α^*} для $\alpha^* \in R^*$ можно взять транспозицию ${}^t s_\alpha = 1 - \alpha \otimes \alpha^*$ автоморфизма s_α. Далее, $s_{\alpha^*}(R^*) = R^*$, поскольку $s_\alpha(R) = R$, и аналогично $\alpha^{**} = \alpha$. Наконец, если $\alpha^*, \beta^* \in R^*$, то

$$\langle \alpha^{**}, \beta^* \rangle = \langle \beta^*, \alpha \rangle \in \mathbf{Z},$$

ч. т. д.

Система R^* называется *дуальной* (или *обратной*) к R. Отображение

$$w \longmapsto {}^t w^{-1}$$

устанавливает изоморфизм групп Вейля для систем R и R^*.

§ 7. Относительное расположение двух корней

Пусть α, β — произвольные корни. Положим

$$n(\beta, \alpha) = \langle \alpha^*, \beta \rangle = 2\frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}.$$

Как мы знаем, $n(\beta, \alpha) \in \mathbf{Z}$. Далее, $(\alpha, \beta) = |\alpha| \cdot |\beta| \cos\varphi$, где $|\alpha| = (\alpha, \alpha)^{1/2}$ и $|\beta| = (\beta, \beta)^{1/2}$ — длины векторов α и β, а φ — угол между ними (относительно введенной на V евклидовой структуры). Следовательно,

$$n(\beta, \alpha) = 2\frac{|\beta|}{|\alpha|}\cos\varphi,$$

откуда

$$n(\beta, \alpha) \cdot n(\alpha, \beta) = 4\cos^2\varphi.$$

Так как справа стоит целое число, величина $4\cos^2\varphi$ может принимать лишь конечное число значений: 0, 1, 2, 3, 4 (последний случай соответствует коллинеарным корням α и β). Мы ограничимся случаем *неколлинеарных* корней; меняя, если нужно, α и β местами, получаем семь существенно различных возможностей:

1) $n(\alpha, \beta) = 0$, $n(\beta, \alpha) = 0$, $\varphi = \pi/2$;
2) $n(\alpha, \beta) = 1$, $n(\beta, \alpha) = 1$, $\varphi = \pi/3$, $|\beta| = |\alpha|$;
3) $n(\alpha, \beta) = 1$, $n(\beta, \alpha) = -1$, $\varphi = 2\pi/3$, $|\beta| = |\alpha|$;
4) $n(\alpha, \beta) = 1$, $n(\beta, \alpha) = 2$, $\varphi = \pi/4$, $|\beta| = \sqrt{2}|\alpha|$;
5) $n(\alpha, \beta) = -1$, $n(\beta, \alpha) = -2$, $\varphi = 3\pi/4$, $|\beta| = \sqrt{2}|\alpha|$;
6) $n(\alpha, \beta) = 1$, $n(\beta, \alpha) = 3$, $\varphi = \pi/6$, $|\beta| = \sqrt{3}|\alpha|$;
7) $n(\alpha, \beta) = -1$, $n(\beta, \alpha) = -3$, $\varphi = 5\pi/6$, $|\beta| = \sqrt{3}|\alpha|$.

Из этой таблицы видно, что задание угла φ однозначно определяет пару чисел $\{n(\alpha, \beta), n(\beta, \alpha)\}$, а также отношения длин $\{|\alpha|/|\beta|, |\beta|/|\alpha|\}$ (если, конечно, $\varphi \neq \pi/2$).

Предложение 3. *Пусть α и β — два неколлинеарных корня. Тогда разность $\alpha-\beta$ тоже является корнем, если $n(\beta, \alpha) > 0$.*

Отметим, что неравенство $n(\beta, \alpha) > 0$ эквивалентно неравенству $(\alpha, \beta) > 0$, которое показывает, что угол между векторами α и β *острый*.

Доказательство. Как видно из приведенной выше таблицы, в нашем случае одно из двух чисел $n(\beta, \alpha)$ или $n(\alpha, \beta)$ равно 1. Пусть, например, $n(\beta, \alpha) = 1$. Тогда

$$\alpha-\beta = -(\beta - n(\beta, \alpha)\alpha) = -s_\alpha(\beta).$$

Если же $n(\alpha, \beta) = 1$, то $\alpha - \beta = s_\beta(\alpha)$. В обоих случаях $\alpha - \beta \in R$.

§ 8. Базисы

Пусть R — система корней пространства V.

Определение 4. Подмножество $S \subset R$ называется *базисом* системы R, если (i) S — базис векторного пространства V; (ii) все корни $\beta \in R$ записываются в виде линейных комбинаций

$$\beta = \sum_{\alpha \in S} m_\alpha \alpha$$

с целыми коэффициентами m_α, имеющими один и тот же знак (т. е. все $m_\alpha \geqslant 0$ или все $m_\alpha \leqslant 0$).

Вместо слова „базис“ говорят также *система простых корней*, а элементы множества S называют *простыми корнями*.

Теорема 1. *Для всякой системы корней существует базис.*

В действительности мы докажем более точный результат. Пусть $t \in V^*$ — такой элемент, что $\langle t, \alpha \rangle \neq 0$ для всех $\alpha \in R$. Положим $R_t^+ = \{\alpha \in R \mid \langle t, \alpha \rangle > 0\}$. Очевидно,