Доказательству теоремы 12.15* предпошлем две леммы.

Лемма 1. *Если функция $f(M)=f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ n раз дифференцируема в точке $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$, то как сама функция $g_n(M)$, определяемая равенством* (12.60), *так и все ее частные производные по любым переменным $x_1, x_2, \ldots, x_m$ до порядка n включительно обращаются в нуль в точке M_0.*

Доказательство. При $n=1$ функция (12.60) принимает вид

$$g_1(M)=f(M)-f(M_0)-(x_1-x_1^0)\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0)-\ldots-(x_m-x_m^0)\frac{\partial f}{\partial x_m}(M_0),$$

и равенства $g_1(M_0)=0$, $\frac{\partial g_1}{\partial x_i}(M_0)=0$ при всех $i=1, 2, \ldots, m$ проверяются элементарно.

Для проведения индукции предположим, что лемма справедлива для некоторого номера $n\geqslant 1$, и докажем, что в таком случае она справедлива и для номера $n+1$.

Пусть функция $f(M)$ $n+1$ раз дифференцируема в точке M_0 и

$$g_{n+1}(M)=$$
$$=f(M)-f(M_0)-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k!}\left[(x_1-x_1^0)\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+(x_m-x_m^0)\frac{\partial}{\partial x_m}\right]^k f(M_0). \tag{12.61}$$

Равенство $g_{n+1}(M)=0$ проверяется элементарно (достаточно учесть, что каждая круглая скобка $(x_i-x_i^0)$ в (12.61) обращается в нуль в точке M_0).

Нам остается доказать, что для любого $i=1, 2, \ldots, m$ сама функция $\frac{\partial g_{n+1}}{\partial x_i}(M)$ и все частные производные этой функции до порядка n включительно обращаются в нуль в точке M_0, а для этого в силу сделанного нами предположения о справедливости леммы для номера n достаточно доказать, что функция $\frac{\partial g_{n+1}}{\partial x_i}(M)$ определяется равенством типа (12.60), а точнее, равенством

$$\frac{\partial g_{n+1}}{\partial x_i}(M)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(M)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0)-$$
$$-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left[(x_1-x_1^0)\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+(x_m-x_m^0)\frac{\partial}{\partial x_m}\right]^k\frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0). \tag{12.62}$$

Так как все переменные x_i $(i=1, 2, \ldots, m)$ равноправны и входят в выражение для $g_{n+1}(M)$ симметрично, то достаточно доказать равенство (12.62) для $i=1$, т. е. доказать равенство

$$\frac{\partial g_{n+1}}{\partial x_1}(M)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(M)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0)-$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left[(x_1-x_1^0)\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+(x_m-x_m^0)\frac{\partial}{\partial x_m}\right]^k\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0). \quad (12.63)$$

Из (12.61) очевидно, что для доказательства (12.63) достаточно убедиться, что для каждого номера $k=1, 2, \ldots, n+1$ при фиксированных $x_2, x_3, \ldots, x_m$

$$\frac{d}{dx_1}\left[(x_1-x_1^0)\frac{\partial}{\partial x_1}+(x_2-x_2^0)\frac{\partial}{\partial x_2}+\ldots+(x_m-x_m^0)\frac{\partial}{\partial x_m}\right]^k f(M_0)=$$

$$=k\left[(x_1-x_1^0)\frac{\partial}{\partial x_1}+(x_2-x_2^0)\frac{\partial}{\partial x_2}+\ldots+(x_m-x_m^0)\frac{\partial}{\partial x_m}\right]^{k-1}\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0). \quad (12.64)$$

Так как при дифференцировании по x_1 переменные $x_2, x_3, \ldots, x_m$ фиксированы, то величину

$$D=(x_2-x_2^0)\frac{\partial}{\partial x_2}+\ldots+(x_m-x_m^0)\frac{\partial}{\partial x_m}$$

при дифференцировании по x_1 можно рассматривать как постоянную. К этому следует добавить, что поскольку символы $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m}$ используются для образования частных производных функции f в фиксированной точке M_0, то при дифференцировании по x_1 указанные символы нужно рассматривать как постоянные величины.

В силу сказанного для доказательства равенства (12.64) достаточно убедиться в справедливости равенства

$$\frac{d}{dx_1}\left[(x_1-x_1^0)\frac{\partial}{\partial x_1}+D\right]^k=k\frac{\partial}{\partial x_1}\left[(x_1-x_1^0)\frac{\partial}{\partial x_1}+D\right]^{k-1}. \quad (12.65)$$

Дифференцируя функцию $\left[(x_1+x_1^0)\frac{\partial}{\partial x_1}+D\right]^k$ по x_1 как сложную и учитывая отмеченную выше независимость от x_1 символов D и $\frac{\partial}{\partial x_1}$, мы получим равенство (12.65). Индукция завершена.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть* $g(M)=g(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ — *произвольная функция, удовлетворяющая двум требованиям:*

1) $g(M)$ *n раз дифференцируема в точке* $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$;

2) *сама функция* $g(M)$ *и все ее частные производные по любым переменным* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *до порядка n включительно обращаются*

в нуль в указанной точке M_0. Тогда для функции $g(M)$ справедлива оценка

$$g(M)=o(\rho^n), \tag{12.66}$$

в которой через ρ обозначено расстояние $\rho(M, M_0)$ между точками M и M_0.

Доказательство. При $n=1$ утверждение леммы вытекает из условия дифференцируемости* функции $g(M)$ в точке M_0, которое имеет вид $g(M)-g(M_0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial x_i}(M_0)(x_i-x_i^0)+o(\rho)$.

Учитывая, что $g(M_0)=0$, $\frac{\partial g}{\partial x_i}(M_0)=0$ для всех $i=1, 2, \ldots, m$ мы и получим, что $g(M)=o(\rho)$.

Для проведения индукции предположим, что лемма 2 справедлива для некоторого номера $n\geqslant 1$, и докажем, что в таком случае она справедлива и для номера $n+1$.

Пусть функция $g(M)$ удовлетворяет двум требованиям леммы 2 для номера $n+1$. Тогда, очевидно, любая частная производная этой функции первого порядка $\frac{\partial g}{\partial x_i}(M)$, $i=1, 2, \ldots, m$, будет удовлетворять двум требованиям леммы 2 для номера n, а потому (в силу сделанного нами предположения о справедливости леммы 2 для номера n) будет справедлива оценка

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(M)=o(\rho^n). \tag{12.66*}$$

Заметим теперь, что поскольку $n\geqslant 1$, то $n+1\geqslant 2$ и функция $g(M)$, удовлетворяющая двум требованиям леммы 2 для номера $n+1$, во всяком случае, один раз дифференцируема в окрестности точки M_0. Поэтому для этой функции $g(M)$ выполнены условия теоремы 12.15 для номера $n=0$. Согласно указанной теореме для любой точки M из достаточно малой ε-окрестности точки M_0 на отрезке** M_0M найдется точка N такая, что справедлива формула

$$g(M)=g(M_0)+\frac{1}{1!}\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)\frac{\partial g}{\partial x_i}(N). \tag{12.67}$$

Заметим теперь, что поскольку точка N лежит между точками M_0 и M, а ρ — это расстояние между точками M_0 и M, то $\rho(N, M_0)\leqslant\rho$, и потому из (12.66*) вытекает, что

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(N)=o(\rho^n).$$

* См. соотношение (12.16) из п. 2 § 4 настоящей главы.

** Т. е. на множестве точек вида $M_0+t(M-M_0)$, где t — любое число из сегмента $0\leqslant t\leqslant 1$.

Подставляя последнюю оценку в (12.67) и учитывая, что $g(M_0)=0$, мы получим

$$g(M)=o(\rho^n)\sum_{i=1}^{m}|x_i-x_i^0|.$$

Так как $|x_i-x_i^0|\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2}=\rho$, то мы окончательно получим, что $g(M)=o(\rho^{n+1})$.

Индукция завершена. Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 12.15* легко проводится с помощью леммы 1 и 2.

В самом деле, выше уже отмечалось, что для доказательства теоремы 12.15 достаточно установить, что при выполнении условий этой теоремы для функции (12.60) справедлива оценка

$$g_n(M)=o(\rho^n).$$

В силу леммы 1 сама функция (12.60) и все ее частные производные по любым переменным $x_1, x_2, \ldots, x_m$ до порядка n включительно обращаются в нуль в точке M_0. Но тогда в силу леммы 2 для функции (12.60) справедлива оценка $g_n(M)=o(\rho^n)$. Теорема 12.15* доказана.

§ 6. ЛОКАЛЬНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ m ПЕРЕМЕННЫХ

1. Понятие экстремума функции m переменных. Необходимые условия экстремума. Пусть функция m переменных $u=f(M)=f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ пространства E^m.

Определение 1. *Будем говорить, что функция $u=f(M)$ имеет в точке M_0 локальный максимум [локальный минимум], если найдется такая δ-окрестность точки M_0, в пределах которой значение $f(M_0)$ является наибольшим [наименьшим] среди всех значений $f(M)$ этой функции.*

Определение 2. *Будем говорить, что функция $u=f(M)$ имеет в точке M_0 локальный экстремум, если она имеет в этой точке либо локальный максимум, либо локальный минимум.*

Установим необходимые условия локального экстремума функции $u=f(M)$, обладающей в данной точке M_0 частными производными первого порядка по всем переменным.

Докажем следующее

Утверждение. *Если функция $u=f(M)=f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ обладает в точке $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ частными производными первого порядка по всем переменным $x_1, x_2, \ldots, x_m$ и имеет в этой*

точке локальный экстремум, то все частные производные первого порядка обращаются в точке M_0 в нуль, т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)=0,\ \frac{\partial u}{\partial x_2}(M_0)=0,\ \ldots,\ \frac{\partial u}{\partial x_m}(M_0)=0. \qquad (12.68)$$

Доказательство. Установим справедливость первого равенства (12.68). Фиксируем у функции $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ аргументы $x_2, x_3, \ldots, x_m$, положив их равными соответствующим координатам точки M_0, т. е. положив $x_2=x_2^0$, $x_3=x_3^0$, ..., $x_m=x_m^0$. При этом мы получим функцию $u=f(x_1, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ одной переменной x_1. Производная этой функции одной переменной в точке $x_1=x_1^0$ совпадает с частной производной $\frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)$.

Так как функция m переменных $u=f(M)$ имеет локальный экстремум в точке M_0, то указанная функция одной переменной $u=f(x_1, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ имеет локальный экстремум в точке $x_1=x_1^0$, и поэтому (в силу результатов п. 2 § 1 гл. 7) производная этой функции одной переменной в точке $x_1=x_1^0$, совпадающая с частной производной $\frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)$, равна нулю.

Первое равенство (12.68) доказано. Остальные равенства (12.68) доказываются аналогично.

Подчеркнем, что равенства (12.68) (т .е. обращение в нуль в данной точке M_0 всех частных производных первого порядка) являются лишь необходимыми и не являются достаточными условиями локального экстремума функции $u=f(M)$ в точке M_0.

Например, у функции двух переменных $u=xy$ обе частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ обращаются в нуль в точке $M_0(0, 0)$, но никакого экстремума в этой точке $M_0(0, 0)$ указанная функция не имеет, ибо эта функция $u=xy$ равна нулю в самой точке $M_0(0, 0)$, а в как угодно малой δ-окрестности этой точки принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Точки, в которых обращаются в нуль все частные производные первого порядка функции $u=f(M)$, называются **стационарными точками** *этой функции.*

В каждой стационарной точке у функции $u=f(M)$ возможен локальный экстремум, однако наличие этого экстремума можно установить лишь с помощью достаточных условий локального экстремума, выяснению которых посвящен следующий пункт.

Из доказанного выше утверждения вытекает и другая форма необходимых условий локального экстремума: *если функция $u=f(M)$ дифференцируема в точке M_0 и имеет в этой точке локальный экстремум, то дифференциал $du|_{M^0}$ этой функции в точке M_0 равен нулю тождественно относительно дифференциалов независимых переменных $dx_1, dx_2, \ldots, dx_m$.*

В самом деле, поскольку

$$du|_{M_0}=\frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)\,dx_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}(M_0)\,dx_2+\ldots+\frac{\partial u}{\partial x_m}(M_0)\,dx_m,$$

то из равенств (12.68) вытекает, что при любых $dx_1, dx_2, \ldots, dx_m$ справедливо равенство $du|_{M_0}=0$.

2. Достаточные условия локального экстремума функции m переменных. При формулировке достаточных условий локального экстремума функции m переменных $u=f(M)$ важную роль будет играть второй дифференциал этой функции в обследуемой точке M_0.

В п. 2 § 5 настоящей главы мы убедились в том, что для случая, когда аргументы $x_1, x_2, \ldots, x_m$ два раза дифференцируемой функции $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ являются либо независимыми переменными, либо линейными функциями некоторых независимых переменных, второй дифференциал этой функции в данной точке M_0 представляет собой квадратичную форму относительно дифференциалов аргументов $dx_1, dx_2, \ldots, dx_m$ следующего вида:

$$d^2u|_{M_0}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}a_{ik}dx_idx_k, \tag{12.69}$$

где

$$a_{ik}=a_{ki}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_k}(M_0). \tag{12.70}$$

Для формулировки достаточных условий локального экстремума нам понадобятся некоторые сведения из теории квадратичных форм, которые мы для удобства читателя приводим ниже*.

Квадратичная форма относительно переменных $h_1, h_2, \ldots, h_m$

$$\Phi(h_1, h_2, \ldots, h_m)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}a_{ik}h_ih_k \tag{12.71}$$

называется положительно определенной [отрицательно определенной], если для любых значений $h_1, h_2, \ldots, h_m$, одновременно не равных нулю, эта форма принимает строго положительные [строго отрицательные] значения.

Квадратичная форма (12.71) называется знакоопределенной, если она является либо положительно определенной, либо отрицательно определенной.

Квадратичная форма (12.71) называется знакопеременной, если она принимает как строго положительные, так и строго отрицательные значения.

---

* Все приводимые здесь определения и утверждения можно найти, например, в книге В. А. Ильина и Э. Г. Позняка «Линейная алгебра», (М., Наука, 1974).

Квадратичная форма (12.71) называется квазизнакоопределенной, если она принимает либо только неотрицательные, либо только неположительные значения, но при этом обращается в нуль для некоторых значений $h_1, h_2, \ldots, h_m$, одновременно не равных нулю.

Сформулируем так называемый критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичной формы *.

Назовем матрицей квадратичной формы (12.71) следующую матрицу:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{pmatrix}. \tag{12.72}$$

Если все элементы матрицы A удовлетворяют условию $a_{ik}=a_{ki}$ $(i=1, 2, \ldots, m;\ k=1, 2, \ldots, m)$, то указанная матрица называется симметричной.

Назовем главными минорами симметричной матрицы (12.72) следующие определители:

$$A_1=a_{11},\ A_2=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix},\ A_3=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix}, \ldots, A_m=\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \ldots a_{1m} \\ a_{21} a_{22} \ldots a_{2m} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}a_{m2} \ldots a_{mm} \end{vmatrix}.$$

Критерий Сильвестра формулируется в виде следующих двух утверждений.

1°. *Для того чтобы квадратичная форма* (12.71) *с симметричной матрицей* (12.72) *являлась положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы* (12.72) *были положительны, т. е. чтобы были справедливы неравенства*

$$A_1>0,\ A_2>0,\ \ldots,\ A_m>0.$$

2°. *Для того чтобы квадратичная форма* (12.71) *с симметричной матрицей* (12.72) *являлась отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы знаки главных миноров матрицы* (12.72) *чередовались, причем знак A_1 был отрицателен, т. е. чтобы были справедливы неравенства*

$$A_1<0,\ A_2>0,\ A_3<0,\ A_4>0,\ \ldots.$$

Теперь мы подготовлены для того, чтобы сформулировать и доказать теорему, устанавливающую достаточные условия локального экстремума.

Теорема 12.16. *Пусть функция m переменных $u=f(M)=f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ один раз дифференцируема в некоторой окрестности точки $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ и два раза дифференцируема в самой точке M_0. Пусть, кроме того, точка M_0 является стационар-*

* Дж. Сильвестр — английский математик (1814—1897).

ной точкой функции $u=f(M)$, *т. е.* $du|_{M_0}=0$. *Тогда если второй дифференциал* (12.69), (12.70) *представляет собой положительно определенную* [*отрицательно определенную*] *квадратичную форму от переменных* $dx_1, dx_2, \ldots, dx_m$, *то функция* $u=f(M)$ *имеет в точке* M_0 *локальный минимум* [*локальный максимум*]. *Если же второй дифференциал* (12.69), (12.70) *представляет собой знакопеременную квадратичную форму, то функция* $u=f(M)$ *не имеет локального экстремума в точке* M_0.

Доказательство. Докажем сначала первую часть теоремы, предполагая ради определенности, что второй дифференциал (12.69), (12.70) представляет собой положительно определенную квадратичную форму от переменных $dx_1, dx_2, \ldots, dx_m$. Докажем, что в этом случае функция $u=f(M)$ имеет в точке M_0 локальный минимум.

Разложим функцию $u=f(M)$ в окрестности точки M_0 по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, беря в этой формуле $n=2$ *. Мы получим при этом, что

$$f(M)-f(M_0)=du|_{M_0}+\frac{1}{2}d^2u|_{M_0}+o(\rho^2), \tag{12.73}$$

причем в равенстве (12.73) дифференциалы dx_i переменных x_i, входящие в выражение для $du|_{M_0}$ и $d^2u|_{M_0}$, равны соответствующим приращениям $x_i-x_i^0$ эти переменных, а величина ρ равна

$$\rho=\sqrt{(dx_1)^2+(dx_2)^2+\ldots+(dx_m)^2}=$$
$$=\sqrt{(x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2+\ldots+(x_m-x_m^0)^2}. \tag{12.74}$$

По условию теоремы точка M_0 является стационарной. Поэтому на основании результатов предыдущего пункта $du|_{M_0}=0$. Учитывая это равенство и полагая в выражениях (12.69), (12.70) для второго дифференциала $dx_i=x_i-x_i^0$, мы придадим формуле Тейлора (12.73) следующий вид:

$$f(M)-f(M_0)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}a_{ik}(x_i-x_i^0)(x_k-x_k^0)+o(\rho^2). \tag{12.75}$$

Достаточно доказать, что для всех достаточно малых ρ правая часть (12.75) положительна. (Это и будет означать, что в достаточной малой окрестности точки M_0 разность $f(M)-f(M_0)$ положительна, т. е. функция $u=f(M)$ имеет в точке M_0 локальный минимум.)

---

* Для функции $u=f(M)$ выполнены при $n=2$ все условия теоремы 12.15* (см. п. 4 § 5 настоящей главы).

Положим $h_i = \frac{x_i - x_i^0}{\rho}$, где $i=1, 2, \ldots$. Тогда из выражения (12.74) для ρ вытекают следующие соотношения:

$$|h_i| \leqslant 1, \quad h_1^2 + h_2^2 + \ldots + h_m^2 = 1. \tag{12.76}$$

С помощью введенных обозначений равенство (12.75) может быть переписано в виде

$$f(M) - f(M_0) = \frac{\rho^2}{2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} a_{ik} h_i h_k + o(\rho^2). \tag{12.75*}$$

Отношение $o(\rho^2)/\rho^2$ представляет собой бесконечно малую при $\rho \to 0$ (или при $M \to M_0$) функцию, которую мы обозначим через $\alpha(\rho)$. Введение этой функции позволяет нам записать равенство $o(\rho^2) = \rho^2 \alpha(\rho)$, с помощью которого мы придадим соотношению (12.75*) вид

$$f(M) - f(M_0) = \rho^2 \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} a_{ik} h_i h_k + \alpha(\rho) \right]. \tag{12.75**}$$

Теперь уже нетрудно доказать, что правая часть (12.75**) является положительной для всех достаточно малых ρ. Квадратичная форма $\Phi = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} a_{ik} h_i h_k$ представляет собой функцию, определенную и непрерывную на поверхности единичной сферы (12.76), представляющей собой замкнутое и ограниченное множество. По второй теореме Вейерштрасса (см. теорему 12.7 из п. 3 § 3) эта функция достигает на указанном множестве своей точной нижней грани μ, причем из положительной определенности квадратичной формы (12.71) и из того, что $h_1, h_2, \ldots, h_m$, удовлетворяющие соотношению (12.76), не равны одновременно нулю, вытекает, что указанная точная нижняя грань μ строго положительна.

Так как бесконечно малая при $\rho \to 0$ функция $\alpha(\rho)$ при всех достаточно малых ρ удовлетворяет неравенству $|\alpha(\rho)| < \mu$, то вся правая часть (12.75**) является положительной при всех достаточно малых ρ, т. е. при всех M, достаточно близких к M_0.

Это и означает, что функция $u = f(M)$ имеет в точке M_0 локальный минимум.

Совершенно аналогично доказывается, что в случае, когда второй дифференциал (12.69), (12.70) представляет собой отрицательно определенную квадратичную форму, функция $u = f(M)$ имеет в точке M_0 локальный максимум.

Докажем теперь вторую часть теоремы, т. е. докажем, что в случае, когда второй дифференциал (12.69), (12.70) представляет

собой знакопеременную квадратичную форму, функция $u=f(M)$ не имеет локального экстремума в точке M_0.

Прежде всего установим следующее свойство знакопеременной квадратичной формы (12.71):

Если квадратичная форма $\Phi(h_1, h_2, \ldots, h_m)$ *знакопеременна, то найдутся две совокупности переменных* $(h_1', h_2', \ldots, h_m')$ *и* $(h_1'', h_2'', \ldots, h_m'')$ *такие, что*

$$(h_1')^2+(h_2')^2+\ldots+(h_m')^2=1, \quad (h_1'')^2+(h_2'')^2+\ldots+(h_m'')^2=1, \tag{12.77}$$

причем

$$\Phi(h_1' h_2', \ldots, h_m')>0, \quad \Phi(h_1'', h_2'', \ldots, h_m'')<0. \tag{12.78}$$

В самом деле, в силу определения знакопеременной квадратичной формы найдутся две совокупности аргументов $t_1', t_2', \ldots, t_m'$ и $t_1'', t_2'', \ldots, t_m''$, состоящие из чисел, одновременно не равных нулю, и такие, что

$$\Phi(t_1', t_2', \ldots, t_m')>0, \quad \Phi(t_1'', t_2'', \ldots, t_m'')<0. \tag{12.79}$$

Положив

$$h_i'=\frac{t_i'}{\sqrt{(t_1')^2+(t_2')^2+\ldots+(t_m')^2}}, \quad h_i''=\frac{t_i''}{\sqrt{(t_1'')^2+(t_2'')^2+\ldots+(t_m'')^2}} \tag{12.80}$$

и учитывая, что из определения (12.71) квадратичной формы сразу же вытекает, что

$$\Phi(h_1', h_2', \ldots, h_m')=\frac{1}{(t_1')^2+(t_2')^2+\ldots+(t_m')^2}\Phi(t_1', t_2', \ldots, t_m'),$$

$$\Phi(h_1'', h_2'', \ldots, h_m'')=\frac{1}{(t_1'')^2+(t_2'')^2+\ldots+(t_m'')^2}\Phi(t_1'', t_2'', \ldots, t_m''),$$

мы получим (в силу (12.79)) неравенства (12.78), причем из соотношений (12.80) сразу же вытекают равенства (12.77).

Зафиксируем две совокупности переменных $h_1', h_2', \ldots, h_m'$ и $h_1'', h_2'', \ldots, h_m''$, удовлетворяющие соотношениям (12.77) и (12.78), и докажем, что для любого $\rho>0$ найдутся две точки $M'(x_1', x_2', \ldots, x_m')$ и $M''(x_1'', x_2'', \ldots, x_m'')$ пространства E^m такие, что $\rho(M', M_0)=\rho(M'', M_0)=\rho$, причем

$$\frac{x_i'-x_i^0}{\rho}=h_i', \quad \frac{x_i''-x_i^0}{\rho}=h_i'' \quad \text{для всех } i=1, 2, \ldots, m. \tag{12.81}$$

В самом деле, положив для любого $\rho>0$ и для каждого номера i

$$x_i'=x_i^0+\rho h_i', \qquad x_i''=x_i^0+\rho h_i'',$$

мы удовлетворим соотношениям (12.81), причем в силу равенств (12.77) будут справедливы равенства

$$\rho(M', M_0) = \sqrt{(x_1'-x_1^0)^2+(x_2'-x_2^0)^2+\ldots+(x_m'-x_m^0)^2} =$$

$$= \rho\sqrt{(h_1')^2+(h_2')^2+\ldots+(h_m')^2} = \rho,$$

$$\rho(M'', M_0) = \sqrt{(x_1''-x_1^0)^2+(x_2''-x_2^0)^2+\ldots+(x_m''-x_m^0)^2} =$$

$$= \rho\sqrt{(h_1'')^2+(h_2'')^2+\ldots+(h_m'')^2} = \rho.$$

Теперь уже нетрудно убедиться в том, что для случая, когда второй дифференциал (12.69), (12.70) представляет собой знакопеременную квадратичную форму, функция $u=f(M)$ не имеет экстремума в точке M_0.

Записывая для функции $u=f(M)$ разложение в окрестности точки M_0 по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано и беря это разложение в указанных выше точках M' и M'', мы получим вместо (12.75) следующие два разложения:

$$f(M')-f(M_0) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} a_{ik}(x_i'-x_i^0)(x_k'-x_k^0)+o(\rho^2), \quad (12.82)$$

$$f(M'')-f(M_0) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} a_{ik}(x_i''-x_i^0)(x_k''-x_k^0)+o(\rho^2), \quad (12.83)$$

справедливые для всех достаточно малых $\rho>0$.

Подставляя в эти разложения значения $(x_i'-x_i^0)$ и $(x_i''-x_i^0)$ из равенств (12.81) и учитывая, что $o(\rho^2)=\rho^2\alpha(\rho)$, где $\alpha(\rho)\to 0$ при $\rho\to 0$, мы придадим разложениям (12.82) и (12.83) следующий вид:

$$f(M')-f(M_0) = \rho^2\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} a_{ik}h_i'h_k'+\alpha(\rho)\right],$$

$$f(M'')-f(M_0) = \rho^2\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} a_{ik}h_i''h_k''+\alpha(\rho)\right].$$

Последние два соотношения можно также переписать в виде

$$f(M')-f(M_0) = \rho^2\left[\frac{1}{2}\Phi(h_1', h_2', \ldots, h_m')+\alpha(\rho)\right], \quad (12.82^*)$$

$$f(M'')-f(M_0) = \rho^2\left[\frac{1}{2}\Phi(h_1'', h_2'', \ldots, h_m'')+\alpha(\rho)\right]. \quad (12.83^*)$$

Учитывая соотношения (12.78) и тот факт, что величины $\Phi(h_1', h_2', \ldots, h_m')>0$ и $\Phi(h_1'', h_2'', \ldots, h_m'')<0$ не зависят от ρ, и вспоминая, что $\rho=\rho(M', M_0)=\rho(M'', M_0)$, мы получим из соотношений (12.82*) и (12.83*), что для достаточно малого $\rho>0$ справедливы неравенства $f(M')>f(M_0)$ и $f(M'')<f(M_0)$, которые и доказывают отсутствие экстремума в точке M_0.

Теорема 12.16 полностью доказана.

Замечание. Если второй дифференциал два раза дифференцируемой в данной стационарной точке M_0 функции $u=f(M)$ представляет собой в этой точке квазизнакоопределенную квадратичную форму, то нельзя сказать ничего определенного о наличии или отсутствии в этой точке локального экстремума.

Так, например, у каждой из двух функций $u_1=x^3+y^3$ и $u_2=x^4+y^4$ второй дифференциал в стационарной точке $M_0(0, 0)$ тождественно равен нулю (т. е. представляет собой квазизнакоопределенную квадратичную форму), но только одна вторая из указанных двух функций имеет в этой точке локальный экстремум.

Для решения вопроса о локальном экстремуме для случая, когда второй дифференциал представляет собой квазизнакоопределенную квадратичную форму, следует привлечь дифференциалы более высоких порядков, но это выходит за рамки нашего курса.

Пример. Найти точки локального экстремума функции трех переменных

$$u=\lambda x^2+y^2+z^2+2y+2z, \tag{12.84}$$

где λ — вещественное число, отличное от нуля.

Так как $\frac{\partial u}{\partial x}=2\lambda x$, $\frac{\partial u}{\partial y}=2y+2$, $\frac{\partial u}{\partial z}=2z+2$, то единственной стационарной точкой является точка $M_0(0, -1, -1)$.

Далее очевидно, что второй дифференциал в этой точке имеет вид

$$d^2u|_{M_0}=2\lambda(dx)^2+2(dy)^2+2(dz)^2.$$

При $\lambda>0$ второй дифференциал в точке M_0 представляет собой положительно определенную квадратичную форму*, и потому функция (12.84) имеет в точке $M_0(0, -1, -1)$ локальный минимум.

При $\lambda<0$ указанный второй дифференциал представляет собой знакопеременную квадратичную форму**, и потому функция (12.84) не имеет локального экстремума в точке M_0.

3. Случай функции двух переменных. На практике часто встречается задача об экстремуме функции двух переменных $u=f(x, y)$.

---

* Ибо этот второй дифференциал принимает строго положительные значения при dx, dy и dz, одновременно не равных нулю.

** Ибо при $\lambda<0$ этот второй дифференциал положителен при $dx=0$, $dy=1$, $dz=1$ и отрицателен при $dx=1$, $dy=0$, $dz=0$.

В этом пункте мы приведем результаты, относящиеся к этому случаю.

Пусть частные производные $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ в некоторой точке $M_0(x_0, y_0)$ обозначены символами a_{11}, a_{12}, a_{21} соответственно. Справедливо следующее

Утверждение. *Пусть функция двух переменных $u=f(x, y)$ один раз дифференцируема в окрестности точки M_0 и два раза дифференцируема в самой точке M_0, и пусть M_0 является стационарной точкой. Тогда если в точке M_0 выполнено условие $a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$, то функция $u=f(x, y)$ имеет в точке M_0 локальный экстремум (максимум при $a_{11}<0$ и минимум при $a_{11}>0$).*

Если же в точке M_0 $a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0$, то функция $u=f(x, y)$ не имеет в этой точке локального экстремума *.

Доказательство. Справедливость первой части утверждения непосредственно вытекает из теоремы 12.16 и критерия Сильвестра знакоопределенности квадратичной формы, ибо

$$A_1=a_{11}, \qquad A_2=a_{11}a_{22}-a_{12}^2.$$

Докажем вторую часть утверждения. Итак, пусть в точке M_0 справедливо неравенство $a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0$. Докажем, что в этом случае второй дифференциал d^2u в точке M_0 представляет собой знакопеременную форму. Рассмотрим сначала случай $a_{11}\neq 0$. Используя введенные выше обозначения

$$\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}, \quad h_1=\frac{x-x_0}{\rho}, \quad h_2=\frac{y-y_0}{\rho},$$

получим следующее выражение для второго дифференциала:

$$d^2u|_{M_0}=\rho^2\sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}h_ih_k=\rho^2(a_{11}h_1^2+2a_{12}h_1h_2+a_{22}h_2^2)=$$

$$=\frac{\rho^2}{a_{11}}[(a_{11}h_1+a_{12}h_2)^2+(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)h_2^2].$$

Легко, проверить, что при $h_1=1$, $h_2=0$ и при $h_1=\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}^2+a_{12}^2}}$, $h_2=\frac{-a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2+a_{12}^2}}$ ** дифференциал $d^2u|_{M_0}$ имеет разные знаки, т. е. является знакопеременной формой, и поэтому согласно теореме 12.16 функция не имеет в точке M_0 локального экстремума.

---

* Случай $a_{11}a_{22}-a^2_{12}=0$ требует дополнительного исследования.

** При этом ρ может быть как угодно малой величиной. Условие $h_1^2+h_2^2=1$ выполнено.

Рассмотрим теперь случай $a_{11}=0$. Тогда из условия $a_{11}a_2-a_{12}^2<0$ вытекает, что $a_{12}\neq 0$. Следовательно, так же как и выше, имеем

$$d^2u|_{M_0}=\rho^2h_2(2a_{12}h_1+a_{22}h_2). \qquad (12.85)$$

Пусть $h_1\neq 0$ и величина h_2 столь мала (из условия $h_1^2+h_2^2=1$ следует, что такой выбор h_1 и h_2 возможен), что выражение $(2a_{12}h_1+a_{22}h_2)$ сохраняет знак величины $2a_{12}h_1$. Тогда из формулы (12.85) вытекает, что $d^2u|_{M_0}$ имеет разные знаки при $h_2>0$ и $h_2<0$, т. е. функция $u=f(x, y)$ не имеет локального экстремума в точке M_0. Утверждение полностью доказано.

Замечание. *Требование $d^2f(M_0)\geqslant 0$ [соответственно $d^2f(M_0)\leqslant 0$] является необходимым условием локального минимума [максимума] в точке M_0 дважды дифференцируемой в этой точке функции $f(M)$.*

В самом деле, пусть ради определенности $f(M)$ имеет в точке M_0 локальный минимум, но условие $d^2f(M_0)\geqslant 0$ не выполнено. Тогда найдутся $h_1, h_2, \ldots, h_m$ такие, что

$$d^2f(M_0)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_k}(M_0)\,h_ih_k<0.$$

Рассмотрим функцию $F(t)=f(x_1^0+th_1, \ldots, x_m^0+th_m)$, заведомо определенную при всех t, достаточно малых по модулю. Функция $F(t)$ обязана иметь локальный минимум в точке $t=0$, чему противоречит условие

$$F''(0)=d^2f(M_0)<0.$$

ДОПОЛНЕНИЕ 1

Градиентный метод поиска экстремума сильно выпуклой функции

В этом дополнении излагается теория широко применяемого на практике градиентного метода поиска экстремума сильно выпуклой функции.

Идея этого метода чрезвычайно проста. Для приближенного отыскания точки минимума функции m переменных используется тот факт, что градиент этой функции имеет направление, совпадающее с направлением *наибольшего возрастания* этой функции. Значит, вектор $-\operatorname{grad} f(x_0)$ в каждой точке $x_0=(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ направлен в сторону *наибольшего убывания* функции $f(x)$. Это дает основание ожидать, что если, отправляясь от некоторого нулевого приближения $x_0=(x_1^0, x_2^0, \ldots, x^0_m)$ мы построим k-е приближение $x_k=(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_m^k)$ по рекуррентной формуле

$$x_{k+1}=x_k-\alpha\operatorname{grad} f(x_k),$$

то при достаточно малом положительном α последовательность точек $\{x_k\}$ сойдется к точке минимума функции $f(x)$.

Строгой реализации этой простой идеи и посвящено настоящее дополнение.

1. Выпуклые множества и выпуклые функции. Пусть $x_1 = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_m^1)$ и $x_2 = (x_1^2, x_2^2, \ldots, x_m^2)$ — две точки m-мерного евклидова пространства E^m, которые мы можем рассматривать как векторы в E^m с соответствующими координатами.

Назовем отрезком или сегментом, соединяющим точки x_1 и x_2, множество точек пространства E^m вида $x_1 + t(x_2 - x_1)$, где t — любое число из сегмента $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Будем обозначать отрезок, соединяющий точки x_1 и x_2, символом $\overline{x_1 x_2}$.

Определение 1. *Множество Q точек пространства E^m называется выпуклым, если оно обладает следующим свойством: каковы бы ни были две точки x_1 и x_2, принадлежащие множеству Q, отрезок $\overline{x_1 x_2}$, их соединяющий, также принадлежит этому множеству.*

Примером выпуклого множества в пространстве E^m может служить m-мерный шар (безразлично, открытый или замкнутый) или полупространство $x_m \geqslant 0$ (т. е. множество всех точек $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ пространства E^m, m-я координата которых удовлетворяет условию $x_m \geqslant 0$).

Примером множества Q, не являющегося выпуклым, может служить дополнение m-мерного шара или m-мерный открытый шар, из которого удалена хотя бы одна точка.

Пусть Q — некоторое множество точек пространства E^m, а x — любая фиксированная точка этого пространства.

Назовем расстоянием от точки x до множества Q точную нижнюю грань расстояний от точки x до всевозможных точек этого множества.

Будем обозначать расстояние от точки x до множества Q символом $\rho(x, Q)$. Итак, по определению

$$\rho(x, Q) = \inf_{y \in Q} \rho(x, y).$$

Для любого множества Q пространства E^m и любой точки x этого пространства существует расстояние $\rho(x, Q)$ *. В частности, если точка x принадлежит множеству Q, то $\rho(x, Q) = 0$.

Однако у множества Q не всегда существует точка y такая, что $\rho(x, y) = \rho(x, Q)$.

Так, например, если множество Q представляет открытый m-мерный шар, а x — точка E^m, лежащая вне этого шара, то у такого множества Q не существует точки y такой, что $\rho(x, y) =$

* Ибо множество $\rho(x, y)$ для всевозможных y, принадлежащих Q, всегда ограничено снизу (например, числом нуль).

$=\rho(x, Q)$ (ибо для всех точек y открытого шара справедливо неравенство $\rho(x, y)>\rho(x, Q)$).

Если все же у множества Q существует точка y такая, что $\rho(x, y)=\rho(x, Q)$, то эта точка y называется проекцией точки x на множество Q.

Проекцию точки x на множество Q будем обозначать символом $P_Q(x)$.

Подчеркнем, что если точка x принадлежит множеству Q то $P_Q(x)=x$.

Итак, проекция $P_Q(x)$ точки x на множество Q определяется соотношением

$$\rho(x, P_Q(x))=\rho(x, Q)=\inf_{y\in Q}\rho(x, y).$$

Полезно отметить, что может существовать несколько проекций точки x на множество Q. Так, например, если Q—m-мерная сфера с центром в точке x, то любая точка Q является проекцией точки x на множество Q.

Справедлива, однако, следующая лемма:

Лемма 1. *Если множество Q пространства E^m является выпуклым и замкнутым, а x — любая точка E^m, то существует и притом единственная проекция точки x на множество Q.*

Доказательство. Сначала докажем существование *хотя бы одной* проекции точки x на множество Q. Обозначим через $\rho(x, Q)$ расстояние от точки x до множества Q. По определению $\rho(x, Q)$ как точной нижней грани $\inf_{y\in Q}\rho(x, y)$ найдется последовательность $\{y_n\}$ точек множества Q такая, что $\rho(x, y_n)\to\rho(x, Q)$.

По определению предела числовой последовательности для любого $\varepsilon>0$ все элементы y_n, начиная с некоторого номера, удовлетворяют соотношению

$$\rho(x, Q)-\varepsilon<\rho(x, y_n)<\rho(x, Q)+\varepsilon.$$

Отсюда следует, что последовательность $\{y_n\}$ точек пространства E^m во всяком случае является ограниченной и потому в силу теоремы Больцано — Вейерштрасса (см. п. 2 § 2 гл. 12) из этой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность y_{k_n}, где $n=1, 2, 3, \ldots$. Обозначим через y предел подпоследовательности $\{y_{k_n}\}$. В силу замкнутости множества Q точка y принадлежит этому множеству. Остается доказать, что

$$\rho(x, y)=\rho(x, Q)=\lim_{n\to\infty}\rho(x, y_{k_n}).$$

Для доказательства этого заметим, что в силу неравенств треугольника

$$\rho(x, y_{k_n}) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, y_{k_n}) \text{ и } \rho(x, y) \leqslant \rho(x, y_{k_n}) + \rho(y_{k_n}, y)$$

справедливо соотношение

$$|\rho(x, y_{k_n}) - \rho(x, y)| \leqslant \rho(y, y_{k_n}).$$

Из этого соотношения и их сходимости подпоследовательности $\{y_{k_n}\}$ к y вытекает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x, y_{k_n}) = \rho(x, y)$, т. е. $\rho(x, Q) = \rho(x, y)$.

Тем самым доказательство *существования* хотя бы одной проекции точки x на множество Q завершено.

Докажем теперь, что существует *только одна* проекция точки x на множество Q. Предположим, что существуют две различные проекции y_1 и y_2 точки x на множество Q. Так как множество Q является выпуклым, то весь отрезок $\overline{y_1y_2}$, соединяющий точки y_1 и y_2, принадлежит множеству Q. В частности, множеству Q принадлежит середина $\frac{y_1+y_2}{2}$ указанного отрезка. Убедимся в том, что *расстояние* $\rho\left(x, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ *от точки* x *до указанной середины отрезка* $\overline{y_1y_2}$ *строго меньше расстояния* $\rho(x, y_1) = \rho(x, y_2)$.

Исключим из рассмотрения тривиальный случай, когда $\frac{y_1+y_2}{2} = x$. В этом случае $\rho\left(x, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = 0$, в то время как $\rho(x, y_1) = \rho(x, y_2) > 0$, ибо в противном случае обе точки y_1 и y_2 совпадали бы с x и не могли бы быть различными. Итак, в тривиальном случае $\frac{y_1+y_2}{2} = x$ неравенство

$$\rho\left(x, \frac{y_1+y_2}{2}\right) < \rho(x, y_1) = \rho(x, y_2) \tag{12.1.1}$$

очевидно.

Докажем теперь неравенство (12.1.1) в случае, когда $\frac{y_1+y_2}{2} \neq x$.

Используя свойства скалярного произведения двух векторов пространства E^m (см., например, замечание 2 из п. 1 § 1 гл. 12), мы получим соотношение

$$\rho^2\left(x, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = \left(\frac{y_1+y_2}{2} - x, \frac{y_1+y_2}{2} - x\right) =$$

$$= \left(\frac{y_1-x}{2} + \frac{y_2-x}{2}, \frac{y_1-x}{2} + \frac{y_2-x}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}[(y_1-x, y_1-x) + 2(y_1-x, y_2-x) + (y_2-x, y_2-x)]. \tag{12.1.2}$$

Убедимся теперь в справедливости строгого неравенства

$$|(y_1-x,\ y_2-x)| < \sqrt{(y_1-x,\ y_1-x)}\ \sqrt{(y_2-x,\ y_2-x)}. \quad (12.1.3)$$

В сноске на с. 485 доказано, что для любых векторов* a и b пространства E^m, не коллинеарных друг другу (т. е. таких, что $a \neq \lambda b$ ни для одного вещественного λ), справедливо строгое неравенство Коши — Буняковского

$$|(a,\ b)| < \sqrt{(a,\ a)(b,\ b)}.$$

Это означает, что для доказательства неравенства (12.1.3) нам достаточно убедиться в том, что векторы y_1-x и y_2-x не коллинеарны, т. е. убедиться в том, что ни для одного вещественного λ не может быть справедливо равенство

$$y_1-x=\lambda(y_2-x). \quad (12.1.4)$$

Если бы равенство (12.1.4) было справедливо для такого λ, для которого $|\lambda| \neq 1$, то было бы невозможно равенство $\rho(y_1,\ x)=\rho(y_2,\ x)$.

Справедливость равенства (12.1.4) для $\lambda=1$ противоречила бы тому, что точки y_1 и y_2 являются различными.

Наконец, справедливость равенства (12.1.4) для $\lambda=-1$ означала бы, что $\frac{y_1+y_2}{2}=x$, а этот случай мы исключили.

Итак, равенство (12.1.4) несправедливо ни для одного вещественного λ, а потому доказательство неравенства (12.1.3) завершено.

Сопоставляя равенство (12.1.2) с неравенством (12.1.3), получим, что

$$\rho^2\left(x,\ \frac{y_1+y_2}{2}\right) < \frac{1}{4}[(y_1-x,\ y_1-x)+$$

$$+2\sqrt{(y_1-x,\ y_1-x)}\ \sqrt{(y_2-x,\ y_2-x)}+(y_2-x,\ y_2-x)]=$$

$$=\frac{1}{4}[\sqrt{(y_1-x,\ y_1-x)}+\sqrt{(y_2-x,\ y_2-x)}]^2=$$

$$=\frac{1}{4}[\rho(x,\ y_1)+\rho(x,\ y_2)]^2=\rho^2(x,\ y_1)=\rho^2(x,\ y_2).$$

Тем самым доказательство неравенства (12.1.1) завершено. Но это неравенство означает, что у множества Q нашлась точка $\frac{y_1+y_2}{2}$, более близкая к x, чем точки y_1 и y_2, а это противоречит тому, что каждая из точек y_1 и y_2 является проекцией точки x на множество Q, т. е. является точной нижней гранью расстояния $\rho(x,\ y)$ для всевозможных y, принадлежащих Q.

* Векторы в данном дополнении не будем выделять жирным шрифтом.

Полученное противоречие показывает, что наше предположение о том, что существуют две различные проекции y_1 и y_2 точки x на множество Q, является ошибочным.

Доказательство леммы 1 полностью завершено.

Перейдем теперь к определению выпуклой функции.

Определение 2. *Функция $f(x)$, заданная на выпуклом множестве Q пространства E^m, называется* **выпуклой вниз** *или просто* **выпуклой** *на этом множестве, если для любых двух точек x_1 и x_2 множества Q и для любого вещественного числа t из сегмента $0 \leqslant t \leqslant 1$ справедливо неравенство*

$$f[x_1+t(x_2-x_1)] \leqslant f(x_1)+t[f(x_2)-f(x_1)]. \qquad (12.1.5)$$

Определение 3. *Функция $f(x)$, заданная на выпуклом множестве Q пространства E^m, называется* **строго выпуклой** *на этом множестве, если для любых двух точек x_1 и x_2 множества Q и для любого вещественного числа t из интервала $0<t<1$ справедливо строгое неравенство*

$$f[x_1+t(x_2-x_1)] < f(x_1)+t[f(x_2)-f(x_1)]. \qquad (12.1.6)$$

Ясно, что всякая строго выпуклая на множестве Q функция $f(x)$ является выпуклой на этом множестве.

Легко установить достаточное условие выпуклости [соответственно строгой выпуклости] дважды дифференцируемой на выпуклом множестве Q функции $f(x)$.

Лемма 2. *Пусть функция $f(x)$ задана и два раза дифференцируема на выпуклом множестве Q. Тогда, для того чтобы эта функция являлась выпуклой [строго выпуклой], на множестве Q достаточно, чтобы второй дифференциал d^2f этой функции во всех точках Q являлся квазиположительно определенной [строго положительно определенной] квадратичной формой.*

Доказательство. Пусть x_1 и x_2 — любые две фиксированные точки множества Q. Рассмотрим на сегменте $0 \leqslant t \leqslant 1$ следующую функцию одной независимой переменной t:

$$F(t)=f[x_1+t(x_2-x_1)]-f(x_1)-t[f(x_2)-f(x_1)]. \qquad (12.1.7)$$

Напомним, что второй дифференциал d^2f функции $f(x)=f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ независимых переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ в данной точке $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ равен *

$$d^2f(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(x)\,\Delta x_i \Delta x_k. \qquad (12.1.8)$$

Дифференцируя функцию (12.1.7) два раза по t по правилу дифференцирования сложной функции, получим

* См. п. 2 § 5 гл. 12.

$$F''(t)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}[x_1+t(x_2-x_1)](x_i^2-x_i^1)(x_k^2-x_k^1), \quad (12.1.9)$$

где $(x_1^1, x_2^1, ..., x_m^1)$ и $(x_1^2, x_2^2, ..., x_m^2)$ — координаты точек x_1 и x_2 соответственно.

Сопоставляя соотношения (12.1.8) и (12.1.9), мы убедимся в справедливости равенства

$$F''(t)=d^2f[x_1+t(x_2-x_1)], \quad (12.1.10)$$

в котором в выражении для d^2f приращения Δx_i взяты равными $x_i^2-x_i^1$.

Дальнейшие рассуждения ради определенности проведем для случая, когда второй дифференциал d^2f во всех точках Q является *квазиположительно определенной квадратичной формой.*

В этом случае для всех t из сегмента $0\leqslant t\leqslant 1$ правая (а значит, и левая) часть (12.1.10) неотрицательна, т. е. для всех t из сегмента $0\leqslant t\leqslant 1$

$$F''(t)\geqslant 0. \quad (12.1.11)$$

В силу определения 2 и соотношения (12.1.7) нам достаточно доказать, что для всех t из сегмента $0\leqslant t\leqslant 1$ справедливо неравенство

$$F(t)\leqslant 0. \quad (12.1.12)$$

Для доказательства неравенства (12.1.12) используем соотношение (12.1.11) и легко проверяемые равенства

$$F(0)=0, \qquad F(1)=0. \quad (12.1.13)$$

Предположим, что внутри сегмента $0\leqslant t\leqslant 1$ существует хотя бы одна точка t, в которой $F(t)>0$. Тогда функция $F(t)$ достигает своего максимального на сегменте $0\leqslant t\leqslant 1$ значения в некоторой внутренней точке t_0 этого сегмента, причем $F(t_0)>0$. В этой точке t_0 функция $F(t)$ имеет локальный максимум, а потому $F'(t_0)=0$. Но из неравенства (12.1.11) вытекает, что производная $F'(t)$ не убывает на всем сегменте $0\leqslant t\leqslant 1$, а потому и на сегменте $t_0\leqslant t\leqslant 1$. Отсюда и из условия $F'(t_0)=0$ следует, что производная $F'(t)$ неотрицательна всюду на сегменте $t_0\leqslant t\leqslant 1$, а поэтому функция $F(t)$ не убывает на этом сегменте. Это приводит нас к неравенству

$$F(1)\geqslant F(t_0)>0,$$

противоречащему второму соотношению (12.1.13).

Полученное противоречие доказывает, что наше предположение о том, что на сегменте $0\leqslant t\leqslant 1$ существует хотя бы одна точка t, в которой $F(t)>0$, является ошибочным, т. е. доказывает справедливость всюду на сегменте $0\leqslant t\leqslant 1$ неравенства (12.1.12).

Тем самым первая часть леммы (о выпуклости $f(x)$ при условии, что d^2f является квазиположительно определенной квадратичной формой) доказана.

Вторая часть леммы (о строгой выпуклости $f(x)$ при условии, что d^2f является *строго положительно определенной квадратичной формой*) доказывается аналогично. Исходя из неравенства (12.1.11), справедливого на этот раз со знаком $>$, и из равенств (12.1.13) и предположив, что внутри сегмента $0 \leqslant t \leqslant 1$ существует хотя бы одна точка t, в которой $F(t) \geqslant 0$, мы придем к выводу, что $F(t)$ имеет внутри сегмента $0 \leqslant t \leqslant 1$ точку локального максимума t_0, причем $F(t_0) \geqslant 0$. Но тогда, поскольку $F'(t_0) = 0$, мы получим из (12.1.11), что $F'(t) > 0$ всюду на полуинтервале $t_0 < t \leqslant 1$, а это означает, что $F(1) > F(t_0) \geqslant 0$.

Мы снова получаем противоречие со вторым соотношением (12.1.13), которое доказывает, что $F(t) < 0$ всюду на интервале $0 < t < 1$, т. е. доказывает строгую выпуклость $f(x)$ на множестве Q.

Лемма 2 полностью доказана.

Доказанная лемма естественно наводит на мысль о рассмотрении следующего еще более узкого класса выпуклых на выпуклом множестве Q и два раза дифференцируемых на этом множестве функций.

Определение 4. *Два раза дифференцируемая на выпуклом множестве Q функция $f(x)$ называется сильно выпуклой на этом множестве, если существуют такие две положительные постоянные k_1 и k_2, что второй дифференциал d^2f этой функции, определяемый соотношением* (12.1.8), *во всех точках x множества Q удовлетворяет неравенствам*

$$k_1(\Delta x)^2 \leqslant d^2f \leqslant k_2(\Delta x)^2. \qquad (12.1.14)$$

(В этих неравенствах через Δx обозначен вектор с координатами $(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m)$, а символ $(\Delta x)^2$ обозначает скалярный квадрат этого вектора, т. е. скалярное произведение $(\Delta x, \Delta x)$.)

Из левого неравенства (12.1.14) сразу же вытекает, что второй дифференциал сильно выпуклой функции представляет собой строго положительно определенную во всех точках множества Q функцию, а потому (в силу леммы 2) сильно выпуклая на множестве Q функция заведомо является строго выпуклой на этом множестве.

Вместе с тем класс сильно выпуклых функций достаточно широк и важен в прикладных задачах, и мы ограничимся этим классом при изложении теории градиентного метода поиска минимума.

Начнем с выяснения вопроса о существовании и единственности минимума.

2. Существование минимума у сильно выпуклой функции и единственность минимума у строго выпуклой функции. Пусть функция $f(x)$ определена на выпуклом множестве Q.

Будем говорить, что эта функция имеет в точке x_0 множества Q локальный минимум, если существует такая δ-окрестность этой точки C_δ, что значение $f(x_0)$ не больше значений $f(x)$ этой функции во всех точках пересечения δ-окрестности C_δ и множества Q. При таком определении понятие локального минимума включает в себя и точки краевого минимума функции $f(x)$ на границе множества Q.

Таким образом, при данном нами определении можно подразделить точки минимума на точки внутреннего локального минимума (для случая, когда эти точки являются внутренними точками Q) и точки краевого локального минимума (для случая, когда эти точки являются граничными точками Q).

Для изучения вопроса о существовании и единственности точки локального минимума нам понадобится следующая вспомогательная лемма.

Лемма 3. *Пусть на выпуклом множестве Q задана дифференцируемая выпуклая функция $f(x)$. Для того чтобы эта функция имела локальный минимум в точке x_0 множества Q, необходимо и достаточно, чтобы для любого вектора Δx, для которого точка $x+\Delta x$ принадлежит множеству Q, было справедливо неравенство**

$$(\operatorname{grad} f(x_0),\ \Delta x) \geqslant 0. \tag{12.1.15}$$

Доказательство. *Необходимость.* В силу утверждения, доказанного в п. 8 § 4 гл. 12, левая часть (12.1.15) равна произведению производной функции $f(x)$ в точке x_0 по направлению вектора Δx на длину $|\Delta x|$ этого вектора:

$$(\operatorname{grad} f(x_0),\ \Delta x) = \frac{\partial f}{\partial e}(x_0)\,|\Delta x|, \tag{12.1.16}$$

где $e=\Delta x/|\Delta x|$ — единичный вектор в направлении Δx.

Так как x_0 является точкой локального минимума функции $f(x)$, то производная $\partial f/\partial e(x_0)$ по любому направлению $e=\Delta x/|\Delta x|$ неотрицательна (точнее, равна нулю в случае, если x_0 — точка внутреннего локального экстремума, и неотрицательна в случае, если x_0 — точка краевого локального экстремума).

Итак, правая часть (12.1.16) (а потому и левая часть (12.1.15)) неотрицательна. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть для любого вектора Δx, для которого точка $x_0+\Delta x$ принадлежит Q, справедливо неравенство (12.1.15). Докажем, что точка x_0 является точкой локального минимума функции $f(x)$.

---

* В неравенстве (12.1.15) берется скалярное произведение векторов $\operatorname{grad} f(x_0)$ и Δx. Определение $\operatorname{grad} f(x)$ см. в п. 8 § 4 гл. 12.

Так как функция $f(x)$ по условию является выпуклой на множестве Q, то для любых двух точек x_1 и x_2 этого множества и любого числа t из сегмента $0 \leqslant t \leqslant 1$ справедливо неравенство (12.1.5). Полагая в этом неравенстве $x_1 = x_0$, $x_2 = x_0 + \Delta x$, мы можем переписать это неравенство в виде

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \geqslant \frac{f(x_0 + t\Delta x) - f(x_0)}{t}. \qquad (12.1.17)$$

Считая x_0 и Δx фиксированными, перейдем в неравенстве (12.1.17) к пределу при $t \to 0+0$. По определению производной по направлению (см. п. 8 § 4 гл. 12) предел при $t \to 0+0$ правой части (12.1.17) в точности равен произведению, стоящему в правой части (12.1.16). Поэтому в силу соотношений (12.1.15) и (12.1.16) этот предел неотрицателен. Учитывая, что левая часть (12.1.17) не зависит от t, мы получим в пределе при $t \to 0+0$ из неравенства (12.1.17), что

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \geqslant 0.$$

Последнее неравенство, справедливое для любого вектора Δx, для которого точка $x_0 + \Delta x$ принадлежит Q, доказывает, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 локальный минимум. Достаточность доказана.

Лемма 3 полностью доказана.

Замечание 1. Из приведенного нами доказательства очевидно, что для случая, когда точка x_0 является внутренней точкой множества Q, т. е. когда речь идет о внутреннем локальном минимуме, в формулировке леммы 3 знак $\geqslant$ в неравенстве (12.1.15) можно заменить на знак $=$.

Замечание 2. При доказательстве необходимости леммы 3 мы не использовали требования выпуклости функции $f(x)$. Поэтому доказательство необходимости проходит без требования выпуклости функции $f(x)$. Иными словами, справедливо следующее

Утверждение. *Если функция $f(x)$ дифференцируема на выпуклом множестве Q и имеет локальный минимум во внутренней [в граничной] точке x_0 этого множества, то для любого вектора Δx для которого точка $x_0 + \Delta x$ принадлежит Q, справедливо неравенство*

$$(\operatorname{grad} f(x_0), \Delta x) = 0 \quad [(\operatorname{grad} f(x_0), \Delta x) \geqslant 0].$$

Перейдем к вопросу об единственности и о существовании точки локального минимума.

Теорема (об единственности локального минимума у строго выпуклой функции). *Если функция $f(x)$ дифференцируема и строго выпукла на выпуклом множестве Q, то она может иметь локальный минимум только в одной точке этого множества.*

Доказательство. Предположим, что функция $f(x)$ имеет локальный минимум в двух различных точка x_1 и x_2 множества Q. Тогда условие выпуклости (12.1.5) для точек x_1 и x_2 можно записать в виде

$$f(x_2)-f(x_1) \geqslant \frac{f[x_1+t(x_2-x_1)]-f(x_1)}{t} \qquad (12.1.18)$$

(здесь t — любое число из интервала $0<t<1$).

Меняя в соотношении (12.1.8) точки x_1 и x_2 ролями, мы получим неравенство

$$f(x_1)-f(x_2) \geqslant \frac{f[x_2+t(x_1-x_2)]-f(x_2)}{t}. \qquad (12.1.19)$$

В пределе при $t\to 0+0$ правая часть (12.1.18) [соответственно правая часть (12.1.19)] дает производную функции $f(x)$ по направлению вектора x_2-x_1 [соответственно вектора x_1-x_2], взятую в точке x_1 [соответственно в точке x_2], умноженную на $|x_2-x_1|$. Так как обе точки x_1 и x_2 являются точками локального минимума, то обе указанные производные по направлению неотрицательны, т. е. пределы правых частей (12.1.18) и (12.1.19) при $t\to 0+0$ оба неотрицательны.

Таким образом, из неравенств (12.1.18) и (12.1.19) в пределе при $t\to 0+0$ мы получим

$$f(x_2)-f(x_1) \geqslant 0,$$

$$f(x_1)-f(x_2) \geqslant 0.$$

Сопоставление двух последних неравенств приводит к заключению о том, что $f(x_1)=f(x_2)$.

Используя равенство $f(x_1)=f(x_2)$, мы получим из условия строгой выпуклости (12.1.6), что

$$f[x_1+t(x_2-x_1)]<f(x_1) \qquad (12.1.20)$$

для *всех* t из интервала $0<t<1$.

Неравенство (12.1.20) противоречит тому, что функция $f(x)$ имеет локальный минимум в точке x_1 (в точке $x_1+t(x_2-x_1)$, как угодно близкой при малом t к точке x_1, функция $f(x)$ имеет значение, меньшее значения $f(x_1)$).

Полученное противоречие доказывает, что наше предположение о том, что функция $f(x)$ имеет локальный минимум в двух различных точках множества Q, является ошибочным. Теорема доказана.

Существование локального минимума докажем при более сильных ограничениях, чем единственность.

Теорема (о существовании локального минимума у сильно выпуклой функции). *Если функция $f(x)$ сильно выпукла на замкнутом выпуклом множестве Q, то*

у этой функции существует на множестве Q точка x_0 локального минимума *.

Доказательство. Сначала отметим, что теорема заведомо справедлива для случая, когда выпуклое замкнутое множество Q является, кроме того, ограниченным. В этом случае по второй теореме Вейерштрасса (см. теорему 12.7) функция $f(x)$, будучи во всяком случае непрерывной на множестве Q, достигает в некоторой точке x_0 этого множества своего минимального на Q значения. Указанная точка x_0 и является точкой локального минимума.

Остается доказать теорему в случае, когда выпуклое замкнутое множество Q не является ограниченным. В этом случае мы фиксируем некоторую внутреннюю точку x_1 множества Q и разложим функцию $f(x)$ по формуле Тейлора с центром в точке x_1, взяв остаточный член $R_2(x)$ в форме Лагранжа ** (см. п. 3 § 5 гл. 12). Указанное разложение будет иметь вид

$$f(x)=f(x_1)+df(x_1)+\frac{1}{2}d^2f[x_1+\theta(x-x_1)], \qquad (12.1.21)$$

где θ — число из интервала $0<\theta<1$, так что точка $x_1+\theta(x-x_1)$ принадлежит отрезку, соединяющему точки x_1 и x_2 ***.

Если обозначить через Δx вектор $x-x_1$, то для $df(x_1)$ будет справедливо равенство

$$df(x_1)=(\operatorname{grad} f(x_1),\ \Delta x).$$

Из этого равенства вытекает, что

$$|df(x_1)|\leqslant|\operatorname{grad} f(x_1)|\,|\Delta x|. \qquad (12.1.22)$$

Далее, используя левое неравенство в определении сильной выпуклости (12.1.14), мы придем к неравенству

$$d^2f[x_1+\theta(x-x_1)]\geqslant k_1(\Delta x)^2. \qquad (12.1.23)$$

Из соотношений (12.1.21)—(12.1.23) заключаем, что

$$f(x)-f(x_1)\geqslant-|df(x_1)|+\frac{1}{2}d^2f[x_1+\theta(x-x_1)]\geqslant$$

$$\geqslant-|\operatorname{grad} f(x_1)|\,|\Delta x|+\frac{k_1}{2}|\Delta x|^2,$$

* Так как сильно выпуклая на выпуклом множестве Q функция $f(x)$ является строго выпуклой на этом множестве, то по предыдущей теореме точка x_0 будет единственной точкой локального минимума.

** Мы учитываем, что сильно выпуклая на множестве Q функция $f(x)$ два раза дифференцируема на этом множестве.

*** Какова бы ни была точка x множества Q, отрезок, соединяющий точки x_1 и x, принадлежит множеству Q в силу выпуклости этого множества. В сноске к теореме Тейлора 12.15 отмечалось, что в качестве окрестности центра разложения можно брать любую звездную окрестность этого центра, т. е. можно брать все множество Q.

так что

$$f(x)-f(x_1) \geqslant |\Delta x| \left[\frac{k_1}{2}|\Delta x| - |\operatorname{grad} f(x_1)|\right]. \quad (12.1.24)$$

Учитывая, что точка x_1 фиксирована и величина $|\operatorname{grad} f(x_1)|$ представляет собой некоторое фиксированное число, мы заведомо можем выбрать положительное число R настолько большим, чтобы при $|\Delta x| > R$ выражение в квадратных скобках в (12.1.24) было положительным.

Это означает, что при $|\Delta x| > R$ справедливо неравенство $f(x) > f(x_1)$, т. е. всюду вне замкнутого шара C_R радиуса R с центром в точке x_1 значения $f(x)$ превосходят значение $f(x_1)$ (в центре указанного шара).

Обозначим через Q_R пересечение множества Q с указанным шаром C_R. Так как оба множества Q и C_R являются выпуклыми и замкнутыми, то и их пересечение Q_R также является выпуклым и замкнутым. Так как, кроме того, множество Q_R является ограниченным, то по доказанному выше функция $f(x)$ имеет на множестве Q_R единственную точку x_0 локального минимума.

Поскольку мы доказали, что во всех точках Q, лежащих за пределами Q_R, значения $f(x)$ превосходят $f(x_1)$, то эти значения тем более превосходят $f(x_0)$, т. е. точка x_0 является точкой локального минимума $f(x)$ и на всем множестве Q.

Теорема полностью доказана.

3. Поиск минимума сильно выпуклой функции. Мы доказали, что сильно выпуклая функция $f(x)$, заданная на замкнутом выпуклом множестве Q, имеет на этом множестве единственную точку x_0 локального минимума.

Обратимся к построению и обоснованию алгоритма, с помощью которого отыскивается эта точка x_0.

Фиксируем произвольную точку x_1 множества Q и произвольное число α, удовлетворяющее неравенствам

$$0 < \alpha < \frac{2}{k_2}, \quad (12.1.25)$$

где k_2 — постоянная из неравенства (12.1.14), определяющего сильную выпуклость функции $f(x)$.

Отправляясь от x_1 как от первого приближения, составим итерационную последовательность $\{x_k\}$ с помощью рекуррентного соотношения

$$x_{k+1} = P_Q(x_k - \alpha \operatorname{grad} f(x_k)), \quad k = 1, 2, 3, \ldots. \quad (12.1.26)$$

В настоящем пункте мы докажем следующее утверждение.

Основная теорема. *Пусть функция $f(x)$ является сильно выпуклой на замкнутом множестве Q, и пусть x_1 — произвольная точка множества Q. Тогда итерационная последовательность $\{x_k\}$, определяемая рекуррентным соотношением* (12.1.26),

при любом α, *удовлетворяющем неравенствам* (12.1.25), *сходится к точке* x_0 *локального минимума функции* $f(x)$.

Подчеркнем, что эта теорема дает алгорит отыскания любого (внутреннего или краевого) локального минимума функции $f(x)$, являющейся сильно выпуклой на произвольном (не обязательно ограниченном) замкнутом выпуклом множестве.

Доказательству основной теоремы предпошлем четыре леммы.

Лемма 4. Если Q — выпуклое замкнутое множество E^m, x — *произвольная фиксированная точка* E^m, *а* y — *произвольная точка множества* Q, то

$$(x-P_Q(x),\ y-P_Q(x))\leqslant 0. \tag{12.1.27}$$

Доказательство. Предположим, что неравенство (12.1.27) несправедливо. Тогда существует точка y множества Q такая, что

$$(x-P_Q(x),\ y-P_Q(x))>0. \tag{12.1.28}$$

Из (12.1.28) сразу же вытекает, что точка y не совпадает с $P_Q(x)$.

В силу выпуклости множества Q любая точка $z=P_Q(x)+t(y-P_Q(x))$ отрезка, соединяющего точки $P_Q(x)$ и y, принадлежит множеству Q. Вычислим расстояние между любой такой точкой z и точкой x:

$$\rho^2(z,\ x)=(x-P_Q(x)-t(y-P_Q(x)),\ x-P_Q(x)-t(y-P_Q(x)))=$$
$$=\rho^2(x,\ P_Q(x))-2t(x-P_Q(x),\ y-P_Q(x))+t^2\rho^2(y,\ P_Q(x)). \tag{12.1.29}$$

Так как x и y фиксированы, а t — любое число из сегмента $0\leqslant t\leqslant 1$, то в силу неравенства (12.1.28) мы можем взять t удовлетворяющим неравенству

$$0<t<\frac{2(x-P_Q(x),\ y-P_Q(x))}{\rho^2(y,\ P_Q(x))}.$$

При таком выборе t

$$-2t(x-P_Q(x),\ y-P_Q(x))+t^2\rho^2(y,\ P_Q(x))<0,$$

и мы получим из (12.1.29), что

$$\rho^2(z,\ x)<\rho^2(x,\ P_Q(x)).$$

Последнее неравенство противоречит тому, что точка $P_Q(x)$ является проекцией точки x на множество Q: у множества Q нашлась точка z, удаленная от x меньше, чем $P_Q(x)$ от x. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Лемма 5. *Пусть* $f(x)$ *дифференцируема и выпукла на замкнутом выпуклом множестве* Q. *Если при некотором положительном* α *проекция* $P_Q(x_0-\alpha\operatorname{grad}f(x_0))$ *точки* $x_0-\alpha\operatorname{grad}f(x_0)$ *на*

множество Q совпадает с точкой x_0 этого множества, то функция $f(x)$ имеет в точке x_0 локальный минимум.

Доказательство. Используя лемму 4, запишем неравенство (12.1.27) для точек $x=x_0-\alpha \operatorname{grad} f(x_0)$ и $y=x_0+\Delta x$, где Δx — любой вектор, для которого точка $y=x_0+\Delta x$ принадлежит Q. В результате получим

$$(x_0-\alpha \operatorname{grad} f(x_0)-P_Q(x_0-\alpha \operatorname{grad} f(x_0)),$$
$$x_0+\Delta x-P_Q(x_0-\alpha \operatorname{grad} f(x_0)))\leqslant 0.$$

Учитывая, что $P_Q(x_0-\alpha \operatorname{grad} f(x_0))=x_0$, получим из последнего неравенства следующее соотношение:

$$(\operatorname{grad} f(x_0),\ \Delta x)\geqslant 0.$$

Это соотношение, справедливое для любого вектора Δx, для которого точка $x_0+\Delta x$ принадлежит Q, в силу леммы 3 устанавливает, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 локальный минимум.

Лемма 5 доказана.

Предположим, что функция $f(x)$ является сильно выпуклой на ограниченном замкнутом выпуклом множестве Q. Обозначим через m минимальное значение $f(x)$ на множестве Q, а через μ число, строго большее m, так что

$$\mu > m = \min_{x\in Q} f(x).$$

Фиксируем число ν, строго большее μ, и обозначим через $\tilde{Q}$ — подмножество тех точек x множества Q, для которых

$$\mu\leqslant f(x)\leqslant \nu. \qquad (12.1.30)$$

Множество $\tilde{Q}$ как подмножество ограниченного множества Q само является ограниченным.

Убедимся в том, что множество $\tilde{Q}$ является *замкнутым*. Пусть $\{x_k\}$ — произвольная сходящаяся последовательность точек множества $\tilde{Q}$. Требуется доказать, что предел x_0* этой последовательности также принадлежит множеству $\tilde{Q}$. Так как каждая точка x_k принадлежит множеству $\tilde{Q}$, то для каждого номера k

$$\mu\leqslant f(x_k)\leqslant \nu. \qquad (12.1.31)$$

Сильно выпуклая функция $f(x)$ во всяком случае непрерывна на Q, а поэтому из сходимости последовательности $\{x_k\}$ к x_0 в силу определения непрерывности функции по Гейне вытекает сходимость последовательности $f(x_k)$ к числу $f(x_0)$. Так как все элементы сходящейся числовой последовательности $f(x_k)$ удовлетворяют неравенствам (12.1.31), то и предел $f(x_0)$ этой последовательности удовлетворяет неравенствам $\mu\leqslant f(x_0)\leqslant \nu$

* Так как исходное множество Q является замкнутым, то предел x_0 во всяком случае принадлежит Q.

(см. гл. 3, следствие 2 из теоремы 3.13), а это и означает, что точка x_0 принадлежит множеству $\hat{Q}$. Доказательство замкнутости множества $\hat{Q}$ завершено.

Итак, множество $\hat{Q}$ всех точек x из множества Q, для которых справедливы неравенства (12.1.30), является замкнутым и ограниченным.

Докажем теперь следующую лемму.

Лемма 6. *Пусть функция $f(x)$ сильно выпукла на выпуклом замкнутом множестве Q, x — любая точка Q, α — любое положительное число, символ Δx обозначает разность*

$$\Delta x = P_Q(x - \alpha \operatorname{grad} f(x)) - x. \tag{12.1.32}$$

Тогда справедливо неравенство

$$(\operatorname{grad} f(x), \Delta x) \leqslant -\frac{1}{\alpha} |\Delta x|. \tag{12.1.33}$$

Если же множество Q, кроме того, ограничено и точка x принадлежит подмножеству $\hat{Q}$ тех точек Q, для которых справедливы неравенства (12.1.30) при $\mu > \min\limits_{x \in Q} f(x)$, то найдется строго положительное число γ такое, что справедливо неравенство

$$|\Delta x| \geqslant \gamma. \tag{12.1.34}$$

Доказательство. Докажем сначала неравенство (12.1.33). Фиксируем произвольную точку x множества Q и, привлекая лемму 4, запишем неравенство (12.1.27), взяв в нем вместо x точку $x - \alpha \operatorname{grad} f(x)$, а вместо y точку x. При этом получим неравенство

$$(x - \alpha \operatorname{grad} f(x) - P_Q(x - \alpha \operatorname{grad} f(x)),\ x - P_Q(x - \alpha \operatorname{grad} f(x))) \leqslant 0,$$

которое с учетом обозначения $\Delta x = P_Q(x - \alpha \operatorname{grad} f(x)) - x$ перепишется в виде

$$(-\alpha \operatorname{grad} f(x) - \Delta x,\ -\Delta x) \leqslant 0.$$

Из последнего неравенства и из свойств скалярного произведения вытекает, что

$$\alpha(\operatorname{grad} f(x), \Delta x) + |\Delta x^2| \leqslant 0,$$

а это и приводит к неравенству (12.1.33).

Остается доказать, что при дополнительном предположении о том, что Q ограничено и что x принадлежит подмножеству $\hat{Q}$, существует $\gamma > 0$ такое, что справедливо неравенство (12.1.34). Рассмотрим неотрицательную функцию точки x вида

$$|\Delta x| = |P_Q(x - \alpha \operatorname{grad} f(x)) - x|. \tag{12.1.35}$$

Убедимся в том, что эта функция является непрерывной на множестве Q функцией точки x.

Докажем сначала, что векторная функция $P_Q(x)$ является непрерывной функцией точки x. Для этого достаточно доказать неравенство

$$P_Q(x+\Delta x)-P_Q(x)\,|\leqslant|\Delta x|, \tag{12.1.36}$$

справедливое для любых векторов x и Δx.

В силу леммы 4 справедливы неравенства

$$(x-P_Q(x),\ P_Q(x+\Delta x)-P_Q(x))\leqslant 0,$$
$$(x+\Delta x-P_Q(x+\Delta x),\ P_Q(x)-P_Q(x+\Delta x))\leqslant 0.$$

Используя эти неравенства и неравенство Коши — Буняковского получим цепочку соотношений

$$|P_Q(x+\Delta x)-P_Q(x)\,|^2=(P_Q(x+\Delta x)-P_Q(x),$$
$$P_Q(x+\Delta x)-P_Q(x))=(P_Q(x+\Delta x)-x,\ P_Q(x+\Delta x)-P_Q(x))+$$
$$+(x-P_Q(x),\ P_Q(x+\Delta x)-P_Q(x))\leqslant$$
$$\leqslant(P_Q(x+\Delta x)-x,\ P_Q(x+\Delta x)-P_Q(x))=P_Q(x+\Delta x)-x-\Delta x,$$
$$P_Q(x+\Delta x)-P_Q(x))+(\Delta x,\ P_Q(x+\Delta x)-P_Q(x))\leqslant$$
$$\leqslant(\Delta x,\ P_Q(x+\Delta x)-P_Q(x))\leqslant|\Delta x|\,|P_Q(x+\Delta x)-P_Q(x)\,|,$$

из которой и вытекает неравенство (12.1.36).

Итак, доказано, что $P_Q(x)$ является непрерывной векторной функцией точки x. Из сильной выпуклости $f(x)$ на Q вытекает, что функция $\alpha\,\mathrm{grad}\,f(x)$ также является непрерывной на Q векторной функцией точки x. Но тогда из теоремы о непрерывности сложной функции и непрерывности разности непрерывных функций вытекает, что и функция

$$P_Q(x-\alpha\,\mathrm{grad}\,f(x))-x$$

является непрерывной на множестве Q векторной функцией точки x.

Модуль указанной векторной функции, т. е. скалярная функция (12.1.35) тем более является непрерывной на множестве Q, а потому и на его подмножестве $\tilde{Q}$.

Итак, функция (12.1.35) непрерывна и неотрицательна всюду на замкнутом ограниченном множестве $\tilde{Q}$. В таком случае, по второй теореме Вейерштрасса (см. теорему 12.7) эта функция достигает на множестве $\tilde{Q}$ своего неотрицательного минимального значения γ. Указанное минимальное значение γ заведомо строго положительно, ибо если бы γ равнялась нулю, то на множестве $\tilde{Q}$ нашлась бы точка x_0 такая, что $P_Q(x_0-\alpha\,\mathrm{grad}\,f(x_0))-x_0=0$, а это означало бы в силу леммы 5, что в этой точке x_0 множества $\tilde{Q}$ функция $f(x)$ имеет единственный на множестве Q локальный минимум (в то время как этот минимум по определению $\tilde{Q}$ лежит вне Q). Итак, $\gamma>0$, и неравенство (12.1.34) доказано.

Лемма 6 полностью доказана.

Лемма 7. *Пусть функция $f(x)$ сильно выпукла на выпуклом замкнутом множестве Q, x — любая точка Q, α — любое число, удовлетворяющее неравенствам* (12.1.25), Δx — *разность вида* (12.1.32). *Тогда при переходе из точки x в точку $x^* = P_Q(x - \alpha \operatorname{grad} f(x))$ значение функции $f(x)$ не возрастает, причем**

$$f(x) - f(x^*) \geqslant \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{k_2}{2}\right) |\Delta x|^2. \qquad (12.1.37)$$

Если же множество Q, кроме того, ограничено и точка x принадлежит подмножеству $\hat{Q}$ тех точек Q, для которых справедливо неравенство (12.1.30) *при* $\mu > \min\limits_{x \in Q} f(x)$, *то неравенство* (12.1.37) *переходит в неравенство*

$$f(x) - f(x^*) \geqslant \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{k_2}{2}\right) \gamma^2, \qquad (12.1.38)$$

где $\gamma > 0$ — постоянная из леммы 6.

Доказательство. Достаточно для любой точки x множества Q установить неравенство (12.1.37), ибо из этого неравенства и из неравенства (12.1.34) сразу вытекает и неравенство (12.1.38) (для точек x, принадлежащих $\hat{Q}$, при условии, что Q ограничено).

Сначала докажем неравенство (12.1.37) для случая, когда точка x является внутренней точкой множества Q. Имея в виду, что точка $x^* = P_Q(x - \alpha \operatorname{grad} f(x))$ принадлежит множеству Q, на котором функция $f(x)$ сильно выпукла, выразим значение $f(x^*)$ по формуле Тейлора с центром в точке x, взяв остаточный член $R_2(x^*)$ в форме Лагранжа. При этом получим

$$f(x^*) = f(x) + (\operatorname{grad} f(x), \Delta x) + \frac{1}{2} d^2 f(x + \theta \Delta x), \qquad (12.1.39)$$

где $\Delta x = x^* - x = P_Q(x - \alpha \operatorname{grad} f(x)) - x$, $0 < \theta < 1$.

Используя неравенство (12.1.33) и правое неравенство (12.1.14), мы получим из формулы Тейлора (12.1.39)

$$f(x^*) - f(x) \leqslant -\frac{1}{\alpha} |\Delta x|^2 + \frac{k_2}{2} |\Delta x|^2,$$

так что для случая внутренней точки x неравенство (12.1.37) доказано.

---

* Из (13.1.25) вытекает, что $\frac{1}{\alpha} - \frac{k_2}{2} > 0$.

Пусть теперь x является граничной точкой множества Q. По определению граничной точки* найдется последовательность $\{x_n\}$ внутренних точек множества Q, сходящихся к x.

Для каждой точки x_n по формуле Тейлора с центром в этой точке мы получим

$$f(x^*) = f(x_n) + (\operatorname{grad} f(x_n),\ (x^* - x_n)) + \\ + \frac{1}{2}\, d^2 f[x_n + \theta_n (x^* - x_n)], \qquad (12.1.40)$$

где $0 < \theta_n < 1$.

Учитывая, что правое неравенство (12.1.14) справедливо для $d^2 f$ в любой точке множества Q и что $\operatorname{grad} f(x)$ является непрерывной векторной функцией точки x на множестве Q, мы получим, что в пределе при $n \to +\infty$ из соотношения (12.1.40) вытекает справедливость неравенства (12.1.37) для граничной точки x множества Q.

Лемма 7 доказана.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству основной теоремы. Сначала докажем основную теорему при дополнительном предположении о том, что замкнутое выпуклое множество Q является также ограниченным.

Возьмем произвольную точку x_1 множества Q и составим итерационную последовательность $\{x_k\}$ точек, определяемых рекуррентным соотношением (12.1.26), при условии, что число α удовлетворяет неравенствам (12.1.25).

Из леммы 7 (а точнее, из неравенства (12.1.37)) сразу же вытекает, что

$$f(x_k) - f(x_{k+1}) \geqslant \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{k_2}{2}\right) |x_k - x_{k+1}|^2 \geqslant 0.$$

Таким образом, последовательность $\{f(x_k)\}$ является невозрастающей. Так как, кроме того, эта последовательность ограничена снизу (минимальным значением m функции $f(x)$ на множестве Q), то она является сходящейся (см. теорему 3.15 из гл. 3). Обозначим предел последовательности $\{f(x_k)\}$ через μ. Ясно, что $\mu \geqslant m$, где m — минимальное значение $f(x)$ на множестве Q.

Кроме того, поскольку все члены невозрастающей сходящейся последовательности не меньше ее предела (см. замечание 3 к теореме 3.15, гл. 3), то для всех номеров k справедливо неравенство

$$f(x_k) \geqslant \mu. \qquad (12.1.41)$$

Докажем, что для предела μ справедливо равенство

$$\mu = m = \min_{x \in Q} f(x).$$

* Так как множество Q выпукло, то оно не может иметь изолированных граничных точек.

Предположим, что это равенство несправедливо, т. е. предположим, что $\mu > m$. Тогда если обозначить через ν максимальное значение $f(x)$ на множестве Q, а через $\hat{Q}$ подмножество тех точек Q, для которых справедливы неравенства (12.1.30), то в силу леммы 7 найдется строго положительная постоянная γ такая, что справедливо неравенство (12.1.38), которое приводит к следующему неравенству:

$$f(x_k) - f(x_{k+1}) \geqslant \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{k_2}{2}\right)\gamma^2 > 0, \qquad (12.1.42)$$

справедливому для любого номера k.

Суммируя неравенства (12.1.42), записанное для номеров k, равных 1, 2, ..., $n-1$, мы получим, что для любого номера n

$$f(x_1) - f(x_n) \geqslant (n-1)\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{k_2}{2}\right)\gamma^2$$

или, что то же самое,

$$f(x_n) \leqslant f(x_1) - (n-1)\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{k_2}{2}\right)\gamma^2. \qquad (12.1.43)$$

Неравенства (12.1.43), справедливые для любого номера n, противоречат неравенству (12.1.41), ибо величина, стоящая в правой части (12.1.43), при достаточно большом номере n становится меньше числа μ.

Полученное противоречие доказывает ошибочность предположения $\mu > m$, т. е. доказывает что $\mu = m$. Итак, доказано, что последовательность $f(x_k)$ сходится к минимальному значению m функции $f(x)$ на множестве Q.

Остается доказать, что сама итерационная последовательность $\{x_k\}$ сходится к той точке x_0, в которой это минимальное значение достигается *.

Фиксируем произвольное положительное число ε и обозначим через C_ε открытый m-мерный шар радиуса ε с центром в точке x_0. Далее обозначим через $\hat{Q}_\varepsilon$ ту часть множества Q, которая не содержит точек шара C_ε. Ясно, что $\hat{Q}_\varepsilon$ — замкнутое ограниченное множество, так что функция $f(x)$ достигает (в силу второй теоремы Вейерштрасса) своего минимального на этом множестве значения, которое мы обозначим через m_ε.

Можно утверждать, что $m_\varepsilon > m$, ибо в противном случае нарушалось бы условие существования у функции $f(x)$ на множестве Q единственной точки локального минимума.

Далее, можно утверждать, что на множестве $\hat{Q}_\varepsilon$ имеется лишь конечное число точек последовательности $\{x_k\}$ (ибо последовательность $\{f(x_k)\}$, у которой имеется бесконечное чис-

* Нами уже доказано, что минимальное значение функции $f(x)$ на множестве Q достигается в единственной точке этого множества.

ло элементов, удовлетворяющих неравенству $f(x_k) \geqslant m_\varepsilon > m$, не может сходиться к числу m).

Значит, мы доказали, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N, начиная с которого все элементы последовательности $\{x_k\}$ лежат в шаре C_ε радиуса ε с центром в точке x_0. Это и означает, что последовательность $\{x_k\}$ сходится к точке x_0.

Тем самым для случая ограниченного замкнутого выпуклого множества Q основная теорема доказана.

Пусть теперь Q — неограниченное замкнутое выпуклое множество. Снова фиксируем произвольную точку x_1 этого множества и составим итерационную последовательность (12.1.26) при условии, что число α удовлетворяет неравенствам (12.1.25).

При доказательстве теоремы о существовании локального минимума у сильно выпуклой функции (см. п. 2) мы установили, что точка x_0 локального минимума сильно выпуклой функции $f(x)$ на неограниченном замкнутом выпуклом множестве Q лежит в той части Q_R множества Q, которая содержится в шаре C_R с центром в точке x_1, радиус R которого выбран из условия

$$\frac{k_1}{2} R - |\operatorname{grad} f(x_1)| > 0.$$

Там же установлено, что подмножество Q_R множества Q является ограниченным выпуклым замкнутым множеством и что всюду вне Q_R значения $f(x)$ превосходят $f(x_1)$.

Так как в силу леммы 7 (а точнее, в силу неравенства (12.1.37)) последовательность $\{f(x_k)\}$ является невозрастающей, а за пределами Q_R все значения $f(x)$ превосходят $f(x_1)$, то все точки итерационной последовательности $\{x_k\}$ лежат в Q_R, а потому для любого номера k

$$P_Q(x_k - \alpha \operatorname{grad} f(x_k)) = P_{Q_R}(x_k - \alpha \operatorname{grad} f(x_k)).$$

Значит, итерационную последовательность (12.1.26) можно заменить на

$$x_{k+1} = P_{Q_R}(x_k - \alpha \operatorname{grad} f(x_k)),$$

после чего все дальнейшие рассуждения сведутся к ограниченному замкнутому выпуклому множеству Q_R, т. е. к уже рассмотренному выше случаю.

Основная теорема полностью доказана.

Замечание 1. Особенно просто выглядит последовательность (12.1.26) для случая, когда множество Q совпадает со всем пространством E^m. В этом случае для любой точки x справедливо равенство $P_Q(x) = x$, и потому рекуррентная формула (12.1.26) принимает вид

$$x_{k+1} = x_k - \alpha \operatorname{grad} f(x_k).$$

ДОПОЛНЕНИЕ 2

Метрические, нормированные пространства

В этом дополнении будут изложены важные понятия и факты общей топологии, которые часто употребляются в различных разделах математики. Читатель без труда обнаружит, что эти понятия и факты являются естественным обобщением ряда определений и утверждений, содержащихся в предыдущих главах.

Метрические пространства

1. Определение метрического пространства. Примеры. Выше мы уже подчеркивали, что фундаментальную роль в анализе играет понятие предела. В основе этого понятия лежит определение расстояния между числами, т. е. абсолютная величина разности этих чисел. Поэтому представляется естественным ввести понятие расстояния уже не между двумя числами, а между двумя произвольными элементами некоторого абстрактного множества X. Ясно, что при этом это расстояние должно обобщать свойства расстояния между числами числовой оси. В связи с вышесказанным дадим следующее определение.

Определение 1. *На множестве X определена структура метрического пространства, если задана функция $\rho(x, y)$ двух произвольных элементов этого множества x и y, удовлетворяющая аксиомам:*

1) $\rho(x, y)=0$ *тогда и только тогда, когда* $x=y$;
2) $\rho(x, y)=\rho(y, x)$ *(аксиома симметрии)*;
3) $\rho(x, y)\leqslant\rho(y, z)+\rho(z, x)$ *(неравенство треугольника).*

Функция $\rho(x, y)$ называется метрикой или функцией расстояния, число $\rho(x, y)$ называется расстоянием между точками x и y множества X.

Таким образом, метрическое пространство образуют множество X и функция расстояния ρ. Поэтому обозначается метрическое пространство обычно так: (X, ρ) или просто X, если ясно, о какой метрике идет речь.

Если в аксиоме 3) положить $x=y$, то, учитывая 1), получается, что $0\leqslant\rho(y, z)$, т. е. функция расстояния — неотрицательная функция своих аргументов.

Приведем примеры наиболее часто встречающихся метрических пространств.

Примеры.

1) Множество вещественных чисел превращается в метрическое пространство, если для любых чисел x, y положить $\rho(x, y)=|x-y|$. Это метрическое пространство обычно обозначается E^1.

2) Координатное n-мерное пространство $X=A^n$, точки которого (или элементы множества X) — упорядоченные наборы n чисел, $x=(x_1, \ldots, x_n)$, превращается в метрическое пространство, если положить $\rho(x, y)=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right)^{1/2}$, где $x=(x_1, \ldots, x_n)$, $y=(y_1, \ldots, y_n)$; обозначается оно* через $E^n=(X, \rho)$. Аксиомы 1) и 2) определения метрического пространства, как легко видеть, выполняются. Справедливость аксиомы 3) вытекает из неравенства Коши — Буняковского для сумм (см. § 5 гл. 9):

$$\rho^2(x, y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2=\sum_{i=1}^{n}[(x_i-z_i)+(z_i-y_i)]^2=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2+2\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)(z_i-y_i)+\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2+2\sum_{i=1}^{n}|x_i-z_i||z_i-y_i|+\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2+2\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-z_i|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n}|z_i-y_i|^2\right)^{1/2}+\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2=$$

$$=\rho^2(x, z)+2\rho(x, z)\rho(z, y)+\rho^2(z, y)=[\rho(x, z)+\rho(z, y)]^2.$$

Таким образом, $\rho(x, y)\leqslant\rho(x, z)+\rho(z, y)$, и неравенство треугольника в этом случае установлено. Заметим, что выше мы применили неравенство Коши —Буняковского к сумме $\sum_{i=1}^{n}|x_i-z_i||z_i-y_i|=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$, где положено

$$a_i=|x_i-z_i|, \quad b_i=|z_i-y_i|, \quad i=1, \ldots, n.$$

На множестве X, элементами которого являются упорядоченные наборы n чисел $x=(x_1, \ldots, x_n)$, можно вводить и другие функции расстояния, например положить, что:

$$\rho_0(x, y)=\frac{\rho(x, y)}{1+\rho(x, y)}, \quad x, y\in X, \qquad \text{а)}$$

где функция $\rho(x, y)$ введена выше, в примере 2); или положить

$$\rho_1(x, y)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i-y_i|; \qquad \text{б)}$$

* Этим же символом E^n мы обозначим и евклидово пространство, состоящее из элементов произвольной природы и имеющее размерность n.

$$\rho_2(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|; \qquad \text{в)}$$

$$\rho_3(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \neq y, \\ 0, & \text{если } x = y; \end{cases} \qquad \text{г)}$$

$$\rho_4(x, y) = \begin{cases} \rho(x, y), & \text{если } \rho(x, y) < 1, \\ 1, & \text{если } \rho(x, y) \geqslant 1, \end{cases} \qquad \text{д)}$$

где функция $\rho(x, y)$ определяется, как указано выше.

Естественно, что при этом одно и то же множество X превращается в разные метрические пространства (X, ρ_i), где $i=0, 1, 2, 3, 4$.

3) Пусть Y — множество непрерывных функций, заданных на сегменте $[a, b]$. Введем метрику, полагая что $\rho(x, y) = \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)|$. Получившееся пространство представляет собой метрическое пространство. Оно обозначается через

$$C[a, b] = (Y, \rho).$$

Точно так же множество Z n раз непрерывно дифференцируемых функций на сегменте $[a, b]$, $n \geqslant 1$, становится метрическим пространством, если ввести метрику по правилу:

$$\rho(x, y) = \max_{0 \leqslant i \leqslant n} \max_{a \leqslant t < b} |x^{(i)}(t) - y^{(i)}(t)|,$$

где $x^{(0)}(t) \equiv x(t)$, $y^{(0)}(t) \equiv y(t)$. Это пространство обозначается обычно так:

$$C_n[a, b] = (Z, \rho), \qquad n \geqslant 1.$$

Пространство $C[a, b]$ иногда обозначается символом $C_0[a, b]$.

4) Пусть V — множество всех ограниченных последовательностей $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ действительных чисел. Положим $\rho(x, y) = \sup\limits_i |x_i - y_i|$. Справедливость аксиом 1)—3) метрического пространства очевидна. Это пространство обозначается через $m = (V, \rho)$.

Заметим, что каждое подмножество X_0 метрического пространства (X, ρ), в свою очередь, является метрическим пространством с той же самой функцией расстояния ρ. Действительно, если аксиомы, определяющие метрику ρ, выполнены для любых $x, y, z \in X$, то они выполнены и для x, y, z, принадлежащих X_0. Таким образом, каждое подмножество E^n — метрическое пространство с функцией $\rho(x, y) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right)^{1/2}$. Точно так же любое подмножество $C_n[a, b]$ — метрическое пространство, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Пара (X_0, ρ) *называется* п о д п р о с т р а н с т в о м *пространства* (X, ρ).

Заметим также, что если $\rho(x, y)$ — функция расстояния в некотором метрическом пространстве, то по формулам а) или д) примера 2) мы можем получить новую функцию расстояния.

2. Открытые и замкнутые множества. *Ш а р о м* $O(a, r)$ *в метрическом пространстве* X (*з а м к н у т ы м ш а р о м* $K(a, r)$) *с центром в точке* a *и радиусом* r *называется совокупность всех точек* $x \in X$ *таких, что* $\rho(x, a) < r$ ($\rho(x, a) \leqslant r$).

О п р е д е л е н и е 2. *Множество* $\Sigma \subset X$ *называется о т к р ы т ы м в пространстве* $X = (X, \rho)$, *если вместе с каждой своей точкой* x *оно содержит и некоторый шар* $O(x, r)$. $\varnothing$ *также назовем открытым.*

О п р е д е л е н и е 3. *О к р е с т н о с т ь ю т о ч к и* $x \in X$ *называется любое открытое множество, содержащее* x. *О к р е с т н о с т ь ю н е к о т о р о г о п о д м н о ж е с т в а* X *(быть может, самого* X*) называется любое открытое множество, содержащее данное подмножество*. Окрестность точки* x *будем обозначать через* Σ_x.

О п р е д е л е н и е 4. *Пусть множество* $Y \subset X$, *тогда точка* $x \in X$ *называется п р е д е л ь н о й т о ч к о й множества* Y, *если каждая окрестность точки* x *содержит по крайней мере одну точку множества* Y, *отличную от* x.

Точка $y \in Y$ *называется и з о л и р о в а н н о й т о ч к о й множества* Y, *если существует окрестность точки* y, *в которой нет точек* Y, *отличных от* y.

О п р е д е л е н и е 5. *Точка* y, *принадлежащая множеству* Y — *подмножеству* X, — *называется в н у т р е н н е й, если она содержится в* Y *вместе с некоторой своей окрестностью. Точки, внутренние для дополнения* Y *в* X, *называются в н е ш н и м и по отношению к* Y. *Если точка не является ни внутренней, ни внешней по отношению к* Y, *то она называется г р а н и ч н о й для* Y. *Множество граничных точек для* Y *обозначается через* ∂Y.

О п р е д е л е н и е 6. *Множество в метрическом пространстве называется з а м к н у т ы м, если его дополнение открыто.*

Справедливо следующее утверждение.

Л е м м а 1. *Сумма любого числа открытых множеств, пересечение любого конечного числа открытых множеств есть мно-*

---

* Шар $O(a, r)$ в метрическом пространстве, очевидно, является открытым множеством, а поэтому его также можно считать окрестностью точки a. То, что шар $O(a, r)$ — открытое множество, следует из того, что этот шар содержит любую свою точку x вместе с некоторым шаром $O(x, \varepsilon)$, где $0 < \varepsilon < r - \rho(a, x)$. Действительно, если $y \in O(x, \varepsilon)$, то $\rho(a, y) \leqslant \rho(a, x) + \rho(x, y) < \rho(a, x) + r - \rho(a, x) = r$, т. е. $y \in O(a, r)$, поэтому любая точка $y \in O(x, \varepsilon)$ принадлежит также шару $O(a, r)$. Следовательно, шар $O(x, \varepsilon) \subset O(a, r)$, и поэтому исходный шар $O(a, r)$ — открытое множество (см. также пример 3) в конце настоящего раздела).

жество открытое, $\varnothing$ и все метрическое пространство X открыты.

Пересечение любого числа замкнутых множеств замкнуто, сумма любого конечного числа замкнутых множеств замкнута, $\varnothing$ и X замкнуты.

Доказательство. Пусть $\{\Sigma_\alpha\}$ — семейство открытых в X множеств. Если $x \in \bigcup\limits_\alpha \Sigma_\alpha$, то существует α_0 такое, что $x \in \Sigma_{\alpha_0}$ следовательно, существует число $r>0$ такое, что $O(x, r) \subset \Sigma_{\alpha_0}$, т. е. $O(x, r) \subset \bigcup\limits_\alpha \Sigma_\alpha$. Следовательно, $\bigcup\limits_\alpha \Sigma_\alpha$ — открытое множество.

Далее, если $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ открыты в X, то из того, что $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} \Sigma_i$, следует, что для любого $i=1, \ldots, n$ $x \in \Sigma_i$, т. е. для любого $i=1, \ldots, n$ существует такое $r_i>0$, что $O(x, r_i) \subset \Sigma_i$. Взяв $r = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} r_i$, получаем, что для любого $i=1, \ldots, n$

$$O(x, r) \subset O(x, r_i), \quad O(x, r) \subset \bigcap_{i=1}^{n} \Sigma_i,$$

т. е. пересечение множеств Σ_i, $i=1, \ldots, n$ — открытое множество.

Второе утверждение непосредственно следует из первого, если воспользоваться принципом двойственности для множеств.

Например, пусть $\{F_\alpha\}$ — семейство замкнутых в X множеств. Для каждого α введем в рассмотрение открытое множество $\Sigma_\alpha = F_\alpha'$ *. Тогда $(\bigcap\limits_\alpha F_\alpha)' = \bigcup\limits_\alpha F_\alpha' = \bigcup\limits_\alpha \Sigma_\alpha$, т. е. $(\bigcap\limits_\alpha F_\alpha)'$ — открытое множество, следовательно, $\bigcap\limits_\alpha F_\alpha$ замкнуто. То, что $\varnothing$ и X одновременно открыты и замкнуты, очевидно **.

Определение 7. *Замыканием $\overline{Y}$ множества Y называется пересечение всех замкнутых множеств, содержащих Y.*

Очевидно, что $\overline{Y}$ содержится в каждом замкнутом множестве, содержащем Y. Следовательно, замыкание множества Y есть наименьшее из всех замкнутых множеств, содержащих Y.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Операция замыкания в метрическом пространстве удовлетворяет следующим свойствам:*

$$1)\ \overline{Y} \supset Y, \quad 2)\ \overline{\overline{Y}} = \overline{Y}, \quad 3)\ \overline{Y \cup Z} = \overline{Y} \cup \overline{Z}, \quad 4)\ \overline{\varnothing} = \varnothing, \quad \overline{X} = X.$$

Доказательство. Свойство 1) очевидно: если $x \in Y$, то x принадлежит любому замкнутому множеству, содержащему Y, следовательно, x принадлежит и пересечению этих замкнутых множеств, т. е. $x \in \overline{Y}$.

---

* Напомним, что A' обозначает дополнение множества A.

** Мы *по определению* полагаем $\varnothing$ открытым. Так как X, очевидно, открыто, то $\varnothing = X'$ будет являться по определению 6 и замкнутым множеством. Аналогично $X = \varnothing'$ замкнуто.

Свойство 2) вытекает из того, что $\overline{Y}$, будучи пересечением замкнутых множеств, является в силу леммы 1 замкнутым множеством.

Докажем свойство 3), так как $Y \subset Y \cup Z$, то каждое замкнутое множество, содержащее $Y \cup Z$, содержит и Y, следовательно, пересечение этих замкнутых множеств также содержит Y, т. е. $Y \subset \overline{Y \cup Z}$, но $\overline{Y}$ принадлежит любому замкнутому множеству, содержащему Y, следовательно, $\overline{Y} \subset \overline{Y \cup Z}$. Аналогично $\overline{Z} \subset \overline{Y \cup Z}$. Таким образом, $\overline{Y} \cup \overline{Z} \subset Y \cup Z$; обратно, $\overline{Y} \cup \overline{Z}$ в силу леммы 1 замкнуто, следовательно, $\overline{Y} \cup \overline{Z} \supset \overline{Y \cup Z}$.

Утверждение 4) означает, что $\varnothing$ и X — замкнутые множества.

Лемма полностью доказана.

Попутно мы показали, что если множество $A \subset B$, то $\overline{A} \subset \overline{B}$.

Дадим следующее определение.

Определение 8. *Пространство* (X, ρ) *называется* **связным**, *если его нельзя представить в виде суммы двух непустых открытых непересекающихся подмножеств.*

Очевидно, что пространство связно тогда и только тогда, когда его нельзя представить в виде суммы двух непустых замкнутых непересекающихся множеств.

Множество Y, принадлежащее метрическому пространству X, связно, если Y связно как подпространство в X.

3. Прямое произведение метрических пространств. Если (X_1, ρ_1), (X_2, ρ_2) — два метрических пространства, то можно определить прямое произведение этих метрических пространств. Пусть $X = X_1 \times X_2$ — прямое произведение множеств X_1 и X_2, т. е. множество всевозможных пар (x_1, x_2), где $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$. Метрику на множестве X можно ввести, например, по следующему правилу:

$$\rho(x, y) = [\rho_1^2(x_1, y_1) + \rho_2^2(x_2, y_2)]^{1/2},$$

где $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $x_i \in X_i$, $y_i \in Y_i$, $i = 1, 2$. Пара (X, ρ), $X = X_1 \times X_2$, ρ — функция расстояния, введенная выше, является метрическим пространством и, по определению, называется **прямым произведением** метрических пространств (X_1, ρ_1) и (X_2, ρ_2).

Если задана счетная последовательность метрических пространств (X_1, ρ_1), (X_2, ρ_2), ... и через X обозначено прямое произведение множеств X_i, $i = 1, 2, \ldots$, $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$, т. е. X состоит из элементов $x = (x_1, x_2, \ldots)$, $x_i \in X_i$, то можно дать, например, следующее определение.

Определение 9. *Прямым произведением метрических пространств* (X_1, ρ_1), (X_2, ρ_2), ... *называется пара* (X, ρ), где

$$X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i, \quad \rho(x, y) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \frac{\rho_k(x_k, y_k)}{1 + \rho_k(x_k, y_k)},$$

$$x, y \in X, \ x_k, y_k \in X_k, \ x = (x_1, x_2, \ldots), \ y = y_1, y_2, \ldots),$$

$$k = 1, 2, \ldots .$$

Обозначается оно так: $(X, \rho) = \prod_{i=1}^{\infty} (X_i, \rho_i)$.

4. Всюду плотные и совершенные множества.

Определение 10. *Пусть A и B — два множества в метрическом пространстве (X, ρ). Множество A называется плотным в B, если $\bar{A} \supset B$. Множество A называется всюду плотным в пространстве X, если $\bar{A} = X$.*

Пространства, в которых имеются счетные всюду плотные множества, называются сепарабельными.

Рассмотренные выше примеры метрических пространств E^1, E^n, $C_n[a, b]$, $n \geqslant 0$, являются примерами *сепарабельных* метрических пространств. Так, в E^n счетным всюду плотным множеством является множество точек, у которых все координаты — рациональные числа. В пространствах $C_n[a, b]$, $n \geqslant 0$, такими множествами являются множества многочленов с рациональными коэффициентами.

Однако *пространство m есть пример несепарабельного пространства*. Если рассмотреть множество E_0 последовательностей, состоящих только из нулей и единиц, то мощность такого множества есть континуум.*

Убедимся в этом. Рассмотрим какое-либо число $x \in [0, 1]$. Разобьем сегмент $[0, 1]$ пополам. Возьмем в качестве первого элемента последовательности число 0, если x принадлежит левой половине, т. е. сегменту $[0, 1/2]$, и число 1 — в противном случае. Тот из двух рассматриваемых сегментов, которому принадлежит x, обозначим $[a_1, b_1]$. В качестве второго элемента последовательности возьмем 0, если x принадлежит левой половине сегмента $[a_1, b_1]$, и 1 — в противном случае. Продолжая эти рассуждения далее, мы поставим в соответствие рассматриваемому числу x вполне определенную последовательность из нулей и единиц. Если $x \neq y$, то в результате описанного процесса эти точки на некотором этапе станут принадлежать разным отрезкам, а поэтому и последовательности, им отвечающие, будут разные. Следовательно, множество всевозможных последовательностей из нулей и единиц есть множе-

* См. пример 4 из п. 1.

ство мощности, не меньшей, чем континуум. Для наших целей этого и достаточно *.

Взаимные расстояния в пространстве m между двумя различными элементами p и q множества E_0 есть величина, равная единице. Следовательно, приблизить сколь угодно близко каждый из этих элементов элементами счетного множества нельзя, так как множество шаров радиуса 1/3 с центрами в точках множества E_0 имеет мощность не менее континуума и эти шары не пересекаются.

Поскольку $E_0 \subset m$, где $m = (V, \rho)$, то и все пространство m несепарабельно.

Множество A называется нигде не плотным в метрическом пространстве X, если любое открытое множество этого пространства содержит другое открытое множество, целиком свободное от точек множества A.

Например, в пространстве $C[0, 1]$ множество A функций вида $y = nx^2$ (n — целые числа) нигде не плотно. Другой пример нигде не плотного множества на сегменте $[0, 1]$ (рассматриваемом как метрическое пространство) дает так называемое канторово совершенное множество.

Множество A точек метрического пространства называется совершенным, если оно замкнуто и если каждая точка множества A является его предельной точкой.

Канторово совершенное множество на сегменте $I = [0, 1]$ строится следующим образом. Из сегмента $[0, 1]$ удаляется интервал $(1/3, 2/3)$ и оставшееся множество — объединение двух сегментов $[0, 1/3]$, $[2/3, 1]$ — обозначается через I_1. Из этих двух сегментов, в свою очередь, удаляются их трети — интервалы $(1/9, 2/9)$, $(7/9, 8/9)$. Объединение оставшихся сегментов обозначим через I_2. Продолжим этот процесс неограниченно. Очевидно, $I \supset I_1 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$ и I_n есть объединение 2^n сегментов, длина каждого из которых 3^{-n}.

Множество $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ и называется множеством Кантора.

Покажем, что K совершенно. То, что оно замкнуто, следует из построения и леммы 1; остается показать, что K не содержит изолированных точек. Пусть $x \in K$, и пусть Σ_x — произвольная окрестность точки x, т. е. открытое множество. Тогда по определению открытого множества найдется интервал σ_x (шар с центром в точке x), содержащий точку x и принадлежащий Σ_x. Пусть A_n — тот сегмент множества I_n, который содержит точку x. Если n достаточно большое, то $A_n \subset \sigma_x$. Обозначим через a_n тот конец сегмента A_n, который не совпадает

* На самом деле множество всевозможных последовательностей из нулей и единиц есть множество мощности континуум.

с x. Очевидно, это следует из построения множества K, $a_n \in K$. Следовательно, произвольная окрестность точки x — множество Σ_x — содержит точку $a_n \neq x : a_n \in A_n \subset \sigma_x \subset \Sigma_x$, т. е. точка x — предельная для множества K, и K совершенно.

Докажем теперь, что множество K нигде не плотно на сегменте [0, 1], рассматриваемом как метрическое пространство с обычным евклидовым расстоянием. Поскольку любое открытое множество на сегменте содержит внутри себя интервал, то достаточно показать, что любой интервал (шар) содержит внутри себя другой интервал, свободный от точек, принадлежащих K. Пусть σ — произвольный интервал сегмента [0, 1]. Если он не содержит точек K, то построение в этом случае закончено. Если же имеется точка $x \in K$ и $x \in \sigma$, то мы можем выбрать столь большое m, что $x \in A_m \subset I_m$ и $A_m \subset \sigma$, m — натуральное. Найдем интервал длины $3^{-(m+1)}$ с центром в середине A_m. Этот интервал не содержит точек K и содержится в σ.

Таким образом, нигде не плотность множества K на сегменте [0, 1] доказана.

5. Сходимость. Непрерывные отображения.

Определение 11. *Последовательность $\{a_n\}$ точек метрического пространства называется сходящейся к точке a этого пространства, если любая окрестность точки a содержит все элементы этой последовательности, за исключением конечного их числа. Если последовательность $\{a_n\}$ сходится к a, то пишут $a_n \to a$ при $n \to \infty$ или* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Непосредственно из данного определения следует, что $a_n \to a$, если $\rho(a_n, a) \to 0$, $n \to \infty$.

Лемма 3. *Точка a метрического пространства X принадлежит замыканию $\bar{A}$ некоторого множества A тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{a_n\}$ точек множества A, сходящаяся к a.*

Доказательство. Пусть $a \in \bar{A}$, тогда a принадлежит каждому замкнутому множеству, содержащему A. Возьмем в качестве окрестности точки a шар $O(a, 1/n)$, n — натуральное. В этом шаре имеется по крайней мере одна точка $a_n \in A$. Если бы это было не так, то $a \in \bar{A}$ и существовала бы окрестность точки a, свободная от точек множества A. Дополнение до этой окрестности было бы замкнутым множеством, содержащим множество A, и точка a не принадлежала бы этому замкнутому множеству. Таким образом, получилось противоречие условию $a \in \bar{A}$, следовательно, мы построили последовательность точек $a_n \to a$ при $n \to \infty$, $a_n \in A$. Заметим, что данная последовательность $\{a_n\}$ может оказаться стационарной, т. е. такой, что все $a_n \equiv a$.

Верно и обратное: если $a_n \to a$ и $a_n \in A$, то $a \in \bar{A}$.

Для этого заметим, что если любая окрестность точки a пе-

ресекается с A, то $a\in\bar{A}$. Действительно, если $a\in A$, то $a\in\bar{A}$. Если $a\overline{\in}A$, то, допустив, что $a\overline{\in}\bar{A}$, и взяв дополнение множества $\bar{A}$, получим окрестность точки a — множество $(\bar{A})'$, не пересекающееся с A, т. е. получим противоречие.

Доказательство леммы теперь завершается так. Нам дано, что $a_n\to a$ и $a_n\in A$. Следовательно, любая окрестность точки a содержит точки a_n множества A. По сказанному $a\in\bar{A}$, что и требовалось.

Одновременно нами доказано следующее утверждение.

Утверждение. *Точка a принадлежит замыканию множества A в том и только том случае, если каждая окрестность Σ_a точки a пересекается с A.*

В гл. 4 было подробно изучено понятие непрерывности функции числового аргумента. Оказывается, что это понятие допускает естественное обобщение на случай, когда задана уже не обычная функция числового аргумента, а отображение одного метрического пространства в другое. Введем понятие непрерывного отображения.

Определение 12. *Отображение g одного метрического пространства (X, ρ) в другое (X_0, ρ_0) называется* **непрерывным в точке** *x, если для каждой окрестности $\Sigma_{g(x)}$ точки $g(x)$ найдется такая окрестность Σ_x точки x, что $g(\Sigma_x)\subset\Sigma_{g(x)}$. Если g непрерывно в каждой точке пространства X, то такое отображение называется* **непрерывным на** *X.*

Справедлива следующая лемма.

Лемма 4. *Отображение $g: X\to X_0$ одного метрического пространства X в другое X_0 непрерывно на X тогда и только тогда, когда прообраз любого открытого множества открыт.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $g: X\to X_0$ — непрерывное отображение X в X_0 и Σ_0 — открытое множество в X_0. Если $g^{-1}(\Sigma_0)=\{x\in X: g(x)\in\Sigma_0\}=\varnothing$, то открытость $g^{-1}(\Sigma_0)$ очевидна, так как $\varnothing$ открыто.

Пусть $g^{-1}(\Sigma_0)\neq\varnothing$ и $x\in\Sigma=g^{-1}(\Sigma_0)$. Так как $x\in g^{-1}(\Sigma_0)$, то $g(x)\in\Sigma_0$, следовательно, Σ_0 можно рассматривать как окрестность точки $g(x)$. Ввиду того, что g — непрерывное отображение на X (а значит, и в точке x), найдется окрестность Σ_x точки x такая, что $g(\Sigma_x)\subset\Sigma_0$, т. е. $\Sigma_x\subset g^{-1}(\Sigma_0)$. Итак, для любой точки $x\in g^{-1}(\Sigma_0)$ найдется окрестность Σ_x такая, что $\Sigma_x\subset\subset g^{-1}(\Sigma_0)$.

Поскольку $\Sigma=\bigcup\limits_{x\in\Sigma}\Sigma_x$, то множество Σ открыто как объединение открытых множеств Σ_x. Таким образом, прообраз любого открытого множества открыт.

Достаточность. Пусть дано, что при отображении $g: X\to X_0$ прообраз любого открытого множества открыт. Возьмем любую точку $x\in X$ и произвольную окрестность $\Sigma_{g(x)}$ ее образа в X_0. Тогда $\Sigma_x=g^{-1}(\Sigma_{g(x)})$ по условию — открытое множество в X,

т. е. является окрестностью точки x, причем образ Σ_x при отображении g содержится в $\Sigma_{g(x)}$. Следовательно, отображение g по определению непрерывно в точке x. Поскольку эти рассуждения применимы для любой точки $x \in X$, то отображение g непрерывно на X и лемма доказана.

Учитывая, что шар является открытым множеством и всякое открытое множество содержит любую свою точку вместе с некоторым шаром, можно определение 12 непрерывности отображения $g: X \to X_0$ в точке $x \in X$ переформулировать следующим образом.

Определение 13. *Отображение g одного метрического пространства (X, ρ) в другое (X_0, ρ_0) называется непрерывным в точке x, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что если точка y принадлежит открытому шару $O(x, \delta)$ с центром в точке x радиуса δ, то точка $g(y)$ принадлежит открытому шару $O(g(x), \varepsilon)$ с центром в точке $g(x)$ радиуса ε, лежащему в пространстве (X_0, ρ_0).*

Последнее определение можно переформулировать также следующим образом: *отображение $g: X \to X_0$ непрерывно в точке x, если* $\lim\limits_{y \to x} g(y) = g(x)$.

Из неравенства треугольника легко заключаем, что функция расстояния $\rho(x, y)$ непрерывна в точке x при фиксированном y. На самом деле она является непрерывной функцией и по двум переменным *.

В случае, если метрическое пространство X есть числовая ось с обычным расстоянием между числами, т. е. пространство E^1, а отображение g — обычная скалярная функция на E^1, данное определение 13 непрерывности, очевидно, совпадает с определениями гл. 4.

Введем понятие гомеоморфизма.

Определение 14. *Отображение $g: X \to X_0$ метрического пространства X в метрическое пространство X_0 называется гомеоморфизмом, если g отображает X на X_0 взаимно однозначно и g непрерывно вместе с обратным отображением g^{-1}.*

6. Компактность. Покрытием множества A в метрическом пространстве называется любое семейство открытых множеств, объединение которых содержит A.

Определение 15. Метрическое пространство X называется компактным или компактом, если любое его по-

* Функция $\rho(x, y)$ определена на произведении $X \times X$ и отображает $X \times X$ в E^1. Функция $\rho(x, y)$ непрерывна на произведении метрических пространств $X \times X$. Ее непрерывность следует из неравенства четырехугольника: $|\rho(x, z) - \rho(y, u)| \leqslant |\rho(x, y) + \rho(z, u)|$, которое получается из двух неравенств:

$$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, u) + \rho(u, z),$$

$$\rho(y, u) \leqslant \rho(y, x) + \rho(u, x) \leqslant \rho(y, x) + \rho(x, z) + \rho(z, u).$$

крытие содержит конечное подпокрытие, т. е. из всякого покрытия пространства X открытыми множествами можно выделить конечную систему, содержащую все пространство (подпокрытие).

Сегмент $[a, b]$ числовой оси является компактом, что вытекает из того факта, что из всякого покрытия этого сегмента открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие.

Можно показать, что *метрическое пространство компактно тогда и только тогда, когда из всякой последовательности его точек можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке из этого пространства.*

Определение 16. *Система подмножеств $\{A_\alpha\}$ множества называется* **центрированной**, *если любое конечное подсемейство этой системы имеет непустое пересечение.*

Справедливы следующие леммы.

Лемма 5. *Для того чтобы метрическое пространство X было компактным, необходимо и достаточно, чтобы каждая центрированная система замкнутых его подмножеств имела непустое пересечение.*

Доказательство. Пусть X компактно, и пусть $\{F_\alpha\}$ — центрированная система замкнутых подмножеств. Множества $G_n = X \setminus F_\alpha$ открыты, и никакая конечная система из этих множеств G_n, $1 \leqslant n \leqslant N < \infty$ не покрывает X. Значит, поскольку X компактно, $\{G_\alpha\}$ не могут служить покрытием компактного пространства X. В противном случае мы могли бы выбрать конечное подпокрытие X из системы $\{G_\alpha\}$. Но если $\{G_\alpha\}$ не покрывает X, то $\bigcap\limits_\alpha F_\alpha$ не пусто, так как $\bigcap\limits_\alpha F_\alpha = \bigcap\limits_\alpha (X \setminus G_\alpha) = X \setminus \bigcup\limits_\alpha G_\alpha$.

Обратно, пусть любая центрированная система замкнутых подмножеств из X имеет непустое пересечение. Пусть $\{G_\alpha\}$ — открытое покрытие X. Выберем из этого покрытия конечное подпокрытие. Положим $F_\alpha = X \setminus G_\alpha$ и заметим, что так как $\{G_\alpha\}$ покрывает все X, то $\bigcap\limits_\alpha F_\alpha = \varnothing$. Следовательно, $\{F_\alpha\}$ не является центрированной, т. е. существуют такие $F_1, F_2, \ldots, F_M$, $M < \infty$, что $\bigcap\limits_{i=1}^{M} F_i = \varnothing$, но тогда $\{G_i\}_{i=1}^{M} = \{X \setminus F_i\}_{i=1}^{M}$ — конечное подпокрытие покрытия $\{G_\alpha\}$, что и требовалось доказать.

Лемма 6. *Замкнутое подмножество компактного метрического пространства компактно*.*

Доказательство. Пусть F — замкнутое подмножество компактного метрического пространства X и $\{\Sigma_\alpha\}$ — некоторая система открытых множеств — покрытие F. К системе $\{\Sigma_\alpha\}$ при-

* Т. е. из всякого покрытия этого подмножества открытыми в данном пространстве множествами можно выделить конечное подпокрытие.

соединим открытое множество $G=X\setminus F$, и полученное покрытие всего пространства обозначим через $\{\Sigma_\alpha^1\}=\{\Sigma_\alpha\}\cup G$. Выберем в силу компактности X из системы $\{\Sigma_\alpha^1\}$ конечное покрытие всего пространства — систему $\{\Sigma_i^1\}^N{}_{i=1}$. Выбрасывая, если это необходимо, из системы $\{\Sigma_i^1\}^N{}_{i=1}$ множество G, мы получим конечное покрытие множества F, выбранное из системы $\{\Sigma_\alpha\}$. Лемма доказана.

Лемма 7. *Образ компактного пространства X при непрерывном отображении — компактное множество.*

Доказательство. Пусть g — непрерывное отображение X в X_0. Пусть $\{\Sigma_\alpha\}$ — покрытие $g(X)\subset X_0$ открытыми множествами, а $\Psi_\alpha=g^{-1}\{\Sigma_\alpha\}$. Множества Ψ_α открыты (см. лемму 4), и $\{\Psi_\alpha\}$ — покрытие $g(X)$. Выберем из этого покрытия в силу компактности X конечное подпокрытие: $\{\Psi_i\}^M{}_{i=1}$; тогда $\{\Sigma_i\}^M{}_{i=1}$, $M<\infty$,— покрытие X_0, $\Sigma_i=g(\Psi_i)$, $i=1, ..., M$, что и требовалось доказать.

Лемма 8. *Компактное подмножество метрического пространства X замкнуто* *.

Доказательство. Пусть F — компактное подмножество, и пусть $a\in X\setminus F$; для любого $x\in F$ существуют окрестности Σ_a и Σ_x точек a и x соответственно такие, что $\Sigma_a\cap\Sigma_x=\varnothing$. В качестве таких окрестностей можно, например, взять шары $O(a, r)$ и $O(x, r)$, $r=\frac{1}{3}\rho(a, x)$. Множество $G=\bigcup\limits_{x\in F}\Sigma_x$ — покрытие множества F. В силу компактности F выберем из этого покрытия конечное подпокрытие: $\{\sum_{x_i}\}_{i=1}^N$. Рассмотрим соответствующие $\sum_{x_i}$ окрестности $\Sigma_a{}^i$, которые по построению не пересекаются с $\sum_{x_i}$, и $\bigcap\limits_{i=1}^N\sum_a^i=\sum$ является окрестностью точки a. Очевидно, что $\Sigma\cap\Sigma_{x_i}=\varnothing$, $i=1, ..., N$, и поэтому $\Sigma\cap F=\varnothing$. Следовательно, $\Sigma\subset X\setminus F$, т. е. множество $X\setminus F$ открыто, а F замкнуто.

Лемма 9. *Пусть $g: X\to E^1$, где* E *— действительная числовая ось. Если g — непрерывное отображение, а X — компакт, то g ограничено и достигает своих точных верхней и нижней граней.*

Доказательство. Пусть $g(X)$ — непрерывный образ компакта (компактного пространства). По лемме 7 подмножество $g(X)$ метрического пространства E^1 компактно, следовательно, ограниченно и замкнуто (см. гл. 4, § 7, п. 3). Осталось заметить, что непустое ограниченное замкнутое множество чис-

* Заметим, что в отличие от множеств числовой оси (или E^n) в случае общего метрического пространства ограниченность и замкнутость множества еще недостаточна для его компактности (ср. с гл. 4, § 7, п. 3).

ловой оси содержит точные верхнюю и нижнюю грани *. Лемма доказана.

7. Базис пространства. Введем понятие базиса.

Определение 17. *Система открытых множеств $\{\Sigma_\alpha\}$ метрического пространства X называется базисом этого пространства, если всякое непустое открытое множество пространства X может быть получено как объединение некоторых Σ_α из множеств системы.*

Справедлива следующая лемма.

Лемма 10. *Для того чтобы система $\{\Sigma_\alpha\}$ открытых множеств была базисом пространства X, необходимо и достаточно, чтобы для всякого открытого множества G и всякой точки $a \in G$ нашлось бы такое множество Σ_{α_0} из данной системы, что $a \in \Sigma_{\alpha_0} \subset G$.*

Доказательство. Допустим, что система $\{\Sigma_\alpha\}$ — базис пространства. Тогда любое открытое множество G есть сумма некоторых из множеств $\{\Sigma_\alpha\}$. Поэтому для всякой точки $a \in G$ существует такое множество Σ_{α_0}, что $a \in \Sigma_{\alpha_0} \subset G$ и Σ_{α_0} принадлежит данной системе $\{\Sigma_\alpha\}$.

Обратно, пусть выполнены условия, сформулированные в лемме. Тогда всякое открытое множество G представимо в виде

$$G = \bigcup_{a \in G} \Sigma_{\alpha_0},$$

т. е. система $\{\Sigma_{\alpha_0}\}$ — базис пространства. Лемма доказана.

Определение 18. *Метрическое пространство X называется пространством со счетным базисом, если в нем существует хотя бы один базис, состоящий не более чем из счетного числа множеств. Пространства со счетным базисом называются также пространствами со второй аксиомой счетности.*

Лемма 11. *Метрическое пространство X является пространством со счетным базисом тогда, когда в нем имеется счетное, всюду плотное множество. Обратно, если в пространстве имеется счетный базис, то в нем есть и счетное всюду плотное множество.*

Доказательство. Пусть $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — счетное, всюду плотное множество в X. Всевозможные шары $O(a_n, 1/m)$, где n, m — всевозможные натуральные числа, образуют базис пространства, причем счетный.

Обратно, если в X имеется счетный базис $\{\Sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$, то, выбрав по точке $a_n \in \Sigma_n$, мы получаем множество $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, которое всюду плотно. Действительно, если бы $\bar{A} \neq X$, то открытое множество $G = X \setminus \bar{A}$ было бы не пустым и не содержало бы ни одной точки из $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, что невозможно, так как G —

* См. также гл. 4, § 7, п. 3.

открытое множество и оно есть объединение некоторых из множеств системы $\{\Sigma_n\}$, а $a_n \in \Sigma_n$.

Примеры. 1) Легко построить метрическое пространство (X, ρ) и замкнутые шары $K_1(x_1, r_1)$ и $K_2(x_2, r_2)$ такие, что $K_1 \subset K_2$, $r_1 > r_2$.

Действительно, пусть (X, ρ) — метрическое пространство, состоящее из всех точек $\{x, y\}$ замкнутого круга на плоскости $xy: X \equiv \{x, y: x^2+y^2 \leqslant 9\}$ с обычной евклидовой метрикой ρ. Шар K_2 определим так: $K_2 \equiv (X, \rho)$. Пусть шар $K_1 \equiv K_2 \cap \{x, y: (x-2)^2+y^2 \leqslant 16\}$. Тогда $K_1 \subset K_2$, $r_1=4$, $r_2=3$, $r_1 > r_2$.

2) Множество A метрического пространства замкнуто тогда и только тогда, когда оно совпадает со своим замыканием $\bar{A}$, т. е. $A=\bar{A}$.

Действительно, если $A=\bar{A}$, то, так как замыкание любого множества замкнуто (как пересечение замкнутых), A — замкнуто.

Обратно, $\bar{A}$ принадлежит любому замкнутому множеству, содержащему A; одним из таких замкнутых множеств является в данном случае само A, т. е. $\bar{A} \subset A$. С другой стороны, по определению замыкания $A \subset \bar{A}$, т. е. если A замкнуто, то $A=\bar{A}$.

3) Шар $O(x_0, r)$, как уже говорилось выше, в метрическом пространстве X — открытое множество. (Если $x \in O(x, r)$, т. е. $\rho(x, x_0) < r$, то шар $O(x, \varepsilon)$ при $0 < \varepsilon < r - \rho(x_0, x)$ будет принадлежать исходному множеству: $O(x, \varepsilon) \subset O(x_0, r)$. Действительно, если $y \in O(x, \varepsilon)$, т. е. $\rho(x, y) < \varepsilon$, то

$$\rho(x_0, y) \leqslant \rho(x_0, x) + \rho(x, y) < \rho(x_0, x) + r - \rho(x_0, x) = r.)$$

Аналогично замкнутый шар — множество $K(x, r) = \{y: \rho(x, y) \leqslant r\}$ — замкнутое множество в X. Это следует из того, что его дополнение есть множество открытое.

4) Замыкание $\bar{A}$ множества A метрического пространства состоит из всех точек, которые являются либо предельными точками множества A, либо элементами A*. Действительно, всякое множество содержится в своем замыкании: $A \subset \bar{A}$. Докажем, что замыкание $\bar{A}$ содержит и предельные точки для A. В самом деле, замыкание множества — множество замкнутое, а если множество замкнуто, то оно содержит все свои предельные точки: если точка не принадлежит замкнутому множеству, то она принадлежит его дополнению, которое и является окрестностью этой точки, свободной от точек замкнутого множества, т. е. точка не является предельной для замкнутого множества. Иными словами, $\bar{A}$ содержит все свои предельные

* Это утверждение остается справедливым, а доказательство полностью сохраняется и для топологических пространств, которые будут рассмотрены в следующем разделе. Заметим также, что предельная точка множества A может оказаться элементом множества A.

точки; так как $A \subset \bar{A}$, то $\bar{A}$ содержит и все предельные точки множества A. Таким образом, замыкание A содержит точки множества A и точки, предельные для A. Обратно, пусть $x \in \bar{A}$, покажем, что тогда либо x — предельная для A, либо $x \in A$. Действительно, если $x \in \bar{A}$ и $x \in A$, то все доказано. Если же $x \in \bar{A}$, но $x \overline{\in} A$, то x — предельная для A. В самом деле, допустим противное, тогда существует окрестность точки x — Σ_x, свободная от точек множества A. Ее дополнение — замкнутое множество, содержащее A и не содержащее x, т. е. точка $x \in \bar{A}$, что невозможно.

5) В метрическом пространстве (X, ρ) можно построить открытый шар $O(x, r) = \{y : \rho(x, y) < r\}$ и замкнутый шар $K(x, r) = \{y : \rho(x, y) \leqslant r\}$ с общим центром и равными радиусами такие, что $\bar{O}(x, r) \neq K(x, r)$. Действительно, пусть X — множество, состоящее более чем из одной точки, и пусть

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \neq y, \\ 0, & \text{если } x = y, \end{cases}$$

тогда $K(x, 1) = X$, $O(x, 1) = x$, $\bar{O}(x, 1) = x \neq K(x, 1)$.

Свойства метрических пространств

В предыдущем разделе были изложены основные свойства метрических пространств, базирующиеся на понятии открытого и замкнутого множеств. Следует подчеркнуть, что фактически все утверждения предыдущего раздела используют только свойства открытых множеств — то, что сумма любого числа и пересечение конечного числа открытых множеств есть множество открытое, все пространство и пустое множество открыты, и не используют такие понятия, как шар, расстояние. Все это наводит на мысль, что можно строить пространства, в которых открытые (замкнутые) множества определяются аксиоматически с сохранением свойств, сформулированных в лемме 1. Тогда надобность в определениях 1 и 2 отпадает, а утверждение леммы 1 станет аксиомой. Именно так мы и поступим в следующем разделе, когда будем изучать топологические пространства. Ясно, что при этом будет достигнуто полное единообразие в изучении основных свойств метрических и топологических пространств.

Такой подход к изучению свойств метрических пространств (формулировки и доказательства, использующие только свойства открытых (замкнутых) множеств) обладает, конечно, рядом преимуществ — например, допускает обобщения на классы более общих пространств. Вместе с тем, поскольку в структуру метрического пространства введена функция расстояния, эти пространства должны обладать и своими, присущими только