$R = R_t^+ \cup (-R_t^+)$. Элемент $\alpha \in R_t^+$ называется *разложимым*, если существуют два корня $\beta, \gamma \in R_t^+$, такие, что $\alpha = \beta + \gamma$; в противном случае мы будем говорить, что α — *неразложимый* элемент. Обозначим через S_t множество всех неразложимых элементов из R_t^+.

Предложение 4. *Множество S_t является базисом системы R. Обратно, если S — базис системы R и элемент $t \in V^*$ таков, что $\langle t, \alpha \rangle > 0$ для всех $\alpha \in S$, то $S = S_t$.*

Доказательство. Покажем вначале, что S_t — базис системы R. Доказательство проведем в несколько этапов.

Лемма 2. *Любой элемент из R_t^+ записывается в виде линейной комбинации элементов из S_t с целыми неотрицательными коэффициентами.*

Доказательство леммы. Обозначим через I множество элементов, не удовлетворяющих нужному нам свойству. Мы хотим показать, что I пусто. Если это не так, существует элемент $\alpha \in I$, для которого величина $\langle t, \alpha \rangle$ минимальна. Элемент α разложим (иначе он лежит в S_t), т. е. $\alpha = \beta + \gamma$, где $\beta, \gamma \in R_t^+$. Следовательно,

$$\langle t, \alpha \rangle = \langle t, \beta \rangle + \langle t, \gamma \rangle.$$

Но так как числа $\langle t, \beta \rangle$ и $\langle t, \gamma \rangle$ строго положительны, оба они строго меньше $\langle t, \alpha \rangle$, и потому $\beta \notin I$ и $\gamma \notin I$. Из определения множества I вытекает тогда, что $\alpha \notin I$, и мы приходим к противоречию.

Лемма 3. $(\alpha, \beta) \leqslant 0$, *если* $\alpha, \beta \in S_t$.

Доказательство леммы. Действительно, в противном случае (см. предложение 3) вектор $\gamma = \alpha - \beta$ является корнем. Если, например, $\gamma \in R_t^+$, то $\alpha = \beta + \gamma$, хотя вектор α, будучи элементом множества S_t, неразложим. Если же $-\gamma \in R_t^+$, то $\beta = \alpha + (-\gamma)$, а это противоречит неразложимости вектора β.

Лемма 4. *Пусть $t \in V^*$ и A — подмножество пространства V, такое, что*

(а) $(t, \alpha) > 0$ *для всех* $\alpha \in A$;

(б) $(\alpha, \beta) \leqslant 0$ *для* $\alpha, \beta \in A$.

Тогда элементы множества A линейно независимы.

Другими словами, система векторов, образующих попарно тупые углы и лежащих в одном полупространстве, линейно независима.

Доказательство леммы. Любое линейное соотношение, наложенное на элементы множества A, можно записать в виде

$$\sum y_\beta \beta = \sum z_\gamma \gamma,$$

где $y_\beta > 0$ и $z_\gamma > 0$, причем индексы β и γ пробегают конечное число *различных* векторов из A.

Пусть $\lambda = \sum y_\beta \beta$. Тогда

$$(\lambda, \lambda) = \sum y_\beta z_\gamma (\beta, \gamma),$$

и, следовательно, $(\lambda, \lambda) \leqslant 0$ (см. (б)). Итак, мы получаем, что $\lambda = 0$. Значит,

$$0 = \langle t, \lambda \rangle = \sum y_\beta \langle t, \beta \rangle$$

и потому $y_\beta = 0$ и $z_\gamma = 0$ для всех β и γ.

Леммы 2, 3 и 4, как легко убедиться, в совокупности показывают, что множество S_t — базис системы R.

Обратно, пусть S — базис этой системы и для некоторого элемента $t \in V^*$ неравенство $\langle t, \alpha \rangle > 0$ имеет место для всех $\alpha \in S$. Обозначим через R^+ множество всех корней, представимых в виде линейных комбинаций корней из S с целыми неотрицательными коэффициентами. Очевидно, $R^+ \subset R_t^+$ и $(-R^+) \subset -R_t^+$. Поэтому $R^+ = R_t^+$, так как R есть объединение R^+ и $-R^+$. Из определения базиса вытекает, что элементы множества S неразложимы, т. е. $S \subset S_t$. Однако S и S_t имеют одинаковое количество элементов (равное размерности пространства V), что и доказывает искомое равенство $S = S_t$. Предложение доказано.

Пример. Пусть $\dim V = 2$ и $\{\alpha, \beta\}$ — базис системы R. Поскольку угол между α и β тупой (см. лемму 3), могут представиться лишь случаи 1), 3), 5), 7) (см. § 7) (с точностью до перестановки α и β). Эти возможности как раз соответствуют системам типов $A_1 \times A_1$, A_2, B_2 и G_2 (см. § 3).

§ 9. Некоторые свойства базисов

В этом и последующих параграфах символом S мы будем обозначать *базис* системы корней R, а символом R^+ — множество корней, представимых в виде линейной комбинации элементов множества S с целыми положительными коэффициентами. Элементы множества R^+ назовем *положительными корнями* (относительно системы S).

Предложение 5. *Каждый положительный корень β представим в виде суммы*

$$\beta = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k, \ \alpha_i \in S \qquad (i = 1, \ldots, k),$$

притом так, чтобы, все частичные суммы

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_h, \qquad 1 \leqslant h \leqslant k,$$

тоже были корнями.

Доказательство. Выберем в V^* такой элемент t, что $\langle t, \alpha\rangle = 1$ для всех $\alpha \in S$. Так как β — положительный корень, число $\langle t, \beta\rangle$ является целым и положительным. Докажем наше предложение индукцией по $k = \langle t, \beta\rangle$. Прежде всего заметим, что неравенство $(\alpha, \beta) \leqslant 0$ не может иметь место для всех $\alpha \in S$. Действительно, в противном случае мы получили бы (см. лемму 4), что векторы базиса S и вектор β в совокупности линейно независимы, а это противоречит определению базиса. Итак, найдется такой корень $\alpha \in S$, что $(\alpha, \beta) > 0$. Если α и β коллинеарны, то либо $\alpha = \beta$, либо $\beta = 2\alpha$; в обоих случаях предложение очевидно. Если же это не так, то разность $\gamma = \beta - \alpha$ будет (предложение 3) корнем пространства V. Понятно, что γ не лежит в $-R^+$, так как равенство

$\alpha=\beta+(-\gamma)$ противоречило бы неразложимости корня α. Поэтому $\gamma\in R^+$ и

$$\langle t, \gamma\rangle=\langle t, \beta\rangle-\langle t, \alpha\rangle=k-1.$$

По предположению индукции $\gamma=\alpha_1+\ldots+\alpha_{k-1}$, $\alpha_i\in S$ $(i=1, \ldots, k-1)$, причем все суммы $\alpha_1+\ldots+\alpha_h$, $1\leqslant h\leqslant k-1$, являются корнями. Но тогда представление β в виде суммы

$$\alpha_1+\ldots+\alpha_{k-1}+\alpha$$

удовлетворяет требуемым условиям.

Предложение 6. *Пусть система R является приведенной. Тогда отражение s_α (относительно $\alpha\in S$) переводит множество $R^+\setminus\{\alpha\}$ в себя.*

Доказательство. Пусть $\beta\in R^+\setminus\{\alpha\}$. Как мы знаем,

$$\beta=\sum_{\gamma\in S} m_\gamma\gamma, \quad \text{где} \quad m_\gamma\geqslant 0.$$

Поскольку R — приведенная система и $\beta\neq\alpha$, векторы α и β неколлинеарны. Существует, следовательно, такой корень $\gamma\in S$, что $\gamma\neq\alpha$ и $m_\gamma\neq 0$. Однако равенство $s_\alpha(\beta)=\beta-n(\beta, \alpha)\alpha$ показывает, что коэффициенты корня γ в разложении корней $s_\alpha(\beta)$ и β по простым корням одинаковы, за исключением коэффициента при α. Поэтому $s_\alpha(\beta)\neq\alpha$ и $s_\alpha(\beta)\in R^+$, что и требовалось доказать.

Следствие. *Обозначим через ρ полусумму всех положительных корней* $\left(\text{т. е. } \rho=1/2\sum_{\beta\in R^+}\beta\right)$. *Для всех $\alpha\in S$ имеет место равенство*

$$s_\alpha(\rho)=\rho-\alpha.$$

Доказательство. Пусть $\rho_\alpha=1/2\sum_{\beta\in R^+\setminus\{\alpha\}}\beta$. Очевидно (см. предложение 6), что $s_\alpha(\rho_\alpha)=\rho_\alpha$. С другой стороны, $\rho=\rho_\alpha+\alpha/2$. Поскольку $s_\alpha(\alpha)=-\alpha$, получаем $s_\alpha(\rho)=\rho-\alpha$,

Предложение 7. *Пусть система R приведенная. Множество S^*, состоящее из корней, двойственных к корням из S, является базисом системы R^*.*

Доказательство. Пусть R' — система корней вида $\alpha' = 2\alpha/(\alpha, \alpha)$ $(\alpha \in R)$. Достаточно (в силу изоморфизма $V \to V^*$) показать, что множество S' векторов вида α' $(\alpha \in S)$ является базисом системы R'. Выберем такой элемент $t \in V^*$, что $\langle t, \alpha \rangle > 0$ при всех $\alpha \in S$, и натянем на систему векторов $R^+ = R_t^+$ выпуклый конус C. Натянув конус на векторы из $S = S_t$, мы получим то же самое тело C. Заметим теперь, что лучи, порожденные элементами базиса S, и только они, являются *ребрами*[1]) нашего конуса. Рассмотрим систему $(R_t')^+$. Легко видеть, что она образована векторами α', где $\alpha \in R^+$. Пусть S_t' — соответствующий базис этой системы (см. предложение 4). В силу сказанного выше конус, натянутый на векторы из $(R_t')^+$, совпадает с конусом, натянутым на векторы из R^+, т. е. с C. По аналогичным соображениям ребрами этого конуса являются лучи, порожденные элементами множества S_t'. Таким образом, элементы множеств S' и S_t' лежат на одних и тех же лучах. Поскольку R' — приведенная система (система R приведенная), на одном луче не может лежать двух разных корней, т. е. $S' = S_t'$.

Замечание. В общем случае дело обстоит следующим образом. Пусть S_1 (соответственно S_2) — подмножество в S, состоящее из таких $\alpha \in S$, что вектор 2α не является (соответственно является) корнем. Оказывается, базис в R^* образуется векторами α^* $(\alpha \in S_1)$ и $\alpha^*/2$ $(\alpha \in S_2)$.

§ 10. Связь с группой Вейля

Предполагается, что система корней R является приведенной.

---

[1]) В оригинале „génératrices extrémales". — *Прим. ред*

Теорема 2. *Пусть W — группа Вейля системы R.*

(а) *Для каждого элемента $t \in V^*$ существует автоморфизм $w \in W$, такой, что $\langle w(t), \alpha\rangle \geqslant 0$ при любом $\alpha \in S$.*

(б) *Для всякого базиса S' системы R существует автоморфизм $w \in W$, такой, что $w(S') = S$.*

(в) *Для каждого элемента $\beta \in R$ существует автоморфизм $w \in W$, такой, что $w(\beta) \in S$.*

(г) *Группа W порождена отображениями вида s_α, где $\alpha \in S$.*

Доказательство. Обозначим через W_S подгруппу в W, порожденную отражениями s_α, $\alpha \in S$. Докажем вначале утверждение (а) *для группы W_S*. Пусть $t \in V^*$ и ρ — полусумма положительных корней (см. следствие предложения 6). Выберем в группе W_S элемент w, для которого величина $\langle w(t), \rho\rangle$ *максимальна*. В частности,

$$\langle w(t), \rho\rangle \geqslant \langle s_\alpha w(t), \rho\rangle, \quad \alpha \in S.$$

Но

$$\langle s_\alpha w(t), \rho\rangle = \langle w(t), s_\alpha(\rho)\rangle = \langle w(t), \rho - \alpha\rangle$$

(см. указанное выше следствие). Из этого соотношения и предыдущего неравенства получаем $\langle w(t), \alpha\rangle \geqslant 0$ для всех $\alpha \in S$.

Докажем теперь утверждение (б), но *также для группы W_S*. Пусть элемент $t' \in V^*$ таков, что $\langle t', \alpha'\rangle > 0$ для всех $\alpha' \in S'$. В силу (уже доказанного) утверждения (а) существует автоморфизм $w \in W_S$, такой, что $\langle t, \alpha\rangle \geqslant 0$ при всех $\alpha \in S$, где $t = w(t')$. Но $\langle t, \alpha\rangle = \langle t', w^{-1}(\alpha)\rangle$, и форма t' не обращается в нуль ни на одном корне из R (так как $\langle t', \alpha'\rangle > 0$ при $\alpha' \in S'$). Поэтому $\langle t, \alpha\rangle > 0$. Итак, согласно предложению 4,

$$S = S_t \quad \text{и} \quad S' = S_{t'}.$$

Осталось заметить, что автоморфизм w переводит $S_{t'}$ в S, поскольку он переводит t' в t.

Докажем утверждение (в) (*снова для группы W_S*). Пусть $\beta \in R$, и пусть L — гиперплоскость в V^*, ортогональная к β. Гиперплоскости, ортогональные к корням, не равным $\pm\beta$, отличны от L, и число их *конечно*.

Поэтому в гиперплоскости L существует элемент t_0, который не лежит ни в одной из упомянутых гиперплоскостей, т. е.
$\langle t_0, \beta\rangle = 0$ и $\langle t_0, \gamma\rangle \neq 0$ для всех $\gamma \in R$, $\gamma \neq \pm\beta$. Итак, $|\langle t_0, \gamma\rangle| > \langle t_0, \beta\rangle$. В достаточно малой окрестности t_0 найдется такой элемент t, что $\langle t, \beta\rangle > 0$ и $|\langle t, \gamma\rangle| > \langle t, \beta\rangle$. Рассмотрим базис S_t системы R, ассоциированный с элементом t (см. § 8). Из двух последних неравенств вытекает, что $\beta \in S_t$. Однако, согласно (б), существует такое $w \in W_S$, что $w(S_t) = S$ и, следовательно, $w(\beta) \in S$.

Докажем, наконец, что $W_S = W$. Поскольку группа W порождена отражениями s_β, где $\beta \in R$, достаточно показать, что $s_\beta \in W_S$. Согласно (в), имеется автоморфизм $w \in W_S$, такой, что $\alpha = w(\beta) \in S$. Значит,

$$s_\alpha = s_{w(\beta)} = w \cdot s_\beta \cdot w^{-1}$$

и $s_\beta = w^{-1} \cdot s_\alpha \cdot w$, откуда $s_\beta \in W_S$.

Замечания. 1. Можно показать, что элемент w, существование которого утверждается в (б), определен однозначно (см. гл. VII, § 5).

2. Множество элементов $t \in V^*$, таких, что $\langle t, \alpha\rangle > 0$ для всех $\alpha \in S$, называется *камерой Вейля*, ассоциированной с S. В силу (а) и (б) камера Вейля является *связной компонентой* в $V^* \setminus \bigcup_{\beta \in R} L_\beta$, где L_β — гиперплоскость, ортогональная к корню β.

3. Утверждение (г) можно уточнить, явно указав соотношения между образующими s_α ($\alpha \in S$) группы W. Именно:

$$s_\alpha^2 = 1, \quad (s_\alpha, s_\beta)^{m(\alpha, \beta)} = 1,$$

где $m(\alpha, \beta)$ равно 2, 3, 4 или 6 в зависимости от того, каков угол между α и β: $\pi/2$, $2\pi/3$, $3\pi/4$ или $5\pi/6$ (см., например, Шевалле [3], сообщение 14).

§ 11. Матрица Картана

Определение 5. *Матрицей Картана* системы корней R (при фиксированном базисе S) называется матрица $(n(\alpha, \beta))_{\alpha, \beta \in S}$.

Напомним (см. § 7), что $n(\alpha, \beta) = \langle \beta^*, \alpha \rangle$ — целое число. Кроме того, $n(\alpha, \alpha) = 2$, а если $\alpha \neq \beta$, то $n(\alpha, \beta) \leqslant 0$ (см. лемму 3); $n(\alpha, \beta)$ может принимать значения 0, -1, -2, -3.

Пример. Матрица Картана системы корней типа G_2 равна

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Предложение 8. *Приведенная система корней однозначно, с точностью до изоморфизма, определяется своей матрицей Картана.*

Имеет место более точное утверждение.

Предложение 8′. *Пусть R' — приведенная система корней векторного пространства V', и пусть S' — базис этой системы. Предположим, что задано биективное отображение φ: $S \to S'$, такое, что $n(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) = n(\alpha, \beta)$ для всех $\alpha, \beta \in S$. Если система R приведенная, то существует единственный изоморфизм f: $V \to V'$, продолжающий φ и переводящий систему R в систему R'.*

Доказательство. Продолжим по линейности отображение φ до изоморфизма f: $V \to V'$. Если $\alpha, \beta \in S$, то

$$s_{\varphi(\alpha)}(f(\beta)) = s_{\varphi(\alpha)}(\varphi(\beta)) = \varphi(\beta) - n(\varphi(\beta), \varphi(\alpha))\varphi(\alpha)$$

и

$$f(s_\alpha(\beta)) = f(\beta - n(\beta, \alpha)\alpha) = \varphi(\beta) - n(\beta, \alpha)\varphi(\alpha).$$

Обе формулы в совокупности дают равенство $s_{\varphi(\alpha)} \circ f = f \circ s_\alpha$, $\alpha \in S$. Пусть W и W' обозначают группы Вейля систем R и R' соответственно. Последнее равенство показывает, что $W = fWf^{-1}$, а следовательно, $f(R) = R'$, так как $R = W(S)$ и $R' = W'(S')$.

Рассмотрим группу E подстановок множества S, оставляющих инвариантной матрицу Картана. Из доказанного нами предложения 8 вытекает, что *группу E можно отождествить с подгруппой группы* $\mathrm{Aut}(R)$, *состоящей из таких автоморфизмов, которые переводят в себя множество S.*

Предложение 9. *Группа* $\mathrm{Aut}(R)$ *есть полупрямое произведение групп* E *и* W.

Доказательство. Если $w \in W \cap E$, то $w(S) = S$ и, значит, $w = 1$ (этот факт мы докажем несколько позже, см. гл. VII, § 5). С другой стороны, если $u \in \mathrm{Aut}(R)$, то $u(S)$ — базис системы R. Следовательно (см. теорему 2), существует элемент $w \in W$, такой, что $w(u(S)) = S$. Элемент wu лежит в E, т. е. любой элемент $u \in \mathrm{Aut}(R)$ имеет вид we, где $w \in W$ и $e \in E$.

Следствие. *Факторгруппа* $\mathrm{Aut}(R)/W$ *изоморфна группе* E.

§ 12. Графы Кокстера

Определение 6. *Графом Кокстера* системы R (относительно фиксированного базиса S) называется граф, вершинами которого служат элементы S, причем две различные вершины α и β соединены одним, двумя или тремя ребрами или не соединены вообще в зависимости от того, какому из чисел: 1, 2, 3 или 0 равно произведение $n(\alpha, \beta) \cdot n(\beta, \alpha)$.

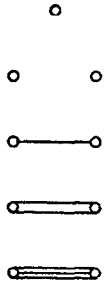
Напомним (см. § 7), что

$$n(\alpha, \beta) \cdot n(\beta, \alpha) = 4\cos^2\varphi,$$

где φ — угол между векторами α и β.

Заметим, что графы, отвечающие различным базисам, изоморфны (согласно теореме 2 § 10).

Пример. Графы Кокстера систем корней, указанных в § 3, имеют вид



(тип A_1)

(тип $A_1 \cdot A_1$)

(тип A_2)

(тип B_2)

(тип G_2)

§ 13. Неприводимые системы корней

Предложение 10. *Пусть V — прямая сумма своих подпространств V_1 и V_2, и пусть R содержится в объединении $V_1 \cup V_2$. Положим $R_i = R \cap V_i$ $i = 1, 2$. Тогда*

(а) *V_1 и V_2 ортогональны;*

(б) *R_i — система корней в пространстве V_i.*

Доказательство. Если $\alpha \in R_1$ и $\beta \in R_2$, то $\alpha - \beta \notin V_1 \cup V_2$. Элемент $\alpha - \beta$, как мы видим, не является корнем, поэтому (см. предложение 3) $(\alpha, \beta) \leqslant 0$. Применяя то же соображение к $-\beta$ вместо β, получаем, что $(\alpha, \beta) = 0$. Элементы R_i порождают V_i $(i = 1, 2)$, что и доказывает (а).

Для доказательства (б) достаточно заметить, что отражения $s_\alpha (\alpha \in R_1)$, согласно (а), действуют на V_2 тождественно и, следовательно, переводят в себя пространство V_1.

В ситуации, описанной в предложении 10, говорят, что система R есть *сумма* своих подсистем R_i. Если такое разложение невозможно (разумеется, в предположении, что пространства V_i нетривиальны) и если $V \neq 0$, то система R называется *неприводимой*.

Предложение 11. *Каждая система корней есть сумма своих неприводимых подсистем.*

Доказательство очевидно.

Можно показать, что такое разложение *единственно*.

Предложение 12. *Для того чтобы система R была неприводима, необходимо и достаточно, чтобы ее граф Кокстера был связен и непуст.*

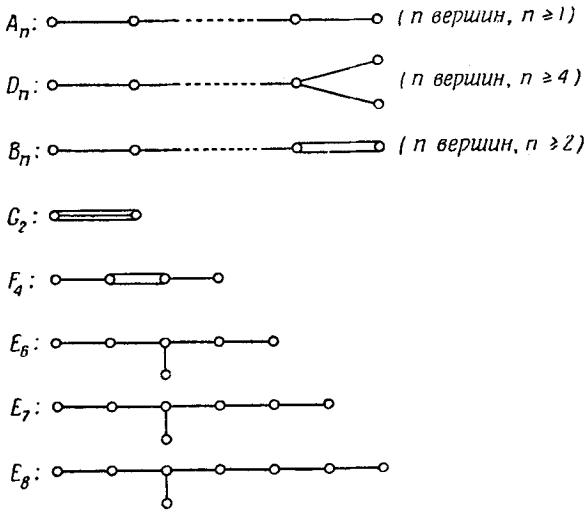
Доказательство. Если система R есть сумма своих нетривиальных подсистем R_1 и R_2, то в качестве базиса S этой системы можно взять объединение базисов S_1 и S_2 систем R_1 и R_2. Элементы базисов S_1 и S_2 попарно ортогональны, поэтому в графе Кокстера они *не соединяются никаким ребром*, т. е. граф Кокстера системы R распадается в несвязное объединение графов Кокстера для R_1 и R_2.

Обратно, если $S = S_1 \cup S_2$, причем части S_1 и S_2 не связаны никаким ребром, то все элементы мно-

жества S_1 ортогональны ко всем векторам из S_2. Следовательно, пространства V_1 и V_2, порожденные векторами S_1 и S_2, тоже друг другу ортогональны и инвариантны относительно отражений s_α, $\alpha \in S$. Теорема 2 позволяет нам заключить, что система R содержится в объединении $V_1 \cup V_2$ и, следовательно, является приводимой.

§ 14. Классификация связных графов Кокстера

Теорема 3. *Всякий непустой связный граф Кокстера изоморфен одному из следующих графов*:



Идея доказательства. Рассмотрим непустой связный граф G, множество вершин S которого конечно, причем последние либо соединены одним, двумя или тремя ребрами, либо не соединены вообще. Такому графу можно сопоставить билинейную симметрическую форму $A(x, y)$, определенную на пространстве $\mathbf{R}^S$ (с фиксированным базисом $\{e_\alpha\}_{\alpha \in S}$), полагая

$$A(e_\alpha, e_\alpha) = 1,$$
$$A(e_\alpha, e_\beta) = m_{\alpha\beta},$$

где $m_{\alpha\beta}$ равно $\cos(\pi/2)$, $\cos(2\pi/3)$, $\cos(3\pi/4)$ или $\cos(5\pi/6)$ в зависимости от того, сколько ребер соединяют вершины α и β — 0, 1, 2 или 3.

Для того чтобы граф G был графом Кокстера, необходимо, чтобы эта форма была *невырождена и положительно определена* (так как она реализуется одной из инвариантных форм, введенных в § 5). С помощью хитроумных вычислений можно показать, что условие положительной определенности этой формы влечет изоморфизм графа G с одним из графов вида A_n, D_n, ..., E_8. (Подробнее см. Семинар „Софус Ли“ [1] или Джекобсон [1], стр. 146.)

§ 15. Схема Дынкина

Мы ограничимся для простоты лишь приведенными и неприводимыми системами корней.

Как легко понять, графа Кокстера недостаточно для определения матрицы Картана (а следовательно, и системы корней); он определяет всего-навсего угол между парой корней базиса, не давая никакой дополнительной информации. Двойственные друг другу системы корней (например, B_n и C_n, см. § 16) могут иметь один и тот же граф Кокстера.

Однако матрицу Картана можно однозначно восстановить, зная *отношения длин* корней. Это наводит на мысль приписать каждой вершине графа Кокстера коэффициент, пропорциональный квадрату длины (α, α) соответствующего корня α. Доопределенный таким образом граф Кокстера называется *схемой Дынкина* системы R.

Условимся не различать две схемы Дынкина, которые отличаются друг от друга только коэффициентом пропорциональности.

Предложение 13. *Задание схемы Дынкина равносильно заданию матрицы Картана. Каждый из этих объектов определяет систему корней с точностью до изоморфизма.*

Доказательство. В силу предложения 8 и в силу сказанного выше достаточно доказать, что по схеме Дынкина однозначно восстанавливается матрица Картана. Действительно,

если $\alpha=\beta$, то $n(\alpha, \beta)=2$;

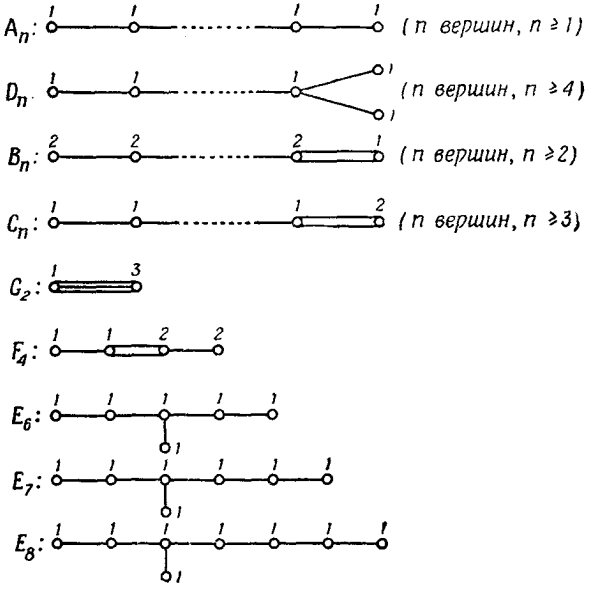
если $\alpha\neq\beta$ и если α и β не соединены ребром графа, то $n(\alpha, \beta)=0$;

если $\alpha\neq\beta$, α и β имеют хотя бы одно общее ребро и коэффициент при α не больше коэффициента при β, то $n(\alpha, \beta)=-1$;

если $\alpha\neq\beta$, α и β соединяются i ребрами ($1\leqslant i\leqslant 3$) и коэффициент при α больше коэффициента при β, то $n(\alpha, \beta)=-i$.

(В последнем случае коэффициент при α в i раз больше коэффициента при β; используя это обстоятельство, можно вычерчивать не все отрезки.)

Теорема 4. *Всякая непустая связная схема Дынкина изоморфна одной из схем вида:*



Эта теорема непосредственно вытекает из теоремы 3.

Замечания. 1. Можно утверждать и обратное: каждой из схем Дынкина $A_n, \ldots, E_8$ соответствует некоторая система корней. В следующем параграфе мы укажем явную конструкцию этих систем.

2. Из предложения 13 вытекает, что группа E автоморфизмов матрицы Картана (см. § 11) изоморфна группе автоморфизмов схемы Дынкина. С одного взгляда на таблицу теоремы 4 видно, что

$E=\{1\}$ для систем вида $A_1, B_n, C_n, G_2, F_4, E_7, E_8$;

E состоит из двух элементов для систем вида $A_n\,(n\geqslant 2)$, $D_n\,(n\geqslant 5)$ и E_6;

E изоморфна группе подстановок из трех элементов для системы D_4.

§ 16. Конструкция неприводимых систем корней

В этом параграфе $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — канонический базис пространства $\mathbf{R}^n$; $(\,,\,)$ — билинейная форма в пространстве $\mathbf{R}^n$, такая, что $(e_i, e_j)=\delta_{ij}$; L_n — аддитивная подгруппа пространства $\mathbf{R}^n$, порожденная векторами e_i, $1\leqslant i\leqslant n$.

Конструкция системы $A_n\,(n\geqslant 1)$. В качестве пространства V возьмем гиперплоскость в $\mathbf{R}^{n+1}$, ортогональную к вектору $e_1+\ldots+e_{n+1}$, а в качестве R — множество элементов $\alpha\in V\cap L_{n+1}$, для которых $(\alpha, \alpha)=2$. Для каждого $\alpha\in R$ рассмотрим отображение s_α:

$$\beta\longmapsto\beta-(\alpha, \beta)\,\alpha.$$

Непосредственная проверка показывает, что множество R является системой корней.

Элементы этого множества, как нетрудно видеть, суть векторы вида e_i-e_j, $i\neq j$. В качестве базиса S системы R можно взять, например, набор векторов e_i-e_{i+1}, $1\leqslant i\leqslant n$.

Группа Вейля естественным образом отождествляется с группой подстановок множества $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$.

Конструкция системы B_n ($n \geqslant 1$). В пространстве $V = \mathbf{R}^n$ рассмотрим подмножество

$$R = \{\alpha \in L_n \mid (\alpha, \alpha) = 1 \text{ или } (\alpha, \alpha) = 2\}.$$

Очевидно, R состоит из векторов вида $\pm e_i$ и $\pm e_i \pm e_j (i \neq j)$.

Базис: $e_1 - e_2,\ e_2 - e_3,\ \ldots,\ e_{n-1} - e_n,\ e_n$.

Группа Вейля: произведение группы подстановок множества $\{e_1, \ldots, e_n\}$ и группы преобразований, меняющих знаки при векторах e_i.

(При $n = 1$ системы A_1 и B_1 изоморфны.)

Конструкция системы C_n ($n \geqslant 1$). Рассмотрим двойственную к B_n систему корней; она состоит из векторов вида $\pm e_i \pm e_j$ $(i \neq j)$ и $\pm 2e_i$.

Базис: $e_1 - e_2,\ e_2 - e_3,\ \ldots,\ e_{n-1} - e_n,\ 2e_n$.

Группа Вейля изоморфна соответствующей группе для системы B_n.

(При $n = 1$ система C_1 изоморфна системам A^1 и B_1; при $n = 2$ система C_2 изоморфна системе B_2.)

Конструкция системы D_n ($n \geqslant 2$). Пусть $V = \mathbf{R}^n$ и $R = \{\alpha \in L_n \mid (\alpha, \alpha) = 2\}$. Множество R состоит из векторов вида $\pm e_i \pm e_j$ $(i \neq j)$.

Базис: $e_1 - e_2,\ e_2 - e_3,\ \ldots,\ e_{n-1} - e_n,\ e_{n-1} + e_n$.

Группа Вейля: произведение группы подстановок множества $\{e_1, \ldots, e_n\}$ и группы преобразований, меняющих знаки (в четном числе) при векторах e_i.

(При $n = 2$ эта система изоморфна $A_1 \times A_1$, а при $n = 3$ — системе A_3.)

Конструкция системы G_2. Эта система была построена в § 3. Ее можно описать как множество целых алгебраических чисел кругового поля, порожденного корнем кубическим из единицы, с нормой 1 или 3.

Конструкция системы F_4. Обозначим через L_4' подгруппу в пространстве $V = \mathbf{R}^4$, порожденную группой L_4 и элементом $\frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$. Положим

$$R = \{\alpha \in L_4' \mid (\alpha, \alpha) = 2 \text{ или } (\alpha, \alpha) = 1\}.$$

Это множество состоит из векторов вида $\pm e_i$, $\pm e_i \pm e_j$ $(i \neq j)$ и $\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)$.

Базис: $e_2 - e_3$, $e_3 - e_4$, e_4, $\frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4)$.

Конструкция системы E_8. Обозначим через L_8' подгруппу в пространстве $V = \mathbf{R}^8$, порожденную группой L_8 и элементом $\frac{1}{2}(e_1 + \ldots + e_8)$, а через L_8'' — подгруппу группы L_8', образованную векторами, у которых сумма координат есть целое *четное* число. В качестве R возьмем множество $\{\alpha \in L_8'' \mid (\alpha, \alpha) = 2\}$. Оно состоит из векторов вида $\pm e_i \pm e_j$ $(i \neq j)$ и $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}(-1)^{m(i)} e_i$, где $\sum_i m(i)$ — четное число. Базис: $\frac{1}{2}\left(e_1 + e_8 - \sum_{i=2}^{7} e_i\right)$, $e_1 + e_2$, $e_2 - e_1$, $e_3 - e_2$, $e_4 - e_3$, $e_5 - e_4$, $e_6 - e_5$, $e_7 - e_6$.

Конструкция систем E_6 и E_7. В качестве системы E_6 (соответственно E_7) можно взять пересечение системы E_8 (построенной выше в пространстве $\mathbf{R}^8$) и векторного подпространства, порожденного первыми шестью (соответственно семью) элементами базиса $\{e_1, \ldots, e_8\}$.

Неприведенные системы корней. Можно показать, что для каждого целого $n \geqslant 1$ существует единственная (с точностью до изоморфизма) неприводимая, но не приведенная система корней BC_n, получаемая объединением систем B_n и C_n, построенных выше.

§ 17. Комплексные системы корней

Пусть V — *комплексное* векторное пространство конечной размерности. Определение отражения, данное в § 1, переносится без изменения на комплексный случай, причем лемма 1 по-прежнему остается

справедливой. Последнее обстоятельство позволяет сформулировать следующее

Определение 7. Конечное подмножество R пространства V называется *системой (комплексных) корней*, если

1) множество R порождает V (как комплексное векторное пространство) и не содержит нулевого вектора;

2) для любого вектора $\alpha \in R$ существует отражение $s_\alpha = 1 - \alpha^* \otimes \alpha$ относительно вектора α, переводящее множество R в себя;

3) векторы $s_\alpha(\beta) - \beta$ и α (где $\alpha, \beta \in R$) коллинеарны и их отношение есть целое число.

Пример. Пусть R — система корней *вещественного* векторного пространства V_0. Обозначим через V *комплексификацию* $V_0 \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$. Пространство V_0 вкладывается в пространство V, и множество R является *системой комплексных корней* этого пространства. Действительно, мы получим все требуемые отражения s_α, продолжая по линейности соответствующие отражения s_α^0 пространства V_0.

Теорема 5. *Всякая комплексная система корней может быть получена описанным выше способом.*

Имеет место более точное утверждение.

Теорема 5′. *Пусть R — система корней комплексного векторного пространства V, и пусть V_0 — его вещественное векторное подпространство, порожденное векторами множества R. Тогда*

(а) *R — (вещественная) система корней пространства V_0;*

(б) *каноническое отображение i: $V_0 \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \to V$ есть изоморфизм;*

(в) *отражение $s_\alpha (\alpha \in R)$ пространства V есть продолжение по линейности отражения s_α^0 пространства V_0.*

Доказательство. (а) По условию множество R порождает пространство V_0. С другой стороны,

множество R инвариантно относительно отражений s_α, и потому пространство V_0 тоже инвариантно относительно этих отражений. Обозначим через s_α^0 ограничение s_α на пространство V_0. Если $\alpha, \beta \in R$, то $s_\alpha^0(\beta) = \beta - \alpha^*(\beta)\alpha$, где $\alpha^*(\beta) \in \mathbf{Z}$. Таким образом, множество R действительно является системой корней пространства V_0. Более того, действительные корни $\alpha_0^* \in V_0^*$ суть не что иное, как образы соответствующих корней $\alpha^* \in V^*$ при гомоморфизме ограничения $V \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(V_0, \mathbf{C})$.

б) Поскольку R порождает V, отображение

$$i\colon V_0 \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \to V$$

сюръективно. С другой стороны, сопряженное отображение

$${}^t i\colon V^* \to V_0^* \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$$

переводит α^* в α_0^* для всех $\alpha \in R$. Однако, согласно предложению 2, элементы α_0^* образуют систему корней в пространстве V_0^* и, в частности, порождают это пространство. Поэтому отображение ${}^t i$ также сюръективно, следовательно, само отображение i инъективно, что и доказывает (б).

Что касается утверждения (в), то оно вытекает из всего сказанного выше и из леммы 1.

Теорема 5 естественным образом сводит всю теорию комплексных систем корней к теории вещественных систем. Таким образом, все определения и все результаты настоящего параграфа без изменений переносятся на комплексный случай.

Глава VI

СТРОЕНИЕ ПОЛУПРОСТЫХ АЛГЕБР ЛИ

В этой главе $\mathfrak{g}$ обозначает *полупростую комплексную алгебру* Ли, а $\mathfrak{h}$ — ее *подалгебру Картана.*

§ 1. Разложение алгебры $\mathfrak{g}$

Пусть α — элемент сопряженного пространства $\mathfrak{h}^*$. Обозначим через $\mathfrak{g}^\alpha$ соответствующее собственное подпространство в $\mathfrak{g}$. Иными словами, $\mathfrak{g}^\alpha$ состоит из таких элементов $x \in \mathfrak{g}$, что $[H, x] = \alpha(H)x$ для всех $H \in \mathfrak{h}$.

Векторы пространства $\mathfrak{g}^\alpha$ мы будем называть *элементами веса* α.

В частности, $\mathfrak{g}^0$ есть множество элементов $x \in \mathfrak{g}$, коммутирующих с $\mathfrak{h}$. Ввиду теоремы 3 гл. III мы получаем, что

$$\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{h}.$$

Мы скажем, что элемент $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ является *корнем* алгебры $\mathfrak{g}$ (относительно $\mathfrak{h}$), если $\alpha \neq 0$ и $\mathfrak{g}^\alpha \neq (0)$; множество всех корней обозначим через R.

Теорема 1. $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in R} \mathfrak{g}^\alpha$ (*прямая сумма*).

Доказательство. Согласно теореме 3 гл. III, каждый эндоморфизм $\operatorname{ad} H$ ($H \in \mathfrak{h}$) алгебры $\mathfrak{g}$ диагонализуем в некотором базисе. Поскольку, согласно той же теореме, эти эндоморфизмы коммутируют между собой, существует общий базис, в котором все эндоморфизмы $\operatorname{ad}(H)$ представляются диагональными матрицами. Последнее утверждение есть в точности содержание нашей теоремы.

Подпространства $\mathfrak{g}^\alpha$ обладают следующими свойствами.

Теорема 2. (а) *Множество R есть система корней пространства $\mathfrak{h}^*$ (в смысле определения 7 гл. V, § 17); система R приведенная (см. гл. V, § 2).*

(б) *Если $\alpha \in R$, то пространства $\mathfrak{g}^\alpha$ и $\mathfrak{h}_\alpha = [\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}]$ одномерны, (очевидно, $\mathfrak{h}_\alpha \subset \mathfrak{h}$). Кроме того, существует единственный элемент $H_\alpha \in \mathfrak{h}_\alpha$, такой, что $\alpha(H_\alpha) = 2$; указанный элемент H_α является корнем, двойственным к α (см. гл. V, § 2).*

(в) *Для каждого ненулевого элемента $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$ существует (единственный) элемент $Y_\alpha \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$, такой, что $[X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha$, причем $[H_\alpha, X_\alpha] = 2X_\alpha$ и $[H_\alpha, Y_\alpha] = -2Y_\alpha$. Подалгебра $\mathfrak{s}_\alpha = \mathfrak{h}_\alpha \oplus \mathfrak{g}^\alpha \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha}$ изоморфна алгебре Ли $sl(2)$.*

(г) *Если $\alpha, \beta \in R$ и если $\alpha + \beta \neq 0$, то $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta] = \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$.*

Доказательство этой теоремы будет дано в § 2.

Перед тем как сформулировать следующую теорему, условимся обозначать через $(\ ,\ )$ некоторую фиксированную инвариантную невырожденную симметрическую билинейную форму на алгебре $\mathfrak{g}$ (например, форму Киллинга).

Теорема 3. (i) *Если $\alpha + \beta \neq 0$, то подпространства $\mathfrak{g}^\alpha$ и $\mathfrak{g}^\beta$ ортогональны. Формы, полученные ограничением формы $(\ ,\ )$ на $\mathfrak{h}$ и на $\mathfrak{g}^\alpha \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha}$ $(\alpha \in R)$, невырождены. Форма $(\ ,\ )$ приводит в двойственность пространства $\mathfrak{g}^\alpha$ и $\mathfrak{g}^{-\alpha}$.*

(ii) *Если $x \in \mathfrak{g}^\alpha$, $y \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ и $H \in \mathfrak{h}$, то*

$$(H, [x, y]) = \alpha(H)(x, y).$$

(iii) *Пусть $\alpha \in R$, и пусть h_α — элемент, соответствующий корню α при изоморфизме $\mathfrak{h} \to \mathfrak{h}^*$, индуцированном нашей билинейной формой. Тогда имеет место равенство*

$$[x, y] = (x, y)\, h_\alpha, \quad x \in \mathfrak{g}^\alpha, \quad y \in \mathfrak{g}^{-\alpha}.$$

Доказательство. (i) Пусть $x \in \mathfrak{g}^\alpha$, $y \in \mathfrak{g}^\beta$ и $H \in \mathfrak{h}$. Очевидно,

$$([H, x], y) + (x, [H, y]) = 0,$$

так как форма (x, y) инвариантна. Следовательно,

$$\alpha(H)(x, y) + \beta(H)(x, y) = 0.$$

Если $\alpha+\beta\neq 0$, то можно найти такой элемент $H\in\mathfrak{h}$, что $\alpha(H)+\beta(H)\neq 0$. В этом случае предыдущее равенство означает, что $(x, y)=0$, т. е. что пространства $\mathfrak{g}^{\alpha}$ и $\mathfrak{g}^{\beta}$ ортогональны.

Таким образом,

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\sum(\mathfrak{g}^{\alpha}\oplus\mathfrak{g}^{-\alpha})$$

есть разложение алгебры $\mathfrak{g}$ на взаимно ортогональные подпространства. Форма (x, y) невырождена, и потому невырожденным будет ограничение ее на любое из из этих подпространств.

(ii) В силу инвариантности формы (,)

$$(H, [x, y])=([H, x], y)=\alpha(H)(x, y).$$

(iii) Если $H\in\mathfrak{h}$, то $\alpha(H)=(H, h_{\alpha})$ по определению элемента h_{α}. Формулу (ii) можно теперь переписать так:

$$(H, [x, y])=(H, (x, y)h_{\alpha}).$$

Поскольку ограничение формы (,) на подалгебру $\mathfrak{h}$ невырождено, получаем

$$[x, y]=(x, y)h_{\alpha}.$$

§ 2. Доказательство теоремы 2

В этом параграфе будут существенно использоваться теорема 3 и свойства алгебры $sl(2)$, установленные в главе IV. Доказательство нашей теоремы мы разобьем на ряд последовательных шагов.

2.1. *Если* $\alpha, \beta\in\mathfrak{h}^*$, *то* $[\mathfrak{g}^{\alpha}, \mathfrak{g}^{\beta}]\subset\mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$. Действительно, это включение есть прямое следствие тождества Якоби

$$[H, [x, y]]=[[H, x], y]+[x, [H, y]],$$

примененного к элементам $H\in\mathfrak{h}$, $x\in\mathfrak{g}^{\alpha}$, $y\in\mathfrak{g}^{\beta}$.

2.2. *Множество* R *порождает* $\mathfrak{h}$. В противном случае существовал бы ненулевой элемент $H\in\mathfrak{h}$, такой, что $\alpha(H)=0$ для всех корней $\alpha\in R$. Последнее ввиду

теоремы 1 означает, что $\mathrm{ad}(H)=0$, т. е. что элемент H лежит в центре алгебры $\mathfrak{g}$ и, следовательно, равен нулю, так как алгебра $\mathfrak{g}$ полупроста.

2.3. *Если* $\alpha \in R$, *то подпространство* $\mathfrak{h}_\alpha = [\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}] \subset \mathfrak{h}$ *имеет размерность* 1. В самом деле, согласно теореме 3, (iii), все векторы пространства $\mathfrak{h}_\alpha$ коллинеарны вектору h_α.

2.4. *Если* $\alpha \in R$, *то существует элемент* $H_\alpha \in \mathfrak{h}_\alpha$ (*и притом единственный*), *такой, что* $\alpha(H_\alpha)=2$. В силу доказанного на предыдущем шаге нам достаточно показать, что ограничение формы α на подпространство $\mathfrak{h}_\alpha$ не является нулевым. Допустим противное и выберем элементы $x \in \mathfrak{g}^\alpha$ и $y \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ так, чтобы их коммутатор $z=[x, y]$ не равнялся нулю. Так как $\alpha(z)=0$, имеем

$$[z, x]=0, \quad [z, y]=0, \quad [x, y]=z.$$

Эти равенства показывают, что подалгебра $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$, порожденная тремя элементами x, y, z, разрешима (и даже нильпотентна). По теореме Ли (теорема 1.5.5.1) для любого конечномерного линейного представления ρ: $\mathfrak{g} \to \mathrm{End}\, V$ алгебры $\mathfrak{a}$ найдется флаг $\mathscr{F}$ пространства V, инвариантный относительно $\rho(\mathfrak{a})$.

Поскольку элемент z лежит в $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$, эндоморфизм $\rho(z)$ содержится в $\mathfrak{n}(\mathscr{F})$ и потому нильпотентен. Применяя это рассуждение к присоединенному представлению ad: $\mathfrak{a} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$, получаем, что элемент z нильпотентен. Но, с другой стороны, этот элемент полупрост (см. гл. III, теорема 3), так что $z=0$, и мы приходим к противоречию.

2.5. *Пусть* $\alpha \in R$ *и* X_α — *ненулевой элемент пространства* $\mathfrak{g}^\alpha$. *Существует элемент* $Y_\alpha \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$, *такой, что* $[X_\alpha, Y_\alpha]=H_\alpha$. В самом деле, так как форма (,) приводит в двойственность пространства $\mathfrak{g}^\alpha$ и $\mathfrak{g}^{-\alpha}$, существует элемент $y \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$, такой, что $(X_\alpha, y) \neq 0$. Но тогда, согласно теореме 3, (iii), $[X_\alpha, y] \neq 0$. Умножая y на подходящий скаляр, мы найдем искомый элемент Y_α. Итак,

$$[H_\alpha, X_\alpha]=\alpha(H_\alpha)X_\alpha=2X_\alpha, \quad [H_\alpha, Y_\alpha]=-\alpha(H_\alpha)Y_\alpha=-2Y_\alpha.$$

Обозначим через $\mathfrak{s}_\alpha$ подалгебру в алгебре $\mathfrak{g}$, порожденную элементами X_α, Y_α, H_α. Написанные выше формулы показывают, что отображение $(X, Y, H) \mapsto (X_\alpha, Y_\alpha, H_\alpha)$ определяет *изоморфизм* φ_α *алгебр* $sl(2)$ *и* $\mathfrak{s}_\alpha$. С помощью присоединенного представления мы можем теперь рассматривать алгебру $\mathfrak{g}$ *как* $sl(2)$-*модуль*.

2.6. *Если* $\alpha \in R$, *то* $\dim \mathfrak{g}^\alpha = 1$. Сохраним обозначения предыдущего шага. Пусть, напротив, $\dim \mathfrak{g}^\alpha > 1$. Так как пространства $\mathfrak{g}^\alpha$ и $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ находятся в двойственности относительно формы (,), существует ненулевой элемент $y \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$, ортогональный к X_α. По теореме 3, (iii), $[X_\alpha, y] = 0$; с другой стороны, $[H_\alpha, y] = -\alpha(H_\alpha)\, y = -2y$. Итак, если рассматривать (с помощью φ_α) алгебру $\mathfrak{g}$ как $sl(2)$-модуль, то элемент y является примитивным с весом (-2) (см. гл. IV, определение 1). Однако это обстоятельство противоречит следствию 2 теоремы 1 гл. IV.

2.7. *Имеем*

$$\mathfrak{s}_\alpha = \mathfrak{h}_\alpha \oplus \mathfrak{g}^\alpha \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha}.$$

Это следует из 2.5 и 2.6.

2.8. *Элемент* Y_α, *построенный на шаге* 2.5, *единствен*. Это легко вытекает из одномерности пространства $\mathfrak{g}^{-\alpha}$.

2.9. *Если* α *и* β — *корни, то* $\beta(H_\alpha)$ — *целое число и* $\beta - \beta(H_\alpha)\alpha$ — *тоже корень*. Пусть $y \in \mathfrak{g}^\beta$, $y \neq 0$, и пусть $p = \beta(H_\alpha)$. Тогда

$$[H_\alpha, y] = \beta(H_\alpha)\, y = py.$$

Таким образом, элемент y имеет вес p, если рассматривать алгебру $\mathfrak{g}$ как $sl(2)$-модуль. Но теорема 4 гл. IV утверждает, что все веса алгебры $sl(2)$ суть целые числа. Положим теперь

$$z = Y_\alpha^p y, \quad \text{если} \quad p \geqslant 0; \quad z = X_\alpha^{-p} y, \quad \text{если} \quad p \leqslant 0.$$

Согласно той же теореме, элемент z отличен от нуля и имеет вес $\beta - p\alpha$, а это и означает, что линейная форма $\beta - p\alpha$ является корнем.

2.10. *R — система корней и H_α — корень, двойственный к α.* Действительно, на шаге 2.2 было установлено, что множество R порождает $\mathfrak{h}^*$. С другой стороны, пусть $\alpha \in R$, и пусть s_α — эндоморфизм $\beta \mapsto \beta - \beta(H_\alpha)\alpha$. Из равенства $\alpha(H_\alpha) = 2$ легко вытекает, что этот эндоморфизм есть отражение (см. гл. V) относительно α. Далее, на предыдущем шаге было показано, что множество R устойчиво относительно всех s_α. Таким образом, R удовлетворяет всем условиям определения 7 гл. V.

2.11. *Система корней R приведенная.* Действительно, допустим, что найдется такой корень $\alpha \in R$, что $2\alpha \in R$. Пусть y — любой ненулевой элемент из $\mathfrak{g}^{2\alpha}$. Тогда $[H_\alpha, y] = 2\alpha(H_\alpha)y = 4y$. С другой стороны, элемент 3α не является корнем, поэтому $\operatorname{ad}(X_\alpha)y = 0$. Формула $H_\alpha = [X_\alpha, Y_\alpha]$ показывает тогда, что $\operatorname{ad}(H_\alpha)y = \operatorname{ad}(X_\alpha)\operatorname{ad}(Y_\alpha)y$. Элемент $\operatorname{ad}(Y_\alpha)y$ лежит в $\mathfrak{g}^\alpha$ и, следовательно, коллинеарен X_α и аннулируется эндоморфизмом $\operatorname{ad}(X_\alpha)$. Значит, $4y = \operatorname{ad}(H_\alpha)y = 0$, что противоречит условию.

2.12. *Пусть α и β — неколлинеарные корни, пусть p (соответственно q) — наибольшее целое число, для которого линейная форма $\beta - p\alpha$ (соответственно $\beta + q\alpha$) является корнем, и пусть $E = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^{\beta + k\alpha}$. Тогда E — неприводимый $\mathfrak{s}_\alpha$-модуль размерности $p + q + 1$, $\beta(H_\alpha) = p - q$, и отображения*

$$\operatorname{ad}(X_\alpha)\colon \mathfrak{g}^{\beta+k\alpha} \to \mathfrak{g}^{\beta+(k+1)\alpha}, \quad -p \leqslant k \leqslant q-1,$$

суть изоморфизмы. В самом деле, E является модулем $\mathfrak{s}_\alpha$ модуля $\mathfrak{g}$. С другой стороны, если рассматривать E как $sl(2)$-модуль (отождествляя $sl(2)$ с $\mathfrak{s}_\alpha$), то легко усмотреть, что весами этого пространства являются числа $\beta(H_\alpha) + 2k$ (при условии, что $\beta + k\alpha$ — корень кратности 1). Применяя теперь структурную теорему 4 гл. IV, § 5, видим, что модуль E неприводим и имеет размерность $m + 1$, где $m = \beta(H_\alpha) + 2q$.

С учетом строения неприводимых $sl(2)$-модулей получаем, далее, что отображения

$$\mathrm{ad}(X_\alpha)\colon \mathfrak{g}^{\beta+k\alpha} \to \mathfrak{g}^{\beta+(k+1)\alpha}$$

суть изоморфизмы.

2.13. *Если* $\alpha \in R$, $\beta \in R$ *и* $\alpha+\beta \in R$, *то* $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta] = \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$. Указанное равенство становится очевидным, если заметить, что отображение

$$\mathrm{ad}(X_\alpha)\colon \mathfrak{g}^\beta \to \mathfrak{g}^{\beta+\alpha}$$

является (как мы показали на предыдущем шаге) изоморфизмом.

Теорема 2 полностью доказана.

Замечание. Рассмотрим *группу Вейля* W, связанную с системой корней R; отождествим W с подгруппой группы автоморфизмов алгебры $\mathfrak{h}$. Тогда *всякий элемент* $w \in W$ *индуцируется внутренним автоморфизмом алгебры* $\mathfrak{g}$, *оставляющим на месте подалгебру* $\mathfrak{h}$. Действительно, достаточно убедиться в этом для того случая, когда w есть отражение s_α, соответствующее корню. В этом случае автоморфизм w индуцируется внутренним автоморфизмом

$$\theta_\alpha = e^{\mathrm{ad}\,(X_\alpha)} e^{-\mathrm{ad}\,(Y_\alpha)} e^{\mathrm{ad}\,(X_\alpha)}$$

(см. гл. IV, § 5).

Обратно, можно показать, что ограничение на $\mathfrak{h}$ любого внутреннего автоморфизма алгебры $\mathfrak{g}$, оставляющего на месте подалгебру $\mathfrak{h}$, есть элемент из W. Более того, можно показать, что группа $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})/\mathrm{Aut}^0(\mathfrak{g})$ „внешних автоморфизмов“ алгебры $\mathfrak{g}$ естественно отождествляется с группой $E = \mathrm{Aut}(R)/W$, введенной в § 11 главы V (см. Семинар „Софус Ли“ [1]).

§ 3. Подалгебры Бореля

Пусть R — система корней, связанная с полупростой алгеброй $\mathfrak{g}$ и ее подалгеброй Картана $\mathfrak{h}$. Выберем в системе R некоторый *базис* S. Обозначим че-

рез R_+ множество всех положительных корней (относительно S) и положим

$$\mathfrak{n}_+ = \sum_{\alpha \in R_+} \mathfrak{g}^\alpha, \quad \mathfrak{n}_- = \sum_{\alpha \in R_+} \mathfrak{g}^{-\alpha}, \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+.$$

Теорема 4. (а) $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+ = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{b}$.

(б) *$\mathfrak{n}_+$ и $\mathfrak{n}_-$ — подалгебры алгебры $\mathfrak{g}$, состоящие из нильпотентных элементов, причем сами эти алгебры тоже нильпотентны.*

(в) *$\mathfrak{b}$ — разрешимая подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$, и ее производная алгебра равна $\mathfrak{n}_+$.*

Доказательство. (а) Очевидно.

(б) Пусть $x \in \mathfrak{n}_+$. Для любого целого $k \geqslant 0$ и любой формы $\beta \in \mathfrak{h}^*$ имеем

$$\operatorname{ad}(x)^k (\mathfrak{g}^\beta) \subset \sum_{\alpha_i \in R_+} \mathfrak{g}^{\beta+\alpha_1+\ldots+\alpha_k}.$$

Пусть $\beta \in R$, тогда, очевидно, при достаточно большом k суммы вида $\beta + \alpha_1 + \ldots + \alpha_k$ ($\alpha_i \in R_+$) не могут лежать в $R \cup \{0\}$, и, следовательно, при таком k имеет место равенство $\operatorname{ad}(x)^k = 0$, т. е. x — нильпотентный элемент. То обстоятельство, что алгебра $\mathfrak{n}_+$ сама нильпотентна, есть следствие теоремы Энгеля (теорема 1.5.3.1).

Утверждения относительно алгебры $\mathfrak{n}_-$ доказываются аналогично.

(в) Соотношение $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] = \mathfrak{n}_+$ есть легкое следствие равенства $[\mathfrak{h}, \mathfrak{n}_+] = \mathfrak{n}_+$.

Алгебра $\mathfrak{b}$ называется *подалгеброй Бореля* относительно $\mathfrak{h}$ и S.

Теорема 5 (Борель — Морозов). *Всякая разрешимая подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$ может быть переведена посредством внутреннего автоморфизма этой алгебры в подалгебру Бореля $\mathfrak{b}$; в частности, $\mathfrak{b}$ — максимальная разрешимая подалгебра в алгебре $\mathfrak{g}$.*

Доказательство этой теоремы можно найти в работе Бореля [1].

Следствие. *Любая подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$, состоящая из нильпотентных элементов, может быть*

переведена посредством внутреннего автоморфизма этой алгебры в подалгебру $\mathfrak{n}_+$.

Это вытекает из теоремы 5, если учесть, что любой нильпотентный (относительно $\mathfrak{g}$) элемент алгебры $\mathfrak{b}$ лежит в $\mathfrak{n}_+$.

§ 4. Базис Вейля

Сохраним обозначения предыдущего параграфа. Пусть $S=\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ — фиксированный базис и $n=\dim \mathfrak{h}$ — *ранг* алгебры $\mathfrak{g}$ (см. гл. III). Обозначим через H_i элемент $H_{\alpha_i} \in \mathfrak{h}$ (см. теорему 2) и выберем два элемента $X_i \in \mathfrak{g}^{\alpha_i}$, $Y_i \in \mathfrak{g}^{-\alpha_i}$, такие, что $[X_i, Y_i]=H_i$. Наконец, положим

$$n(i, j)=\alpha_j(H_i).$$

Матрица, образованная числами $n(i, j)$, есть не что иное, как *матрица Картана* рассматриваемой системы корней R. Известно (см. лемму 5.11.3), что числа $n(i, j)$ целы и $n(i, j) \leqslant 0$ при $i \neq j$.

Теорема 6. (а) *Алгебра* $\mathfrak{n}_+$ *порождается элементами* X_i, *алгебра* $\mathfrak{n}_-$ — *элементами* Y_i *и алгебра* $\mathfrak{g}$ — *элементами* X_i, Y_i, H_i.

(б) *Имеют место следующие формулы (сооотношения Вейля)*:

$$[H_i, H_j]=0,$$

$$[X_i, Y_i]=H_i, \qquad [X_i, Y_j]=0 \quad \text{при} \quad i \neq j,$$

$$[H_i, X_j]=n(i, j) X_j, \quad [H_i, Y_j]=-n(i, j) Y_j.$$

(в) *Для любых индексов* i *и* j $(i \neq j)$ *справедливы равенства*

$$\operatorname{ad}(X_i)^{-n(i, j)+1}(X_j)=0, \qquad (\theta_{ij}^+)$$

$$\operatorname{ad}(Y_i)^{-n(i, j)+1}(Y_j)=0. \qquad (\theta_{ij}^-)$$

Доказательство. (а) Достаточно показать, что $\mathfrak{n}_+$ порождается элементами X_i. Пусть α — некоторый положительный корень. Как известно (см.

предложение 5.9.5), α можно таким образом представить в виде суммы элементов α_i:

$$\alpha = \alpha_{i_1} + \ldots + \alpha_{i_k},$$

что все (частичные) суммы $\alpha_{i_1} + \ldots + \alpha_{i_h}$, $h \leqslant k$, принадлежат R_+. Возьмем такое разложение и положим

$$X_\alpha = [X_{i_k}, [X_{i_{k-1}}, \ldots [X_{i_2}, X_{i_1}] \ldots]].$$

По теореме 2 X_α — ненулевой элемент прямой $\mathfrak{g}^\alpha$. Поскольку $\mathfrak{n}_+$ есть сумма пространств $\mathfrak{g}^\alpha$, $\alpha \in R_+$, мы видим, что $\mathfrak{n}_+$ порождается элементами X_i.

(б) Если бы коммутатор $[X_i, Y_j]$ был ненулевым, то он имел бы вес $\alpha_i - \alpha_j$, который, однако, не является корнем (так как каждый корень в разложении по элементам α_i имеет коэффициенты *одного знака*). Следовательно, $[X_i, Y_j] = 0$, $i \neq j$.

Все остальные формулы очевидны.

(в) Элемент

$$\theta_{ij}^+ = \operatorname{ad}(X_i)^{-n(i,j)+1}(X_j)$$

имеет вес $\alpha_j - n(i, j)\alpha_i + \alpha_i = s_i(\alpha_j - \alpha_i)$, где $s_i = s_{\alpha_i}$. Так как $\alpha_i - \alpha_j \notin R$, то и $s_i(\alpha_j - \alpha_i) \notin R$, и потому $\theta_{ij}^+ = 0$. Равенство $\theta_{ij}^- = 0$ доказывается тем же способом.

Теорема 7. (i) *Алгебра* $\mathfrak{n}_+$ *полностью определяется соотношениями* (θ_{ij}^+), $i \neq j$, *наложенными на образующие* X_i.

(ii) *Алгебра* $\mathfrak{g}$ *вполне определяется соотношениями Вейля и соотношениями* (θ_{ij}^+) и (θ_{ij}^-), *наложенными на образующие* X_i, Y_i, H_i.

Утверждение (i) означает следующее. Пусть L — свободная алгебра Ли со свободными образующими X_i. Тогда ядро канонического гомоморфизма $f\colon L \to \mathfrak{n}_+$ есть идеал, порожденный элементами θ_{ij}^+. Аналогично интерпретируется свойство (ii).

Доказательство этой теоремы приведено в добавлении в конце настоящей главы.

Пример. Если система R имеет тип G_2, алгебру $\mathfrak{n}_+$ можно представлять себе как алгебру Ли с двумя образующими X_1, X_2 и соотношениями

$$[X_1, [X_1, X_2]] = 0, \quad [X_2, [X_2, [X_2, [X_2, X_1]]]] = 0.$$

Следствие. *Существует автоморфизм σ алгебры $\mathfrak{g}$, равный (-1) на подалгебре $\mathfrak{h}$ и переводящий X_i в $-Y_i$, а Y_i в $-X_i$ для всех i. При этом $\sigma^2 = 1$.*

Доказательство. Положим $H'_i = -H_i$, $X'_i = -Y_i$, $Y'_i = -X_i$. Непосредственно проверяется, что элементы X'_i, Y'_i, H'_i удовлетворяют всем соотношениям Вейля и соотношениям (θ^+_{ij}), (θ^-_{ij}). Согласно теореме 7, (ii), существует автоморфизм σ: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, переводящий X_i, Y_i, H_i в X'_i, Y'_i, H'_i. Автоморфизм σ^2 оставляет инвариантными элементы X_i, Y_i, H_i и потому тождествен.

Замечание. Теорема 7 дает явное описание алгебр $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{n}_+$ через *матрицу Картана*.

§ 5. Теоремы существования и единственности

Теорема о сопряженности подалгебр Картана (гл. III, § 4) показывает, что система корней полупростой алгебры Ли не зависит (с точностью до изоморфизма) от выбора подалгебр Картана. Обратно, имеет место

Теорема 8. *Две полупростые алгебры Ли, которым отвечают изоморфные системы корней, сами изоморфны.*

Имеет место более точное утверждение.

Теорема 8′. *Пусть $\mathfrak{g}$ (соответственно $\mathfrak{g}'$) — полупростая алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ (соответственно $\mathfrak{h}'$) — подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}$ (соответственно алгебры $\mathfrak{g}'$), S (соответственно S') — базис соответствующей системы корней и r: $S \to S'$ — биективное отображение, такое, что $n(\alpha, \beta) = n(r(\alpha), r(\beta))$ при любых $\alpha, \beta \in S$. Для каждого элемента $\alpha \in S$ (соответственно $\beta \in S'$) выберем в пространстве $\mathfrak{g}^\alpha$ (соответственно в $\mathfrak{g}'^\beta$) нену-*

левой элемент X (соответственно X'_β). Тогда существует единственный изоморфизм f: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$, отображающий H_α в $H'_{r(\alpha)}$ и X_i в $X'_{r(\alpha)}$ для всех $\alpha \in S$.

Доказательство. Пусть Y_α (соответственно Y'_β) — такой элемент из $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ (соответственно из $\mathfrak{g}'^{-\beta}$), что $[X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha$ (соответственно $[X'_\beta, Y'_\beta] = H'_\beta$), Теорема 7 показывает, что найдется изоморфизм f: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$, переводящий X_α, Y_α, H_α в $X'_{r(\alpha)}$, $Y'_{r(\alpha)}$, $H'_{r(\alpha)}$. Указанный изоморфизм f (определяемый, очевидно, однозначно) является искомым.

Замечание. Полагая в этой теореме $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}'$ и $S' = -S$, получаем следствие теоремы 7.

Сформулируем, наконец, теорему существования.

Теорема 9. *Пусть R — приведенная система корней. Существует полупростая алгебра Ли $\mathfrak{g}$, система корней которой изоморфна R.*

Доказательство. Пусть $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ — базис системы R и $(n(i, j))$ — соответствующая матрица Картана. Обозначим через $\mathfrak{g}$ алгебру Ли, заданную посредством $3n$ образующих X_i, Y_i, H_i и соотношений, фигурирующих в теореме 6 (т. е. соотношений Вейля и (θ^+_{ij}), (θ^-_{ij})). Можно показать (см. добавление), что эта алгебра Ли конечномерна, полупроста и что система ее корней изоморфна R. Теорема доказана.

Следствие. *Для того чтобы алгебра $\mathfrak{g}$ была простой, необходимо и достаточно, чтобы система R была неприводима.*

Это очевидно.

§ 6. Нормализация Шевалле

Выберем для каждого корня $\alpha \in R$ ненулевой элемент $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$. Тогда

$$[X_\alpha, X_\beta] = \begin{cases} N_{\alpha,\beta} X_{\alpha,\beta}, & \text{если} \quad \alpha + \beta \in R, \\ 0, & \text{если} \quad \alpha + \beta \notin R, \ \alpha + \beta \neq 0, \end{cases}$$

где $N_{\alpha,\beta}$ — ненулевой скаляр (по теореме 2, (г)). Числа $N_{\alpha,\beta}$ определяют „закон коммутирования" в алгебре $\mathfrak{g}$. Сами они определены неоднозначно (зависят от выбора элементов X_α).

Теорема 10. *Элементы X_α можно выбрать так, что*

$$[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha \quad \textit{для всех} \quad \alpha \in R,$$

$$N_{\alpha,\beta} = -N_{-\alpha,-\beta} \quad \textit{для всех} \quad \alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta \in R.$$

Доказательство. Пусть R_+ — множество положительных корней (относительно базиса S системы R), и пусть σ — автоморфизм алгебры, удовлетворяющий условиям следствия теоремы 7. Тогда $\sigma(\mathfrak{g}^\alpha) = \mathfrak{g}^{-\alpha}$. Для каждого корня $\alpha \in R_+$ выберем ненулевой элемент $X'_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$. Как известно, $[X'_\alpha, \sigma(X'_\alpha)] \in [\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}]$, т. е. существует ненулевой скаляр t_α, такой, что $[X'_\alpha, \sigma(X'_\alpha)] = t_\alpha H_\alpha$.

Обозначим через u_α один из квадратных корней из числа $-t_\alpha$ и положим

$$X_\alpha = u_\alpha^{-1} X'_\alpha, \quad X_{-\alpha} = -\sigma(X_\alpha).$$

Тогда

$$[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha.$$

Равенство $N_{\alpha,\beta} = -N_{-\alpha,-\beta}$ вытекает теперь из соотношений

$$[\sigma(X_\alpha), \sigma(X_\beta)] = \sigma[X_\alpha, X_\beta] \quad \text{и} \quad \sigma(X_\alpha) = -X_{-\alpha}.$$

Теорема* 11 (Шевалле). *Пусть элементы $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$ выбраны так, как указано в теореме 10, и пусть $\alpha, \beta \in R$ и $\alpha+\beta \in R$. Обозначим через p наибольшее целое число, такое, что $\beta - p\alpha \in R$ (см. 2.12). Тогда*

$$N_{\alpha,\beta} = \pm(p+1).$$

Доказательство см. в работе Шевалле [4].

Замечания. 1. Обозначим через $\mathfrak{g}(\mathbf{Z})$ аддитивную подгруппу алгебры $\mathfrak{g}$, порожденную элементами H_α и X_α (последние выбираются согласно теореме 10). Теорема 11 показывает, что $\mathfrak{g}(\mathbf{Z})$ является *алгеброй Ли*

над кольцом **Z**. Следовательно, над любым полем K можно рассмотреть алгебру Ли $\mathfrak{g}(K) = \mathfrak{g}(\mathbf{Z}) \otimes K$. Указанная конструкция служит отправной точкой построения так называемых *групп Шевалле* (см. по этому поводу цитированную выше работу Шевалле [4] или работу Картера [1]).

2. Знак $\pm$ в теореме 11 уточнен Титсом (однако при этом нужно изменить систему индексации элементов X_α). Им же получено новое доказательство теоремы существования (теоремы 9).

3. Пусть K — вещественное векторное подпространство алгебры $\mathfrak{g}$, порожденное элементами iH_α, $X_\alpha - X_{-\alpha}$, $i(X_\alpha + X_{-\alpha})$. Легко проверяется, что K — вещественная подалгебра Ли алгебры $\mathfrak{g}$. Форма Киллинга этой подалгебры *отрицательно определена*, кроме того, алгебру $\mathfrak{g}$ можно отождествить с комплексификацией $K \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ алгебры K. Иными словами, существует *компактная форма* алгебры $\mathfrak{g}$. Существование такой формы можно установить с помощью „унитарного приема" Вейля. В случае, когда $\mathfrak{g} = sl(2)$, подалгебра K совпадает с $su(2)$ (см. гл. IV, § 6, 7).

Добавление

ПОСТРОЕНИЕ ПОЛУПРОСТЫХ АЛГЕБР ЛИ ПО ОБРАЗУЮЩИМ И СООТНОШЕНИЯМ

Пусть R — система корней в комплексном векторном пространстве V. Мы будем по возможности сохранять предыдущие обозначения. В частности,

$$V^* = \mathfrak{h} \quad \text{и} \quad V = \mathfrak{h}^*.$$

Пусть $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ — базис системы R; $H_1, \ldots, H_n \in \mathfrak{h}$ — двойственные корни к элементам базиса, и пусть

$$n(i, j) = \langle \alpha_j, H_i \rangle.$$

Числа $n(i, j)$ образуют *матрицу Картана* нашей системы корней (относительно базиса S).

Наша цель — доказать следующую основную теорему.

Теорема. *Пусть* $\mathfrak{g}$ — *алгебра Ли, определенная* $3n$ *образующими и соотношениями*

(w. 1) $[H_i, H_j] = 0$;

(w. 2) $[X_i, Y_i] = H_i$, $[X_i, Y_j] = 0$ *при* $i \neq j$;

(w. 3) $[H_i, X_j] = n(i, j) X_j$, $[H_i, Y_j] = -n(i, j) Y_j$;

(θ_{ij}^+) $\operatorname{ad}(X_i)^{-n(i, j)+1}(X_j) = 0$ *при* $i \neq j$;

(θ_{ij}^-) $\operatorname{ad}(Y_i)^{-n(i, j)+1}(Y_j) = 0$ *при* $i \neq j$.

Тогда $\mathfrak{g}$ — *полупростая алгебра Ли, причем ее подалгебра Картана порождена элементами* H_i, *а система корней есть* R.

Доказательство. Рассмотрим сначала алгебру Ли $\bar{a}$, задаваемую теми же образующими X_i, Y_i, H_i и тремя первыми соотношениями (w. 1), (w. 2), (w. 3). Строение этой алгебры хорошо известно, оно было определено Шевалле, Хариш-Чандрой и Джекобсоном. Мы приведем здесь лишь окончательный результат (см. Джекобсон [1], стр. 231).

Предложение. *Имеет место разложение*

$$\bar{a} = \bar{x} \otimes \mathfrak{h} \otimes \bar{y},$$

где $\bar{x}$ (*соответственно* $\bar{y}$) — *алгебра Ли, порожденная элементами* Y_i (*соответственно элементами* X_i), *и* $\mathfrak{h}$ — *пространство, натянутое на элементы* H_i. *Кроме того, алгебра* $\bar{y}$ (*соответственно* $\bar{x}$) *естественно изоморфна свободной алгебре Ли с множеством свободных образующих* $\{Y_i\}$ (*соответственно* $\{X_i\}$), *и, наконец, семейство* $\{H_i\}$ *образует базис пространства* $\mathfrak{h}$.

Для простоты обозначений мы отождествили здесь первоначальное пространство $\mathfrak{h}$ и векторное подпространство алгебры $\bar{a}$, порожденное элементами H_i.)

Пусть, как и прежде,

$$\theta_{ij}^+ = \operatorname{ad}(X_i)^{-n(i, j)+1}(X_j),$$

$$\theta_{ij}^- = \operatorname{ad}(Y_i)^{-n(i, j)+1}(Y_j).$$

Очевидно, $\theta_{ij}^{+} \in \bar{x}$ и $\theta_{ij}^{-} \in \bar{y}$. Обозначим через $\bar{u}^{+}$ (соответственно $\bar{u}^{-}$) идеал в алгебре $\bar{x}$ (соответственно в алгебре $\bar{y}$), порожденный элементами θ_{ij}^{+} (соответственно θ_{ij}^{-}) с $i \neq j$. Положим $\bar{r} = \bar{u}^{+} \oplus \bar{u}^{-}$.

(а) *$\bar{u}^{+}$, $\bar{u}^{-}$, $\bar{r}$ — идеалы в алгебре $\bar{a}$.* Пусть $U\bar{a}$, $U\bar{x}$, $U\bar{y}$ — универсальные обертывающие алгебры соответствующих алгебр Ли. Присоединенное представление $\mathrm{ad}\colon \bar{a} \to \mathrm{End}(\bar{a})$ наделяет алгебру $\bar{a}$ структурой $U\bar{a}$-модуля. Идеал $\bar{u}_{ij}$ алгебры $\bar{a}$, порожденный элементом θ_{ij}^{+}, равен подмодулю $U\bar{a}(\theta_{ij}^{+})$. Согласно следствию из теоремы Биркгофа — Витта (см. следствие 1.3.4.2), идеал $\bar{u}_{ij}$ натянут (как векторное пространство) на элементы вида $XYH(\theta_{ij}^{+})$, где $X \in U\bar{x}$, $Y \in U\bar{y}$, $H \in U\mathfrak{h}$. По понятным соображениям векторы $H\theta_{ij}^{+}$ и θ_{ij}^{+} коллинеарны. С другой стороны, как показывает несложное вычисление (см. Джекобсон [1], лемма 1, стр. 239), $\mathrm{ad}(Y_k)(\theta_{ij}^{+}) = 0$ для всех k, и, следовательно векторы $Y\theta_{ij}^{+}$ и θ_{ij}^{+} тоже коллинеарны. Таким образом, идеал $\bar{u}_{ij}$ порожден (как векторное пространство) элементами вида $X\theta_{ij}^{+}$ и потому содержится в $\bar{u}^{+}$. Осталось заметить, что $\bar{u}^{+} = \sum \bar{u}_{ij}$, так что $\bar{u}^{+}$ действительно является идеалом алгебры $\bar{a}$. Аналогичное рассуждение показывает, что $\bar{u}^{-}$ — идеал, а отсюда уже следует, что их прямая сумма $\bar{r}$ тоже является идеалом.

Итак, $\bar{r}$ есть наименьший идеал алгебры $\bar{a}$, содержащий θ_{ij}^{+} и θ_{ij}^{-}. Наша алгебра $\mathfrak{g}$, которую мы намерены изучить, совпадает попросту с факторалгеброй $\bar{a}/\bar{r}$.

(б) *Имеет место разложение*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_{-} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_{+},$$

где $\mathfrak{n}_{+} = \bar{x}/\bar{u}^{+}$, $\mathfrak{n}_{-} = \bar{y}/\bar{u}^{-}$.

Это очевидно.

(в) *Эндоморфизмы* $\mathrm{ad}(X_i)$ *и* $\mathrm{ad}(Y_i)$ *алгебры* $\mathfrak{g}$ *локально нильпотентны.*

Обозначим через V_i множество таких элементов $z \in \mathfrak{g}$, что $\mathrm{ad}(X_i)^k z = 0$ для некоторого целого k. Мы должны показать, что $V_i = \mathfrak{g}$. Можно убедиться простым вычислением, что множество V_i образует

подалгебру Ли в алгебре $\mathfrak{g}$. Однако $X_k \in V_i$ (ввиду соотношения $\theta_{ik}^{+}=0$) и $Y_k \in V_i$ (ввиду соотношений w) для всех k, и потому $H_k=[X_k, Y_k] \in V_i$. Следовательно, $V_i=\mathfrak{g}$. Аналогичное рассуждение проходит и для $\operatorname{ad}(Y_i)$.

Введем дополнительные обозначения. Пусть λ — линейная форма на пространстве $\mathfrak{h}$. Обозначим через $\bar{a}^{\lambda}$ (соответственно $\mathfrak{g}^{\lambda}$) множество таких элементов $z \in \bar{a}$ (соответственно $z \in \mathfrak{g}$), что $\operatorname{ad}(H)z=\lambda(H)z$ для всех $H \in \mathfrak{h}$. Мы будем говорить в этом случае, что элемент z имеет *вес* λ. Из приведенного выше разложения алгебры $\bar{a}$ ясно, что $\bar{a}$ есть прямая сумма своих подалгебр вида $\bar{a}^{\lambda}$; отсюда, кстати, вытекает, что и алгебра $\mathfrak{g}$ есть прямая сумма подалгебр $\mathfrak{g}^{\lambda}$, Заметим также, что если $\bar{a}^{\lambda} \neq 0$, то линейная форма λ представляется в виде линейной комбинации элементов α_i с целыми коэффициентами одного и того же знака.

Имеем $\mathfrak{h}=\bar{a}^{0}$, $\bar{x}=\sum_{\lambda>0} \bar{a}^{\lambda}$, $\bar{y}=\sum_{\lambda<0} \bar{a}^{\lambda}$ и аналогично для алгебры $\mathfrak{g}$.

Вычислим теперь размерность пространств $\mathfrak{g}^{\alpha}, \alpha \in S$. Вначале докажем следующее утверждение.

(г) *Если линейные формы* λ *и* μ (*на* $\mathfrak{h}$) *переводятся друг в друга элементом* w *группы Вейля* W, *то* $\dim \mathfrak{g}^{\lambda}=\dim \mathfrak{g}^{\mu}$.

Достаточно доказать это в том случае, когда w является отражением s_i относительно корня $\alpha_i \in S$ (см. гл. V, теорема 2). Рассмотрим автоморфизм θ_i алгебры $\mathfrak{g}$, определенный формулой

$$\theta_i=e^{\operatorname{ad}(X_i)}e^{-\operatorname{ad}(Y_i)}e^{\operatorname{ad}(X_i)}.$$

Выражение это имеет смысл в силу (в). Нетрудно проверить, что θ_i индуцирует отражение пространства $\mathfrak{h}$ относительно H_i, сопряженное к s_i. Следовательно, $\theta_i(\mathfrak{g}^{\mu})=\mathfrak{g}^{\lambda}$ (поскольку $s_i(\mu)=\lambda$), так что $\dim \mathfrak{g}^{\lambda}= = \dim \mathfrak{g}^{\mu}$.

(д) *Имеем* $\dim \mathfrak{g}^{\alpha_i}=1$ *и* $\dim \mathfrak{g}^{m\alpha_i}=0$ *при* $m \neq \pm 1, 0$.

Для алгебры $\bar{a}$ аналогичные формулы очевидны; наш результат получается отсюда, если заметить, что $X_i \notin \bar{a}^{+}$.

(е) *Если* $\alpha \in R$, *то* $\dim \mathfrak{g}^{\alpha} = 1$.

Действительно, существует такой автоморфизм $w \in W$, что $w(\alpha) = \alpha_i$ (см. гл. V, теорема 2, (в)). Применяя (г) и (д), приходим к требуемому соотношению.

(ж) *Пусть линейная форма* $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ *представима в виде линейной комбинации корней* α_i *с вещественными коэффициентами и не коллинеарна ни одному из корней. Тогда найдется такой элемент* $w \in W$, *что в разложении* $w(\lambda) = \sum t_i \alpha_i$ *по крайней мере два ненулевых коэффициента будут иметь противоположные знаки.*

Обозначим через $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$ вещественное векторное подпространство пространства $\mathfrak{h}$, порожденное элементами H_i (см. гл. V, § 17), через L_α (соответственно через L) — гиперплоскость в $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$, ортогональную к α (соответственно к λ). По условию гиперплоскость L не совпадает ни с одной гиперплоскостью L_α и потому не содержится в их объединении. Выберем произвольный элемент $H \in L$, не лежащий в $\bigcup\limits_{\alpha} L_\alpha$. Подвергая, если нужно, λ и L действию некоторого элемента $w \in W$, можно считать, что $\alpha_i(H) > 0$ при всех i (см. гл. V, теорема 2, (а)). Запишем λ в виде

$$\lambda = \sum t_i \alpha_i.$$

Тогда

$$0 = \lambda(H) = \sum t_i \alpha_i(H).$$

Из этого равенства видно (поскольку $\alpha_i(H) > 0$), что коэффициенты t_i не могут быть все одного знака.

(з) *Если линейная форма* $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ *не является корнем и если* $\lambda \neq 0$, *то* $\mathfrak{g}^{\lambda} = 0$.

Можно ограничиться случаем, когда λ есть линейная комбинация корней α_i с целыми коэффициентами. Если форма λ коллинеарна одному из корней, то наше утверждение вытекает из (г) и (д). Если же это не так, то можно найти такой элемент $w \in W$, что в разложении формы $\mu = w(\lambda)$ по элементам базиса S по крайней мере два коэффициента имеют

разные знаки. Но для такой формы, как было показано, $\bar{a}^{\mu}=0$. Поэтому $\mathfrak{g}^{\mu}=0$, и нам остается снова применить (г).

(и) *Алгебра* $\mathfrak{g}$ *имеет конечную размерность, равную* $n+\operatorname{Card}(R)$.

В самом деле, согласно (е) и (з),

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\sum_{\alpha\in R}\mathfrak{g}^{\alpha},$$

а каждое пространство $\mathfrak{g}^{\alpha}$ одномерно.

(к) *Если* $\alpha\in R$, *то пространство* $[\mathfrak{g}^{\alpha}, \mathfrak{g}^{-\alpha}]$ *натянуто на элемент* H_{α} (*в частности*, $\dim[\mathfrak{g}^{\alpha}, \mathfrak{g}^{-\alpha}]=1$). *Подалгебра* $\mathfrak{s}_{\alpha}$, *порожденная* H_{α}, $\mathfrak{g}^{\alpha}$, $\mathfrak{g}^{-\alpha}$, *изоморфна* $sl(2)$.

Утверждение очевидно, если α совпадает с одним из корней α_i. Общий случай можно свести к этому, воспользовавшись автоморфизмами θ_i и их произведениями (см. (г)).

(л) *Алгебра* $\mathfrak{g}$ *полупроста.*

Пусть $\mathfrak{a}$ — коммутативный идеал алгебры $\mathfrak{g}$. Будучи идеалом, пространство $\mathfrak{a}$ инвариантно относительно всех $\operatorname{ad}(H)$, $H\in\mathfrak{h}$. Поэтому $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}\cap\mathfrak{h}\oplus\sum_{\alpha\in R}\mathfrak{a}\cap\mathfrak{g}^{\alpha}$. Но так как алгебры $\mathfrak{s}_{\alpha}$ и $sl(2)$ изоморфны, $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{s}_{\alpha}=0$ и тем более $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{g}^{\alpha}=0$, так что $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{h}$. Условие инвариантности идеала $\mathfrak{a}$ относительно $\operatorname{ad}(X_i)$ показывает теперь, что все формы α_i обращаются в 0 на $\mathfrak{a}$ и, следовательно, $\mathfrak{a}=0$.

(м) *Алгебра* $\mathfrak{h}$ *совпадает с подалгеброй Картана алгебры* $\mathfrak{g}$, *и система корней последней совпадает с* R.

Действительно, подалгебра $\mathfrak{h}$ совпадает со своим нормализатором. Второе свойство очевидно.

На этом доказательство нашей теоремы, а вместе с ней и теоремы 9 (*теоремы существования*) *заканчивается.*

Нетрудно доказать теперь и теорему 7. Пусть $\mathfrak{g}'$ — полупростая алгебра Ли, $\mathfrak{h}'$ — ее подалгебра Картана и X'_i, Y'_i, H'_i — соответствующие образующие Вейля (см. § 4). Допустим, что матрицы Картана алгебр $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}'$ совпадают. Согласно теореме 6, образующие X'_i, Y'_i, H'_i удовлетворяют соотношениям (W),

(θ_{ij}^{+}) и (θ_{ij}^{-}). Существует, следовательно, гомоморфизм $f\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$, переводящий X_i, Y_i, H_i в X_i', Y_i', H_i'. Поскольку последние элементы порождают $\mathfrak{g}'$, отображение f сюръективно. Но алгебры $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}'$ имеют одинаковую размерность, равную $n + \operatorname{Card}(R)$, так что гомоморфизм f на самом деле является *изоморфизмом*. Теорема 7 доказана.

Упражнение. Пусть $\bar{r}'$ — некоторый идеал упомянутой выше алгебры $\bar{a}$. Доказать равносильность следующих свойств:

(i) идеал $\bar{r}$, порожденный элементами θ_{ij}^{+} и θ_{ij}^{-}, содержится в $\bar{r}'$:

(ii) алгебра $\bar{a}/\bar{r}'$ конечномерна;

(iii) существует целое число $m \geqslant 0$, такое, что $\operatorname{ad}(X_i)^m(X_j) \in \bar{r}'$ и $\operatorname{ad}(Y_i)^m(Y_j) \in \bar{r}'$ при $i \neq j$.

(Отсюда видно, в частности, что $\bar{r}$ — это наименьший идеал конечной коразмерности в алгебре $\bar{a}$.)

Глава VII

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПОЛУПРОСТЫХ АЛГЕБР ЛИ

В этой главе, как и раньше, $\mathfrak{g}$ — комплексная полупростая алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана и R — соответствующая система корней. Зафиксируем в этой системе некоторый базис $S=\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ и обозначим через R_+ множество всех положительных корней (относительно S).

Для каждого корня $\alpha \in R_+$ выберем элементы $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$, $Y_\alpha \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$, такие, что $[X_\alpha, Y_\alpha]=H_\alpha$ (см. гл. IV, § 1). Если α совпадает с одним из простых корней α_i, то мы будем писать X_i, Y_i, H_i вместо X_{α_i}, Y_{α_i}, H_{α_i}.

Положим

$$\mathfrak{n}_+=\sum_{\alpha>0}\mathfrak{g}^\alpha, \quad \mathfrak{n}_-=\sum_{\alpha<0}\mathfrak{g}^\alpha, \quad \mathfrak{b}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}_+.$$

Мы будем изучать неприводимые $\mathfrak{g}$-модули, соответствующие *старшему весу* (см. § 3), и, в частности, дадим описание тех из них, которые имеют *конечную размерность*.

§ 1. Веса

Пусть V — некоторый $\mathfrak{g}$-модуль (не обязательно конечной размерности), и пусть $\omega \in \mathfrak{h}^*$ — линейная форма на пространстве $\mathfrak{h}$. Обозначим через V^ω пространство всех элементов $v \in V$, таких, что $Hv=\omega(H)v$ для $H \in \mathfrak{h}$. Мы будем говорить, что элементы этого пространства имеют *вес* ω. Размерность $\dim V^\omega$ называется *кратностью* формы ω. Мы скажем, что форма ω является *весом* пространства V, если $V^\omega \neq 0$.

Предложение 1. (а) *Пусть* $\omega \in \mathfrak{h}^*$ *и* $\alpha \in R$. *Тогда* $\mathfrak{g}^\alpha V^\omega \subset V^{\omega+\alpha}$.

(б) *Сумма* $V' = \sum_\omega V^\omega$ *есть прямая сумма. Пространство* V' *инвариантно относительно действия алгебры* $\mathfrak{g}$.

Доказательство. Пусть $X \in \mathfrak{g}^\alpha$, $v \in V^\omega$ и $H \in \mathfrak{h}$. Равенство

$$H(Xv) = X(Hv) + [H, X]v = (\omega(H) + \alpha(H))Xv$$

показывает, что вектор Xv имеет вес $\omega + \alpha$.

Утверждение (а) общеизвестно (собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы). Наконец, приведенное выше равенство доказывает инвариантность пространства V' относительно всех $\mathfrak{g}^\alpha$ и, следовательно, относительно всей алгебры $\mathfrak{h} \oplus \sum \mathfrak{g}^\alpha$.

§ 2. Примитивные элементы

Пусть V — некоторый $\mathfrak{g}$-модуль, v — элемент этого модуля и ω — линейная форма на $\mathfrak{h}$. Назовем v *примитивным*[1]) *элементом веса* ω, если выполнены следующие два условия:

(i) вектор v отличен от нуля и имеет вес ω;

(ii) для всех $\alpha \in R_+$ (или, что то же самое, для всех $\alpha \in S$)

$$X_\alpha v = 0.$$

Примитивные элементы можно охарактеризовать так же, как собственные векторы подалгебры Бореля $\mathfrak{b}$.

Предложение 2. *Пусть* v — *примитивный элемент* $\mathfrak{g}$-*модуля* V *веса* ω, *и пусть* E — *подмодуль, порожденный этим элементом. Тогда*

(1) *Модуль* E *порождается (как векторное пространство) элементами вида*

$$Y_{\beta_1}^{m_1} \ldots Y_{\beta_k}^{m_k} v, \quad m_i \in \mathbf{N},$$

где $\beta_1, \ldots, \beta_k$ — *различные положительные корни.*

---

[1]) В отечественной литературе примитивный элемент называют также *старшим вектором*. — *Прим. перев.*

(2) *Веса модуля* E *имеют вид*

$$\omega - \sum_{i=1}^{n} p_i \alpha_i, \quad p_i \in \mathbf{N},$$

и кратности их конечны.

(3) *Форма* ω *является весом модуля* E *кратности* 1.

(4) *Модуль* E *неразложим.*

(Напомним, что модуль E называется *неразложимым*, если он нетривиален и не разлагается в прямую сумму нетривиальных подмодулей. Всякий неприводимый модуль неразложим, обратное, вообще говоря, неверно.)

Доказательство. Обозначим через A, B, C универсальные обертывающие алгебр $U\mathfrak{g}$, $U\mathfrak{b}$, $U\mathfrak{n}_-$ соответственно. Как мы знаем, $A = C \otimes B$, поскольку $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{b}$ (см. ч. 1, гл. III, § 4), поэтому $E = Av = C \cdot Bv$. Однако вектор v является собственным для любого оператора $b \in B$, так что $C \cdot Bv = Cv$, т. е. $E = Cv$. Утверждение (1) вытекает теперь из теоремы Биркгофа — Витта, согласно которой одночлены

$$Y_{\beta_1}^{m_1} \ldots Y_{\beta_k}^{m_k}, \qquad m_i \in \mathbf{N},$$

образуют базис алгебры C.

Для того чтобы доказать утверждение (г), достаточно заметить (см. предложение 1), что элемент $Y_{\beta_1}^{m_1} \ldots Y_{\beta_k}^{m_k} v$ имеет вес $\omega - \sum m_j \beta_j$ ($m_j \in \mathbf{N}$), причем корни β разлагаются в линейные комбинации по элементам базиса $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ с целыми неотрицательными коэффициентами. Нетрудно также сообразить, что формы ω и $\omega - \sum m_j \beta_j$ ($\beta_j \in R_+$, $m_j \in \mathbf{N}$) равны тогда и только тогда, когда все числа m_j равны нулю, а это в точности эквивалентно части (3) предложения 2.

Допустим, наконец, что модуль E равен прямой сумме двух подмодулей E_1 и E_2. Тогда $E^\omega = E_1^\omega \oplus E_2^\omega$. Но, как мы доказали, $\dim E^\omega = 1$, а потому $E^\omega = E_1^\omega$ или $E^\omega = E_2^\omega$. В первом случае $v \in E_1$, и поскольку

вектор v порождает E, мы получаем $E=E_1$ и $E_2=0$. Аналогично во втором случае $E=E_2$ и $E_1=0$.

§ 3. Неприводимые модули, соответствующие старшим весам

Теорема 1. *Пусть V — неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль, содержащий примитивный элемент v веса ω. Тогда*

(а) *Вектор v является единственным с точностью до умножения на скаляр примитивным элементом модуля V. Вес этого элемента называется старшим весом неприводимого модуля V.*

(б) *Любой вес π нашего модуля имеет вид*

$$\pi=\omega-\sum m_i\alpha_i, \text{ где } m_i\in\mathbf{N}.$$

Кратности всех весов конечны; в частности, кратность веса ω равна единице. Кроме того, $V=\sum V^{\pi}$.

(в) *Два неприводимых $\mathfrak{g}$-модуля V_1 и V_2 со старшими весами ω_1 и ω_2 изоморфны в том и только в том случае, когда $\omega_1=\omega_2$.*

(Как показывает (б), каждый вес модуля V в некотором очевидном смысле *строго меньше* веса ω, чем, собственно, и объясняется происхождение термина „старший вес".)

Доказательство. (б) Подмодуль $E\subset V$, порожденный элементом v, совпадает с модулем V ввиду неприводимости последнего. Применяя предложение 2, получаем (б).

(а) Пусть v' — примитивный элемент модуля V с весом ω'. Согласно (б),

$$\omega'=\omega-\sum m_i\alpha_i, \qquad m_i\geqslant 0.$$

Поменяв ролями v и v', приходим к соотношению

$$\omega=\omega'-\sum m_i'\alpha_i, \qquad m_i'\geqslant 0.$$

Сложив эти равенства, видим, что $m_i=m_i'=0$ для всех i, т. е. $\omega=\omega'$. Снова применяя (б), получаем, что векторы v и v' коллинеарны.

(в) Докажем, что равенство $\omega_1=\omega_2$ влечет за собой изоморфизм соответствующих $\mathfrak{g}$-модулей V_1 и V_2.

Обозначим через v_i ($v = 1, 2$) примитивный элемент модуля V_i веса $\omega(=\omega_1=\omega_2)$. Очевидно, вектор $v = v_1 + v_2$ модуля $V_1 \oplus V_2$ является примитивным элементом с тем же весом ω. Пусть E — подмодуль модуля V, порожденный элементом v. Проекция pr_1: $V \to V_1$ индуцирует гомоморфизм $\mathfrak{g}$-модулей f_1: $E \to V_1$. Ясно, что $f_1(v) = v_1$. Так как v_1 порождает модуль V_1, заключаем, что отображение f_1 *сюръективно*. С другой стороны, ядро $N_1 = V_2 \cap E$ этого гомоморфизма является подмодулем в V_2; при этом указанный подмодуль не содержит v_2, поскольку (см. предложение 2) любой элемент веса ω модуля E должен быть коллинеарен вектору v. Итак, $N_1 \neq V_2$, и, следовательно, в силу неприводимости последнего модуля $N_1 = 0$, т. е. отображение f_1 — изоморфизм. Доказав аналогичным образом изоморфизм модулей V_2 и E, мы получаем искомый изоморфизм первоначальных модулей V_1 и V_2.

Замечание. Можно привести пример неприводимого $\mathfrak{g}$-модуля, не обладающего старшим весом (иными словами, не имеющего примитивного элемента); такой модуль обязательно имеет бесконечную размерность (см. § 4).

Теорема 2. *Для всякой формы $\omega \in \mathfrak{h}^*$ существует неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль, старший вес которого равен ω.*

(В теореме 1 доказано, что такой модуль единствен с точностью до изоморфизма.)

Доказательство. (i) Построим вначале $\mathfrak{g}$-модуль V_ω, содержащий примитивный элемент v веса ω и порожденный этим элементом.

Обозначим через L_ω одномерный $\mathfrak{b}$-модуль (с базисным вектором v), такой, что

$$Hv = \omega(H)\, v \qquad \text{при } H \in \mathfrak{h}$$

и

$$Xv = 0 \qquad \text{при } X \in \mathfrak{n}_+.$$

Пространство L_ω можно рассматривать как модуль над соответствующей универсальной обертывающей алгеброй $U\mathfrak{b}$. Взяв тензорное произведение

$$V_\omega = U\mathfrak{g} \otimes_{U\mathfrak{b}} L_\omega,$$

мы получим некоторый $U\mathfrak{g}$-модуль. Очевидно, что этот модуль порожден элементом $1 \otimes v$ (который мы для краткости обозначим через v). Легко видеть, что элемент v не равен нулю, так как по следствию теоремы Биркгофа — Витта (см. ч. 1, гл. III, § 4) алгебра $U\mathfrak{g}$ является свободным $U\mathfrak{b}$-модулем, причем в качестве одного из элементов свободного базиса можно взять единицу. Из приведенных выше формул видно также, что v — примитивный элемент модуля V_ω веса ω.

(Можно было бы показать, что модуль V_ω обладает базисом, состоящим из элементов вида $Y_{\beta_1}^{m_1} \ldots Y_{\beta_k}^{m_k} v$, однако для нас это несущественно.)

(ii) Положим

$$V_\omega^- = \sum_{\pi \neq \omega} (V_\omega)^\pi,$$

где V_ω — построенный выше $\mathfrak{g}$-модуль. Если V' — некоторый подмодуль модуля V_ω, отличный от всего модуля V_ω, то $V' \subset V_\omega^-$. Действительно, во-первых, $V' = \sum V'^\pi$, поскольку пространство V' инвариантно относительно $\mathfrak{h}$; во-вторых, $V'^\omega = 0$, так как в противном случае мы имели бы $v \in V'^\omega$ и $V' = V_\omega$. Итак, $V' = \sum_{\pi \neq \omega} V'^\pi$, т. е. $V' \subset V_\omega^-$. Таким образом, $\mathfrak{g}$-подмодуль $N_\omega \subset V_\omega$, порожденный всеми подмодулями, отличными от V_ω, содержится в V_ω^- и тем более не совпадает с V_ω. Фактормодуль $E_\omega = V_\omega / N_\omega$ является, очевидно, искомым неприводимым $\mathfrak{g}$-модулем.

Замечания. 1. Для заданной формы ω мы можем встретиться с двумя возможностями: $N_\omega = (0)$ и $N_\omega \neq (0)$; обе они реализуются в случае алгебры $sl(2)$.

2. Теоремы 1 и 2 дают в совокупности биективное соответствие между элементами $\omega \in \mathfrak{h}^*$ и классами

неприводимых $\mathfrak{g}$-модулей, имеющих в качестве старшего веса форму ω.

§ 4. Модули конечной размерности

Предложение 3. *Пусть V — конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль. Тогда*

(а) $V = \sum V^{\pi}$;

(б) *числа вида $\pi(H_\alpha)$, где π — вес модуля V и $\alpha \in R$, являются целыми;*

(в) *модуль V содержит примитивный элемент (если, конечно, $V \neq 0$);*

(г) *если модуль V порождается примитивным элементом, то он неприводим.*

Доказательство. (а) По теореме 3 гл. III каждый элемент алгебры $\mathfrak{h}$ полупрост; полупрост также соответствующий ему эндоморфизм пространства V (следствие 1.6.5.4). Поскольку алгебра $\mathfrak{h}$ коммутативна, все соответствующие эндоморфизмы диагонализуются в одном общем базисе.

(в) Теорема Ли (см. ч. 1, гл. V, § 4), примененная к разрешимой алгебре Бореля $\mathfrak{b}$, дает существование примитивного элемента.

(г) Комбинируя неразложимость модуля, порожденного примитивным элементом (предложение 2), и его полную приводимость (см. ч. 1, гл. VI, § 3), заключаем, что такой модуль неприводим.

(б) Наконец, если $\alpha \in R_+$, то пространство V можно рассматривать как модуль над алгеброй Ли $\mathfrak{s}_\alpha$, порожденной тремя элементами X_α, Y_α, H_α (см. гл. VI). Применяя теорему 4 гл. IV, мы видим, что собственные значения оператора, соответствующего элементу H_α, лежат в $\mathbf{Z}$. Остается заметить, что эти собственные значения суть не что иное, как числа $\pi(H_\alpha)$.

Следствие. *Всякий конечномерный неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль имеет старший вес.*

Это непосредственно вытекает из утверждения (в) предыдущей теоремы.

С помощью теорем 1 и 2 мы в состоянии теперь дать описание тех форм $\omega \in \mathfrak{h}^*$, для которых соответствующий неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль имеет конечную размерность.

Теорема 3. *Пусть $\omega \in \mathfrak{h}^*$ и E_ω — неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль, старший вес которого равен ω. Для того чтобы модуль E_ω имел конечную размерность, необходимо и достаточно, чтобы*

*) *$\omega(H_\alpha)$ были целыми неотрицательными числами для всех корней $\alpha \in R^+$.*

(Достаточно, впрочем, чтобы форма ω принимала целые неотрицательные значения на элементах базиса H_i.)

Доказательство. Необходимость. Пусть v — примитивный элемент $\mathfrak{g}$-модуля E_ω. Очевидно, этот элемент останется примитивным, если рассматривать E_ω как $\mathfrak{s}_\alpha$-модуль (где $\mathfrak{s}_\alpha$ — подалгебра, порожденная элементами X_α, Y_α, H_α). Применяя следствие 2 теоремы 1 гл. IV, мы заключаем, что $\omega(H_\alpha)$ — целое неотрицательное число.

Достаточность. Допустим, что свойство (*) выполнено. Пусть v — примитивный элемент модуля E_ω. Положим

$$m_i = \omega(H_i), \quad v_i = Y_i^{m_i+1} v, \text{ где } 1 \leqslant i < \dim \mathfrak{h}.$$

Если $i \neq j$, то элементы X_j и Y_i коммутируют, поэтому

$$X_j v_i = Y_i^{m_i+1} X_j v = 0.$$

Рассматривая E_ω как $\mathfrak{s}_i$-модуль (где подалгебра $\mathfrak{s}_i$ порождается элементами X_i, Y_i, H_i), получаем в силу теоремы 3.11, (iii), гл. IV

$$X_i v_i = 0.$$

Если бы $v_i \neq 0$, это означало бы, что v_i — примитивный элемент веса $\omega - (m_i + 1)\alpha$, в противоречие с теоремой 1, (а). Итак, $v_i = 0$. Согласно теореме 1 гл. IV, векторное подпространство F_i, порожденное векторами $Y_i^p v$, $0 \leqslant p \leqslant m_i$, является *$\mathfrak{s}_i$-модулем конечной размерности.*

Обозначим через T_i множество всех $\mathfrak{s}_i$-подмодулей модуля E_ω конечной размерности и через E'_i — их сумму. Очевидно, если $F \in T_i$, то и $\mathfrak{g} \cdot F \in T_i$. Отсюда вытекает, что E'_i является инвариантным (относительно $\mathfrak{g}$) подпространством модуля E_ω. Ввиду неприводимости последнего $E'_i = E_\omega$. Итак, мы доказали, что модуль E_ω есть сумма *$\mathfrak{s}_i$-модулей конечной размерности.*

Пусть P_ω — множество всех весов модуля E_ω. Покажем, что это множество *инвариантно относительно отражения* s_i, соответствующего корню α_i. В самом деле, пусть $\pi \in P_\omega$ и y — ненулевой элемент пространства E_ω^π. Как мы знаем, $p_i = \pi(H_i)$ — целое число (см. теорему 1, (б)). Положим

$$x = Y_i^{p_i} y, \text{ если } p_i \geqslant 0, \text{ и } x = X_i^{-p_i} y, \text{ если } p_i \leqslant 0.$$

Применяя теорему 4 гл. IV к конечномерному $\mathfrak{s}_i$-модулю, содержащему элемент y, видим, что $x \neq 0$. Вес элемента x равен

$$\pi - p_i\alpha_i = \pi - \pi(H_i)\alpha_i = s_i(\pi).$$

Таким образом, $s_i(\pi)$ — вес модуля E_ω, что и доказывает инвариантность множества P_ω.

Докажем теперь *конечность* этого множества. Пусть $\pi \in P_\omega$. Тогда (теорема 1)

$$\pi = \omega - \sum p_i\alpha_i, \text{ где } p_i \in \mathbf{N}. \tag{1}$$

Достаточно, разумеется, доказать ограниченность коэффициентов p_i. Рассмотрим множество

$$-S = \{-\alpha_1, \ldots, -\alpha_n\}.$$

Оно, как и множество S, является базисом системы R. Найдется, следовательно, автоморфизм $w \in W$, такой, что $w(S) = -S$ (см. гл. V, § 10). Но, как известно, w есть произведение элементов вида s_i; поэтому в силу доказанного выше $w(\pi) \in P_\omega$ и

$$w(\pi) = \omega - \sum q_i\alpha_i, \qquad q_i \geqslant 0.$$

Применяя w^{-1} к этой формуле, находим

$$\pi = w^{-1}(\omega) + \sum r_i\alpha_i, \qquad r_i \geqslant 0. \tag{2}$$

Пусть $\omega - w^{-1}(\omega) = \sum c_i \alpha_i$. Ясно, что коэффициенты c_i зависят только от выбора базиса S (при фиксированной форме ω). Но из равенств (1) и (2) видно, что $c_i = p_i + r_i$. Отсюда следует, что $p_i \leqslant c_i$, т. е. числа p_i ограничены.

Итак, модуль E_ω имеет *конечное число* весов. Поскольку каждый из них имеет конечную кратность (см. теорему 1) и поскольку E_ω есть прямая сумма соответствующих собственных подпространств, рассматриваемый модуль E_ω имеет конечную размерность. Теорема доказана.

Замечания. 1. В ходе доказательства мы установили, что множество P_ω весов модуля E_ω *инвариантно относительно группы Вейля* W. Фактически веса π и $w(\pi)$ ($\pi \in P_\omega$, $w \in W$) *имеют одинаковую кратность*. Действительно, достаточно рассмотреть случай $w = s_i$, а в этом случае, как нетрудно проверить, автоморфизм

$$\theta = e^{X_i} e^{-Y_i} e^{X_i}$$

преобразует E_ω^π в $E_\omega^{s_i(\pi)}$ (см. гл. IV, § 5, замечание 1).

2. Рассмотрим базис $\{\omega_i\}$ пространства $\mathfrak{h}^*$, двойственный к базису $\{H_i\}$:

$$\omega_i(H_i) = 1, \quad \omega_i(H_j) = 0 \quad (i \neq j).$$

Веса ω_i называются *фундаментальными весами* системы корней R (относительно выбранного базиса S). Условие (*) теоремы 3 означает, что рассматриваемая форма ω представима в виде *линейной комбинации элементов* ω_i *с целыми неотрицательными коэффициентами*.

Неприводимые модули, соответствующие фундаментальным весам, называются *фундаментальными модулями* (*или фундаментальными представлениями*) алгебры $\mathfrak{g}$.

§ 5. Приложение к группе Вейля

Предложение 4. *На множестве всех базисов системы корней R группа Вейля действует транзитивно и „без неподвижных точек“.*

Доказательство. Свойство транзитивности было доказано выше в гл. V, § 10. Нам остается, следовательно, показать, что тогда и только тогда $w(S) = S$, где $w \in W$, когда $w = 1$.

Пусть ω — произвольный фундаментальный вес (относительно базиса S), и пусть E_ω — соответствующий ему конечномерный неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль. Как мы уже знаем (см. замечание 1), форма $w^{-1}(\omega)$ тоже является весом модуля E_ω. Поэтому

$$w^{-1}(\omega) = \omega - \sum p_i \alpha_i, \quad p_i \in \mathbf{N}.$$

Отсюда, используя условие $w(S) = S$, находим

$$\omega = w(\omega) - \sum p_i' \alpha_i, \quad p_i' \in \mathbf{N},$$

или

$$w(\omega) = \omega + \sum p_i' \alpha_i, \quad p_i' \in \mathbf{N}.$$

Поскольку $w(\omega)$ — вес модуля E_ω, постольку в силу теоремы 1, (б), все коэффициенты $p_i' = 0$, т. е. $w(\omega) = \omega$. Вспоминая, что фундаментальные корни образуют базис пространства $\mathfrak{h}^*$, получаем $w = 1$.

§ 6. Пример: $sl(n+1)$

Пусть $\mathfrak{g} = sl(n+1)$ — алгебра квадратных матриц порядка $n+1$ с нулевым следом. В качестве подалгебры $\mathfrak{h}$ возьмем алгебру, состоящую из диагональных матриц

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ & & & & \lambda_{n+1} \end{pmatrix}$$

(сокращенно $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1})$), таких, что $\sum \lambda_i = 0$. Корнями этой алгебры служат линейные формы вида $\alpha_{i,j}$, $i \neq j$, такие, что

$$\alpha_{i,j}(H) = \lambda_i - \lambda_j$$

где $H=(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1})$. В качестве базиса системы корней можно взять формы $\alpha_i=\alpha_{i,\, i+1}$, $1 \leqslant i \leqslant n$; соответствующий элемент $H_i \in \mathfrak{h}$ есть диагональная матрица $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1})$, у которой $\lambda_i=1$, $\lambda_{i+1}=-1$ и $\lambda_j=0$ при $j \neq i,\ i+1$.

Фундаментальные веса ω_i задаются равенствами

$$\omega_i(H)=\lambda_1+\ \ldots\ +\lambda_i,$$

где $H=(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1})$.

Фундаментальный вес ω_1 является старшим весом стандартного представления алгебры $sl(n+1)$ в векторном пространстве $E=\mathbf{C}^{n+1}$. Более общо, фундаментальный вес ω_i есть старший вес представления $sl(n+1)$ в пространстве $\bigwedge^i E$ [1]).

В действительности любое неприводимое конечномерное представление алгебры $sl(n+1)$ можно получить, разлагая *тензорные степени* пространства E (см. Г. Вейль [2*]).

§ 7. Характеры

Пусть P — аддитивная подгруппа пространства $\mathfrak{h}^*$, образованная всеми формами π, такими, что $\pi(H_\alpha) \in \mathbf{Z}$ для любого корня $\alpha \in R$ (или, что то же самое, для любого простого корня $\alpha \in S$). Группа P является свободной абелевой группой, имеющей в качестве базиса систему фундаментальных весов $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$.

Обозначим через $\mathbf{A}$ *групповое кольцо* $\mathbf{Z}[P]$. Иными словами, $\mathbf{A}$ есть $\mathbf{Z}$-алгебра со свободным базисом $(e^\pi)_{\pi \in P}$, таким, что $e^\pi \cdot e^{\pi'}=e^{\pi+\pi'}$.

Определение 1. Пусть V — некоторый $\mathfrak{g}$-модуль конечной размерности и π — его вес. Обозначим через m_π кратность $\dim V^\pi$ этого веса.

Элемент

$$\mathrm{ch}(V)=\sum m_\pi e^\pi$$

алгебры $\mathbf{A}$ называется *характером* модуля V.

---

[1]) См. предложение 1.7.4.6 — *Прим. перев.*