

(Это определение корректно, поскольку ненулевые члены в указанной сумме соответствуют весам модуля V , а их, согласно предложению 3, конечное число.)

Предложение 5. (а) *Характер $\text{ch}(V)$ инвариантен относительно группы Вейля W .*

(б) *Имеют место соотношения*

$$\begin{aligned}\text{ch}(V \oplus V') &= \text{ch}(V) + \text{ch}(V'), \\ \text{ch}(V \otimes V') &= \text{ch}(V) \cdot \text{ch}(V').\end{aligned}$$

(в) *Два q -модуля V и V' конечной размерности изоморфны тогда и только тогда, когда $\text{ch}(V) = \text{ch}(V')$.*

Доказательство. Утверждение (а) выражает по существу тот факт, что два сопряженных (относительно группы Вейля) веса имеют одинаковую кратность (см. замечание 4.1).

Формулы пункта (б) очевидны.

Докажем (в). Нам надо показать, что из равенства $\text{ch}(V) = \text{ch}(V')$ следует изоморфизм модулей V и V' . Доказательство будем вести индукцией по размерности пространства V . Если $\dim V = 0$ (т. е. $V = 0$), то $\text{ch}(V) = 0$, откуда $\text{ch}(V') = 0$ и $V' = 0$. Пусть теперь $V \neq 0$. Обозначим через P_V множество всех весов модуля V . Поскольку $\text{ch}(V) = \text{ch}(V')$, множество всех весов модуля V' совпадает с P_V . Очевидно, $P_V \neq \emptyset$. Так как P_V конечно, существует такой элемент $\omega \in P_V$, что $\omega + \alpha_i \notin P_V$ для любого i . Выберем в пространстве V^ω произвольный ненулевой элемент v . Ясно, что этот элемент примитивен. В силу предложения 3 подмодуль $V_1 \subset V$, порожденный вектором v , неприводим и имеет старший вес ω . На основании теоремы Вейля о полной приводимости найдется дополнительный к V_1 подмодуль V_2 , т. е. $V = V_1 \oplus V_2$.

По аналогичным соображениям $V' = V'_1 \oplus V'_2$, где V'_1 — неприводимый q -модуль со старшим весом ω . Но поскольку модули V_1 и V'_1 имеют одинаковые старшие веса и неприводимы, они по теореме 1 изоморфны и, следовательно, $\text{ch}(V_1) = \text{ch}(V'_1)$. Из формул (б) и последнего равенства вытекает, что $\text{ch}(V_2) =$

$= \text{ch}(V'_2)$. Применяя предположение индукции, заключаем, что модули V_2 и V'_2 (а потому и первоначальные модули V и V') изоморфны.

Пусть \mathbf{A}^W — подалгебра алгебры $\mathbf{A} = \mathbf{Z}[P]$, состоящая из всех элементов, инвариантных относительно группы Вейля. В силу (а) каждый характер лежит в \mathbf{A}^W . Можно показать, что, обратно, любой элемент этой алгебры есть разность двух характеров. Указанное свойство вытекает из следующего более точного результата, который мы приведем без доказательства.

Предложение 6. Пусть $T_i = \text{ch}(E_{\omega_i})$ — характер i -го фундаментального модуля алгебры \mathfrak{g} (см. замечание 4.2). Элементы T_i , $1 \leq i \leq n$, алгебраически независимы и порождают алгебру \mathbf{A}^W .

Таким образом, алгебру \mathbf{A}^W можно отождествить с алгеброй многочленов $\mathbf{Z}[T_1, \dots, T_n]$.

Следствие. Операция ch индуцирует изоморфизм „группы Гротендика“ конечномерных \mathfrak{g} -модулей на алгебру \mathbf{A}^W .

Это вытекает из предложений 5 и 6.

§ 8. Формула Вейля

Эта формула позволяет вычислять характер не-приводимого \mathfrak{g} -модуля как функцию от его старшего веса. Введем предварительно несколько обозначений.

(i) Символом $\varepsilon(w)$ будем обозначать определитель автоморфизма $w \in W$ пространства \mathfrak{h}^* . Очевидно, $\varepsilon(w) = 1$, если w представляется в виде произведения четного числа отражений s_α , и $\varepsilon(w) = -1$ в противном случае.

(ii) Положим $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R_+} \alpha$. Можно показать, что $\rho(H_i) = 1$ для всех i , так что $\rho \in P$.

(iii) Положим

$$D = \prod_{\alpha \in R_+} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2})$$

(произведение берется в алгебре $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{2}P\right]\right)$. Фактически $D \in \mathbf{Z}[P]$, так как имеет место (не доказываемое здесь) равенство

$$D = \sum_{w \in W} e(w) e^{w(\rho)}.$$

Теорема 4. Пусть E – неприводимый \mathfrak{g} -модуль конечной размерности, и пусть ω – его старший вес. Тогда

$$\mathrm{ch}(E) = \frac{\sum_{w \in W} e(w) e^{w(\omega+\rho)}}{D}.$$

В первоначальном доказательстве этой теоремы (Вейль, 1922 г.) использовалась теория компактных групп Ли (см. Семинар „Софус Ли“ [1], гл. 16).

Чисто алгебраическое (но менее естественное) доказательство было получено в 1954 г. Фрейденталем. Оно воспроизведено в книгах Джекобсон [1] и Семинар „Софус Ли“ [1], гл. 15.

Следствие 1. Размерность модуля E дается формулой

$$\dim E = \prod_{\alpha \in R_+} \frac{\langle \omega + \rho, H_\alpha \rangle}{\langle \rho, H_\alpha \rangle} = \prod_{\alpha \in R_+} \frac{(\omega + \rho, \alpha)}{(\rho, \alpha)}.$$

Этот результат легко получается из формулы Вейля подсчетом суммы коэффициентов элемента $\mathrm{ch}(E)$ (см. Семинар „Софус Ли“ [1]).

Следствие 2. Пусть V – конечномерный \mathfrak{g} -модуль, и пусть $n(V, \omega)$ – кратность неприводимого \mathfrak{g} -модуля E (со старшим весом ω), входящего в разложение (на неприводимые подмодули) модуля V . Тогда коэффициент при $e^{\omega+\rho}$ в произведении $D \cdot \mathrm{ch}(V)$ равен $n(V, \omega)$.

Этот результат также непосредственно вытекает из основной теоремы.

Пример. Для алгебры $\mathfrak{g} = sl(2)$ существует всего один положительный корень α , равный 2ρ . Группа P

состоит из элементов вида $n\rho$, где $n \in \mathbf{Z}$, и старший вес $\omega = m\rho$, где $m \geq 0$. Формула Вейля принимает в этом случае следующий вид:

$$\operatorname{ch}(E) = \frac{e^{(m+1)\rho} - e^{-(m+1)\rho}}{e^\rho - e^{-\rho}} = e^{m\rho} + e^{(m-2)\rho} + \dots + e^{-m\rho},$$

что вполне согласуется с результатами гл. IV.

Глава VIII

КОМПЛЕКСНЫЕ ГРУППЫ И КОМПАКТНЫЕ ГРУППЫ

Настоящая глава совсем не содержит доказательств¹⁾.

Все рассматриваемые группы Ли предполагаются (за исключением § 7) комплексными.

§ 1. Подгруппы Картана

Всюду в дальнейшем группа G — связная группа Ли, алгебра Ли \mathfrak{g} которой полупроста. Такие группы Ли называются комплексными полупростыми.

Пусть \mathfrak{h} — подалгебра Картана алгебры \mathfrak{g} и H — соответствующая ей аналитическая подгруппа. Подгруппы, сопряженные подгруппе H , называются подгруппами Картана.

Теорема 1. (а) Подгруппа H является замкнутым подмногообразием в группе G .

(б) Группа H является „мультиликативным тором“; иными словами, группа H изоморфна прямому произведению групп \mathbf{C}^* .

Уточним строение группы \mathbf{C}^* .

Пусть R — система корней алгебры \mathfrak{g} относительно подалгебры \mathfrak{h} ; $R^*(\subset \mathfrak{h})$ — двойственная к R система; Γ — аддитивная подгруппа алгебры \mathfrak{h} , порожденная элементами $H_\alpha \in R^*$, и Γ_1 — аддитивная подгруппа алгебры \mathfrak{h} , образованная элементами $x \in \mathfrak{h}$, такими, что $\alpha(x) \in \mathbf{Z}$ для всех $\alpha \in R$. Имеем

$$\Gamma \subset \Gamma_1 \subset \mathfrak{h}.$$

¹⁾ Доказательства следующих ниже теорем в случае компактных групп см. в работе Дынкина и Онищика [1]. Случай комплексных групп сводится к случаю компактных с помощью компактных вещественных форм (см. § 7). — Прим. перев.

Введем отображение

$$e: \mathfrak{h} \rightarrow H,$$

задаваемое правилом $x \mapsto \exp(2\pi i x)$. Оно, очевидно, является гомоморфизмом, поскольку алгебра \mathfrak{h} коммутативна.

Теорема 2. (а) Гомоморфизм $e: \mathfrak{h} \rightarrow H$ сюръективен и для его ядра $\Gamma(G)$ имеют место включения

$$\Gamma \subset \Gamma(G) \subset \Gamma_1.$$

(б) Отображение e индуцирует изоморфизм факторгруппы $\Gamma_1/\Gamma(G)$ на центр группы G .

(в) Канонический гомоморфизм $\pi_1(H) \rightarrow \pi_1(G)$ сюръективен и индуцирует (если отождествить $\pi_1(H)$ и $\Gamma(G)$ посредством e) изоморфизм группы $\Gamma(G)/\Gamma$ на $\pi_1(G)$.

Утверждение (а) допускает обращение.

Теорема 3. Для всякой подгруппы $M \subset \mathfrak{h}$, такой, что $\Gamma \subset M \subset \Gamma_1$, существует полупростая комплексная группа G , алгебра Ли которой равна \mathfrak{g} и для которой $\Gamma(G) = M$. Указанная группа G определяется (с точностью до изоморфизма) единственным образом.

В частности, группа G имеет тривиальный центр тогда и только тогда, когда $\Gamma(G) = \Gamma_1$; группа G односвязна ($\pi_1(G) = \{1\}$) тогда и только тогда, когда $\Gamma(G) = \Gamma$.

Поскольку группа Γ_1/Γ конечна, имеется лишь *конечное число* (с точностью до изоморфизма) групп Ли с заданной полупростой комплексной алгеброй Ли; все они реализуются как накрытие группы Ли с тривиальным центром.

Примеры. 1. Если $\mathfrak{g} = sl(2)$, то имеется один положительный корень α , и группы Γ и Γ_1 имеют вид ZH_α и $\frac{1}{2}ZH_\alpha$ соответственно. Таким образом, существуют две группы с алгеброй Ли $sl(2)$: односвязная группа $SL(2)$ и группа с тривиальным центром $PGL(2) = SL(2)/\{\pm 1\}$.

2. Укажем строение факторгрупп Γ_1/Γ для различных типов простых алгебр Ли:

тип A_n , $n > 1$	$\Gamma_1/\Gamma = \mathbf{Z}/(n+1)\mathbf{Z}$
тип D_n , n четно, $n \geq 4$	$\Gamma_1/\Gamma = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
тип D_n , n нечетно, $n \geq 5$	$\Gamma_1/\Gamma = \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$
тип E_6	$\Gamma_1/\Gamma = \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$
типы B_n , C_n , $n > 2$, E_7	$\Gamma_1/\Gamma = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
типы G_2 , F_4 , F_8	$\Gamma_1/\Gamma = 0$

§ 2. Характеры

Характером подалгебры Картана H называется всякий гомоморфизм $\chi: H \rightarrow \mathbf{C}^*$. Группа $X(H)$ характеров группы H является свободной абелевой группой ранга $\dim H$. Известно, что соответствующей группой характеров группы $X(H)$ служит группа H , т. е. имеет место естественный изоморфизм

$$H \simeq \text{Hom}(X(H), \mathbf{C}^*).$$

Пусть $\chi \in X(H)$. Касательное к χ отображение есть гомоморфизм $\mathfrak{h} \rightarrow \mathbf{C}$, т. е. элемент пространства \mathfrak{h}^* . Таким образом, мы получаем инъекцию группы $X(H)$ в пространство \mathfrak{h}^* , которая позволяет отождествить $X(H)$ с некоторым подмножеством в \mathfrak{h}^* .

Теорема 4. (а) Пусть P_1 (соответственно P) — аддитивная подгруппа пространства \mathfrak{h}^* , порожденная всеми корнями (соответственно старшими весами). Тогда

$$P_1 \subset X(H) \subset P.$$

(б) Обратно, всякая подгруппа $M^* \subset \mathfrak{h}^*$, такая, что $P_1 \subset M^* \subset P$, имеет вид $X(H)$, где H — подгруппа Картана некоторой группы G ; эта группа G определяется единственным образом с точностью до изоморфизма.

Это — простая переформулировка теоремы 3, так как P , P_1 и $X(H)$ двойственны группам Γ , Γ_1 и $\Gamma(G)$.

§ 3. Связь с представлениями

Пусть $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(E)$ — линейное конечномерное представление алгебры \mathfrak{g} .

Теорема 5. Для того чтобы представление ρ соответствовало некоторому линейному представлению

$$\tilde{\rho}: G \rightarrow GL(E)$$

группы G , необходимо и достаточно, чтобы веса пространства E лежали в подгруппе $X(H)$, определенной в § 2.

Замечания. 1. Требование теоремы 5 заведомо выполняется, если группа G односвязна.

2. Если E — неприводимый \mathfrak{g} -модуль, то в теореме 5 достаточно потребовать, чтобы старший вес принадлежал $X(E)$. Действительно, как мы знаем (гл. VII), всякий вес модуля E имеет вид $\omega - \gamma$, где $\gamma \in P_1$.

ПРИМЕР. Возьмем в качестве G группу, ассоциированную с алгеброй Ли $sl(2)$, т. е. группу (с тривиальным центром) $PGL(2) = SL(2)/\{\pm 1\}$. На основании вышесказанного неприводимые представления группы G соответствуют таким неприводимым представлениям алгебры $sl(2)$, у которых старший вес есть *целое кратное* положительного корня α . Это представления W_{2n} из гл. IV.

§ 4. Подгруппы Бореля

Пусть S — базис системы R , $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ — соответствующее разложение алгебры \mathfrak{g} (см. гл. IV, § 3) и $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$.

Теорема 6. (а) Экспоненциальное отображение определяет изоморфизм пространства \mathfrak{n}_+ на некоторую замкнутую подгруппу Ли $U \subset G$.

(б) Аналитическая подгруппа B , соответствующая подалгебре \mathfrak{b} , замкнута; группа B есть полуправильное произведение своих подгрупп H и U .

(в) Любая разрешимая связная аналитическая подгруппа группы G сопряжена некоторой подгруппе группы B .

Подгруппа B и сопряженные с ней подгруппы называются *подгруппами Бореля*.

Теорема 7. Факторпространство G/B есть проективное алгебраическое (и, следовательно, компактное) многообразие.

Кроме того, существует клеточное разбиение однородного пространства G/B , так называемое *разбиение Брюя*, согласованное с действием группы B на G/B .

Более точно, пусть W — группа Вейля, соответствующая алгебре \mathfrak{g} и ее подалгебре Картана \mathfrak{h} . Для каждого автоморфизма $w \in W$ подыщем элемент $n_w \in G$, такой, что подалгебра \mathfrak{h} инвариантна относительно внутреннего автоморфизма $\text{Ad } n_w$ и что его ограничение на \mathfrak{h} равно w (см. гл. VI, § 2); через \bar{w} обозначим класс элемента n_w в G/B .

Теорема 8. Факторпространство G/B есть несвязное объединение орбит $B\bar{w}B$ ($w \in W$).

Следствие. Отображение $w \rightarrow Bn_wB$ есть биекция B на множество $B \setminus (G/B)$ двусторонних смежных классов группы G по модулю B .

Можно показать также, что орбита $B\bar{w}$ изоморфна аффинному пространству $\mathbb{C}^{n(w)}$.

§ 5. Построение неприводимых представлений при помощи подгрупп Бореля

Сохраним все обозначения предыдущего параграфа. Пусть ω — старший вес, т. е. такой элемент группы P , что $\omega(H_a)$ — целое неотрицательное число для всех $a \in S$. Допустим, что ω лежит в подгруппе $X(H)$ группы P . По теореме 5 (см. § 3) существует неприводимый G -модуль E_ω со старшим весом ω . Дадим его явное описание.

По условию ω можно рассматривать как гомо-

морфизм $H \rightarrow \mathbf{C}^*$. Продолжим этот гомоморфизм на B , полагая

$$\omega(u) = 1 \text{ для всех } u \in U.$$

Обозначим через V_ω множество голоморфных на G функций, удовлетворяющих тождеству

$$f(yb) = \omega(b)f(y), \text{ где } y \in G, b \in B.$$

Наделим V_ω структурой G -модуля с помощью формулы

$$(gf)(y) = f(g^{-1}y), \text{ где } y, g \in G.$$

Теорема 9. Модуль V_ω неприводим и имеет конечную размерность. Двойственный к нему модуль изоморфен E_ω .

Примитивный элемент $e \in E_\omega$ веса ω определяет G -отображение

$$i: (E_\omega)^* \rightarrow V_\omega,$$

где

$$i(\lambda)(y) = \langle \lambda, y \cdot e \rangle.$$

Можно доказать, что это отображение является изоморфизмом.

§ 6. Связь с алгебраическими группами¹⁾

По-прежнему G — комплексная полупростая группа Ли.

Теорема 10. (а) На G существует (единственная) структура алгебраической группы, согласованная с заданной аналитической структурой.

(б) Каждый аналитический гомоморфизм группы G в алгебраическую комплексную группу G' является алгебраическим.

Таким образом, во всех утверждениях, относящихся к полупростым комплексным группам Ли, эпитет „аналитический“ можно всюду заменять на „алгебраический“.

¹⁾ См. Шевалле [3]. — Прим. перев.

ЗАМЕЧАНИЕ. Задавать алгебраическую структуру на группе можно несколькими различными способами. Наиболее „явный“ способ состоит в задании точного представления $\tilde{\rho}$: $G \rightarrow GL(E)$ и проверке того, что образ $\tilde{\rho}(G)$ является алгебраической подгруппой в $GL(E)$. После этого алгебраическая структура переносится с группы $\tilde{\rho}(G)$ на G и доказывается, что она не зависит от выбора $\tilde{\rho}$.

Можно также непосредственно указать соответствующую *аффинную алгебру* A_G (координатное кольцо) алгебраического многообразия G следующим образом: $f \in A_G \Leftrightarrow f$ — голоморфная на G функция, сдвиги которой (на элементы из группы G) порождают конечномерное векторное пространство.

§ 7. Связь с компактными группами

(В этом параграфе будут одновременно рассматриваться комплексные и вещественные группы Ли.)

Напомним сначала следующий результат.

Теорема 11. Пусть U — вещественная полуправостая связная группа Ли с алгеброй Ли u . Группа U компактна тогда и только тогда, когда форма Киллинга алгебры u отрицательно определена.

Сформулируем теперь утверждение, которое лежит в основе „унитарного приема“ Вейля (см. следствие 2 ниже).

Теорема 12. Пусть G — комплексная полупростая группа Ли с алгеброй Ли \mathfrak{g} , и пусть U — максимальная компактная (вещественная) подгруппа группы G с алгеброй Ли u .

(а) Алгебра u есть вещественная форма алгебры \mathfrak{g} , т. е. $\mathfrak{g} = u + iu$.

(б) Экспоненциальное отображение определяет изоморфизм (как вещественных аналитических многообразий) пространства u на замкнутое подмногообразие $N \subset G$.

(в) Отображение $(u, n) \mapsto u \cdot n$ определяет изоморфизм (как вещественных аналитических многообразий) $U \times N$ на G .

(г) Любая компактная подгруппа в G сопряжена некоторой подгруппе в U .

Следствие 1. Группы гомологий (соответственно гомотопий) многообразий G и U одинаковы. В частности, $\pi_1(G) = \pi_1(U)$.

Это вытекает из (б) и (в).

Следствие 2. Если G' — комплексная группа Ли, то отображение ограничения

$$r: \text{Hom}_{\mathbb{C}}(G, G') \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(U, G')$$

биективно.

Это вытекает из (а) и из равенства $\pi_1(G) = \pi_1(K)$.

Следствие 3. Группа Ли G определяется подгруппой U однозначно с точностью до изоморфизма.

Обратно, имеет место

Теорема 13. Пусть U — вещественная связная полупростая компактная группа Ли. Тогда существует комплексная полупростая группа Ли G , содержащая группу U в качестве максимальной компактной подгруппы.

(Такая группа G , как мы видели, определяется однозначно; она называется *комплексификацией* группы U .)

Нетрудно описать аффинную алгебру A_G группы G . Она состоит из всех непрерывных (комплексных) функций f на U , таких, что всевозможные сдвиги функции f (на элементы из U) порождают конечномерное (комплексное) векторное пространство. Алгебра A_G , разумеется, наделяется естественной вещественной структурой, поэтому она определяет некоторую алгебраическую группу L над \mathbb{R} . Вещественные точки этой группы образуют группу U , а комплексные — группу G .

Литература¹⁾

Боревич З. И. и Шафаревич И. Р.

1*. Теория чисел, «Наука», 1964.

Борель (Borel A.)

1. Groupes linéaires algébriques, *Ann. Math.*, **64** (1956), 20—82.

Бурбаки (Bourbaki N.)

1. Groupes et Algèbres de Lie, Paris, Hermann, 1960.

2*. Commutative algebra, Paris, Hermann, 1962.

3*. Алгебра, «Наука», 1966.

4*. Общая топология, Физматгиз, 1958.

5*. Integration, Livre VI, Paris, Hermann.

Вейль А. (Weil A.)

1*. Введение в теорию кэлеровых многообразий, ИЛ, 1961.

Вейль Г. (Weil H.)

1. Selecta, Birkhäuser Verlag, Basel, 1956

2*. Классические группы, их инварианты и представления, ИЛ, 1947.

Витт (Witt E.)

1. Die Unterringe der freien Lieschen Ringe, *Math. Z.*, **64** (1956), № 2, 195—216.

Демазюр и Гротендиц (Demazure M., Grothendieck A.)

1. Schémas en groupes, *Séminaire IHES*, 1963—64.

Джекобсон (Jacobson N.)

1. Алгебры Ли, ИЛ, 1954.

Дынкин Е.Б. и Онищик А. Л.

1. Компактные группы Ли в целом, УМН, **10** (1955), вып. 4, 3—74.

Дьёдонне (Dieudonné J.)

1. Lie groups and Lie hyperalgebras over a field of characteristic p , I—VI; I, *Comment. Math. Helv.*, **28** (1954), 87—118; II, *Am. J. Math.*, **77** (1955), 218—244; III, *Math.*

¹⁾ Звездочкой отмечены работы, добавленные при переводе. — Прим. ред.

Z., 62 (1955), 53—75; *IV, Am. J. Math.*, 77 (1955), 429—452; *V, Bull. Soc. Math. France*, 84 (1956), 207—239; *VI, Am. J. Math.*, 79 (1957), 331—388.

Картан (Cartan E.)

1. *Oeuvres complètes*, Paris, Gauthier-Villars, 1952.

Картер (Carter R.)

1. Simple groupes and simple Lie algebras, *J. London Math. Soc.*, 40 (1965), 193—240.

Костант (Kostant B.)

1. On the conjugacy of real Cartan subalgebras, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 41 (1955), № 11, 967—970.

Лазар (Lazard M.)

1. Sur les groupes de Lie formels à un paramètre, *Bull. Soc. Math. France*, 83 (1955), 251—274.

2. Lois de groupes et analyseurs, *Ann. Ec. Norm. Sup.*, 72 (1955), 299—400.

3*. Groupes analytiques p -adiques, *Publ. Math.*, Paris, 1965, № 26, 389—594.

Манин Ю. И.

1. Теория коммутативных формальных групп над полем конечной характеристики, *УМН*, 18 (1963), вып. 3—91.

Милнор (Milnor J.)

1*. Теория Морса, «Мир», 1965.

Понtryагин Л. С.

1. Непрерывные группы, ГИТТЛ, 1954.

Семинар «Софус Ли».

1. Теория алгебр Ли. Топология групп Ли, ИЛ, 1962.

Серр (Serre J.-P.)

1*. Classification des variétés analytiques p -adiques compactes, *Topology*, 3 (1965), № 4, 409—412.

2*. Когомологии Галуа, «Мир», 1968.

Хелгасон (Helgason S.)

1. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, ИЛ, 1954.

Холл (Hall M., Jr.)

1*. Теория групп, ИЛ, 1962.

Хохшильд (Hochschild G.)

1. The structure of Lie groups, Holden-Day, San Francisco, 1965.

Шевалле (Chevalley C.)

1. Теория групп Ли, ИЛ, т. 1, 1948, т. 2, 3, 1958.

2. Sur certaines groupes simples, *Tôhoku. Math. J.*, 7 (1955), 14—64. (Русский перевод: *Математика 2:1* (1958), 3—53.)

3. Classification des groupes des Lie algébriques, Séminaire Chevalley, v. 1—2 (1956—1958), Ecole Norm. Sup.
4. Algebraic Lie Algebras, *Ann. Math.*, **48** (1947), 91—100.

Эст и Кортхаген (van Est W., Korthagen Th.)

1. Non-enlargible Lie algebras, *Proc. koninkl. Nederl. Acad. Wet.*, Ser. A, **67** (1964), № 1, 15—31.

Якоби (Jacob y R.)

1. Some theorems on the structure of locally compact local groups, *Ann. of Math.*, Ser. 2, **66** (1957), № 1, 36—39.

Указатель обозначений

- k — основное кольцо (или поле)
 \otimes — тензорное произведение
 \wedge — внешнее произведение
 \oplus — прямая сумма
 \varinjlim — индуктивный предел
 \varprojlim — проективный предел
 $M(n, k)$ — кольцо матриц n -го порядка над k
 \mathbb{R} — поле вещественных чисел
 \mathbb{C} — поле комплексных чисел
 \mathbb{Q} — поле рациональных чисел
 \mathbb{Z} — кольцо целых чисел
 \mathbb{N} — множество натуральных чисел
 \mathbb{F}_q — конечное поле из q элементов
 \mathbb{Q}_p — поле p -адических чисел
 \mathbb{Z}_p — кольцо целых p -адических чисел
 $\text{Hom}_k M$ или $L(M_1, M_2)$ — множество k -линейных гомоморфизмов k -модуля M_1 в k -модуль M_2
 $\text{End}_k M$ — множество k -линейных эндоморфизмов k -модуля M
 $rk_k M$ — ранг k -модуля M
 $\text{Tr } \varphi$ — след линейного преобразования φ
 $\det \varphi$ — определитель линейного преобразования φ
 $L(G)$ — алгебра Ли группы Ли G
 $\text{Mor}(X, Y)$ — множество морфизмов аналитического многообразия X в аналитическое многообразие Y

Предметный указатель

- абсолютное значение 113
 - неархимедово 113
 - нетривиальное 113
 - ультраметрическое 113
- алгебра 9
 - алгебра аффинная 361
 - градуированная 26
 - Ли 9
 - абсолютнo простая 96
 - ассоциированная с формальной группой 220
 - группы Ли 221
 - коммутативная 10
 - нильпотентная 56
 - полупростая 76
 - простая 77
 - разрешимая 62
 - свободная 37
 - свободная ассоциативная 38
 - симметрическая 24
 - тензорная 22
 - универсальная обертывающая 22
 - аналитическая функция 120
 - аналитический изоморфизм 137
 - аналитическое действие 206
 - многообразие 132, 133
 - вещественное 133
 - комплексное 133
 - n -мерное 133
 - p -адическое 133
 - отображение 122, 136
 - атлас 132
 - полный 132
 - база 191
 - базис 300
 - Вейля 327
 - биалгебра, ассоциированная с формальной группой 244
 - вес 100, 319, 339
 - старший 104
 - фундаментальный 348
 - вложение 148
 - возвведение в m -ю степень 197
 - главное расслоение 192
 - левое 192
 - градуированная алгебра 26
 - граф Кокстера 309
 - группа алгебраическая 11
 - аналитическая 177
 - стандартная 200
 - Вейля 296
 - диэдральная 297
 - комплексная полупростая 355
 - Ли 177
 - ортогональная 229
 - ортонормальная 11
 - полная линейная 180, 181
 - присоединенная 17
 - разрешимая 65
 - симплектическая 229
 - специальная линейная 226
 - строго локальная 183
 - топологическая локальная 183
 - формальная 195
 - Шевалье 332
 - групповое кольцо 350
 - группы когомологий алгебры Ли 83

- действие 188
 — тривиальное 58
 — диагональное 54
 диагональное отображение 32,
 240
 дифференциал 143
 дифференцирование 10
 значение ростка в точке 139
 инвариантная билейная форма
 54
 индуцированная структура 153
- камера Вейля 307
 каноническая подалгебра 284
 — — Бореля 99
 карта 131
 касательное пространство 140
 — отображение 144
 кокасательное пространство 140
 кольцо нормирования 115
 коммутатор 15
 комплексный тор 92
 координатное кольцо 361
 корень 99, 294
 — двойственный 295
 — обратный 295
 — положительный 99, 303
 — простой 99, 300
 кратность веса 101
 — формы 339
 критерий Картана 73
- лемма Абеля 119
 линейное представление 53
 — — группы 224
 локальная аналитичность 136
 — подгруппа 184
 — функция 138
 локальное кольцо 139
 — подмногообразие 154
 — подобие 145
 локальный гомоморфизм 183
- матрица Картана 307
 метод мажорант Коши 128
- модуль вполне приводимый 79
 — неприводимый 79
 — полупростой 79
 — простой 79
 — фундаментальный 348
 моноид 35
 — свободный 35
 морфизм 136
 — корегулярный 148
 — локально линейный 148
 — максимального ранга 148
 — регулярный 147
 — трансверсальный над 158
 мультиплекативный тор 355
- накрытие 182
 наложение 145
 неассоциативное слово 35
 неприводимое представление 66
 неразложимый элемент 301
 несвязное объединение много-
 образий 138
 нильтемпентный элемент 92
 ниль-пространство 275
 нормализатор 58, 273
 нормирование 114
 — *p*-адическое 115
- однородный многочлен 232
 открытое подмногообразие 135
 отображение Фробениуса 208
 отражение 293
- подалгебра Бореля 325
 — Картана 273
 подгруппа Бореля 359
 — Картана 355
 — Ли 183
 подмногообразие 154
 покрытие 132
 поле вычетов 115
 полицилиндр 118
 — замкнутый 118
 — открытый 118
 полное тензорное произведение
 48
 полупростой элемент 69, 91
 полупрямое произведение 13

- пополнение алгебры Ли 47
 — — Ass_x 45
 порожденность 186
 представление вполне приводимое 79
 — неприводимое 79
 — полупростое 79
 — присоединенное 231
 — простое 79
 примитивный элемент 32, 101
 — — веса ω 340
 принцип единственности 151
 — подъема инвариантов 81
 присоединенное представление 231
 произведение многообразия 138
 производная 125
 — по направлению 143
 — частная 125, 144
 производный ряд 61
 пространство представления 53
 — расслоения 191
- радикал 76
 разбиение Брюа 359
 разложимый элемент 301
 размерность многообразия 133
 ранг алгебры Ли 274
 — системы корней 294
 распределение 238
 — Дирака 240
 — точечное 238, 239
 расслоение 191
 расслоенное произведение 157
 — пространство 191
 регулярный элемент алгебры
 Ли 274
 реплика 73
 решетка 208
 росток аналитической функции 139
 ряд Тейлора 120
- свободная алгебра 36
 — — Ли 37
 — ассоциативная алгебра 38
 свободный монoid 35
 семейство Холла 42
 симметрическая алгебра 24
- система комплексных корней 317
 — координат 144
 — корней 294
 — — дуальная 299
 — — комплексная 317
 — — неприводимая 810
 — — обратная 299
 — — приведенная 296
 — простых корней 300
 слой 191
 собственный вектор алгебры 100
 — элемент 66
 согласованные атласы 132
 — карты 131
 спаривание 142
 — невырожденное 142
 старший вектор 340
 стационарная подгруппа 226
 структура прообраза 153
 структурная константа 232
 сумма многообразий 138
 схема Дынкина 312
 сходимость в открытом полицилиндре 118
 — — полицилиндре 118
 сходящийся ряд 119
- тензорная алгебра 22
 теорема Адо 256
 — Бореля — Морозова 326
 — Г. Вейля 79
 — Годемана 159
 — Колчинса 60
 — Кэмпбелла — Хаусдорфа 49
 — Лазара 197
 — Леви 84
 — Ли 62
 — — третья 256
 — об обратной функции 126, 144
 — Островского 114
 — Пуанкаре — Биркгофа — Витта 27
 — Шевалле 331
 — Энгеля 57
 тождество Якоби 9, 196
 трансверсальные морфизмы 157, 158

- трансверсальные подмногообразия 156, 157
третья теорема Ли 256
- убывающий центральный ряд 19
универсальная обертывающая алгебра 22
унипотентность 60
унитарный прием 79
условие (Im) 152
- фактормногообразие** 159
фильтрация 16
флаг 56
форма Киллинга 56
формальный групповой закон 193
формула Вейля 352, 353
— Кэмпбелла — Хаусдорфа
— — явная 52
- функция Мёбиуса 39
- функциональное представление 348
функциональный вес 348
— модуль 348
- характер модуля 350
— подалгебры Картана 357
- частная производная 125, 144
- шар 133
- элемент Қазимира 80
 \mathfrak{g} -инвариантность 54
 k -алгебра 9
 p -адическое число 115
— — целое 115

О г л а в л е н и е

О т и з д а т е л ь с т� а	5
 ЧАСТЬ I. АЛГЕБРЫ ЛИ	
Глава I. Алгебры Ли. Определения и примеры	9
Глава II. Фильтрованные группы и алгебры Ли	15
§ 1. Тождества с коммутаторами	15
§ 2. Фильтрация на группе	16
§ 3. Дискретные фильтрации группы	18
§ 4. Фильтрации группы $GL(n)$	20
Упражнения	21
Глава III. Универсальная обертывающая алгебра	22
§ 1. Определение и построение универсальной обертывающей алгебры	22
§ 2. Функториальные свойства	23
§ 3. Симметрическая алгебра модуля	24
§ 4. Фильтрация алгебры U_q	25
§ 5. Диагональное отображение	32
Упражнения	34
Глава IV. Свободные алгебры Ли	35
§ 1. Свободные моноиды	35
§ 2. Свободная алгебра на X	36
§ 3. Свободная алгебра Ли над X	37
§ 4. Связь со свободной ассоциативной алгеброй над X	38
§ 5. Семейства Холла	42
§ 6. Свободные группы	44
§ 7. Формула Кэмбелла – Хаусдорфа	47
§ 8. Явная формула	50
Упражнения	52
Глава V. Нильпотентные и разрешимые алгебры Ли	53
§ 1. Дополнительные сведения о \mathfrak{g} -модулях	53
§ 2. Нильпотентные алгебры Ли	55
§ 3. Основные теоремы	57
§ 3*. Теоретико-групповой аналог теоремы Энгеля	60

§ 4. Разрешимые алгебры	61
§ 5. Основная теорема	62
§ 5*. Теоретико-групповой аналог теоремы Ли	65
§ 6. Леммы об эндоморфизмах	69
§ 7. Критерий Картана	73
Упражнения	75
Глава VI. Полупростые алгебры Ли	76
§ 1. Радикал	76
§ 2. Полупростые алгебры Ли	76
§ 3. Полная проводимость	79
§ 4. Теорема Леви	84
§ 5. Полная проводимость (продолжение)	87
§ 6. Связь с компактными группами Ли над полями R и C	92
Упражнения	95
Глава VII. Представления алгебры $sl(n)$	98
§ 1. Обозначения	98
§ 2. Веса и примитивные элементы	100
§ 3. Неприводимые g -модули	192
§ 4. Нахождение старших весов	104
Упражнения	107
ЧАСТЬ II. ГРУППЫ ЛИ	
Глава I. Полные поля	113
Глава II. Аналитические функции	117
Глава III. Аналитические многообразия	131
§ 1. Карты и атласы	131
§ 2. Определение аналитического многообразия	132
§ 3. Топологические свойства многообразий	133
§ 4. Простейшие примеры многообразий	134
§ 5. Морфизмы	136
§ 6. Произведения и сумма	137
§ 7. Ростки аналитических функций	138
§ 8. Касательное и кокасательное пространства	140
§ 9. Теорема об обратной функции	144
§ 10. Регулярные, корегулярные и локально линейные отображения	145
§ 11. Конструирование многообразий. Прообразы	151
§ 12. Конструирование многообразий. Факторного- образия	158
Упражнения	164

Добавление 1. Пример хаусдорфова многообразия над неархimedовым полем k , обладающего точкой, не имеющей фундаментальной системы окрестностей, открытых и замкнутых одновременно	166
Добавление 2. Строение p -адических многообразий	168
Добавление 3. Трансфинитная p -адическая прямая	174
Глава IV. Аналитические группы	177
§ 1. Определение аналитической группы	177
§ 2. Простейшие примеры аналитических групп	180
§ 3. Локальные группы	183
§ 4. Продолжение локальных подгрупп	184
§ 5. Однородные пространства и орбиты	187
§ 6. Формальные группы. Определения и простейшие примеры	193
§ 7. Формальные группы. Формулы	195
§ 8. Формальные группы над кольцом полного нормирования	199
§ 9. Фильтрация в стандартных группах	201
Упражнения	206
Добавление 1. Максимальные компактные подгруппы в $GL(n, k)$	208
Добавление 2. Некоторые леммы о сходимости	210
Добавление 3. Применения § 9. Фильтрация в стандартных группах	212
Глава V. Теория Ли	220
§ 1. Алгебра Ли локальной аналитической группы	220
§ 2. Простейшие примеры и свойства	221
§ 3. Линейные представления	224
§ 4. Сходимость формулы Кэмпбелла—Хаусдорфа	231
§ 5. Точечные распределения	238
§ 6. Биалгебра, ассоциированная с формальной группой	241
§ 7. Сходимость формальных гомоморфизмов	250
§ 8. Третья теорема Ли	255
§ 9. Теоремы Картана	260
Упражнения	264
Добавление. Теорема существования для обыкновенных дифференциальных уравнений	266

ЧАСТЬ III. КОМПЛЕКСНЫЕ ПОЛУПРОСТЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ

<i>Глава III. Подалгебры Картана</i>	273
§ 1. Определение подалгебр Картана	273
§ 2. Регулярные элементы. Ранг	273
§ 3. Подалгебра Картана, ассоциированная с регулярным элементом	275
§ 4. Сопряженность подалгебр Картана	277
§ 5. Случай полупростой алгебры	281
§ 6. Вещественные алгебры Ли	282
<i>Глава IV. Алгебра $sl(2)$ и ее представления</i>	284
§ 1. Алгебра Ли $sl(2)$	284
§ 2. Модули, веса, примитивные элементы	285
§ 3. Строение подмодуля, порожденного примитивным элементом	286
§ 4. Модули W_m	288
§ 5. Строение конечномерных я-модулей	289
§ 6. Топологические свойства группы	290
§ 7. Приложения	292
<i>Глава V. Системы корней</i>	293
§ 1. Отражения	293
§ 2. Определение системы корней	294
§ 3. Первые примеры	295
§ 4. Группа Вейля	296
§ 5. Инвариантные квадратичные формы	297
§ 6. Дуальная система	298
§ 7. Относительное расположение двух корней	299
§ 8. Базисы	300
§ 9. Некоторые свойства базисов	303
§ 10. Связь с группой Вейля	305
§ 11. Матрица Картана	307
§ 12. Графы Кокстера	309
§ 13. Неприводимые системы корней	310
§ 14. Классификация связных графов Кокстера	311
§ 15. Схема Дынкина	312
§ 16. Конструкция неприводимых систем корней	314
§ 17. Комплексные системы корней	316
<i>Глава VI. Строение полупростых алгебр Ли</i>	319
§ 1. Разложение алгебры \mathfrak{g}	319
§ 2. Доказательство теоремы 2	321
§ 3. Подалгебры Бореля	325
§ 4. Базис Вейля	327
§ 5. Теоремы существования и единственности	329
§ 6. Нормализация Шевалле	330
<i>Добавление. Построение полупростых алгебр Ли по образующим и соотношениям</i>	332

<i>Глава VII. Линейные представления полупростых алгебр Ли</i>	339
§ 1. Веса	339
§ 2. Примитивные элементы	340
§ 3. Неприводимые модули, соответствующие старшим весам	342
§ 4. Модули конечной размерности	345
§ 5. Приложение к группе Вейля	348
§ 6. Пример: $sl(n+1)$	349
§ 7. Характеры	350
§ 8. Формула Вейля	352
<i>Глава VIII. Комплексные группы и компактные группы</i>	355
§ 1. Подгруппы Картана	355
§ 2. Характеры	357
§ 3. Связь с представлениями	358
§ 4. Подгруппы Бореля	358
§ 5. Построение неприводимых представлений при помощи подгрупп Бореля	359
§ 6. Связь с алгебраическими группами	360
§ 7. Связь с компактными группами	361
<i>Литература</i>	363
<i>Указатель обозначений</i>	366
<i>Предметный указатель</i>	367

Ж.-П. Сеpp

**АЛГЕБРЫ ЛИ
И
ГРУППЫ ЛИ**

Редактор *В. И. Авербух*

Художник *С. А. Бычков*

Художественный редактор *В. И. Шаповалов*

Технический редактор *Е. С. Потапенкова*

Сдано в производство 10/III 1969 г.

Подписано к печати 9/VI 1969 г.

Бумага № 3 84×108^{1/2}, 5,88 бум. л.

19,74 усл. печ. л. 15,43 уч.-изд. л.

Изд. № 1/4772. Цена 1 р. 06 к. Зак. № 14.