им свойствами. Более того, чаще всего именно эти свойства и изучаются при рассмотрении метрических пространств.

В настоящем разделе мы и изложим эти фундаментальные свойства метрических пространств. Все они используют понятие полноты пространства.

Определение 1. *Последовательность* $\{x_n\}$ *элементов метрического пространства* (X, ρ) *называется* **фундаментальной**, *если для любого числа* $\varepsilon>0$ *существует такое натуральное число* N, *что для любых* $n, m>N$ *выполняется неравенство* $\rho(x_n, x_m)<\varepsilon$.

Определение 2. *Метрическое пространство* (X, ρ) *называется* **полным**, *если в нем всякая фундаментальная последовательность сходится к некоторому пределу, являющемуся элементом этого пространства.*

Заметим, что, как мы уже говорили, если последовательность $\{x_n\}$ сходится к элементу x, то $\rho(x, x_n)\to 0$ при $n\to\infty$ *.

Теорема (принцип вложенных шаров). *Для того чтобы метрическое пространство было полным, необходимо и достаточно, чтобы в нем всякая последовательность замкнутых вложенных друг в друга шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имела непустое пересечение.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть (X, ρ) — полное метрическое пространство, а $K_1(x_1, r_1)\supset K_2(x_2, r_2)\supset\ldots$ — вложенные друг в друга замкнутые шары. Последовательность их центров фундаментальна, так как $\rho(x_n, x_m)<r_n$, $m>n$, а $r_n\to 0$, $n\to\infty$.

Поскольку пространство X полное, то существует элемент x пространства X такой, что $x=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Очевидно, что $x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$. Действительно, x — предельная точка для каждого K_n (см. определение 4 п. 1) ввиду того, что при $m\geqslant n$ $x_m\in K_m\subset K_n$, а так как K_n — замкнутое множество, то $x\in K_n$ (см. пример 4 с. 549).

Достаточность. Пусть выполнены условия теоремы относительно шаров. Докажем, что пространство X полное. Мы должны показать, что если $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность, то она имеет предел $x\in X$. Выберем точку x_{n_1} такую, что $\rho(x_n, x_{n_1})<1/2$, $n>n_1$. Примем x_{n_1} за центр замкнутого шара радиуса 1, который обозначим через $K(x_{n_1}, 1)$. Выберем, далее, точку x_{n_2} из последовательности $\{x_n\}$, удовлетворяющую следующим условиям: $\rho(x_{n_1}, x_{n_2})<1/2^2$ для любого $n>n_2$, $n_2>n_1$. Примем точку x_{n_2} за центр шара $K(x_{n_2}, 1/2)$ радиуса 1/2. Пусть $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}$ $(n_1<n_2, \ldots<n_k)$ уже выбраны,

* Очевидно, что любая сходящаяся последовательность является фундаментальной.

тогда $x_{n_{k+1}}$ выберем так, чтобы выполнялись условия: $\rho(x_n, x_{n_{k+1}}) < 1/2^{k+1}$ для любого $n > n_{k+1}$, $n_{k+1} > n_k$. Как и выше, примем $x_{n_{k+1}}$ за центр замкнутого шара $K(x_{n_{k+1}}, 1/2^k)$ радиуса $1/2^k$ и т. д. Мы получили последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю. По предположению существует точка x, общая для всех шаров. Ясно, что $\rho(x_{n_k}, x) \to 0, n_k \to \infty$, т. е. фундаментальная последовательность $\{x_n\}$ содержит последовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторой точке x пространства. Тогда и сама последовательность сходится к этому же пределу. Действительно, применяя свойство треугольника для функции расстояния (см. определение 1 п. 1), имеем

$$\rho(x_n, x) \leqslant \rho(x_{n_k}, x) + \rho(x_n, x_{n_k}) \to 0, \quad n_k, n \to \infty.$$

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in X$. Теорема доказана.

Замечание. В условиях теоремы все условия являются существенными: полнота пространства, замкнутость шаров, условие того, что они вложены, стремление их радиусов к нулю. Наименее очевидным является необходимость последнего условия. Вот пример полного метрического пространства и последовательности вложенных друг в друга замкнутых шаров, имеющих пустое пересечение.

Пусть $X = (N, \rho)$, где N — множество натуральных чисел, а

$$\rho(m, n) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{m+n}, & \text{если } n \neq m, \\ 0, & \text{если } n = m. \end{cases}$$

Пусть

$$K\left(n, 1 + \frac{1}{2n}\right) = \{m : \rho(m, n) \leqslant 1 + 1/2n\}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Тогда очевидно, что $K\left(n, 1 + \dfrac{1}{2n}\right)$ замкнуты и вложены друг в друга, а пространство полно, поскольку каждая фундаментальная последовательность сходится в пространстве (она является, как говорят, «стационарной»). Однако пересечение указанных шаров, очевидно, пусто.

Определение 3. *Множество M, расположенное в метрическом пространстве X, называется множеством первой категории, если его можно представить в виде объединения счетного числа нигде не плотных в X множеств.*

Все остальные множества называются множествами второй категории.

Теорема (теорема о категориях). *Пусть (X, ρ) — непустое полное метрическое пространство, тогда X — множест-*

во второй категории, т. е. X нельзя представить в виде объединения счетного числа нигде не плотных множеств.

Доказательство. Предположим противное, что $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ и каждое из множеств A_n, $n=1, 2, \ldots$, нигде не плотно в X. Пусть K_0 — некоторый замкнутый шар радиуса единица. Поскольку множество A_1 нигде не плотно, то существует замкнутый шар K_1 радиуса меньше 1/2 такой, что $K_1 \subset K_0$ и $K_1 \cap A_1 = \varnothing$. Поскольку множество A_2 нигде не плотно, то точно так же существует замкнутый шар K_2 радиуса меньше $1/2^2$, принадлежащий K_1, для которого $K_2 \cap A_2 = \varnothing$ и т. д. В результате мы получаем последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$, радиусы которых стремятся к нулю. По предыдущей теореме существует $x \in K_n$ для любого n, $x \in X$. Так как по построению $K_n \cap A_n = \varnothing$, то $x \notin A_n$ для любого n. Следовательно, $x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$. Это противоречит предположению: $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Теорема доказана.

Определение 4. *Отображение g метрического пространства X в это же пространство называется* **сжимающим**, *если существует такое число $0<\alpha<1$, что*

$$\rho(g(x), g(y)) \leqslant \alpha\rho(x, y).^*$$

Теорема (принцип сжимающих отображений. *Всякое сжимающее отображение полного метрического пространства (X, ρ) в это же пространство имеет и при том только одну неподвижную точку $x \in X$, т. е. такую точку $x \in X$, что $g(x) = x$.*

Доказательство. Пусть x_0 — некоторая точка из X. Определим последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ по правилу: $x_1 = g(x_0)$, $x_2 = g(x_1), \ldots$.

Последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна в X. Действительно, если $m>n$, то

$$\rho(x_n, x_m) = \rho(g(x_{n-1}), g(x_{m-1})) \leqslant \alpha\rho(x_{n-1}, x_{m-1}) \leqslant$$
$$\leqslant \ldots \alpha^n \rho(x_0, x_{m-n}) \leqslant \alpha^n \{\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) +$$
$$+ \ldots + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n})\} \leqslant \alpha^n \rho(x_0, x_1)\{1 + \alpha + \ldots + \alpha^{m-n-1}\} <$$
$$< \alpha^n \rho(x_0, x_1) \cdot (1-\alpha)^{-1},$$

где $\alpha<1$.

* Отсюда следует, что сжимающее отображение g непрерывно, т. е. $\lim_{y \to x} g(y) = g(x)$.

Таким образом, $\rho(x_n, x_m) \to 0$, $m, n \to \infty$. В силу полноты пространства X существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Пусть $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Тогда в силу непрерывности отображения g имеем

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x.$$

Итак, неподвижная точка существует. Докажем ее единственность. Если $g(x) = x$ и $g(y) = y$, то $\rho(x, y) < \alpha\rho(x, y)$, т. е. $\rho(x, y) = 0$ и $x = y$.

Замечание. Если отображение g метрического пространства X в себя обладает лишь тем свойством, что $\rho(g(x), g(y)) < \rho(x, y)$ при $x \neq y$, то неподвижной точки может и не быть. Вот соответствующий пример: пусть $X = (P, \rho)$, где $P = [1, \infty)$, а ρ — обычная евклидова метрика. Пусть $g(x) = x + \frac{1}{x}$. Тогда $\rho(g(x), g(y)) = \left|x + \frac{1}{x} - y - \frac{1}{y}\right| < |x - y|$. Однако неподвижной точки нет: $g(x) = x + \frac{1}{x} \neq x$ ни для какого $x \in X$.

Определение 5. Будем говорить, что два отображения g и g_1 метрического пространства (X, ρ) в это же пространство коммутируют, если для любого $x \in X$ справедливо равенство $g(g_1(x)) = g_1(g(x))$.

Теорема (обобщение принципа сжатых отображений). *Пусть g_1 и g_2 — отображения полного метрического пространства (X, ρ) в это же пространство. Тогда, если отображение g_1 сжимающее и отображения g и g_1 коммутируют, то уравнение $g(x) = x$ имеет решение $x \in X$.*

Доказательство. По предыдущей теореме существует и притом только одна точка $x \in X$ такая, что $g_1(x) = x$. Применим к обеим частям равенства отображение g. Воспользовавшись тем, что отображения коммутируют, получим

$$g(g_1(x)) = g(x),\ g_1(g(x)) = g(x),\ g_1(y) = y,$$

где $y = g(x)$. Учитывая, что отображение g_1 сжимающее и неподвижная точка у этого отображения одна, получим, что $x = y = g(x)$. Следовательно, и у отображения g существует неподвижная точка, а именно найденная выше точка x.

Замечание. Степенью n отображения g называется отображение g^n, полученное в результате n последовательных применений отображения g:

$$g^n(x) = g(g(\ldots g(x))\ldots),\quad x \in X.$$

Из предыдущей теоремы в силу того, что отображения g и g^n коммутируют, следует, что если отображение g таково, что не-

которая степень n его — сжимающее отображение, то уравнение $g(x)=x$ имеет единственное решение*.

Примеры. 1) *Нахождение корней функции.* Пусть $\varphi(t)$, $a\leqslant t\leqslant b$ — действительная функция, удовлетворяющая условию Липшица:

$$|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|\leqslant\theta|t_1-t_2|,\quad 0<\theta<1,$$

и отображающая сегмент $[a, b]$ в себя. Если ввести метрическое пространство (X, ρ), где $X=[a, b]$, а ρ — обычная евклидова метрика на сегменте, то отображение φ в X сжимающее, и потому числовая последовательность t_0, $t_1=\varphi(t_0)$, $t_2=\varphi(t_1)$, ... сходится к единственному корню уравнения $\varphi(t)=t$ для любого $t_0\in[a, b]$. Отображение φ сжимающее, если, например,

$$|\varphi'(t)|\leqslant\theta<1,\ t\in[a, b].$$

Пусть нам надо решить уравнение вида $F(t)=0$, причем $F(t)$ действительная, определенная на $[a, b]$, функция, $F(a)<0$, $F(b)>0$, $0<\theta_1\leqslant F'(t)\leqslant\theta_2$ при $t\in[a, b]$. Тогда, если рассмотреть функцию $\varphi(t)=t-\lambda F(t)$, $\lambda\in E^1$ и найти корень уравнения $\varphi(t)=t$, то мы решим исходную задачу. К этому последнему уравнению можно применить предыдущие рассуждения, если, например $|\varphi'(t)|\leqslant\theta<1$. Имеем $1-\lambda\theta_2\leqslant\varphi'(t)\leqslant 1-\lambda\theta_1$. Нетрудно подобрать действительное число $\lambda>0$, чтобы было выполнено условие: $0\leqslant\varphi'(t)\leqslant\theta<1$. Тогда, как нетрудно убедиться, функция $\varphi(t)$ отображает сегмент $[a, b]$ в себя. Действительно, так как $\varphi'(t)\geqslant 0$, то $\varphi(t)$ не убывает, следовательно, $\varphi(a)\leqslant\varphi(t)\leqslant\varphi(b)$ для любого t из сегмента $[a, b]$. Но $\varphi(a)=a-\lambda F(a)>a$, $\varphi(b)=b-\lambda F(b)<b$, т. е. $a<\varphi(t)<b$ для любого $t\in[a, b]$.

2) *Нахождение решений систем уравнений вида* $y=Ax+b$. Пусть $y_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j+b$, $i=1, ..., n$ — отображение n-мерного пространства в себя: набор $(x_1, x_2, ..., x_n)$ переходит в набор $(y_1, y_2, ..., y_n)\in X$, т. е. отображение $g(x)=Ax+b$ переводит набор из n чисел в набор из n чисел. Здесь x, b, $g(x)=y$ — векторы, A — матрица, $A=\{a_{ij}\}^n_{i,j=1}$.

Если отображение $g(x)$ будет в некотором метрическом пространстве и при некоторых условиях сжимающим, то векторное уравнение $g(x)=x$ будет иметь по предыдущему одно и только одно решение. Найдем такие условия на отображении g и введем метрику на множестве X, т. е. образуем соответствующие метрические пространства:

* Единственность решения следует из того факта, что всякая точка, неподвижная относительно отображения g, будет неподвижной и относительно отображения g^n.

А) Пусть $\rho_1(x, y) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i|$ и $x, y \in X$. Тогда

$$\rho_1(y', y'') \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \rho_1(x', x''),$$

$$x', x'', y', y'' \in X, \ y' = Ax' + b, \ y'' = Ax'' + b,$$

и условие того, что отображение g сжимающее, будет выполнено, если

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \leqslant \alpha < 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Б) Если ввести метрику на X по правилу

$$\rho_2(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|,$$

то, как нетрудно вычислить, условие того, что отображение сжимающее, будет иметь вид

$$\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \leqslant \alpha < 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

В) Наконец, если метрика задана так:

$$\rho(x, y) = \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right]^{1/2},$$

то отображение g сжимающее, если

$$\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \leqslant \alpha < 1.$$

Выписанные условия *достаточны*, для того чтобы уравнение $g(x) = x$ имело и притом единственное решение или, что то же самое, чтобы система $x_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, имела и притом одно решение.

3) *Существование и единственность решения обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка.* Рассмотрим так называемую задачу Коши. Надлежит найти такую дифференцируемую функцию $y(t)$, которая удовлетворяла бы уравнению $y' = f(t, y)$ и при $t = t_0$ имела заданное значение $y(t_0) = y_0$, где y_0 — некоторое число; при этом надлежит доказать, что при определенных условиях такое решение $y(t)$ только одно.

Предположим, что функция $f(t, y)$ непрерывна на множестве: $a \leqslant t \leqslant b$, $-\infty < y < \infty$ и удовлетворяет с константой K условию Липшица по y, т. е. для всех точек $t \in [a, b]$

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leqslant K|y_1 - y_2|,$$

и пусть t_0 — внутренняя точка сегмента $[a, b]$. Легко убедиться, что решение задачи Коши эквивалентно решению интегрального уравнения $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\xi, y(\xi))\, d\xi$. Значит, задано отображение множества функций $\{y\}$ по правилу: $g(y) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\xi, y(\xi))\, d\xi$. Введем пространство $C[a, b]$. Тогда отображение g определено на этом пространстве и отображает его в себя, а задача о нахождении решения интегрального уравнения сводится к нахождению неподвижной точки отображения g — нахождению функции y такой, что $g(y) = y$. Для того чтобы такая точка существовала и была одна, достаточно, чтобы отображение g было сжимающее.

Поскольку из условия Липшица следует, что

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leqslant K|y_1 - y_2| \leqslant K\rho(y_1, y_2),$$

то

$$\rho(g(y), g(z)) \leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b} \int_{t_0}^{t} K\rho(y, z)\, d\xi \leqslant K(b-a)\rho(y, z).$$

Здесь ρ — метрика в $C[a, b]$. Следовательно, отображение сжимающее, если сегмент $[a, b]$ достаточно мал, так что

$$K(b-a) = \theta < 1.$$

При этих условиях мы получаем теорему существования и единственности решения задачи Коши на сегменте $[a, b]$, содержащем точку t_0.

4) *Оператор Вольтерра, свойства его n-й степени.* Покажем, что некоторая степень отображения, задаваемого интегральным оператором Вольтерра, имеющим вид

$$g(f) = \lambda \int_{a}^{t} K(t, \xi) f(\xi)\, d\xi + \varphi(t),$$

где λ — некоторое число, $K(t, \xi)$, $\varphi(t)$ — непрерывные функции своих аргументов, представляет собой сжимающее отображение в $C[a, b]$, $a \leqslant t \leqslant b$, $a \leqslant \xi \leqslant b$.

Пусть

$$M = \max_{a \leqslant t, \xi \leqslant b} |K(t, \xi)|, \quad \rho(f_1, f_2) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |f_1(t) - f_2(t)|.$$

Тогда

$$|g(f_1)-g(f_2)| = |\lambda| \left| \int_a^b K(t, \xi)(f_1(\xi)-f_2(\xi))\, d\xi \right| \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda| M(b-a)\rho(f_1, f_2).$$

Отсюда

$$|g^n(f_1)-g^n(f_2)| \leqslant |\lambda|^n M^n \frac{(b-a)^n}{n!} \rho(f_1, f_2).$$

Всегда можно выбрать такое n, что $\frac{|\lambda|^n M^n (b-a)^n}{n!} < 1$, и, следовательно, при этом n отображение g^n будет сжимающим. Согласно замечанию после предыдущей теоремы интегральное уравнение вида $g(f)=f$ имеет при любом λ решение, и притом единственное.

Топологические пространства

В настоящем разделе будут рассмотрены основные свойства топологических пространств. Материал данного раздела вполне аналогичен изложенному в разделе о метрических пространствах, и поэтому мы повторим лишь основные определения, а доказательства некоторых теорем, поскольку они являются дословным повторением соответствующих доказательств в разделе о метрических пространствах, опустим. Подробнее мы остановимся лишь на специфических особенностях топологических пространств.

1. Определение топологического пространства. Хаусдорфово топологическое пространство. Примеры.

Определение 1. *Говорят, что на множестве X определена структура топологического пространства, если задана система $\{\Sigma\}$ его подмножеств, обладающая свойствами:*

1) *само множество X и пустое множество $\varnothing$ принадлежат $\{\Sigma\}$;*

2) *сумма любого числа множеств системы $\{\Sigma\}$ и пересечение любого конечного числа множеств системы $\{\Sigma\}$ принадлежат $\{\Sigma\}$.*

Система $\{\Sigma\}$, удовлетворяющая условиям 1)—2), называется топологией на множестве X, а составляющие ее множества — открытыми в этой топологии *.

Таким образом, пара, состоящая из множества X и топологии $\{\Sigma\}$, является топологическим пространством, которое иногда удобно обозначать через (X, Σ).

* Множество, являющееся дополнением к открытому, называется замкнутым в топологическом пространстве.

Определение 1 выделяет весьма общий класс пространств. Обычно этот класс несколько сужают, добавляя к свойствам 1) и 2) так называемые аксиомы отделимости. Из этих аксиом мы рассмотрим наиболее часто используемые.

Аксиома T_2 (Хаусдорфа): *для любых различных точек x и y, принадлежащих множеству X, существуют такое множество Σ_x, содержащее точку x, и множество Σ_y, содержащее точку y, такие что они оба принадлежат системе $\{\Sigma\}$ и не пересекаются, т. е. $\Sigma_x \cap \Sigma_y = \varnothing$.*

Топологические пространства, удовлетворяющие аксиоме T_2 (аксиоме Хаусдорфа), называются хаусдорфовыми.

Аксиома T_1: *для любых двух различных точек x и y, принадлежащих множеству X, существует множество Σ_x, принадлежащее системе $\{\Sigma\}$, содержащее точку x и не содержащее точку y, а также существует множество Σ_y из системы $\{\Sigma\}$, содержащее точку y и не содержащее точку x.*

Топологические пространства, удовлетворяющие аксиоме T_1, называются T_1-пространствами.

Ясно, что если выполнена аксиома T_2, то аксиома T_1 выполнена, т. е. класс топологических пространств, удовлетворяющих аксиомам 1), 2), T_2, более узкий, чем класс топологических пространств, удовлетворяющих аксиомам 1), 2), T_1.

Примером пространства, удовлетворяющего аксиомам 1), 2), T_1 и не удовлетворяющего аксиомам 1), 2), T_2, является следующее топологическое пространство. Множество X состоит из точек отрезка $[0, 1]$, а открытыми считаются следующие множества: X, $\varnothing$, $\Sigma_{\alpha_n} = [0, 1] \setminus \{\alpha_n\}$, где $\{\alpha_n\}$ — произвольное, не более чем счетное множество отрезка $[0, 1]$. Очевидно, что аксиомы 1), 2), T_1 выполнены. Однако аксиома T_2 не выполняется.

Не всякое топологическое пространство удовлетворяет аксиоме T_1. Вот традиционный пример. Множество $X = \{a, b\}$ состоит из двух точек. Топологию зададим открытыми множествами, к которым отнесем все X, пустое множество $\varnothing$ и точку b. Аксиомы 1) и 2) выполнены, а аксиома T_1 — нет.

Приведем наиболее часто встречающиеся примеры топологических пространств.

Примеры.

1) Рассмотрим произвольное метрическое пространство (X, ρ). Открытые множества в силу леммы 1 раздела о метрических пространствах удовлетворяют свойствам 1) и 2) определения 1 топологического пространства. Аксиома T_2 (Хаусдорфа) также выполняется в метрическом пространстве: если $x \neq y$, то $\rho(x, y) = a > 0$ и шары $O\left(x, \frac{a}{3}\right)$, $O\left(y, \frac{a}{3}\right)$ — открытые множества в (X, ρ), такие что $O\left(x, \frac{a}{3}\right) \cap O\left(y, \frac{a}{3}\right) = \varnothing$.

Таким образом, всякое метрическое пространство (X, ρ) является и хаудорфовым топологическим пространством (X, Σ), где $\{\Sigma\}$ — система открытых множеств в (X, ρ).

2) Рассмотрим множество X произвольной природы. Отнесем к системе $\{\Sigma\}$ только все множество X и пустое множество $\varnothing$. Аксиомы 1), 2), очевидно, выполнены. Однако аксиомы T_1 и T_2 не выполнены. Такая топология называется антидискретной.

3) Пусть X — произвольное множество. Отнесем к системе $\{\Sigma\}$ все подмножества множества X. Легко проверить, что $\{\Sigma\}$ — хаусдорфова топология. Такая топология называется дискретной.

Дадим следующее определение.

Определение 2. *Окрестностью точки x, принадлежащей топологическому пространству (X, Σ), называется любое открытое множество, содержащее точку x. Окрестностью некоторого подмножества X (быть может, самого X) называется любое открытое множество, содержащее данное подмножество (или X). Окрестность точки x будем обозначать Σ_x.*

Предположим, что для каждой точки x, принадлежащей топологическому пространству (X, Σ) среди всех окрестностей этой точки выделены некоторые, причем так, что какова бы ни была точка x и ее произвольная окрестность Σ_x, существует окрестность Σ_x^1 точки x из выделенной системы, что $x \in \Sigma_x^1 \subset \subset \Sigma_x$.

Определение 3. *Система выделенных окрестностей $\{\Sigma_x^1\}$ называется определяющей системой окрестностей данного топологического пространства**.

Справедлива следующая лемма, которая дает удобный способ задания топологии.

Лемма 1. *Пусть X — произвольное множество. Для каждой точки x определим некоторые подмножества Σ_x, называемые «окрестностями» точки x и удовлетворяющие условиям:*

а) *каждая точка имеет хотя бы одну свою «окрестность» и принадлежит любой своей «окрестности»;*

б) *пересечение двух «окрестностей» точки содержит некоторую «окрестность» этой же точки;*

в) *какова бы ни была «окрестность» Σ_x точки $x \in X$ и точка $y \in \Sigma_x$, существует «окрестность» Σ_y точки y такая, что $\Sigma_y \subset \Sigma_x$;*

Тогда если отнести к системе $\{\Sigma\}$ всевозможные «окрестности» Σ_x точек $x \in X$, их всевозможные объединения и пустое множество, то будет задана топология на множестве X и (X, Σ) — топологическое пространство, в котором система всех

* Если x фиксировано, то система $\{\Sigma_x^1\}$ называется определяющей системой окрестностей данной точки x.

«окрестностей» является определяющей системой. Обратно, всякое топологическое пространство может быть получено таким способом.

Доказательство. Проверим выполнение аксиом 1)—2) топологического пространства. То, что все X принадлежит $\{\Sigma\}$, очевидно, $\varnothing$ отнесено к $\{\Sigma\}$ по условию.

Аксиома 1) выполнена.

Для проверки аксиомы 2) надо убедиться лишь в том, что $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \in \{\Sigma\}$, если $\Sigma_1 \in \{\Sigma\}$, $\Sigma_2 \in \{\Sigma\}$. Следовательно, надо установить, что $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ может быть получено как объединение некоторых «окрестностей», т. е. надо убедиться, что для любой точки $x \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ существует «окрестность» $\Sigma_x \subset \Sigma_1 \cap \Sigma_2$. Но Σ_1 и Σ_2 принадлежат $\{\Sigma\}$, поэтому имеются «окрестности» $\Sigma_x^1 \subset \Sigma_1$ и $\Sigma_x^2 \subset \subset \Sigma_2$ — их пересечение содержит по условию б) некоторую «окрестность» Σ_x точки x, которая содержится, очевидно, в $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$.

Обратно, если задано топологическое пространство (X, Σ), то в качестве «окрестности» точки x, удовлетворяющей условиям а)—в), можно взять произвольное множество из системы $\{\Sigma\}$, содержащее точку x.

Используя эту лемму, приведем примеры еще двух хаусдорфовых топологических пространств.

Примеры.

1) В качестве X возьмем двумерную плоскость E^2. Окрестность любой точки $x \in X$ получим, если из любого открытого круга с центром в x удалим все отличные от самой точки x точки, лежащие на вертикальном диаметре этого круга. Полученное топологическое пространство является хаусдорфовым.

2) Рассмотрим в качестве X отрезок $[0, 1]$, окрестности всех точек, кроме точки 0, определим обычным образом, а окрестностями точки 0 будем считать всевозможные полуинтервалы $[0, \alpha)$, $\alpha > 0$, из которых выкинуты точки $\frac{1}{n}$, где n — натуральное число. Это, как легко видеть, пример хаусдорфова топологического пространства.

Пусть (X, Σ) — топологическое пространство, а Y — подмножество X. Тогда на подмножестве X можно рассмотреть след системы $\{\Sigma\}$, т. е. множества вида $\{\Sigma_Y\} = \{Y \cap \Sigma_\alpha\}$, $\Sigma_\alpha \in \{\Sigma\}$. Легко видеть, что тем самым на Y задана топология, поэтому Y само превращается в топологическое пространство и (Y, Σ_Y) называется подпространством пространства (X, Σ). Топология, задаваемая системой $\{\Sigma_Y\} = \{Y \cap \Sigma_\alpha\}$, $\Sigma_\alpha \in \{\Sigma\}$ называется индуцированной топологией.

Так же, как и в случае метрических пространств, пространство (X, Σ) называется связным, если его нельзя представить в виде суммы двух непустых открытых непересекающихся

подмножеств. Множество Y в топологическом пространстве (X, Σ) связно, если Y связно, как подпространство в (X, Σ).

2. Замечание о топологических пространствах. После того как введены открытые множества для топологических пространств, можно ввести все понятия, введенные для метрических пространств. Так, дословно сохраняются определения предельной точки множества (см. определение 4 раздела о метрических пространствах), определение внутренней точки* (см. определение 5 раздела о метрических пространствах), определение замкнутого множества (см. определение 6 раздела о метрических пространствах), определение замыкания множества (см. определение 7 раздела о метрических пространствах), определение плотного и всюду плотного множества (см. определение 10 раздела о метрических пространствах), полностью сохраняется определение понятия нигде не плотного, совершенного множества, данные для метрических пространств. Точно так же, как и в случае метрических пространств, в случае топологических пространств определяется важное понятие непрерывного отображения (определение 12 раздела о метрических пространствах), понятие гомеоморфного отображения (определение 14 раздела о метрических пространствах), определение компактного топологического пространства, или компакта (см. определение 15 раздела о метрических пространствах). Так же, как и для метрических пространств, для топологических пространств вводится понятие центрированной системы (определение 16 раздела о метрических пространствах), определение базы топологии топологического пространства, топологического пространства со счетной базой. Топологические пространства со счетной базой называются топологическими пространствами со второй аксиомой счетности.

Читатель без труда сформулирует эти определения для случая топологических пространств, для этого в соответствующих определениях раздела о метрических пространствах выражение «метрическое пространство» следует заменить на выражение «топологическое пространство».

Согласно этим определениям в случае топологического пространства остаются справедливыми основные утверждения, доказанные для метрических пространств. Это вполне естественно, поскольку доказательства этих утверждений в основном используют понятие открытого и замкнутого множества и непосредственно не зависят от введенной там метрики.

Так, лемма 1, утверждающая, что объединение произвольного числа открытых множеств и пересечения конечного их чис-

* Совокупность всех внутренних точек множества $\mathring{Y}$ называется внутренностью множества Y и обозначается через $\mathring{Y}$. Внутренность $\mathring{Y}$, очевидно, есть объединение всех открытых множеств, принадлежащих Y.

ла является множеством открытым, есть соответствующая аксиома топологического пространства; утверждение леммы 2, в том числе и доказательства свойств операции замыкания, полностью сохраняется.

На топологические пространства переносится также и понятие сходящейся последовательности (определение 11 раздела о метрических пространствах), а именно: последовательность $\{a_n\}$ точек топологического пространства называется сходящейся к точке a этого пространства, если любая окрестность точки a содержит все точки последовательности $\{a_n\}$ за исключением конечного числа. Если последовательность $\{a_n\}$ сходится к точке a, то пишут, что $a_n \to a$ при $n \to \infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Однако в топологических пространствах это понятие не играет столь большой роли, как в метрических пространствах. В самом деле, лемма 3 утверждала, что в метрическом пространстве точка a принадлежит замыканию $\bar{A}$ некоторого множества A тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{a_n\}$ точек множества A, сходящаяся к a. В топологическом пространстве этот факт может быть несправедлив. (Вспомним, что при доказательстве этого утверждения в метрических пространствах мы строили последовательность шаров $O\left(a, \frac{1}{n}\right)$, вложенных друг в друга для любого натурального n.)

Можно выделить класс топологических пространств, обладающих аналогичным свойством.

Назовем топологическое пространство пространством с первой аксиомой счетности, если для любой его точки a существует счетная система ее окрестностей $\{\Sigma_a{}^n\}$ такая, что для любого открытого множества Σ_a, содержащего точку a, найдется окрестность $\Sigma_a^{n_0}$, обладающая свойством: $\Sigma_a^{n_0} \subset \Sigma_a$. Такая система окрестностей называется счетной определяющей системой окрестностей точки a.

В метрическом пространстве первая аксиома счетности, очевидно, выполнена.

В топологическом пространстве (X, Σ) с первой аксиомой счетности справедливо утверждение: *точка $a \in X$ принадлежит замыканию $\bar{A}$ некоторого множества A тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{a_n\}$ точек множества A, сходящаяся к a.*

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству соответствующего утверждения для случая метрических пространств. Последовательность шаров $O\left(a, \frac{1}{n}\right)$ следует заменить на последовательность окрестностей из систе-

мы $\{\Sigma_a^n\}$, причем всегда можно считать, что $\Sigma_a^{n+1} \subset \Sigma_a^n$. В противном случае Σ_a^n надо заменить на $\bigcap_{k=1}^{n} \Sigma_a^k$.

Утверждение на с. 544 полностью сохраняется. Сохраняется также и утверждение леммы 4 — критерий непрерывности отображения.

На случай топологических пространств полностью переносится критерий компактности в терминах центрированной системы замкнутых подмножеств (лемма 5), утверждения лемм 6, 7, 8, 9 о свойствах компакта и непрерывных функций на нем.

Заметим, что топологическое пространство может не быть пространством со счетной базой топологии даже тогда, когда оно является пространством с первой аксиомой счетности и в нем имеется счетное всюду плотное множество. Однако если в топологическом пространстве есть счетная база топологии, то топологическое пространство сепарабельно и удовлетворяет первой аксиоме счетности (ср. с леммой 11). Точно так же, как и в случае метрических пространств (см. определение 18), топологическое пространство называется пространством со второй аксиомой счетности, если в нем существует хотя бы одна база топологии, состоящая не более чем из счетного числа множеств.

Линейные нормированные пространства, линейные операторы

Понятие линейного пространства играет фундаментальную роль в анализе. Линейное пространство и линейные операторы в таких пространствах играют также важную роль во многих других разделах математики.

1. Определение линейного пространства. Примеры.

Определение 1. *Множество элементов L, содержащее хотя бы один элемент, называется* **линейным** *или* **векторным пространством**, *если выполнены следующие аксиомы.*

1. *Для любых двух элементов x и y множества L однозначно определен третий элемент z этого множества, называемый их* **суммой** *и обозначаемый символом $x+y$, причем справедливы следующие свойства:*

а) $x+y=y+x$ (*коммутативность*);

б) $(x+y)+z=x+(y+z)$ (*ассоциативность*);

в) *существует такой элемент O, что $x+O=x$ для любого элемента $x \in L$; элемент O называется* **нулевым** *или* **нулем пространства** L;

г) *для любого элемента $x \in L$ существует такой элемент x', что $x+x'=0$; элемент x' называется* **противоположным** *к элементу x и обозначается обычно так: $-x$.*

2. *Для любого числа α и любого элемента x пространства L определен элемент y пространства L, называемый* **произведением** *α на x и обозначаемый символом αx, причем справедливы следующие свойства:*

а) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$ *(для любых чисел α и β и любого элемента x);*

б) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$ *(для любых чисел α и β и любого элемента x);*

в) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$ *(для любого числа α и любых элементов x и y);*

г) $1\cdot x=x$ *для любого элемента x.*

Если в аксиоме 2 используются только действительные числа, пространство L называется **действительным пространством**. Если же рассмотрения ведутся с использованием комплексных чисел, то и пространство L называется **комплексным**.

Элементы линейного пространства называют также **векторами**.

Рассмотрим некоторые **примеры** линейных пространств. При изучении метрических пространств были рассмотрены следующие множества (см. раздел о метрических пространствах, примеры): множество вещественных чисел, координатное n-мерное пространство, множество непрерывных на сегменте функций и совокупность ограниченных последовательностей. Все эти множества представляют собой и примеры линейных пространств, если ввести операции сложения и умножения по следующим правилам.

1) В совокупности A^1 вещественных чисел — обычные арифметические операции сложения и умножения.

2) В n-мерном координатном пространстве A^n — по формулам

$$x+y=(x_1,\ x_2,\ldots,x_n)+(y_1,\ y_2,\ldots,y_n)=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n),$$
$$\alpha x=\alpha(x_1,\ x_2,\ldots,x_n)=(\alpha x_1,\ \alpha x_2,\ldots,\alpha x_n).$$

3) В пространстве непрерывных функций на отрезке — обычные операции сложения двух функций, т. е. $f+g=f(x)+g(x)$, и умножение функции на число, т. е. $\alpha f=\alpha f(x)$.

В множестве ограниченных последовательностей введем операции сложения и умножения по формулам

$$(x+y)=(x_1,\ x_2,\ldots)+(y_1,\ y_2,\ldots)=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ldots),$$
$$\alpha x=\alpha(x_1,\ x_2,\ldots)=(\alpha x_1,\ \alpha x_2,\ldots).$$

Нетрудно проверить во всех перечисленных выше примерах выполнимость аксиом, определяющих линейное пространство. За этими линейными пространствами мы сохраним те же обозначения, что и в случае, когда рассматривались метрические пространства, т. е. соответственно в случае 1) — обозначение E^1, в

случае 2) — E^n, в случае 3) — обозначение $C[a, b]$ и в случае 4) — обозначение m.

Определение 2. *Линейные пространства L и L^* называются изоморфными, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие так, что если элемент $x \in L$ соответствует элементу $x^* \in L^*$, а элемент $y \in L$ соответствует элементу $y^* \in L^*$, то элемент $x+y$ соответствует элементу x^*+y^*, а элемент αx соответствует элементу αx^* (α — любое число).*

Изоморфные пространства можно рассматривать как различные реализации одного и того же пространства, и такие пространства можно не различать.

2. Нормированные пространства. Банаховы пространства. Примеры.

Определение 3. *Функция $f(x) = \|x\|$, ставящая каждому элементу x линейного пространства L в соответствие вещественное число $\|x\|$, называется нормой в линейном пространстве L, если она удовлетворяет следующим аксиомам:*

1) $f(x) = \|x\| = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = 0$;

2) $f(\alpha x) = \|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\| = |\alpha| f(x)$ *для любого числа* α;

3) $f(x_1+x_2) = \|x_1+x_2\| \leqslant \|x_1\| + \|x_2\|$ *для любых* x_1 *и* x_2, *принадлежащих* L.

Определение 4. *Линейное пространство L с введенной функцией $f(x) = \|x\|$ называется линейным нормированным пространством.*

Чтобы подчеркнуть, что пространство L нормированное, обозначают его обычно буквой N.

Значение нормы на элементе x пространства N называется нормой вектора x или длиной или модулем этого вектора.

Норма вектора всегда неотрицательна и равна нулю только для нулевого вектора. Действительно, полагая в аксиоме 3) $x_1 = -x_2$ с учетом 1) и 2), получаем, что

$$0 = \|0\| = \|x_1 - x_1\| \leqslant \|x_1\| + \|-x_1\| = \|x_1\| + |-1| \, \|x_1\| = 2\|x_1\|,$$

т. е.

$$f(x_1) = \|x_1\| \geqslant 0.$$

В любом нормированном пространстве может быть введена естественная метрика по правилу $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Из аксиом, задающих норму, вытекает, что функция $\rho(x, y)$ действительно задает расстояние в пространстве, т. е. удовлетворяет аксиомам расстояния.

Кроме того, поскольку N — линейное пространство, метрика $\rho(x, y)$ инвариантна относительно сдвигов, т. е.

$$\rho(x_1+x, x_2+x) = \|(x_1+x) - (x_2+x)\| = \|x_1 - x_2\| = \rho(x_1, x_2),$$

и положительно однородна, т. е.

$$\rho(\alpha x, \alpha y) = \|\alpha x - \alpha y\| = \|\alpha(x-y)\| = |\alpha|\,\|x-y\| = |\alpha|\rho(x, y).$$

С появлением естественной метрики в нормированном пространстве могут быть введены все те понятия, которые мы рассматривали в метрических пространствах, например полнота и т. п.

Следующее определение выделяет из всех нормированных пространств важнейший класс пространств, называемых банаховыми *.

Определение 5. *Банаховым пространством называется полное линейное нормированное пространство.*

Приведем примеры банаховых пространств.

Примеры. 1) Пространство E^1 — действительная числовая ось с обычными арифметическими операциями, как мы знаем, является линейным пространством. Оно превращается в нормированное пространство, если норму числа x положить равной его абсолютной величине: $\|x\| = |x|$. Из свойств абсолютной величины вытекает, что выполнены все свойства нормы. Это нормированное пространство E^1 является полным, т. е. банаховым. Его полнота, т. е. полнота E^1 как метрического пространства с обычным расстоянием между действительными числами ($\rho(x, y) = \|x-y\| = |x-y|$), была установлена в гл. 3.

2) Линейное пространство E^n, рассмотренное нами выше, также является нормированным пространством, если норму вектора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ввести по правилу

$$\|x\| = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}.$$

Аксиомы 1) и 2) нормы, очевидно, выполнены, а неравенство треугольника превращается в неравенство

$$\|x+y\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^2\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\right)^{1/2} = \|x\| + \|y\|,$$

которое является частным случаем (при $p=2$) неравенства Минковского для сумм (см. § 5 гл. 9). Это пространство E^n является полным, так как сходимость x_k к x в E^n означает, что все координаты x_k^i вектора x_k сходятся к соответствующим координатам вектора x. Осталось применить утверждение примера 1).

* Стефан Банах — известный польский математик (1892—1945).

3) Пространство $C[a, b]$ непрерывных функций с обычными операциями сложения функций и умножения функций на число, как мы уже говорили выше, является линейным пространством. Оно превращается в нормированное пространство, если положить $\|f\| = \max\limits_{x\in[ab]} |f(x)|$, где $f(x)$ — непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция. Используя свойства абсолютной величины и функции max, легко убедиться, что все аксиомы нормы здесь выполнены *.

4) Пространство m-ограниченных последовательностей также можно сделать нормированным, положив $\|x\| = \sup\limits_k |x_k|$ для $x = (x_1, x_2, \ldots)$. Аксиомы нормы здесь также проверяются без труда. Можно убедиться также, что оно является полным нормированным пространством, т. е. банаховым пространством.

3. Операторы в линейных и нормированных пространствах. Пусть L_1 и L_2 — два линейных пространства и A — отображение пространства L_1 в L_2, т. е. $A: L_1 \to L_2$.

Определение 6. *Отображение $A: L_1 \to L_2$ одного линейного пространства L_1 в другое L_2 называется линейным отображением или линейным оператором, если:*

а) *$A(x_1+x_2) = Ax_1 + Ax_2$ для любых векторов x_1 и x_2 пространства L_1;*

б) *$A(\alpha x) = \alpha Ax$ для любого вектора $x \in L_1$ и любого числа α.*

Отображение $A: L_1 \times L_2 \times \ldots \times L_n \to L$ прямого произведения линейных пространств $L_1, L_2, \ldots, L_n$** в линейное пространство L называется полилинейным, если линейно каждое отображение

$$A_i: L_i \to L, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

получаемое из $A(x, y, \ldots, z)$ фиксированием всех переменных, кроме переменной, стоящей на i-м месте. Здесь $x \in L_1$, $y \in L_2, \ldots, z \in L_n$.

Если задано линейное отображение $A: L_1 \to L_2$ линейного пространства L_1 в линейное пространство L_2 и пространство L_2 является действительной числовой осью (или комплексной плоскостью), то оператор A называют функционалом.

Рассмотрим некоторые примеры.

Примеры. 1) Пусть L — произвольное линейное пространство. Оператор E ставит в соответствие каждому элементу $x \in L$ тот же элемент x этого же пространства, т. е. $E: L \to L$ и $Ex = x$ для любого $x \in L$. Такой оператор называется единичным или единицей.

---

* Можно убедиться, что это пространство является и полным, т. е. банаховым.

** Линейные операции в $L_1 \times L_2 \times \ldots \times L_n$ определены равенствами $[x_1, \ldots, x_n] + [y_1, \ldots, y_n] = [x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n]$, $\alpha[x_1, \ldots, x_n] = [\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n]$, где $[x_1, \ldots, x_n]$, $[y_1, \ldots, y_n] \in L_1 \times \ldots \times L_n$, $x_i, y_i \in L_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$; α — число.

2) В трехмерном пространстве E^3 зададим оператор A как линейное преобразование, состоящее в проектировании каждого вектора на ось Ox (т. е. каждому вектору в соответствие ставится его координата на оси Ox). Оператор можно задать матрицей. Например, в базисе из единичных векторов e_1, e_2, e_3, направленных по осям координат Ox, Oy, Oz соответственно, указанный оператор A можно задать так:

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in E^3.$$

3) В пространстве $C[a, b]$ линейный оператор A задан по правилу: $Af = \int_a^b f(x)\,dx$. Оператор A отображает $C[a, b]$ в числовую ось и является функционалом.

4) Модуль непрерывности $\omega(f, \delta)$ (см. гл. 4) и дельта-функция $\delta(x-a)$, т. е. оператор $\delta(x-a)$, действующий по правилу $\delta(x-a)[f(x)] = f(a)$, также являются функционалами на $C[a, b]$.

4. Пространство операторов. Пусть L_1 и L_2 — два линейных пространства. Рассмотрим совокупность $\{A\}$ всех линейных операторов, отображающих L_1 в L_2. В множестве $\{A\}$, элементами которого являются линейные операторы, отображающие L_1 в L_2, можно ввести алгебраические операции. Пусть A_1 и A_2 — такие операторы. Определим сложение этих операторов посредством равенства

$$(A_1 + A_2)x = A_1x + A_2x, \quad x \in L_1.$$

Умножение линейного оператора на число определим формулой

$$(\alpha A)x = \alpha Ax.$$

Очевидно, что при таких определениях все необходимые аксиомы, задающие линейное пространство, будут выполнены и рассматриваемое множество $\{A\}$ линейных операторов будет линейным пространством. Нулем этого пространства будет нулевой оператор O, т. е. оператор, переводящий любой вектор x в нулевой вектор: $Ox = 0$. Пространство линейных операторов, которое мы ввели выше, обычно обозначается так: $(L_1 \to L_2)$. Если пространства L_1 и L_2, кроме того, обладают некоторой топологией, например нормированы, то и пространство операторов $(L_1 \to L_2)$ будет обладать определенной топологией.

5. Норма оператора. Пусть N_1 и N_2 — два линейных нормированных пространства и оператор A отображает N_1 в N_2.

Определение 7. *Линейный оператор $A: N_1 \to N_2$, отображающий линейное нормированное пространство N_1 в линейное нормированное пространство N_2, называется ограниченным, если существует такая постоянная M,* что $\|Ax\|_{N_2} \leqslant M\|x\|_{N_1}$ *для всех $x \in N_1$.* Индекс внизу символа нормы означает то пространство, в котором вычисляется норма вектора. Если это не будет вызывать недоразумений, эти индексы мы будем опускать.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Для того чтобы линейный оператор $A: N_1 \to N_2$, отображающий линейное нормированное пространство N_1 в N_2, был непрерывен, необходимо и достаточно, чтобы он был ограничен.*

(Заметим, что непрерывность оператора понимается как непрерывность соответствующего отображения.)

Доказательство. Пусть A — непрерывный оператор. Если бы он был неограничен, то нашлась бы последовательность элементов $\{x_n\}$ такая, что

$$\|Ax_n\| > n\|x_n\|.$$

Пусть $y_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}$. Тогда $y_n \to 0$, так как $\|y_n\| = \frac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$. С другой стороны,

$$\|Ay_n\| = \frac{\|Ax_n\|}{n\|x_n\|} > 1.$$

Заметим, что (в силу линейности оператора A) $A \cdot 0 = 0$; действительно, $A \cdot 0 = A(x - x) = Ax - Ax = 0$. Итак, Ay_n не стремится к $A \cdot 0 = 0$, т. е. оператор A не является непрерывным в нулевой точке, что противоречит условию теоремы.

Обратно, если A ограничен, то $\|Ax\| \leqslant M\|x\|$. Пусть $x_n \to x$, т. е. $\|x_n - x\| \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда $\|Ax_n - Ax\| = \|A(x_n - x)\| \leqslant M\|x_n - x\| \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, $Ax_n \to Ax$ и оператор A непрерывен в точке x.

Определение 8. *Пусть A — линейный ограниченный оператор. Наименьшая из постоянных M, удовлетворяющих условию*

$$\|Ax\| \leqslant M\|x\|,$$

называется нормой оператора A и обозначается символом $\|A\|$.

Таким образом, согласно определению 8 норма оператора обладает следующими свойствами:

а) для любого $x \in N_1$ справедливо неравенство

$$\|Ax\| \leqslant \|A\|\|x\|;$$

б) для любого числа $\varepsilon>0$ найдется такой элемент x_ε, что

$$\|Ax_\varepsilon\|>(\|A\|-\varepsilon)\cdot\|x_\varepsilon\|.$$

Покажем, что $\|A\|=\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}\|Ax\|$ *или, что то же самое,* $\|A\|=\sup\limits_{\|x\|\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$. Действительно, если $\|x\|\leqslant 1$, то $\|Ax\|\leqslant \leqslant\|A\|\cdot\|x\|\leqslant\|A\|$. Значит, и $\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}\|Ax\|\leqslant\|A\|$. С другой стороны, для любого $\varepsilon>0$ существует элемент x_ε такой, что

$$\|Ax_\varepsilon\|>(\|A\|-\varepsilon)\|x_\varepsilon\|.$$

Пусть $\xi_\varepsilon=\frac{x_\varepsilon}{\|x_\varepsilon\|}$. Тогда $\|A\xi_\varepsilon\|=\frac{\|Ax_\varepsilon\|}{\|x_\varepsilon\|}>\frac{1}{\|x_\varepsilon\|}(\|A\|-\varepsilon)\|x_\varepsilon\|= =\|A\|-\varepsilon$. Так как $\xi_\varepsilon=1$, то

$$\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Ax\|\geqslant\|A\xi_\varepsilon\|>\|A\|-\varepsilon.$$

Следовательно, $\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}\|Ax\|\geqslant\|A\|$, и потому $\|A\|=\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}\|Ax\|$.

Замечание. Из проведенных рассуждений следует, что

$$\|A\|=\sup_{\|x\|=1}\|Ax\|.$$

Выше (см. п. 4) нами было введено пространство $(L_1\to L_2)$ операторов, отображающих линейное пространство L_1 в линейное пространство L_2. Это пространство играет важную роль в различных разделах анализа, и мы сейчас продолжим его изучение.

Предположим теперь, что указанные выше линейные пространства L_1 и L_2 являются нормированными. Переобозначим их через N_1 и N_2 соответственно, а соответствующее линейное пространство, элементами которого являются линейные ограниченные операторы, через $(N_1\to N_2)$. В пространстве $(N_1\to N_2)$ можно ввести норму. Для этого норму элемента A пространства $(N_1\to N_2)$ введем по правилу: $\|A\|=\sup\limits_{\|x\|=1}\|Ax\|$. Легко видеть, что эта норма удовлетворяет аксиомам определения нормы. Таким образом, линейное пространство $(N_1\to N_2)$, элементами которого являются линейные ограниченные операторы, есть линейное нормированное пространство. Возникает естественный вопрос: когда это пространство является полным, т. е. банаховым?

Ответ на этот вопрос содержится в доказываемой ниже теореме.

Теорема. *Если линейное нормированное пространство* $N_2=B_2$ *банахово, то пространство* $(N_1\to B_2)$ *линейных ограниченных операторов также является банаховым.*

Доказательство. Пусть $\{A_n\}$ — фундаментальная последовательность пространства операторов $(N_1 \to B_2)$, т. е. $\|A_n - A_m\| \to 0$, когда $n, m \to \infty$. Для любого x получим, что $\|A_n x - A_m x\| \leqslant \|A_n - A_m\| \|x\| \to 0$ при $n, m \to \infty$. Следовательно, если $x \in N_1$ фиксировано, то последовательность элементов $\{A_n x\}$ фундаментальна в B_2, т. е. в силу полноты B_2 эта последовательность сходится. Обозначим $y = \lim\limits_{n\to\infty} A_n x$. Мы получили, таким образом, отображение N_1 в B_2. Оператор, осуществляющий это отображение, обозначим через A. Из свойств предела следует, что он линеен. Докажем его ограниченность. Из того, что $\|A_n - A_m\| \to 0$ при $n, m \to \infty$, следует, что $|\|A_n\| - \|A_m\|| \to 0$ при $n, m \to \infty$, т. е. числовая последовательность $\{\|A_n\|\}$ фундаментальна в E^1, а следовательно, и ограничена. Существует такая постоянная M, что $\|A_n\| \leqslant M$ для любого натурального n. Отсюда получаем, что $\|A_n x\| \leqslant \|A_n\| \|x\| \leqslant M \|x\|$, т. е. в силу того, что функция, определяющая норму (расстояние), непрерывна, имеем

$$\|Ax\| = \lim_{n\to\infty} \|A_n x\| \leqslant M \|x\|.$$

Итак, оператор A — ограничен. Оператор A был нами определен как оператор, отображающий N_1 в B_2 по указанному выше правилу. Покажем, что A является пределом последовательности $\{A_n\}$ в смысле сходимости по норме в пространстве $(N_1 \to B_2)$. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем n_0 так, что $\|A_{n+p} x - A_n x\| < \varepsilon$ для $n \geqslant n_0$ и любого x такого, что $\|x\| \leqslant 1$. Пусть $p \to \infty$. Тогда $\|Ax - A_n x\| \leqslant \varepsilon$ для $n \geqslant n_0$ и всех x с нормой, не превосходящей единицы. Поэтому для $n \geqslant n_0$ получим $\|A_n - A\| = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|(A_n - A)x\| \leqslant \varepsilon$. Следовательно, $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$ в смысле сходимости по норме в пространстве $(N_1 \to B_2)$, т. е. это пространство банахово, что и требовалось доказать.

6. Понятие гильбертова * пространства.

Определение 9. *Гильбертовым пространством называется множество H элементов f, g, h, ..., обладающее следующими свойствами:*

1) *H представляет собой линейное пространство, т. е. в H определены действия сложения и умножения на действительные или комплексные числа (в зависимости от этого H называется действительным или комплексным пространством).*

2) *H является метрическим пространством, причем метрика вводится с помощью скалярного произведения, т. е. числовой функции (f, g) от пары аргументов f и g, называемой их скалярным произведением и удовлетворяющей аксиомам:*

* Давид Гильберт — немецкий математик (1862—1943).

а) $(\alpha f, g) = \alpha(f, g)$ для любого числа α;
б) $(f+g, h) = (f, h) + (g, h)$;
в) $(f, g) = \overline{(g, f)}$ *;
г) $(f, f) > 0$ при $f \neq 0$; $(f, f) = 0$ при $f = 0$.

Норма $\|f\|$ *элемента* f *определяется равенством* $\|f\| = (f, f)^{1/2}$, *а расстояние между элементами* f *и* g *полагается равным*

$$\rho(f, g) = \|f - g\|.$$

3) *H является полным пространством, как метрическое пространство с введенным выше расстоянием.* (*Конечномерное пространство всегда полно.*)

Возьмем произвольные элементы $f, g \in H$, пусть λ — действительное число. Тогда

$$0 \leqslant (g + \lambda(f, g)g, f + \lambda(f, g)g) = (f, f) + 2\lambda|(f, g)|^2 + \\ + \lambda^2|(f, g)|^2(g, g)$$

и, следовательно, такой многочлен относительно λ не может иметь различных действительных корней. Отсюда вытекает, что

$$|(f, g)|^4 - (f, f)|(f, g)|^2(g, g) \leqslant 0.$$

Таким образом (даже в случае $(f, g) = 0$),

$$|(f, g)|^2 \leqslant (f, f)(g, g) \text{ или } |(f, g)| \leqslant \|f\|\|g\|.$$

Мы получили неравенство Коши — Буняковского. Знак равенства в нем, помимо тривиального случая $f = 0$ или $g = 0$, достигается только тогда, когда $f = -\lambda(f, g)g$ при некотором значении λ, т. е. когда векторы f и g коллинеарны.

Используя это неравенство, легко проверить, что норма элемента $\|f\|$ и расстояние $\rho(f, g) = \|f - g\|$ удовлетворяют всем аксиомам, входящим в их определение.

Вместе с метрикой в гильбертовом пространстве появляются понятия, связанные с предельным переходом в смысле введенного расстояния.

Наличие скалярного произведения позволяет ввести в H понятия угла между векторами (если H вещественно). Угол (f, g) между векторами f и g определяется равенством

$$\cos(\widehat{f, g}) = \frac{(f, g)}{\|f\|\|g\|}.$$

Это понятие, в свою очередь, позволяет назвать два вектора ортогональными, если они образуют угол в 90°. Другими словами, векторы f и g называются ортогональными, если $(f, g) = 0$.

* $\overline{(g, f)}$ означает комплексно сопряженное к числу (g, f).

Если вектор f ортогонален векторам $g_1, \ldots, g_n$, то он ортогонален и их линейной комбинации $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i$.

Если векторы $g_1, \ldots, g_n, \ldots$ ортогональны вектору f и $g = \lim_{n\to\infty} g_n$, то вектор g ортогонален вектору f.

Из сказанного следует, что совокупность всех векторов, ортогональных векторам $f_1, \ldots, f_n$, где n фиксировано, образует замкнутое линейное многообразие, т. е. подпространство, называемое ортогональным дополнением к множеству $\{f_1, \ldots, f_n\}$.

В гильбертовом пространстве H можно ввести важное понятие сопряженного оператора.

Определение 10. *Оператор A^* называется сопряженным к линейному ограниченному оператору A, если для любых элементов $x, y \in H$ выполняется равенство* $(Ax, y) = (x, A^*y)$.

Ограниченный линейный оператор A, действующий в гильбертовом пространстве H, называется самосопряженным, если $(Ax, y) = (x, Ay)$ для всех x и y из H.

Примеры. 1) В n-мерном пространстве E^n, элементами которого являются наборы чисел $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, можно ввести скалярное произведение по формуле $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. Учитывая, что конечномерное пространство E^n полное, заключаем, что E^n является гильбертовым пространством. Аксиомы скалярного произведения здесь, очевидно, выполнены.

2) Операторы E (единичный), O (нулевой) являются примерами самосопряженных операторов, действующих в гильбертовом пространстве. Для них всегда выполнены соотношения

$$(Ex, y) = (x, y) = (x, Ey),$$
$$(Ox, y) = (0, y) = 0 = (x, Oy).$$

ДОПОЛНЕНИЕ 3

Дифференциальное исчисление в линейных нормированных пространствах

В гл. 5, 6, 7 были изучены вопросы дифференциального исчисления функции одной переменной, а также были исследованы экстремальные свойства функции одной переменной. В предыдущих параграфах настоящей главы эти же вопросы изучались уже для функций многих переменных.

Подчеркнем, что всюду в гл. 5, 6, 7 под функцией мы понимали соответствие между точками множества $\{M\}$ числовой оси (или точками множества $\{M\}$ m-мерного евклидова пространства) и подмножеством числовой оси. Другими словами, такие функции отображают множество $\{M\}$ числовой оси или m-мерного евклидова пространства в подмножество числовой оси. Такие функции могут быть названы числовыми (скалярными) функциями, ибо множество значений таких функций есть числа (скаляры) вещественной оси.

В дополнении 2 к этой главе мы вводили понятие функции, отображающей одно абстрактное множество в другое (например, одно метрическое пространство в другое метрическое пространство, одно нормированное пространство в другое нормированное пространство и т. д.). Такие функции называются операторами, отображениями, функциями множеств и т. д.

В частности, можно рассматривать функции, отображающие m-мерное евклидово пространство в n-мерное евклидово пространство. Такие функции называются уже векторными функциями, поскольку значениями таких функций являются не числа, а векторы некоторого пространства. Например, если отображение происходит в n-мерное евклидово пространство, то значениями функции, осуществляющей это отображение, являются векторы n-мерного пространства.

Примером функции, осуществляющей отображение одного метрического пространства X в то же пространство X может быть тождественное отображение E, ставящее в соответствие каждой точке $x \in X$ ту же точку $x \in X$. Отображение $\|x\|$, ставящее в соответствие точке x нормированного пространства N число $\|x\|$ — норму элемента x, есть пример функции, заданной на нормированном пространстве N.

В этом параграфе будет построено дифференциальное исчисление функций, заданных на нормированном пространстве. В качестве элементарного следствия наших построений могут быть получены факты, относящиеся к функциям, осуществляющим отображения m-мерного евклидова пространства в n-мерное евклидово пространство (при этом натуральное число n может как совпадать, так и не совпадать с натуральным числом m).

1. Понятие дифференцируемости. Сильная и слабая дифференцируемость в линейных нормированных пространствах. Пусть N_1 и N_2 — два нормированных пространства и F — отображение (функция), действующее из N_1 в N_2 ($F: N_1 \to N_2$) и определенное на некотором открытом множестве Σ пространства N_1. Напомним, что поскольку N_1 — нормированное пространство, то оно, в частности, является и метрическим пространством; следовательно, все понятия, введенные в метрических про-

странствах, такие, как открытое, замкнутое, ограниченное множество, расстояние между точками и т. д. имеют смысл. Подчеркнем, что в этом дополнении будут использоваться многие понятия, введенные в дополнении 2. Введем понятие дифференцируемого отображения.

Определение. *Назовем отображение $F: N_1 \to N_2$ дифференцируемым* в данной точке x, принадлежащей открытому множеству $\Sigma \subset N_1$, если существует такой ограниченный линейный оператор $L_x \in (N_1 \to N_2)$ **, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $h \in N_1$ и $\|h\|_{N_1} < \delta$,* то

$$\|F(x+h) - F(x) - L_x h\|_{N_1} \leqslant \varepsilon \|h\|_{N_1}$$

или, что то же самое,

$$\|F(x+h) - F(x) - L_x h\|_{N_2} = o(h),$$

где $o(h)/\|h\| \to 0$ при $\|h\|_{N_1} \to 0$. Здесь $x+h \in \Sigma \subset N_1$.

Индексы N_2 или N_1 у знака $\|\cdot\|$ нормы означают, что норма берется соответственно в пространстве N_2 или N_1. Для простоты записи договоримся в дальнейшем о том, что там, где не будет возникать недоразумений, эти индексы опускать.

Выберем последовательность чисел $\varepsilon_n \to 0$. Согласно сформулированному определению ей отвечает последовательность чисел δ_n и для любой последовательности точек h_n такой, что $\|h_n\| < \delta_n$, $\|h_n\| \to 0$, мы получим, что

$$\|F(x+h_n) - F(x)\| \leqslant \|F(x+h_n) - F(x) - L_x h_n\| + \|L_x h_n\| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon_n \|h_n\| + \|L_x\| \|h_n\| \to 0,$$

когда $n \to \infty$ (поскольку $\|h_n\| \to 0$, $\varepsilon_n \to 0$, а $\|L_x\| \leqslant C$ в силу ограниченности линейного оператора L_x).

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} F(x+h_n) = F(x)$ при $\|h_n\| \to 0$, т. е. если обозначить $x+h_n$ через x_n, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} F(x_n) = F(x)$. Та-

---

* Если, в частности, $F(x)$ есть скалярная функция, определенная на некотором интервале (α, β) ($F(x)$ отображает подмножество числовой оси в подмножество числовой оси $F(x): (\alpha, \beta) \to E^1$), то в случае ее дифференцируемости в точке x_0 из интервала (α, β) можно записать:

$$F(x_0+h) - F(x_0) - Lh = o(h), \quad o(h)/h \to 0, \text{ если } h \to 0,$$

где h — некоторое число — приращение аргумента функции, $L = L(x_0)$ — линейный оператор, являющийся производной отображения $F(x)$ в точке x_0, принадлежит в данном случае пространству операторов $(E^1 \to E^1)$, т. е. является просто оператором умножения на число. С другой стороны, если рассматривать $F(x)$ как обычную числовую функцию, то число L есть, очевидно, производная функции $F(x)$ в точке x_0, т. е. $L = F'(x_0)$.

** Через $(N_1 \to N_2)$ в дополнении 2 было обозначено пространство линейных ограниченных операторов, отображающих одно линейное нормированное пространство N_1 в другое линейное нормированное пространство N_2.

ким образом, *дифференцируемое в точке x отображение $F(x)$ непрерывно в этой точке.*

Выражение $L_x h$ при каждом $h \in N_1$ является элементом пространства N_2 и называется **сильным дифференциалом** *(или* **дифференциалом Фреше***) отображения F в точке x (и иногда обозначается символом dF). Линейный оператор L_x называется* **производной или сильной производной** *отображения F в точке x. Будем обозначать эту производную символом $F'(x)$. Таким образом, можно записать, что сильный дифференциал отображения F по определению равен $L_x h$, т. е. $dF = L_x h$, а сильная производная $F'(x)$ равна L_x, т. е. $F'(x) = L_x$.*

Если отображение F дифференцируемо в точке x, то соответствующая производная определяется **единственным образом**. В самом деле, пусть

$$F(x+h) - F(x) - L^1{}_x h = \mathbf{o}(h)^* \quad \text{и} \quad F(x+h) - F(x) - L^2{}_x h = \mathbf{o}(h).$$

Тогда

$$L^1{}_x h - L^2{}_x h = \mathbf{o}(h).$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что из неравенства $\|h\| < \delta$ следует неравенство

$$\|L^1{}_x h - L^2{}_x h\| \leqslant \varepsilon \|h\|.$$

Разделим обе части этого неравенства на $\|h\| \neq 0$. Тогда получим, что выполнено неравенство

$$\left\| L_x^1 \frac{h}{\|h\|} - L_x^2 \frac{h}{\|h\|} \right\| \leqslant \varepsilon,$$

справедливое в силу свойства нормы и линейности операторов $L^1{}_x$ и $L^2{}_x$. Полагая $\frac{h}{\|h\|} = e$, где $\|e\| = 1$, мы получим, что

$$\|L^1{}_x e - L^2{}_x e\| \leqslant \varepsilon$$

для любого вектора e из единичной сферы (т. е. для любого вектора, с нормой, равной единице).

В силу произвольности ε отсюда следует совпадение операторов $L^1{}_x$ и $L^2{}_x$ всюду на единичной сфере. Поскольку операторы $L^1{}_x$ и $L^2{}_x$ линейные, то они, очевидно, совпадают и всюду, т. е.

$$L^1{}_x = L^2{}_x.$$

* Написанное равенство следует понимать так:

$$\|F(x+h) - F(x) - L_x{}^1 h\| = o(h).$$

В равенстве $F(x+h) - F(x) - L_x{}^1 h = \mathbf{o}(h)$, $\frac{\mathbf{o}(h)}{\|h\|} \to 0$, если $\|h\| \to \infty$, т. е. норма величины $\mathbf{o}(h)$ является числовой величиной $o(\|h\|)$.

Для того чтобы проиллюстрировать определение сильной дифференцируемости отображения одного нормированного пространства в другое на конкретном примере, рассмотрим случай отображения $F: E^m \to E^1$, т. е. отображения m-мерного евклидова пространства в числовую ось. В этом случае* отображение $F = F(x_1, x_2, ..., x_m)$ есть обычная числовая функция от m переменных. Если обозначить приращения аргумента x_1 через h_1, аргумента x_2 через h_2, ..., аргумента x_m через h_m, то, как это следует из формулы (12.15), условие дифференцируемости функции m переменных $F(x_1, x_2, ..., x_m)$ в точке $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$, принадлежащей некоторому открытому множеству $\Sigma \subset E^m$, записывается в виде

$$F(x_1+h_1, x_2+h_2, ..., x_m+h_m) - F(x_1, x_2, ..., x_m) = \\ = F(x+h) - F(x) = A_1h_1 + A_2h_2 + ... + A_mh_m + o(\rho),$$

где $x+h = (x_1+h_1, x_2+h_2, \ldots, x_m+h_m)$, $A_1 = \dfrac{\partial F(x)}{\partial x_1}$,

$$A_2 = \frac{\partial F(x)}{\partial x_2}, \ldots, A_m = \frac{\partial F(x)}{\partial x_m}, \ \rho = (h_1^2 + h_2^2 + \ldots + h_m^2)^{1/2},$$

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

Заметим, что справедливо равенство $\rho = \|h\|$, где $\|h\|$ берется в пространстве E^m, как в нормированном пространстве.

Поэтому если функция m переменных дифференцируема, то она, очевидно, и сильно дифференцируема, как отображение нормированного пространства E^m в нормированное пространство E^1, причем сильная производная L_x определяется из условия $L_xh = \sum_{i=1}^{m} \dfrac{\partial F}{\partial x_i} h_i$, т. е. L_xh равно скалярному произведению вектора $F_x = \left(\dfrac{\partial F}{\partial x_1}, \dfrac{\partial F}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial F}{\partial x_m}\right)$ на вектор $h = (h_1, h_2, ..., h_m)$. Из курса линейной алгебры мы знаем, что всякий линейный функционал из пространства $(E^n \to E^1)$ имеет вид скалярного произведения.

Таким образом, в случае отображения m-мерного евклидова пространства в числовую ось понятие сильной дифференцируемости функции $F(x_1, x_2, ..., x_m)$, очевидно, в силу единственности производной совпадает с понятием ее дифференцируемости.

Установим теперь некоторые элементарные факты, непосредственно вытекающие из определения производной.

---

* Выбрав базис в E^m, мы всегда, независимо от природы элементов $x \in E^m$, можем считать, что x является упорядоченной совокупностью m чисел.

Свойство 1. *Если* $F(x)=F=\text{const}$ (*оператор* F *от* x *не зависит — является постоянным*), *то* $F'\equiv O$, *где* O — *нулевой оператор.*

Доказательство этого свойства очевидно.

Свойство 2. *Производная непрерывного* (*т. е. ограниченного*) *линейного отображения* A *есть само это отображение*: $A'(x)=A$.

Действительно,

$$A(x+h)-A(x)=A(x)+A(h)-A(x)=A(h).$$

Поэтому

$$A'(x)=A.$$

Свойство 3 (производная сложной функции). *Пусть* N_1, N_2, N_3 — *три нормированных пространства,* Σ_{x_0} — *окрестность точки* $x_0\in N_1$, F — *отображение этой окрестности в* N_2, $y_0=F(x_0)$, Σ_{y_0} — *окрестность точки* $y_0\in N_2$ *и* G — *отображение этой окрестности в* N_3. *Тогда если отображение* F *дифференцируемо в точке* x_0, *а* G *дифференцируемо в точке* y_0, *то отображение* $H=GF$ (*которое определено в некоторой окрестности точки* x_0 *и отображает ее в* N_3) *дифференцируемо в точке* x_0 *и*

$$H'(x_0)=G'(y_0)\cdot F'(x_0).$$

В самом деле, согласно условиям дифференцируемости отображений F и G

$$F(x_0+\xi)=F(x_0)+F'(x_0)\xi+\mathbf{o}_1(\xi)$$

и

$$G(y_0+\eta)=G(y_0)+G'(y_0)\eta+\mathbf{o}_2(\eta),$$

где $\frac{\|\mathbf{o}_1(\xi)\|}{\|\xi\|}$ — величина, стремящаяся к нулю при стремлении к нулю $\|\xi\|$; $\frac{\|\mathbf{o}_2(\eta)\|}{\|\eta\|}$ — величина, стремящаяся к нулю при стремлении к нулю $\|\eta\|$.

Операторы $F'(x_0)$ и $G'(y_0)$ — постоянные операторы, ограниченные по норме. Поэтому $\mathbf{o}(F'(x_0)\xi)=\mathbf{o}(\xi)$ и $G(y_0)\mathbf{o}(\xi)=\mathbf{o}(\xi)$. В самом деле, $\|\mathbf{o}(F'(x_0)\xi)\|\leqslant\varepsilon\|F'(x_0)\xi\|$, если $\|F'(x_0)\xi\|<\delta$, т. е. $\|\mathbf{o}(F'(x_0)\xi)\|\leqslant\varepsilon\|F'(x_0)\xi\|\leqslant\varepsilon\|F'(x_0)\|\|\xi\|=\varepsilon_1\|\xi\|$, где $\varepsilon_1=\varepsilon\|F'(x_0)\|$, $\|F'(x_0)\|$ — норма ограниченного оператора $F'(x_0)$ *. Таким образом, для всякого $\varepsilon_1>0$ существует $\delta_1>0$ (а именно $\delta_1=\delta/\|F'(x_0)\|$, $\|F'(x_0)\|\neq 0$) такое, что $\|\mathbf{o}(F'(x_0)\xi)\|\leqslant\varepsilon_1\|\xi\|$, если $\|\xi\|\leqslant\delta_1=\delta/\|F'(x_0)\|$, т. е. если $\|F'(x_0)\|\|\xi\|<\delta$ (поскольку, если выполнено это неравенство, то тем более $\|F'(x_0)\xi\|\leqslant\|F'(x_0)\|\|\xi\|<\delta$.

* Мы воспользовались оценкой $\|Ax\|\leqslant\|A\|\|x\|$, справедливой для любого ограниченного оператора (см. дополнение 2).

Следовательно, $\mathbf{o}(F'(x_0)\xi)=\mathbf{o}(\xi)$ *. Соотношение $G(y_0)\mathbf{o}(\xi)=\mathbf{o}(\xi)$ доказывается еще проще.

Учитывая доказанные соотношения, получим

$$H(x_0+\xi)=GF(x_0+\xi)=G[F(x_0)+F'(x_0)\xi+\mathbf{o}_1(\xi)]=$$
$$=G[y_0+F'(x_0)\xi+\mathbf{o}_1(\xi)]=G(y_0+\eta),$$

где $\eta=F'(x_0)\xi+\mathbf{o}_1(\xi)$. Далее,

$$G(y_0+\eta)=G(y_0)+G'(y_0)\eta+\mathbf{o}_2(\eta)=$$
$$=G(y_0)+G'(y_0)[F'(x_0)\xi+\mathbf{o}_1(\xi)]+\mathbf{o}_2(F'(x_0)\xi+\mathbf{o}_1(\xi))=$$
$$=G(y_0)+G'(y_0)F'(x_0)\xi+G'(y_0)\mathbf{o}_1(\xi)+\mathbf{o}_2(F'(x_0)\xi)+\mathbf{o}_1(\xi)=$$
$$=G(y_0)+G'(y_0)F'(x_0)\xi+\mathbf{o}_3(\xi).$$

Следовательно,

$$H(x_0+\xi)-G(y_0)=H(x_0+\xi)-G(F(x_0))=H(x_0+\xi)-H(x_0)=$$
$$=G'(y_0)F'(x_0)\xi+\mathbf{o}_3(\xi),$$

и формула для производной сложной функции полностью доказана.

Если F, G, H — числовые функции, то это формула превращается в известное нам правило дифференцирования сложной функции.

Для отображений F, G, H это правило называется еще правилом вычисления производной композиции отображений.

Свойство 4. *Пусть F и G — два непрерывных отображения, действующих из N_1 в N_2. Если F и G дифференцируемы в точке x_0, то и отображения $F+G$ и aF, где a — число, тоже дифференцируемы в этой точке, причем*

$$(F+G)'(x_0)=F'(x_0)+G'(x_0),$$
$$(aF)'(x_0)=aF'(x_0)\ **.$$

В самом деле, из определения суммы операторов и произведения оператора на число *** получаем, что

$$(F+G)(x_0+h)=F(x_0+h)+G(x_0+h)=$$
$$=F(x_0)+G(x_0)+F'(x_0)h+G'(x_0)h+\mathbf{o}_1(h);$$
$$(aF)(x_0+h)=aF(x_0)+aF'(x_0)h+\mathbf{o}_2(h).$$

Из этих равенств и получаем требуемые соотношения.

Рассмотрим теперь еще одно понятие, связанное с дифференцируемостью отображения.

---

* Если $F'(x_0)=0$, то $\|F'(x_0)\|=0$ и соотношение $\mathbf{o}(F'(x_0)\xi)=\mathbf{o}(\xi)$ очевидно.

** Символами $(F+G)'(x_0)$ и $(aF)'(x_0)$ обозначены значения операторов $(F+G)'$ и $(aF)'$ в точке x_0.

*** Для нелинейных операторов эти определения такие же, как и в случае линейных операторов (см. дополнение 1).

Определение. *Слабым дифференциалом (или дифференциалом Гато) отображения $F: N_1 \to N_2$ называется предел*

$$\lim_{t\to 0}\frac{F(x+th)-F(x)}{t}=\frac{d}{dt}F(x+th)\Big|_{t=0},$$

где сходимость понимается по норме в пространстве N_2.

Слабый дифференциал называется еще первой вариацией отображения F в точке x и обозначается символом $DF(x, h)$.

Слабый дифференциал $DF(x, h)$ может и не быть линеен по h. *Если же оператор $DF(x, h)$ оказывается линейным, т. е. если*

$$DF(x, h)=F_c'(x)h,$$

где $F_c'(x)$ — ограниченный линейный оператор, то этот оператор называется слабой производной (или производной Гато).

2. Формула Лагранжа конечных приращений. При изучении дифференцируемых числовых функций важную роль играла формула Лагранжа конечных приращений. Выведем такую формулу в случае дифференцируемого отображения $F: N_1 \to N_2$. Пусть Σ — открытое множество в N_1, содержащее точку x_0, и пусть множество точек $x_0+t(x-x_0)$* целиком содержится в Σ, $0\leqslant t\leqslant 1$.

Теорема. *Пусть $F: N_1 \to N_2$ — отображение, определенное на открытом множестве $\Sigma \subset N_1$, непрерывное на $[x_0, x]$ и имеющее сильную производную F' в каждой точке интервала (x_0, x). Тогда*

$$\|F(x)-F(x_0)\|\leqslant \sup_{\xi\in(x_0,x)}\|F'(\xi)\|\cdot\|\Delta x\|=$$

$$=\sup_{0<\theta<1}\|F'(x_0+\theta\Delta x)\|\cdot\|\Delta x\|,\quad \Delta x=x-x_0.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала непрерывное отображение $f(t)$, заданное на сегменте $[0, 1]$ и отображающее его в пространство N_2, $f: [0, 1]\to N_2$ и непрерывную функцию $g(t)$, заданную на сегменте $[0, 1]$, принимающую числовые значения. Покажем, что *если $f(t)$ и $g(t)$ сильно дифференцируемы на интервале* $(0, 1)$ ($f(t)$ как отображение одного нормированного пространства, а именно интервала $(0, 1)$, в другое нормированное пространство N_2, а $g(t)$ дифференцируе-

* Множество точек вида $x_0+t(x-x_0)$, где $0\leqslant t\leqslant 1$, называется отрезком или сегментом и обозначается символом $[x_0, x]$ в N_1. При $t=0$ получаем точку x_0, а при $t=1$ — точку x; если $0<t<1$, то множество точек $x_0+t(x-x_0)$ называется интервалом (x_0, x).

ма как числовая функция, определенная на интервале $(0, 1)$), *и если*

$$\|f(t)\| \leqslant g'(t), \quad 0<t<1,$$

то

$$\|f(1)-f(0)\| \leqslant g(1)-g(0). \qquad (*)$$

Из этой формулы утверждение теоремы уже будет следовать легко.

Докажем эту формулу. При каждом фиксированном $\varepsilon>0$ обозначим через A_ε множество точек сегмента $[0, 1]$, в которых выполнено неравенство

$$\|f(t)-f(0)\| \leqslant g(t)-g(0)+\varepsilon t+\varepsilon. \qquad (**)$$

Покажем, что при любом $\varepsilon>0$ число 1 принадлежит множеству A_ε. Тогда при $t=1$ и $\varepsilon\to 0$ получим доказываемую формулу.

В силу непрерывности отображения $f(t)$ и функции $g(t)$ множество A_ε замкнуто на сегменте $[0, 1]$. Действительно, если $t_n \in A_\varepsilon$ и $t_n \to t_0$, то в неравенстве

$$\|f(t_n)-f(0)\| \leqslant g(t_n)-g(0)+\varepsilon t_n+\varepsilon.$$

пользуясь непрерывностью функции нормы (или, что то же самое, непрерывностью функции расстояния): $\|x\|=\rho(x, 0)$, непрерывностью отображения $f(t)$ и непрерывностью функции $g(t)$, можно перейти к пределу при $t_n\to t_0$ и заключить, что

$$\|f(t_0)-f(0)\| \leqslant g(t_0)-g(0)+\varepsilon t_0+\varepsilon,$$

т. е. $t_0 \in A_\varepsilon$, а следовательно, множество A_ε замкнуто.

Множество A_ε непусто, поскольку $(**)$, очевидно, выполнено при достаточно малых t (левая часть неравенства $(**)$ при малых t в силу непрерывности $f(t)$ мала, а правая имеет положительный член ε в качестве слагаемого, который не зависит от t).

Пусть $a=\sup A_\varepsilon$. Поскольку множество $A_\varepsilon \subset [0, 1]$ замкнуто, то $a \in A_\varepsilon$. Покажем, что a не может быть меньше числа 1. Допустим противное, что $a<1$, т. е. $0<a<1$. В силу дифференцируемости $f(t)$ и $g(t)$ в точке a для достаточно малых положительных чисел h будем иметь

$$\|f(a+h)-f(a)\| = \|f'(a)h+o(h)\| \leqslant \|f'(a)h\| + \|o(h)\| \leqslant$$

$$\leqslant \|f'(a)\|h+\frac{\varepsilon}{2}h$$

(в данном случае $\|h\|=|h|=h$, поскольку h — положительное число, а норма элемента h сегмента $[0, 1]$ совпадает с модулем числа h).

Далее,

$$g(a+h)-g(a) = |g(a+h)-g(a)|, \quad h>0,$$

поскольку функция $g(t)$ на интервале $(0, 1)$ не убывает. Это следует из того, что $g'(t) \geqslant 0$, $0<t<1$, что, в свою очередь, следует из неравенства $0 \leqslant \|f'(t)\| \leqslant g'(t)$, $0<t<1$.

Заметим теперь, что

$$|g(a+h)-g(a)| = |g'(a)h+o(h)| \geqslant$$

$$\geqslant |g'(a)h| - |o(h)| \geqslant g'(a)h - \frac{\varepsilon}{2}h$$

для достаточно малых h. Поэтому

$$\|f(a+h)-f(a)\| \leqslant \|f'(a)\|h + \frac{\varepsilon}{2}h \leqslant g'(a)h + \frac{\varepsilon}{2}h \leqslant$$

$$\leqslant g(a+h)-g(a)+\varepsilon h.$$

Поскольку

$$\|f(a)-f(0)\| \leqslant g(a)-g(0)+\varepsilon a+\varepsilon,$$

то

$$\|f(a+h)-f(0)\| = \|f(a+h)-f(a)+f(a)-f(0)\| \leqslant$$

$$\leqslant \|f(a+h)-f(a)\| + \|f(a)-f(0)\| \leqslant$$

$$\leqslant g(a+h)-g(a)+\varepsilon h+g(a)-g(0)+\varepsilon a+\varepsilon =$$

$$= g(a+h)-g(0)+\varepsilon(a+h)+\varepsilon.$$

Мы видим, что $a+h \in A_\varepsilon$, а это противоречит выбору числа a, т. е. число a не может быть меньшим единицы. Следовательно, $a=1$, и $1 \in A_\varepsilon$. Формула $(*)$ доказана.

Завершим теперь доказательство теоремы. Положим

$$f(t) = F(x_0+t\Delta x), \quad g(t) = M\|\Delta x\|t, \quad 0<t<1,$$

где

$$M = \sup_{\xi \in (0,1)} \|f'(\xi)\|.$$

Отображение $f(t)$ и функция $g(t)$ удовлетворяют, очевидно, всем условиям вспомогательного утверждения, установленного нами выше. Поэтому, подставляя эти выражения для $f(t)$ и $g(t)$ в формулу $(*)$, получаем формулу Лагранжа. Теорема доказана.

Следствие. *Если $A \in (N_1 \to N_2)$ — линейное непрерывное отображение нормированного пространства N_1 в нормированное пространство N_2, не зависящее от x, а $F(x)$ — отображение открытого множества $\Sigma \subset N_1$ в N_2, удовлетворяющее условиям теоремы, то*

$$\|F(x)-F(x_0)-A\Delta x\| \leqslant \sup_{\xi \in (x_0, x)} \|F'(\xi)-A\| \, \|\Delta x\|.$$

Действительно, применив теорему к отображению

$$F(x)-A\Delta x, \quad \Delta x = x-x_0,$$

получим

$$\|F(x)-A\Delta x-F(x_0)\| \leqslant \sup_{\xi\in(x_0,x)} \|F'(\xi)-A(x-x_0)'|_{x=\xi}\|\Delta x\| =$$

$$= \sup_{\xi\in(x_0x)} \|F'(\xi)-A\| \, \|\Delta x\|,$$

что и требовалось доказать.

Можно показать, что *теорема и следствие из нее верны, если всюду вместо сильной производной $F'(x)$ рассматривать слабую производную $F_c'(x)$.*

3. Связь между слабой и сильной дифференцируемостью. Сильная и слабая дифференцируемость представляет собой различные понятия даже в случае m-мерного евклидова пространства при $m \geqslant 2$.

Действительно, рассмотрим, например, функцию двух переменных

$$f(x)=f(x_1, x_2)=\begin{cases} \dfrac{x_1^3 x_2}{x_1^4+x_2^2}, & \text{если } x_1^2+x_2^2>0, \\ 0, & \text{если } x_1=0 \text{ и } x_2=0, \end{cases}$$

$x=(x_1, x_2)$ — точка плоскости.

Легко проверить, что эта функция непрерывна всюду на плоскости, включая точку $(0, 0)$. В точке $(0, 0)$ имеем

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(0+th)-f(0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t^4h_1^3h_2}{t^4h_1^4+t^2h_2^2}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2h_1h_2}{h_2^2+t^2h_1^4},$$

где $h=(h_1, h_2)$ — точка плоскости, представляющая собой некоторое приращение аргумента x функции $f(x)$ в точке $(0, 0)$.

Таким образом, мы видим, что в точке $(0, 0)$ слабый дифференциал $f(x)$ существует и равен нулю.

С другой стороны, в начальной точке имеем $f'_{x_1}(0, 0)=$ $=f'_{x_2}(0, 0)=0$; это непосредственно вытекает из самого определения частных производных и из того, что $f(x_1, 0)=0$, $f(0, x_2)=0$. Поэтому, записывая приращение функции в точке $(0, 0)$ в виде

$$\Delta f(h_1, h_2)=f(h_1, h_2)-f(0, 0)=\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x_1}h_1+\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x_2}h_2+o(h),$$

где $h=(h_1, h_2)$ — приращение аргумента, $\dfrac{\|o(h)\|}{\|h\|}\to 0$ при $\|h\|=(h_1^2+h_2^2)^{1/2}\to 0$, получим, что

$$\Delta f=o(h)=\frac{h_1^3h_2}{h_1^4+h_2^2}.$$

Выбирая $h_2=h_1^2$, имеем $\mathbf{o}(h)|_{h_2=h_1^2}=h_1/2$, что приводит к противоречию. Действительно, величина $|h_1|/2$, поделенная на норму h, при $h_2=h_1^2$ стремится к 1/2 при $\|h\|\to 0$, а величина $\mathbf{o}(h)$, поделенная на $\|h\|$, при любых h_1 и h_2 стремится к нулю при $\|h\|\to 0$, что следует из определения $\mathbf{o}(h)$.

Следовательно, функция $f(x)$ не дифференцируема в точке (0, 0) в сильном смысле.

Однако *если отображение F имеет сильную производную, то оно имеет и слабую производную, причем сильная и слабая производные совпадают.* Действительно, для сильно дифференцируемого отображения имеем

$$F(x+th)-F(x)=F'(x)(th)+\mathbf{o}(th)=tF'(x)h+\mathbf{o}(th),$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{F(x+th)-F(x)}{t}=\lim_{t\to 0}\left[F'(x)h+\frac{\mathbf{o}(th)}{t}\right]=F'(x)h,$$

что и требовалось.

Выясним условия, при которых из слабой дифференцируемости отображения F следует его сильная дифференцируемость.

Докажем следующую теорему.

Теорема. *Если слабая производная $F_c'(x)$ отображения $F:N_1\to N_2$ существует в некоторой окрестности Σ_{x_0} точки x_0 и представляет собой в этой окрестности функцию от x, непрерывную в точке x_0*, то в точке x_0 сильная производная $F'(x_0)$ существует и совпадает со слабой.*

Доказательство. По условию отображение F имеет слабую производную $F_c'(x_0)$ в точке x_0. Выбрав h так, что $x_0+h\in\Sigma_{x_0}$, рассмотрим выражение

$$r(x_0, h)=F(x_0+h)-F(x_0)-F_c'(x_0)\,h.$$

Элемент $r(x_0, h)$ принадлежит пространству N_2. Пусть φ — произвольный линейный ограниченный функционал на пространстве N_2. Позже мы укажем некоторые условия на его выбор. Тогда из формулы для $r(x_0, h)$ получим

$$\varphi(r(x_0, h))=\varphi(F(x_0+h)-F(x_0))-\varphi(F_c'(x_0)h).$$

Рассмотрим функцию $f(t)=\varphi(F(x_0+th)-F(x_0))$ числового аргумента t, $0\leqslant t\leqslant 1$. Эта функция дифференцируема по t и для нее

$$\frac{df}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\varphi\left(\frac{F(x_0+th+\Delta th)-F(x_0+th)}{\Delta t}\right)=\varphi(F_c'(x_0+th)h).$$

* $F_c'(x)$ отображает множество Σ_{x_0} пространства N_1 в некоторое множество пространства операторов $(N_1\to N_2)$, т. е. $F_c'(x)$ — операторная функция. Понятие непрерывной функции было нами определено даже для отображений одного метрического пространства в другое (см. дополнение 2).

(Здесь мы воспользовались непрерывностью функционала φ, поменяв местами символы lim и φ, а также слабой дифференцируемостью $F(x)$ в окрестности Σ_{x_0}.)

Применив к функции $f(t)$ формулу конечных приращений на сегменте $[0, 1]$, получим

$$f(1)=f(0)+f'(\theta), \quad 0<\theta<1,$$

или

$$\varphi(F(x_0+h)-F(x_0))=\varphi(F_c'(x_0+\theta h)h), \quad 0<\theta<1.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\varphi(r(x_0, h))&=\varphi(F(x_0+h)-F(x_0))-\varphi(F_c'(x_0)h)=\\&=\varphi(F_c'(x_0+\theta h)h)-\varphi(F_c'(x_0)h)=\\&=\varphi(F_c'(x_0+\theta h)h-F_c'(x_0)h).\end{aligned}$$

Отметим теперь следующий факт: запись $\psi(x)$, где $x\in N$ — некоторому нормированному пространству, а ψ — линейный непрерывный функционал на N, можно рассматривать с двух точек зрения. Во-первых, можно фиксировать функционал ψ и менять аргумент $x\in N$. В этом случае, например, как мы отмечали в дополнении 2, $\|\psi\|=\sup\limits_{\|x\|=1}|\psi(x)|$. Во-вторых, можно фиксировать элемент $x\in N$, а менять функционалы ψ. Линейные непрерывные функционалы ψ отображают пространство N в пространство P действительных (или комплексных) чисел и принадлежат тоже нормированному (даже банаховому в силу полноты P, см. дополнение 2) пространству $(N\to P)$. В этом случае, например, $\|x\|=\sup\limits_{\|\psi\|=1}|\psi(x)|$, где верхняя грань уже берется по всем функционалам $\psi\in(N\to P)$; $\|\psi\|=1$, т. е. по функционалам, имеющим нормы, равные единице. Поэтому, по определению верхней грани, существует такой функционал ψ, $\|\psi\|=1$, что при фиксированном $x\in N$ $|\psi(x)|\geqslant\frac{1}{2}\|x\|$. Воспользуемся этим фактом и выберем функционал φ, $\|\varphi\|=1$, таким, что

$$|\varphi(r(x_0, h))|\geqslant\frac{1}{2}\|r(x_0, h)\|,$$

где h, а следовательно, $r(x_0, h)$ фиксированы.

Отсюда и из равенства для $\varphi(r(x_0, h))$ получаем, что

$$\begin{aligned}\|r(x_0, h)\|&\leqslant 2\|\varphi(F_c'(x_0+\theta h)h-F_c'(x_0, h)\|\leqslant\\&\leqslant 2\|F_c'(x_0+\theta h)h-F_c'(x_0)h\|\|\varphi\|\leqslant\\&\leqslant 2\|F_c'(x_0+\theta h)-F_c'(x_0)\|\|h\|.\end{aligned}$$

Но по условию $F_c'(x)$ есть непрерывная в точке x_0 функция от x; поэтому

$$\lim_{h\to 0}\|F_c'(x_0+\theta h)-F_c'(x_0)\|=0,$$

так что $\|(x_0, h)\|$ есть величина выше первого порядка малости относительно $\|h\|$, т. е. $F_c'(x_0)h$, как это следует из формулы $r(x_0, h)=F(x_0+h)-F(x_0)-F_c'(x_0)h$ есть главная, линейная по h, часть разности $F(x_0+h)-F(x_0)$. Тем самым доказано существование сильной производной $F'(x_0)$ и ее совпадение со слабой производной $F_c'(x_0)$.

4. Дифференцируемость функционалов. В предыдущих пунктах нами было введено понятие дифференцируемого отображения $F:N_1\to N_2$, отображающего нормированное пространство N_1 в нормированное пространство N_2. Мы уже отмечали, что производная $F'(x)$ такого отображения представляет собой при каждом x линейный оператор, действующий из N_1 в N_2, т. е. элемент пространства операторов $(N_1\to N_2)$. В частности, если $N_2=P$, где P — числовая прямая или комплексная плоскость, то отображение F принимает числовые значения на N_1 и называется функционалом. При этом производная функционала F в точке x_0 есть линейный функционал, зависящий от x_0.

Для примера найдем главную линейную часть приращения функционала $F(x)=\|x\|^2$, заданного в действительном гильбертовом пространстве H. Имеем

$$F(x+h)-F(x)=\|x+h\|^2-\|x\|^2=(x+h, x+h)-(x, x)=$$
$$=(x, x)+2(x, h)-(x, x)+(h, h)=2(x, h)+(h, h).$$

Можно убедиться, что $F'(x)=2x$. (Для этого следует заметить, что всякий функционал в H имеет вид скалярного произведения.)

5. Интеграл от абстрактных функций. В этом пункте будет изложен материал, являющийся, с одной стороны, дополнением к изложенному в гл. 9 материалу об определенном интеграле, а с другой стороны, являющийся необходимым в теории дифференцирования в банаховых пространствах.

Предположим, что отображение F действует из банахова пространства B_1 в другое банахово пространство B_2, причем пространство B_1 есть числовая ось E^1. Таким образом, $F:E^1\to B_2$.

Отображение F, сопоставляющее числу x элемент банахова пространства B_2, назовем а б с т р а к т н о й ф у н к ц и е й *на числовой оси.* Производная $F'(x)$ абстрактной функции при условии, что она существует, представляет собой при каждом x элемент пространства B_2 — к а с а т е л ь н ы й в е к т о р к кривой $F(x)$. *Для абстрактной функции,* представляющей собой функцию числового аргумента x, очевидно, *слабая дифферен-*

цируемость совпадает с сильной. В этом случае, используя соотношение

$$\|F(x+th)-F(x)-F_c'(x)ht\|=o(|t|), \quad h\neq 0, \quad t\to 0,$$

вытекающее из слабой дифференцируемости, и полагая в нем $th=h_1$, получим, что

$$\|F(x+h_1)-F(x)-F_c'(x)h_1\|=o\left(\frac{|h_1|}{|h|}\right)=o(|h_1|),$$

где число $h_1\to 0$, т. е. $F(x)$ сильно дифференцируемо и сильная производная совпадает со слабой.

Построим интеграл от абстрактной функции $F(x)$, определенной на сегменте $[a, b]$. Пусть $\{x_k\}$ — разбиение сегмента $[a, b]$. Введем интегральную сумму

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n} F(\xi_k)\,\Delta x_k, \quad \xi_k\in[x_{k-1}, x_k].$$

Пусть $d=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\Delta x_k$ — диаметр разбиения.

Абстрактную функцию $F(x)$ назовем интегрируемой на сегменте $[a, b]$, если для этой функции на указанном сегменте существует предел I ее интегральных сумм при стремлении диаметра d разбиений $\{x_k\}$ к нулю, причем этот предел берется по норме пространства B_2. Таким образом, абстрактная функция $F(x)$ интегрируема, если

$$\lim_{d\to 0}\left\|\sum_{k=1}^{n} F(\xi_k)\,\Delta x_k-I\right\|_{B_2}=0.$$

Предел I называется интегралом от абстрактной функции по сегменту $[a, b]$ и обозначается символом

$$I=\int_a^b F(x)\,dx.$$

Очевидно, что I является элементом B_2, поскольку σ является элементом B_2 и пространство B_2 полное, т. е. и предел σ при $d\to 0$ принадлежит B_2.

Следует отметить, что построение теории интеграла от абстрактной функции мало чем отличается от построения теории интеграла от числовой функции. Подчеркнем, что интеграл от абстрактной функции не является уже числом, как обычный интеграл, поэтому, например, всюду в доказательствах модуль интеграла от числовой функции надо заменять на норму интеграла от абстрактной функции и т. п.

Отметим следующие простые свойства интеграла от абстрактных функций. Их доказательства аналогичны доказательствам, приведенным в гл. 9 при построении интеграла Римана.

1. *Интеграл от абстрактной непрерывной функции* $F(x)$ *существует, т. е. такая функция интегрируема.*

2. *Если* C — *линейное отображение пространства* B_2 *в банахово пространство* B_3 (*предполагается, что* C *также и непрерывно*), то

$$\int_a^b CF(x)\,dx = C\int_a^b F(x)\,dx.$$

3. *Справедливо неравенство*

$$\left\|\int_a^b F(x)\,dx\right\| \leqslant \int_a^b \|F(x)\|\,dx,$$

где справа стоит обычный интеграл Римана от числовой функции.

4. *Если* $F(x)$ *имеет вид* $f(x)y_0$, *где* $f(x)$ — *числовая функция, а* y_0 — *фиксированный элемент из* B_2, *то*

$$\int_a^b F(x)\,dx = y_0\int_a^b f(x)\,dx,$$

где справа также стоит интеграл Римана от функции $f(x)$ *по сегменту* $[a, b]$.

6. Формула Ньютона — Лейбница для абстрактных функций. В проведенных выше рассмотрениях через $(N_1 \to N_2)$ мы обозначали пространство всех линейных ограниченных (непрерывных) отображений из линейного нормированного пространства N_1 в линейное нормированное пространство N_2. Топологию* в пространстве $(N_1 \to N_2)$ задает, например, норма в этом пространстве. Заметим, что для задания топологии (системы окрестностей каждой точки) в линейном пространстве $(N_1 \to N_2)$ достаточно задать систему окрестностей начала координат, в силу линейности пространства тем самым будут заданы окрестности каждой точки.

Рассмотрим теперь *линейное пространство* $(N_1 \to N_2)_1$ *всех непрерывных ограниченных, быть может, нелинейных, отображений пространства* N_1 *в* N_2.

* Напомним, что для задания топологии на некотором множестве необходимо указать систему множеств, удовлетворяющих аксиомам 1, 2 (см. дополнение 2, раздел топологических пространств). Множества, удовлетворяющие этим аксиомам, называются открытыми. Открытые множества метрического или нормированного пространства удовлетворяют упомянутым аксиомам.

Нелинейное отображение $F: N_1 \to N_2$ называется ограниченным, если для всякого ограниченного множества $A \subset N_1$ соответствующее множество $F(A)$ ограничено в N_2 (множество в нормированном пространстве ограничено, если его можно поместить внутрь некоторого шара с центром в начале координат). *Нелинейное непрерывное отображение не обязано быть ограниченным.*

Очевидно, что пространство $(N_1 \to N_2)$ является подпространством $(N_1 \to N_2)_1$. В линейном пространстве $(N_1 \to N_2)_1$ зададим систему окрестностей нуля (для любого натурального n и произвольного $\varepsilon > 0$):

$$\Sigma_{n,\varepsilon} = \{F : \sup_{\|x\| \leqslant n} \|F(x)\| < \varepsilon\}$$

и тем самым зададим топологию в пространстве $(N_1 \to N_2)_1$. Читателю предлагается проверить, что данной системой окрестностей в пространстве $(N_1 \to N_2)_1$ задана топология. На подпространстве $(N_1 \to N_2) \subset (N_1 \to N_2)_1$ эта топология совпадает с обычной топологией, задаваемой операторной нормой.

Рассмотрим сегмент $[x_0, x_0 + \Delta x]$ в N_1. Пусть задано непрерывное отображение $F(x)$ этого сегмента в пространство $(N_1 \to N_2)_1$, т. е. каждой точке $x \in [x_0, x_0 + \Delta x]$ сопоставлено некоторое отображение $F(x) \in (N_1 \to N_2)_1$, непрерывно зависящее от точки $x \in N_1$.

Определим интеграл от $F(x)$ по сегменту $[x_0, x_0 + \Delta x]$, по определению полагая

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} F(x)\,dx = \int_0^1 F(x_0 + t\,\Delta x)(\Delta x)\,dt.$$

Здесь оператор $F(x_0 + t\Delta x)$ применяется к элементу $\Delta x \in N_1$. При каждом $t \in [0, 1]$ величина $F(x_0 + t\Delta x](\Delta x)$ представляет собой элемент пространства N_2 — образ элемента Δx при отображении $F(x_0 + t\Delta x)$.

Согласно построениям п. 5 интеграл, стоящий в правой части формулы, существует и является элементом пространства N_2.

Используя эти замечания, докажем *формулу Ньютона — Лейбница для интеграла от абстрактной функции.*

Рассмотрим отображение F, которое действует из N_1 в N_2 и имеет на сегменте $[x_0, x_0 + \Delta x]$ сильную производную $F'(x)$, непрерывную по x.

Напомним, что отображение $F(x): N_1 \to N_2$ непрерывно в точке $x \in N_1$, если для любого шара с центром в точке $F(x)$, лежащего в N_2, найдется такой шар с центром в точке x, лежащий в N_1, образ которого при отображении $F(x)$ целиком содержится в указанном шаре с центром в точке $F(x)$.

Отображение $F(x)$ непрерывно на сегменте $[x_0, x_0+\Delta x]$ (т. е. на множестве точек вида $\{x_0+t\Delta x\}$, где $0\leqslant t\leqslant 1$), если оно непрерывно в любой внутренней точке сегмента (т. е. когда точка отвечает параметру t такому, что $0<t<1$) и, кроме того, непрерывно в точке x_0 справа и в точке $x_0+\Delta x$ слева*.

Поскольку отображение $F'(x)$ непрерывно на сегменте $[x_0, x_0+\Delta x]$, то существует интеграл $\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} F'(x)\,dx$.

Докажем, что *имеет место равенство*

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} F'(x)\,dx = F(x_0+\Delta x)-F(x_0),$$

которое и называется формулой Ньютона — Лейбница для абстрактных функций.

По определению интеграла можем записать

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} F'(x)\,dx = \int\limits_0^1 F'(x_0+t\,\Delta x)(\Delta x)\,dt =$$

$$= \lim_{d\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} F'(x_0+t_k\,\Delta x)\,\Delta x\,(t_{k+1}-t_k) = \lim_{d\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} F'(x_k)(\Delta x_k),$$

где $x_k=x_0+t_k\Delta x_k$, $\Delta x_k=(t_{k+1}-t_k)\Delta x$, d — диаметр разбиения сегмента $[0, 1]$.

С другой стороны, легко заметить, что

$$F(x_0+\Delta x)-F(x_0)=\sum_{k=0}^{n-1}[F(x_0+t_{k+1}\,\Delta x)-F(x_0+t_k\,\Delta x)]=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}[F(x_{k+1})-F(x_k)].$$

Рассмотрим разность $F(x_{k+1})-F(x_k)-F'(x_k)\Delta x_k$ и применим к ней формулу из следствия к теореме п. 2 Лагранжа. При $A=F'(x_k)$ получим

$$\|F(x_{k+1})-F(x_k)-F'(x_k)\,\Delta x_k\|\leqslant$$

$$\leqslant \sup_{0<\theta_k<1}\|F'(x_k+\theta_k\,\Delta x_k)-F'(x_k)\|\,\|\Delta x_k\|.$$

---

* Говорят, что точка $x\in[x_0, x_0+\Delta x]$ стремится к точке x_0 справа, если $x\in\{x_0+t\Delta x\}$ и $t\to 0+0$. Аналогично определяется стремление x к точке $x_0+\Delta x$ слева. Отображение $F(x)$, определенное на сегменте $[x_0, x_0+\Delta x]$, непрерывно в точке x_0 справа, если предельное значение $F(x)$ при стремлении x к точке x_0 справа равно $F(x_0)$. Аналогично определяется непрерывность $F(x)$ в точке $x_0+\Delta x$ слева.

Просуммируем эти неравенства по всем k от 0 до $n-1$ и вместо $\|\Delta x_k\|$ поставим $\|\Delta x\|\,|t_{k+1}-t_k|$. Получим

$$\left\|\sum_{k=1}^{n-1}[F(x_{k+1})-F(x_k)-F'(x_k)\Delta x_k]\right\|\leqslant$$

$$\leqslant\|\Delta x\|\sum_{k=1}^{n-1}(t_{k+1}-t_k)\sup_{0<\theta_k<1}\|F'(x_k+\theta_k\Delta x_k)-F'(x_k)\|.$$

Так как производная $F'(x)$ непрерывна на сегменте $[x_0, x_0+\Delta x]$, то она является и равномерно непрерывной* на этом сегменте. Поэтому правая часть неравенства, написанного выше, стремится к нулю при неограниченном измельчении разбиения сегмента $[x_0, x_0+\Delta x]$, откуда и вытекает, что

$$F(x_0+\Delta x)-F(x_0)=\sum_{k=0}^{n-1}[F(x_{k+1})-F(x_k)]=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}[F(x_{k+1})-F(x_k)-F'(x_k)\Delta x_k]+\sum_{k=0}^{n-1}F'(x_k)\Delta x_k\to$$

$$\to\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}F'(x)\,dx,$$

если $d\to 0$. Формула Ньютона — Лейбница доказана.

7. **Производные второго порядка.** Рассмотрим дифференцируемое отображение $F:N_1\to N_2$. Мы уже отмечали, что производная $F'(x)$ этого отображения при каждом фиксированном $x\in N_1$ есть элемент пространства $(N_1\to N_2)$ — пространства линейных ограниченных операторов на N_1, действующих в N_2. Допустим, что отображение $F'(x)$, в свою очередь, дифференцируемо. *Производная отображения $F'(x)$ называется второй производной отображения F и обозначается символом F''.* При каждом фиксированном x отображение $F''(x)$ является, очевидно, элементом пространства $(N_1\to(N_1\to N_2))$ — пространства линейных ограниченных операторов, действующих из N_1 в $(N_1\to N_2)$.

Элементы этого пространства допускают и другую интерпретацию в виде так называемых билинейных отображений.

---

* Абстрактная функция $F(x):N_1\to N_2$ называется равномерно непрерывной на множестве $\{x\}=M\subset N_1$, если для всякого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что $\|F(x_1)-F(x_2)\|<\varepsilon$ для любых x_1 и x_2 из множества M, если только $\|x_1-x_2\|<\delta$. Доказательство того факта, что непрерывная абстрактная функция на компакте в N_1 является равномерно непрерывной, аналогично доказательству этого факта для числовых функций на компакте (см. гл. 4, § 6, п. 3, теорему 4.16).

Определение. *Отображение* $B:(N_1 \to N_2)$, *отображающее нормированное пространство* N_1 *в нормированное пространство* N_2, *называется* **билинейным**, *если каждой упорядоченной паре элементов* (x_1, y_1) *) *из* N_1 *поставлен в соответствие элемент* $B(x_1, y_1)$ *из* N_2 *так, что выполнены следующие свойства:*

1. *Для любых* x_1, y_1, x_2, y_2 *из* N_1 *и любых чисел* α *и* β *имеют место равенства*

$$B(\alpha x_1+\beta x_2, y_1)=\alpha B(x_1, y_1)+\beta B(x_2, y_1),$$

$$B(x_1, \alpha y_1+\beta y_2)=\alpha B(x_1, y_1)+\beta B(x_1, y_2).$$

2. *Существует такое положительное число* M, *что*

$$\|B(x, y)\| \leqslant M\|x\|\|y\|$$

при всех x, y, *из* N_1.

Первое из этих условий означает, что билинейное отображение B линейно по каждому из двух своих аргументов. Второе условие означает ограниченность билинейного отображения B. Так же, как и в случае линейного отображения (см. дополнение 1), показывается, что *ограниченное билинейное отображение является непрерывным уже по совокупности своих аргументов.*

Определение. *Наименьшая из постоянных* M, *удовлетворяющих условию* $\|B(x, y)\| \leqslant M\|x\|\|y\|$, *называется* **нормой билинейного отображения** B *и обозначается символом* $\|B\|$.

Точно так же, как и над линейными операциями (операторами) (см. дополнение 1), над билинейными операциями можно определить операцию сложения двух билинейных отображений, по определению положив $(B_1+B_2)(x, y)=B_1(x, y)+$ $+B_2(x, y)$, а также операцию умножения отображения B на число α: $(\alpha B)(x, y)=\alpha B(x, y)$. Поскольку для билинейной операции B определена и его норма, то *билинейные отображения пространства* N_1 *в пространство* N_2 *сами образуют* **линейное пространство**. *Обозначим его* $(N_1^2 \to N_2)$ (здесь индекс 2 над символом N_1 означает, что из пространства N_1 берется два элемента (x, y), которые переводятся отображением B в один элемент пространства N_2).

Так же, как и в случае линейных отображений, показывается (см. дополнение 1), что *если пространство* N_2 *банахово (полное), то и пространство* $(N_1^2 \to N_2)$ *будет банаховым.*

---

* Пара элементов x и y называется упорядоченной, если указано, какой из ее элементов является первым. Если элемент x является первым элементом пары, а элемент y — вторым, то упорядоченную пару записывают так: (x, y).

Докажем следующее

Утверждение. *Между элементами пространства* $(N_1 \to (N_1 \to N_2))$ *и пространства* $(N_1^2 \to N_2)$ *можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее линейные операции (т. е. если элементу* $A_1 \in (N_1 \to (N_1 \to N_2))$, *отвечает элемент* $B_1 \in (N_1^2 \to N_2)$, *а элементу* $A_2 \in (N_1 \to (N_1 \to N_2))$ *отвечает элемент* $B_2 \in (N_1^2 \to N_2)$, *то элементу* $\alpha A_1 + \beta A_2$ *отвечает элемент* $\alpha B_1 + \beta B_2$, *где* α *и* β *— любые числа).*

Действительно, каждому элементу $A \in (N_1 \to (N_1 \to N_2))$ поставим в соответствие элемент B из $(N_1^2 \to N_2)$ по правилу

$$B(x, y) = (Ax)y.$$

Это соответствие, очевидно, линейно.

Покажем, что это соответствие сохраняет и нормы элементов*, т. е. покажем, что $\|A\| = \|B\|$. Отсюда, в частности и будет следовать взаимная однозначность соответствия. Действительно, если бы два различных элемента при изометричном соответствии переходили бы в один элемент, то их разность соответствовала бы нулевому элементу. Норма этой разности равнялась бы норме нулевого элемента, т. е. нулю. Таким образом, элементы совпадали бы, что противоречит их выбору.

Итак, докажем, что если элементу $A \in (N_1 \to (N_1 \to N_2))$ отвечает элемент $B \in (N_1^2 \to N_2)$, то $\|A\| = \|B\|$, причем нормы элементов берутся в соответствующих пространствах.

Пусть $z = B(x, y) = (Ax)y$. Тогда

$$\|z\| \leqslant \|Ax\| \|y\| \leqslant \|A\| \|x\| \|y\|,$$

откуда

$$\|B\| \leqslant \|A\|.$$

С другой стороны, если задано билинейное отображение B, то при фиксированном $x \in N_1$ отображение $y \to (Ax)y = B(x, y)$ является линейным отображением пространства N_1 в N_2.

Таким образом, каждому $x \in N_1$ ставится в соответствие элемент Ax пространства $(N_1 \to N_2)$. Очевидно, что Ax линейно зависит от x, т. е. билинейное отображение B определяет некоторый элемент A пространства $(N_1 \to (N_1 \to N_2))$.

При этом отображение B восстанавливается по A при помощи формулы

$$B(x, y) = (Ax)y.$$

Далее,

$$\|Ax\| = \sup_{\|y\| \leqslant 1} \|(Ax)\, y\| = \sup_{\|y\| \leqslant 1} \|B(x, y)\| \leqslant \|B\| \, \|x\|.$$

---

* Соответствие между двумя упорядоченными пространствами, сохраняющее нормы отвечающих друг другу элементов, называется изометричным. Подчеркнем, что нормы берутся в соответствующих пространствах.

Таким образом,

$$\|A\| \leqslant \|B\|.$$

Следовательно, из соотношений $\|B\| \leqslant \|A\|$ и $\|A\| \leqslant \|B\|$ получаем, что

$$\|A\| = \|B\|.$$

Нами, таким образом, доказано, что соответствие между пространствами $(N_1 \to (N_1 \to N_2))$ и $(N_1^2 \to N_2)$ линейно и изометрично. При этом образ пространства $(N_1 \to (N_1 \to N_2))$ при таком соответствии есть все пространство $(N_1^2 \to N_2)$. Утверждение доказано.

Из доказанного утверждения следует, что если берется какой-нибудь элемент пространства $(N_1 \to (N_1 \to N_2))$, то всегда можно указать его образ в пространстве $(N_1^2 \to N_2)$.

Более того, норма элемента в исходном пространстве и норма его образа совпадают. Сохраняются также линейные операции при построенном соответствии в пространствах $(N_1 \to (N_1 \to N_2))$ и $(N_1^2 \to N_2)$. Такие пространства можно не различать; называются они изоморфными. Эти пространства отличаются только тем, что их элементы имеют различную природу, а все остальные свойства пространств $(N_1 \to (N_1 \to N_2))$ и $(N_1^2 \to N_2)$ одинаковы.

В частности, мы выяснили, что вторая производная $F''(x)$ отображения $F: N_1 \to N_2$ является элементом пространства $(N_1 \to (N_1 \to N_2))$. В соответствии с только что сказанным мы можем считать $F''(x)$ элементом пространства $(N_1^2 \to N_2)$.

8. Отображение m-мерного евклидова пространства в n-мерное. Важным частным случаем введенных выше отображений является случай отображения $F(x)$ m-мерного евклидова пространства в n-мерное. Напомним, что в евклидовом пространстве $N_1 = E^m$ норма элемента $h = (h_1, h_2, \ldots, h_m)$ записывается в виде

$$\|h\|_{E^m} = \left[\sum_{i=1}^{m} h_i^2\right]^{1/2},$$

а в пространстве $N_2 = E^n$ норма элемента* $F(x) = (F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x))$ записывается в виде

$$\|F(x)\|_{E^n} = \left[\sum_{i=1}^{n} F_i^2(x)\right]^{1/2},$$

* Мы, естественно, подразумеваем, что в пространствах E^m и E^n выбраны базисы, поэтому отображение $F(x): E^m \to E^n$ можно рассматривать в координатной форме. Конкретная реализация элементов пространств E^m, E^n может быть любой.

где x — фиксированная точка из E^m; $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., $F_n(x)$ — координаты вектора $F(x)$.

В случае отображения $F(x)=(F_1(x), F_2(x), ..., F_n(x))$, $x=(x_1, x_2, ..., x_m)$ m-мерного евклидова пространства E^m в n-мерное евклидово пространство E^n естественно считать это отображение или, что то же, эту вектор-функцию $F(x)$ * дифференцируемой в точке $x\in E^m$, если каждая компонента $F_1(x_1, x_2, ..., x_m)$, $F_2(x_1, x_2, ..., x_m)$, ..., $F_n(x_1, x_2, ..., x_m)$ дифференцируема в точке x как функция m переменных $x_1, x_2, ..., x_m$.

Отображение $F(x)$ можно рассматривать и с общей точки зрения (а не как векторную функцию), т. е. как отображение одного нормированного пространства $N_1=E^m$ в другое нормированное пространство $N_2=E^n$.

Определение дифференцируемого отображения $F(x):N_1\to N_2$ в точке x в том случае будет таким же, как и в случае общих нормированных пространств, только нормы, фигурирующие в этом определении, будут определяться формулами для норм в евклидовом пространстве. А именно мы *назовем отображение* $F(x):E^m\to E^n$, *определенное на некотором открытом подмножестве* $\Sigma\subset E^m$, *дифференцируемым в точке* $x\in\Sigma$, *если существует такой ограниченный линейный оператор* $L_x\in(E^m\to E^n)$, *что для любого* $\varepsilon>0$ *можно найти* $\delta>0$, *при котором из неравенства* $\|h\|_{E^m}<\delta$ *следует неравенство*

$$\|F(x+h)-F(x)-L_xh\|_{E^n}\leqslant\varepsilon\|h\|_{E^m}.$$

То же самое сокращенно можно записать так:

$$F(x+h)-F(x)-L_xh=\mathbf{o}(h),$$

где величина $\|\mathbf{o}(h)\|/\|h\|\to 0$ при $\|h\|\to 0$. Аналогично общему случаю вводится и *производная* $F'(x)$ *отображения* $F(x)$.

Из курса линейной алгебры известно, что всякое линейное отображение m-мерного евклидова пространства в n-мерное (линейный оператор) можно задать некоторой матрицей порядка $(m\times n)$. Поскольку производная $F'(x)$ отображения $F(x)$, действующего из E^m в E^n, есть оператор из пространства E^m в пространство E^n (элемент пространства $(E^m\to E^n)$), то $F'(x)$ есть зависящая от x матрица порядка $(m\times n)$. Найдем вид матрицы.

Если в E^m и E^n выбраны базисы, а именно базис $e_1, e_2, ..., e_m$ в E^m и базис $f_1, f_2, ..., f_n$ в E^n, то всякий вектор $x\in E^m$ запишется в виде $x=x_1e_1+x_2e_2+...+x_me_m$, где $x_1, x_2, ..., x_m$ — координаты вектора x в базисе $e_1, e_2, ..., e_m$. Всякий вектор $y\in E^n$ можно записать в виде $y=y_1f_1+y_2f_2+ ... +y_nf_n$, где $y_1, y_2, ..., y_n$ — координаты вектора y в базисе $f_1, f_2, ..., f_n$.

* Мы учитываем, что при каждом x из E^m значение $F(x)$ представляет собой вектор $(F_1(x), F_2(x), ..., F_n(x))$ из пространства E^n.

Отображение $y=F(x)$ пространства E^m в пространство E^n ($x\in E^m$, $y\in E^n$) можно записать в виде

$$y_1=F_1(x_1, x_2, ..., x_m),$$
$$y_2=F_2(x_1, x_2, ..., x_m),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_n=F_n(x_1, x_2, ..., x_m).$$

Здесь $F_1(x_1, x_2, ..., x_m)$, $F_2(x_1, x_2, ..., x_m)$, ..., $F_n(x_1, x_2, ..., x_m)$ — координаты вектора $y=F(x)$ при фиксированном $x=(x_1, x_2, ..., x_m)$.

Далее, отображение $F'(x)$, как мы уже говорили, является линейным оператором — элементом пространства $(E^m\to E^n)$. Покажем, что *если $F(x)$ дифференцируема, как вектор-функция, то*

$$F'(x)=\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}. \qquad (***)$$

В самом деле, в этом случае $F(x)=(F_1(x), F_2(x), ..., F_m(x))$, $F(x+h)=(F_1(x+h), F_2(x+h), ..., F_m(x+h))$, $x=(x_1, x_2, ..., x_m)$, $x+h=(x_1+h_1, x_2+h_2, ..., x_m+h_m)$, и если записать вектор-функцию покомпонентно в виде столбца и воспользоваться тем, что каждая компонента является дифференцируемой функцией m переменных, то

$$F(x+h)-F(x)=$$
$$=\begin{pmatrix} F_1(x_1+h_1, x_2+h_2, \ldots, x_m+h_m)-F_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ F_2(x_1+h_1, x_2+h_2, \ldots, x_m+h_m)-F_2(x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_n(x_1+h_1, x_2+h_2, \ldots, x_m+h_m)-F_n(x_1, x_2, \ldots, x_m) \end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_1(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{\partial x_i} h_i+o(h) \\ \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_2(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{\partial x_i} h_i+o(h) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{\partial x_i} h_i+o(h) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(h) \\ o(h) \\ \vdots \\ o(h) \end{pmatrix}.$$

Здесь величины $o(h)/\|h\|$ *, принимающие вещественные значения, стремятся к нулю, если $\|h\|=(h^2_1+h^2_2+\dots+h^2_m)^{1/2}\to 0$. Эта матричная запись допускает, как это легко видеть, такое, более простое представление

$$F(x+h)-F(x)=L_x h+\mathbf{o}(h),$$

где

$$F'(x)=L_x=\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}, \quad h=\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{o}(h)=\begin{pmatrix} o(h) \\ o(h) \\ \vdots \\ o(h) \end{pmatrix},$$

причем величины $o(h)/\|h\|\to 0$, если $\|h\|=(h^2_1+h^2_2+\dots+h^2_m)^{1/2}\to 0$. Поскольку координаты вектора $\mathbf{o}(h)/\|h\|$ стремятся к нулю, если $\|h\|\to 0$, то и норма вектора $\mathbf{o}(h)/\|h\|$ в пространстве E^n (т. е. корень квадратный из суммы квадратов его компонент) также стремится к нулю, если $\|h\|\to 0$.

Поэтому можно заключить, что производная $F'(x)$ дифференцируемого отображения $F(x):E^m\to E^n$ в точке x находится по формуле (***). Матрица, задаваемая формулой (***) называется якобиевой матрицей отображения $F:E^m\to E^n$, а в случае $n=m$ ее определитель — якобианом этого отображения в данной точке x.

9. Производные и дифференциалы высших порядков. Аналогично тому, как это было сделано в п. 7 для второй производной отображения $F(x)$ одного нормированного пространства N_1 в другое нормированное пространство N_2, можно ввести понятие третьей, четвертой и вообще n-й производной отображения $F(x)$, *определив n-ю производную как производную от производной $(n-1)$-го порядка.* При этом, очевидно, n-я производная представляет собой элемент пространства $(N_1\to(N_1\to\dots-(N_1\to N_2)))$, N_1 встречается n раз. Повторяя рассуждения, проведенные для второй производной, можно каждому элементу этого пространства поставить в соответствие эле-

* В случае дифференцируемой функции m переменных величину $o(h)$ мы обозначали $o(\rho)=o(\|h\|)$, где $\rho=\|h\|$.

мент пространства $(N_1{}^n \to N_2)$ полилинейных (а именно n-линейных) отображений $N_1 \to N_2$. При этом *под полилинейным отображением* (n-*линейным*) *отображением одного нормированного пространства в другое понимается такое соответствие* $y = A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *между упорядоченными системами* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *элементов из* N_1* *и элементами пространства* N_2, *которое линейно по каждому из* x_i, $i = 1, 2, \ldots$, *при фиксированных остальных элементах и удовлетворяет при некотором* $M > 0$ *условию*

$$\|A(x_1, x_2, \ldots, x_n)\| \leqslant M\|x_1\|\|x_2\|\ldots\|x_n\|.$$

Таким образом, n-ю производную $F^{(n)}(x)$ отображения F можно считать элементом пространства $(N_1{}^n \to N_2)$.

Рассмотрим теперь дифференциалы высших порядков. Напомним, что мы определили сильный дифференциал dF отображения F как результат применения к элементу $h \in N_1$ линейного оператора $F'(x)$, т. е. в виде $dF = F'(x)h$.

Дифференциал второго порядка определяется как величина $d^2F = F''(x)(h, h)$, *где* $F''(x)(h, h)$ *является квадратичным выражением***, *отвечающим отображению* $F''(x) \in \in (N_1{}^2 \to N_2)$.

Аналогично *дифференциалом* n-*го порядка называется выражение* $d^nF = F^{(n)}(x)(h, h, \ldots, h)$, *т. е. дифференциалом* n-*го порядка называется элемент пространства* N_2, *который получается в результате применения оператора* $F^{(n)}(x)$ *к элементу* $(\underbrace{h, h, \ldots, h}_{n \text{ раз}})$ *пространства* $N_1 \times N_1 \times \ldots \times N_1 = N_1{}^n$.

10. Формула Тейлора для отображений одного нормированного пространства в другое. Согласно рассмотрениям п. 1 сильная дифференцируемость отображения $F(x)$ означает, что разность $F(x+h) - F(x)$ может быть представлена в виде линейного члена по h и слагаемого, имеющего порядок выше первого относительно $\|h\|$.

Этот факт обобщает, как мы знаем, соответствующее разложение для дифференцируемой функции $F(x) = F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ m переменных. Для функции $F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ справедлива, как было показано в этой главе, формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Поэтому, естественно, возникает вопрос о получении формулы Тейлора с остаточным членом в форме, аналогичной форме Пеано, и для отображений нормированных пространств. Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть* F — *отображение нормированного про-*

* Элемент $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ принадлежит пространству $N_1{}^n = N_1 \times \ldots \times N_1$ (ср. дополнение 2).

** Выражение $B(x, x)$ называется квадратичным, если получено из билинейного отображения $B(x, y)$ при совпадающих аргументах, т. е. при $x = y$.

странства N_1 в нормированное пространство N_2, определенное на некотором открытом множестве $\Sigma \subset N_1$ и такое, что $F^{(n)}(x)$ существует и представляет собой равномерно непрерывную функцию от x в Σ. Тогда имеет место равенство*

$$F(x+h)-F(x)=F'(x)h+{}^1/_2F''(x)(h,\ h)+\ldots$$
$$\ldots+F^{(n)}(x)(h,\ h,\ \ldots,\ h)+r(x,\ h), \qquad (****)$$

где $\|r(x,\ h)\|=o(\|h\|^n)$ **.

Доказательство. Проведем доказательство этой теоремы по индукции. При $n=1$ равенство означает просто дифференцируемость отображения $F(x)$, и тем самым это равенство по условию теоремы выполнено. Рассмотрим теперь произвольное фиксированное целое число $n\geqslant 2$ и предположим, что равенство, получающееся из (4) заменой n на $n-1$, справедливо для всех отображений, удовлетворяющих условиям теоремы, в которых n заменено на $n-1$. Докажем равенство (****).

Рассмотрим отображение $F'(x)$ и применим к нему формулу Тейлора (****), в которой n заменено на $n-1$, а вместо приращения h рассмотрено приращение th, где t — число, принадлежащее сегменту $[0,\ 1]$. Очевидно, что

$$F'(x+th)=F'(x)+tF''(x)h+\frac{t^2}{2}F'''(x)(h,\ h)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}F^{(n)}(x)(h,\ h,\ \ldots,\ h)+r_1(x,th)^{***},$$

где $\|r_1(x,\ th)\|=o(t^{n-1}\|h\|^{n-1})$, а форма $(h,\ h,\ \ldots,\ h)$ имеет $n-1$ аргументов. Проинтегрируем обе части формулы Тейлора для $F'(x+h)$ **** по сегменту $[x,\ x+h]$ и воспользуемся формулой

---

* Отображение $F:N_1\to N_2$ (или абстрактная функция $F(x)$) называется равномерно непрерывной функцией на множестве $M\subset N_1$, если для любого числа $\varepsilon>0$ найдется такое число $\delta>0$, что $\|F(x_1)-F(x_2)\|<\varepsilon$ для всех точек x_1, x_2 из множества M одновременно, если только $\|x_1-x_2\|<\delta$ (см. также примечание п. 6).

** Это равенство означает, что для любого числа $\varepsilon>0$ найдется такое число $\delta>0$, что $\|r(x,\ h)\|<\varepsilon\|h\|^n$, если $\|h\|<\delta$, т. е. $\dfrac{\|r(x,\ h)\|'}{\|h\|^n}\to 0$, если $n\to 0$.

*** Мы пользуемся тем, что формы $(h,\ h)$, ..., $(h,\ h,\ \ldots,\ h)$ линейны по каждому из своих аргументов. Поэтому $(th,\ th)=t^2(h,\ h)$,
$\underbrace{(th,\ th,\ \ldots,\ th)}_{n-1}=t^{n-1}\underbrace{(h,\ h,\ \ldots,\ h)}_{n-1}$.

**** Т. е. формулу

$$F'(x+th)=F'(x)+tF''(x)h+\frac{t^2}{2}F'''(x)(h,\ h)+$$
$$+\ldots+\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}F^{(n)}(x)\underbrace{(h,\ h,\ \ldots,\ h)}_{n-1}+r_1(x,\ h).$$