суммы вещественных чисел и из справедливости указанных свойств для рациональных чисел.

Остановимся на доказательстве свойств 14°, т. е. *докажем, что если a, b и c — любые три вещественных числа* и $a>b$, *то* $a+c>b+c$.

Так как $a>b$, то в силу леммы 2 из § 3 найдутся рациональные числа α_1 и β_2 такие, что $a>\alpha_1>\beta_2>b$. Для вещественного числа c и для положительного рационального числа $\varepsilon=\alpha_1-\beta_2$ найдутся рациональные числа γ_1 и γ_2 такие, что $\gamma_1\leqslant c\leqslant\gamma_2$, причем $\gamma_2-\gamma_1<\varepsilon=\alpha_1-\beta_2$ (см. лемму 1 § 3). Пусть, далее, α_2 и β_1 — любые рациональные числа, удовлетворяющие неравенствам $\alpha_2\geqslant a$, $b\geqslant\beta_1$. Тогда по определению суммы вещественных чисел

$$\alpha_2+\gamma_2\geqslant a+c\geqslant\alpha_1+\gamma_1, \qquad \beta_2+\gamma_2\geqslant b+c\geqslant\beta_1+\gamma_1.$$

Для доказательства того, что $a+c>b+c$, в силу транзитивности знака $>$ достаточно доказать, что $\alpha_1+\gamma_1>\beta_2+\gamma_2$, но это непосредственно вытекает из неравенства $\gamma_2-\gamma_1<\alpha_1-\beta_2$.

Заметим, что вопрос о вычитании вещественных чисел как о действии, обратном сложению, полностью исчерпывается на основании свойств 5°—8°. *Назовем разностью вещественных чисел a и b вещественное число c такое, что $c+b=a$.*

Убедимся в том, что таковой разностью является число $c=a+b'$, где b' — число, противоположное b.

В самом деле, используя свойства 5°—8°, можем записать

$$c+b=(a+b')+b=a+(b'+b)=a+0=a.$$

Убедимся в том, что существует только одно вещественное число, являющееся разностью двух данных вещественных чисел.

Предположим, что кроме указанного выше числа $c=a+b'$ существует еще одно число d такое, что $d+b=a$. Тогда, с одной стороны, $(d+b)+b'=a+b'=c$, с другой стороны, $(d+b)+b'=d+(b+b')=d+0=d$, т. е. $c=d$.

Из определения разности и из свойства 8° вытекает, что число a', противоположное a, равно разности $0-a$. Это число обычно записывают в виде $-a$. Не вызывает затруднения перенесение на случай вещественных чисел свойств 9°, 10°, 11°, 12°, 13° и 15°, связанных с понятием произведения. Отметим лишь в отношении свойства 12°, что если a — положительное вещественное число, а α_1 и α_2 — какие угодно рациональные числа, удовлетворяющие неравенствам $0<\alpha_1\leqslant a\leqslant\alpha_2$, то число a', обратное для a, определяется как единственное вещественное число, удовлетворяющее неравенствам $\frac{1}{\alpha_2}\leqslant a'\leqslant\frac{1}{\alpha_1}$ *.

* В качестве числа a' может быть взята точная верхняя грань множества всех рациональных чисел $\{1/\alpha_2\}$.

Свойства 9°—12° позволяют заключить, что *для любых двух вещественных чисел a и b ($b \neq 0$) существует и притом только одно вещественное число c, удовлетворяющее условию $c \cdot b = a$. Это число c называется частным чисел a и b.* Из определения частного и из свойства 12° вытекает, что число a', обратное числу a, равно частному $1/a$.

Заметим, наконец, что на случай вещественных чисел переносится и последнее, 16-е, свойство рациональных чисел, а именно:

Каково бы ни было вещественное число a, можно число 1 повторить слагаемым столько раз, что полученная сумма превзойдет a.*

Докажем это свойство. В случае $a<0$ доказательства не требуется, ибо $1>a$. Пусть $a \geqslant 0$, $a=a_0, a_1a_2\ldots$. В силу того, что определение суммы вещественных чисел в применении к сумме рациональных чисел совпадает с определением суммы рациональных чисел, повторив число 1 слагаемым n раз, получим целое число n. Таким образом, достаточно доказать, что для числа a найдется целое число n такое, что $n>a$. Но это очевидно: достаточно взять $n=a_0+2$.

Таким образом, на случай вещественных чисел переносятся все основные свойства, сформулированные для рациональных чисел в п. 1 настоящего параграфа. Следовательно, для вещественных чисел сохраняют силу все правила алгебры, относящиеся к арифметическим действиям и к сочетанию равенств и неравенств.

2. Некоторые часто употребляемые соотношения. Докажем справедливость для любых вещественных чисел a и b следующих двух соотношений:

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|, \tag{2.17}$$

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|. \tag{2.18}$$

Соотношение (2.17) непосредственно вытекает из определения произведения двух вещественных чисел. Докажем соотношение (2.18). На основании определения модуля и правила упорядочения для любых вещественных чисел a и b справедливы неравенства

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|, \qquad -|b| \leqslant b \leqslant |b|.$$

В силу справедливости основных свойств для вещественных чисел можно почленно складывать неравенства одного знака (это доказано в конце п. 1 § 1). Поэтому

$$-(|a|+|b|) \leqslant a+b \leqslant (|a|+|b|).$$

Используя в случае $a+b>0$ правое, а в случае $a+b \leqslant 0$ левое из последних неравенств, мы получим неравенство (2.18).

3. Некоторые конкретные множества вещественных чисел. В дальнейшем нам часто придется иметь дело с различными мно-

* Заметим, что это свойство называют аксиомой Архимеда.

жествами вещественных чисел. Будем обозначать произвольное множество вещественных чисел символом $\{x\}$, а числа, входящие в состав этого множества, будем называть элементами или точками этого множества. Мы будем говорить, что точка x_1 множества $\{x\}$ отлична от точки x_2 этого множества, если вещественные числа x_1 и x_2 не равны друг другу. Если при этом справедливо неравенство $x_1>x_2$ $(x_1<x_2)$, то мы будем говорить, что точка x_1 лежит правее (левее) точки x_2.

Рассмотрим некоторые наиболее употребляемые частные виды множеств вещественных чисел.

1°. Множество вещественных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a\leqslant x\leqslant b$, где $a<b$, будем называть сегментом и обозначать символом $[a, b]$. При этом числа a и b мы будем называть граничными точками или концами сегмента $[a, b]$, а любое число x, удовлетворяющее неравенствам $a<x<b$, будем называть внутренней точкой сегмента $[a, b]$.

2°. Множество всех вещественных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a<x<b$, будем называть интервалом и обозначать символом (a, b).

3°. Интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, где $\varepsilon>0$, будем называть ε-окрестностью точки a.

4°. Любой интервал, содержащий точку a, будем называть окрестностью точки a.

5°. Множество всех вещественных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a\leqslant x<b$ (или $a<x\leqslant b$), будем называть полусегментом и обозначать символом $[a, b)$ (или $(a, b]$).

6°. Множество всех вещественных чисел будем называть числовой (бесконечной) прямой и обозначать символом $(-\infty, +\infty)$.

7°. Множество вещественных чисел x, удовлетворяющих неравенству $x\geqslant a$ (или $x\leqslant b$), будем называть полупрямой и обозначать символом $[a, +\infty)$ (или $(-\infty, b]$).

8°. Множество всех вещественных чисел x, удовлетворяющих неравенству $x>a$ (или $x<b$), будем называть открытой полупрямой и обозначать символом $(a, +\infty)$ (или $(-\infty, a)$).

Произвольное множество $\{x\}$ будем называть плотным в себе, если в любой окрестности каждой точки x этого множества содержится хотя бы одна точка множества, отличная от x.

Примером плотного в себе множества может служить любое из определенных выше множеств 1°—8°. Другим примером плотного множества может служить множество всех рациональных чисел, входящих в состав любого из множеств 1°—8°.

В изложенном нами материале содержатся сведения, необходимые для построения аппарата математического анализа. В следующих параграфах этой главы будут рассмотрены некоторые дополнительные вопросы теории вещественных чисел и элементы теории множеств.

§ 6. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

Выше, для того чтобы ввести вещественные числа, были использованы бесконечные десятичные дроби. Для множества бесконечных десятичных дробей были определены правила упорядочения, сложения и умножения и было установлено, что эти правила удовлетворяют 16 основным свойствам (перечисленным в п. 1 § 1 для рациональных чисел). Описанный метод введения вещественных чисел, хотя и обладает несомненными эвристическими и методическими достоинствами, не является единственно возможным. Вещественные числа можно было бы ввести с помощью бесконечных двоичных дробей, с помощью так называемых дедекиндовых сечений в области рациональных чисел *, с помощью последовательностей рациональных чисел ** и другими способами.

Чтобы выяснить взаимосвязь между различными методами введения вещественных чисел, привлечем некоторые новые понятия и установим еще одно важное свойство множества изученных выше вещественных чисел.

1. Полнота множества вещественных чисел. Пусть A и B — два произвольных множества. Будем говорить, что *между множествами A и B установлено взаимно однозначное соответствие, если каждому элементу множества A отвечает единственный элемент множества B, каждый элемент множества B сопоставлен некоторому элементу множества A и разным элементам множества A отвечают разные элементы множества B.*

Назовем два множества, для элементов каждого из которых определены правила упорядочения, сложения и умножения, изоморфными друг другу относительно этих правил, если между элементами этих множеств можно установить взаимно однозначное соответствие так, что если элементам a и b первого множества соответствуют элементы a' и b' второго множества, то 1) *элементы a' и b' связаны тем же знаком* ($>$, $<$ или $=$), *что и элементы a и b*; 2) *элементу $a+b$ соответствует элемент $a'+b'$*; 3) *элементу $a\cdot b$ соответствует элемент $a'\cdot b'$.*

Аналогично можно было бы говорить не о правилах упорядочения, сложения и умножения, а о каких-либо других правилах, характеризующих соотношения между элементами, и вве-

---

* Введение вещественных чисел с помощью дедекиндовых сечений изложено, например, в гл. 1 книги Ф. Франклина «Математический анализ» или в гл. 1 книги Г. М. Фихтенгольца «Основы математического анализа».

** Этот способ введения вещественных чисел принадлежит Кантору. Его изложение можно, например, найти в книге В. В. Немыцкого, М. И. Слудской и А. Н. Черкасова «Курс математического анализа», т. I, гл. II, а также в книге Я. Тагамлицкого «Дифференциално смятане» (София, 1971).

сти понятие множеств, изоморфных друг другу относительно указанных правил.

Примером двух множеств, изоморфных друг другу относительно правил упорядочения, сложения и умножения, служит множество рациональных чисел, введенных в виде отношения целых чисел, с соответствующими (см. п. 1 § 1) правилами упорядочения, сложения и умножения и множество рациональных чисел, записанных в виде бесконечных дробей с обычными правилами упорядочения, сложения и умножения вещественных чисел.

Рассмотрим более внимательно два множества: множество всех рациональных чисел и множество всех вещественных чисел. Для каждого из этих множеств определены правила упорядочения, сложения и умножения и справедливы остальные из 16 основных свойств. Вместе с тем ясно, что множество всех вещественных чисел является более «широким», чем множество всех рациональных чисел, ибо в целом множество всех вещественных чисел не изоморфно относительно правил упорядочения, сложения и умножения множеству всех рациональных чисел *, но в множестве вещественных чисел можно выделить часть, изоморфную относительно указанных правил множеству рациональных чисел.

Естественно, возникает вопрос, нельзя ли и для множества всех вещественных чисел построить более «широкое» множество объектов, обладающее такими свойствами: 1) в этом более «широком» множестве определены правила упорядочения, сложения и умножения и справедливы остальные из 16 основных свойств; 2) в целом более «широкое» множество не изоморфно относительно указанных правил множеству всех вещественных чисел; 3) в более «широком» множестве можно выделить часть, изоморфную относительно указанных правил множеству всех вещественных чисел. Мы докажем, что такого более «широкого» множества не существует, т. е. множество всех вещественных чисел является полным относительно правил упорядочения, сложения и умножения и остальных 16 основных свойств.

Вообще, *произвольное множество объектов, для которого определены некоторые правила и справедливы некоторые свойства, называется* **полным** *относительно этих правил и свойств, если нельзя построить более «широкое» множество объектов такое, чтобы* 1) *в этом более «широком» множестве были определены те же правила и справедливы те же свойства;* 2) *в целом это более «широкое» множество не было изоморфно данному относительно указанных правил*; 3) *в этом более «широком»*

* Это вытекает из того, что между множеством всех рациональных чисел и всех вещественных чисел нельзя установить взаимно однозначное соответствие. В п. 3 § 7 будет доказано, что такого соответствия нет между рациональными числами и вещественными числами сегмента [0, 1]. Отсюда и вытекает требуемое утверждение.

множестве существовала часть, изоморфная данному множеству относительно указанных правил.

Можно утверждать, что множество всех рациональных чисел не является полным относительно правил упорядочения, сложения и умножения и остальных 16 основных свойств, ибо существует более «широкое» множество (множество вещественных чисел), удовлетворяющее требованиям 1), 2) 3) из только что сформулированного определения.

Докажем теперь, что *множество всех вещественных чисел является полным относительно правил упорядочения, сложения и умножения и остальных 16 основных свойств.*

Предположим противное, т. е. предположим, что существует более «широкое» множество объектов $\{x'\}$ такое, что выполнены требования 1), 2), 3) из сформулированного выше определения, и обозначим через $\{\bar{x}'\}$ ту часть множества $\{x'\}$, которая изморфна относительно правил упорядочения, сложения и умножения множеству $\{x\}$ всех вещественных чисел.

Заметим прежде всего, что у множества $\{x'\}$ существует единственная пара элементов $0'$ и $1'$, играющих особую роль нуля и единицы *. Далее можно утверждать, что элементы $0'$ и $1'$ входят в состав множества $\{\bar{x}'\}$ и находятся во взаимно однозначном соответствии с вещественными числами 0 и 1 **. Пусть α' — какой-либо элемент множества $\{x'\}$, не принадлежащий множеству $\{\bar{x}'\}$.

В силу правила упорядочения мы можем разбить все элементы множества $\{\bar{x}'\}$ на два класса — верхний и нижний, отнеся к верхнему классу все элементы $\bar{x}'$, удовлетворяющие неравенству $\bar{x}'>\alpha'$, а к нижнему классу все элементы $\bar{x}'$, удовлетворяющие неравенству $\bar{x}'<\alpha'$. Оба эти класса не являются пустыми. В самом деле, докажем, например, что верхний класс не пуст. Повторив элемент $1'$ слагаемым достаточное число раз, мы, в силу свойства 16°, получим элемент n' множества $\{\bar{x}'\}$, удовлетворяющий неравенству $n'>\alpha'$, т. е. принадлежащий верхнему классу. Из свойства 4° вытекает, что каждый элемент нижнего класса меньше любого элемента верхнего класса.

* Если бы нашлись два элемента $0'_1$ и $0_2'$, играющие особую роль нуля, то в силу свойства суммы мы получили бы $0_1'=0_1'+0_2'=0_2'+0_1'=0_2'$, т. е. $0_2'=0_2'$. Аналогично доказывается единственность элемента $1'$, играющего особую роль единицы.

** Докажем, например, что нулевой элемент $0'$ множества $\{x'\}$ принадлежит множеству $\{x'\}$ и находится в соответствии с вещественным числом 0. Обозначим через θ тот элемент множества $\{\bar{x}'\}$, который находится в соответствии с вещественным числом 0, и заметим, что сумма $\theta+\theta$ отвечает вещественному числу $0+0=0$, и потому $\theta+\theta=\theta$. С другой стороны, $0'+\theta=\theta$ (по определению нулевого элемента $0'$). Из двух последних равенств заключаем, что $\theta+\theta=0'+\theta$. Прибавляя к обеим частям полученного равенства элемент θ', противоположный θ, и учитывая, что $\theta+\theta'=0'$, получим $\theta+0'=0'+0'$, или (в силу свойства нулевого элемента) $\theta=0'$. Аналогично проводятся рассуждения для единичного элемента.

В силу изоморфизма множества $\{\bar{x}'\}$ и множества $\{x\}$ всех вещественных чисел можно утверждать, что множество всех вещественных чисел разбивается на два класса, причем каждое число из нижнего класса меньше любого числа из верхнего класса. Но это означает, что нижний класс вещественных чисел ограничен сверху и имеет (в силу теоремы 2.1) точную верхнюю грань M, а верхний класс имеет точную нижнюю грань m. Из определения точных граней вытекает, что обе грани m и M заключены между вещественными числами, как угодно близкими между собой, а поэтому $m=M$. Так как число $m=M$ является одним из вещественных чисел, то оно принадлежит одному из классов, т. е. существует либо наименьший элемент в верхнем классе, либо наибольший элемент в нижнем классе. Докажем, что оба эти утверждения абсурдны. Пусть, например, существует наименьший элемент в верхнем классе вещественных чисел. Тогда существует наименьший элемент m' и в верхнем классе, отвечающем разбиению множества $\{\bar{x}'\}$. По определению верхнего класса $m'>\alpha'$. Согласно свойствам суммы существует разность $m'-\alpha'$, причем согласно этим свойствам $m'-\alpha'>0'$. Но тогда в силу свойства 12° для элемента $m'-\alpha'$ существует обратный, который в силу свойств произведения равен частному $1'/(m'-\alpha')$. Согласно свойству 16° элемент $1'$ можно повторить слагаемым столько раз, что полученный при этом «целый» элемент n' будет принадлежать $\{\bar{x}'\}$ и удовлетворять неравенству $n'>1'/(m'-\alpha')$. Из последнего неравенства в силу свойств произведения и суммы получим *

$$m'-\frac{1'}{n'}>\alpha'. \tag{2.19}$$

Так как элементы m', $1'$ и n' принадлежат множеству $\{\bar{x}'\}$, то и элемент $\left(m'-\frac{1'}{n'}\right)$ также принадлежит этому множеству и, очевидно, удовлетворяет неравенству $m'-\frac{1'}{n'}<m'$. Но тогда неравенство (2.19) означает, что в верхнем классе имеется элемент, меньший m', т. е. m' не является наименьшим элементом. Полученное противоречие доказывает полноту множества вещественных чисел **.

2. Аксиоматическое введение множества вещественных чисел. Для введения вещественных чисел мы использовали множество бесконечных десятичных дробей. Определив для множества этих дробей правило упорядочения и операции сложения и ум-

* Эти свойства обеспечивают применимость всех правил алгебры.

** При доказательстве этой теоремы использовалась идея так называемого дедекиндова сечения. Дедекиндовым сечением в области рациональных чисел называется разбиение множества всех рациональных чисел на два непустых подмножества A и B таких, что любой элемент A меньше любого элемента B.

ножения, мы установили, что элементы этого множества обладают 16 основными свойствами и, кроме того, свойством полноты относительно 16 основных свойств.

Описанный способ введения вещественных чисел, хотя и обладает несомненными эвристическими и методическими достоинствами, не является единственно возможным и целесообразным с научной точки зрения. Для окончательного оформления и полного логического завершения наших представлений о вещественных числах более предпочтительным является аксиоматический метод введения этих чисел.

Этот метод заключается в следующем.

Множество вещественных чисел вводится как совокупность объектов *, удовлетворяющих 17 аксиомам, в качестве которых берутся 16 основных свойств и аксиома о полноте относительно 16 указанных свойств. Впредь мы будем называть упомянутые 17 аксиом аксиомами вещественного числа. Конкретной реализацией совокупности объектов, удовлетворяющих 17 аксиомам вещественного числа, и является изученное нами выше множество бесконечных десятичных дробей. Возможны и другие реализации указанной совокупности объектов.

Имеет место следующее замечательное утверждение:

Любая реализация совокупности объектов $\{x'\}$, удовлетворяющих 17 аксиомам вещественного числа, изоморфна изученному выше множеству $\{x\}$ бесконечных десятичных дробей.

Доказательство этого утверждения можно найти в книге В. А. Ильина и Э. Г. Позняка «Основы математического анализа», ч. 1 (М., Наука, 1982, с. 608—612), а также в книге В. А. Ильина, В. А. Садовничего и Бл. Х. Сендова «Математический анализ» (М., Наука, 1979, с. 65—69).

Подчеркнем, что аксиоматический метод и понятие изоморфных (в различных смыслах) совокупностей объектов широко используются в разнообразных разделах современной математики и физики (при построении геометрии, теории вероятностей, классической механики, статистической физики, квантовой механики ** и др. разделов).

В заключение заметим, что в геометрии множество точек прямой вводится как совокупность объектов, удовлетворяющих некоторым аксиомам, среди которых фундаментальную роль играет аксиома о полноте этой совокупности относительно остальных аксиом. Упомянутые аксиомы позволяют установить

* При этом ничего не предполагается о природе этих объектов.

** Так, квантовая механика первоначально возникла в виде двух внешне различных теорий: «матричной механики» Гейзенберга и «волновой механики» Шредингера. Позже было доказано, что эти две теории используют две изоморфные друг другу конкретные реализации одной общей совокупности объектов, вводимой аксиоматически и называемой абстрактным гильбертовым пространством.

взаимно однозначное соответствие между множеством точек прямой и множеством всех вещественных чисел *. Это соответствие позволяет изображать вещественные числа точками на прямой (числовой оси), чем мы будем широко пользоваться в иллюстративных целях.

§ 7. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1. Понятие множества. В предыдущих параграфах при изучении теории вещественных чисел важным понятием являлось понятие множества. Подчеркнем, что множество мы рассматривали как начальное понятие, неопределяемое через другие. В этом параграфе мы будем изучать множества произвольной природы, или, как говорят, абстрактные множества. Это означает, что объекты, составляющие данное множество, или, как говорят, элементы данного множества, уже не обязаны быть вещественными числами. Элементами абстрактного множества могут быть, например, функции, буквы алфавита, фигуры на плоскости и т. д.

В математике обычно вводят множество как совокупность объектов любой природы, обладающих определенным свойством.

Множества мы будем обозначать прописными буквами A, B, ... или X, Y, ... и т. п., их элементы — малыми буквами a, b, ... или x, y, ... и т. п. Утверждение «элемент a принадлежит множеству A» будем записывать в виде $a \in A$, если же элемент a не принадлежит множеству A, то будем писать, что $\overline{a} \in A$ или $a \notin A$. Если рассматриваются два произвольных множества A и B и известно, что все элементы множества B содержатся в множестве A, то B называется подмножеством множества A и обозначается этот факт так: $B \subset A$. При этом говорят, что множество B включается в множество A. (Заметим, что при этом возможен случай $B = A$, т. е. случай, когда каждый элемент множества B принадлежит множеству A и, наоборот, каждый элемент множества A принадлежит множеству B.)

В дальнейшем удобно будет рассматривать множества, являющиеся подмножествами некоторого фиксированного множества E.

Если множество вводится как совокупность объектов, обладающих некоторым свойством, причем оказывается, что объектов, обладающих указанным свойством, не существует, то множество называется пустым и обозначается символом $\varnothing$.

Таким образом, пустое множество — это множество, не содержащее ни одного элемента. Пустое множество является подмножеством любого множества.

Заметим, что когда речь идет о некотором выборе элементов, для которых ранее было введено обозначение, скажем, о наборе

* См. книгу В. А. Ильина и Э. Г. Позняка «Аналитическая геометрия» (М., Наука, 1981; приложение в конце книги).

элементов x, то данная совокупность или данное множество может обозначаться и так $\{x\}$ (говорят — «множество элементов «икс»). Далее, если X — какое-то множество, а P — определенное свойство, то запись $\{x \in X : P(x)\}$ или $\{x \in X \mid P(x)\}$ обозначает множество элементов x, обладающих свойством P. Например, если обозначить через $N = \{x\}$ множество натуральных чисел: 1, 2, 3, ..., то запись $\{x \in N : x^2 - 4 = 0\}$ означает множество корней уравнения $x^2 - 4 = 0$, являющихся натуральными числами. В данном случае это множество состоит из одного элемента: 2. Таким образом, $\{x \in N : x^2 - 4 = 0\} = 2$.

Множество всех тех вещественных чисел $\{x\}$, которые одновременно удовлетворяют двум условиям: $x < 1$ и $2 < x$, является пустым. Пустым является и множество $\{x \in E : x \neq x\}$.

2. Операции над множествами. *Суммой (или объединением) двух множеств A и B называется третье множество C, состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A и B.* Сумма двух множеств обозначается так: $C = A \cup B$. Аналогично определяется сумма A любого числа множеств A_α. В этом случае пишут $A = \bigcup\limits_\alpha A_\alpha$, что и означает, что множество A состоит из элементов, принадлежащих хотя бы одному A_α.

Заметим, что не следует путать понятие суммы двух множеств с понятием суммы двух вещественных чисел. Например, если мы рассматриваем множества $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, т. е. множества, состоящие всего из одного элемента: в первом случае из единицы, во втором из числа два, то $C = A \cup B = \{1; 2\}$ есть множество, состоящее из двух элементов — чисел 1 и 2. Ясно, что при этом $1 + 2 = 3$ не является даже элементом множества C.

Пересечением двух множеств A и B называется третье множество C, состоящее из элементов, принадлежащих как множеству A, так и множеству B, т. е. из элементов, общих для множеств A и B. Пересечение C двух множеств A и B обозначается так: $C = A \cap B$. Аналогично определяется пересечение C произвольного числа множеств A_α: $C = \bigcap\limits_\alpha A_\alpha$, т. е. множество C, состоящее из элементов, принадлежащих каждому множеству A_α.

Разностью $C = A \setminus B$ двух множеств A и B называется множество, состоящее из элементов A, не принадлежащих B. Заметим, что если рассматриваемые множества являются подмножествами некоторого фиксированного множества E, то *разность $A' = E \setminus A$ называется дополнением множества A или дополнением до E множества A.*

Подчеркнем также, что понятие разности двух множеств также не следует путать с понятием разности двух вещественных чисел.

Дополнительные сведения о свойствах операций над множествами и понятие отображения множеств будут даны в п. 4 в конце настоящего параграфа.

3. Счетные и несчетные множества. Несчетность сегмента [0, 1]. Мощность множества. Важным вопросом при изучении множеств является вопрос о том, как сравнивать между собой два множества, имея в виду «количество» элементов, в них содержащихся. Если мы имеем два множества, каждое из которых содержит конечное число элементов, то элементы в этих множествах мы можем просто каким-нибудь способом занумеровать. При этом может оказаться, что в первом и втором множествах содержится одинаковое число элементов. Назовем такие два множества, содержащие конечное и одинаковое число элементов, эквивалентными. Если в одном из рассматриваемых множеств элементов окажется больше, то мы будем говорить, что оно имеет большую мощность, чем другое из рассматриваемых множеств.

Обратимся теперь к множествам, состоящим из, вообще говоря, бесконечного числа элементов. Примерами таких множеств являются множество рациональных чисел или множество вещественных чисел, лежащих на сегменте [0, 1].

Назовем два множества A и B эквивалентными, если между ними существует взаимно однозначное соответствие, т. е. каждому элементу $a \in A$ отвечает единственный элемент $b \in B$, каждый элемент $b \in B$ сопоставлен некоторому элементу $a \in A$ и разным элементам множества A отвечают разные элементы множества B.

Взаимно однозначное соответствие называют иногда биективным соответствием.

В частности, множества, содержащие конечное число элементов, эквивалентны тогда и только тогда, когда они содержат одинаковое число элементов. Эквивалентность множеств A и B обозначается так: $A \sim B$.

Покажем, например, что *множество $R=\{r\}$ рациональных чисел и множество $N=\{n\}$ натуральных чисел эквивалентны.* Заметим сначала, что для любого целого $k \neq 0$ два рациональных числа m/n и mk/nk являются одинаковыми (здесь $n \neq 0$). Поэтому всякое рациональное число r можно записать в виде $r = \frac{p}{q}$ $(q > 0)$ и дробь считать несократимой. Число 0 будем считать записанным одним способом: $0 = \frac{0}{1}$.

Назовем число $h = |p| + q$ высотой рационального числа p/q. Ясно, что рациональных чисел r, имеющих данную высоту, конечное число. Будем нумеровать натуральными числами 1, 2, 3, ... рациональные числа по возрастанию высоты, т. е. сперва занумеруем все рациональные числа высоты $h=1$. Такое число только одно: 0. Этому рациональному числу припишем индекс 1, т. е. поставим ему в соответствие натуральное число 1. Затем занумеруем рациональные числа высоты $h=2$. Таких чисел два: $1 = \frac{1}{}$

и $1=\frac{-1}{1}$. Первому из них поставим в соответствие натуральное число 2 (т. е. занумеруем его индексом 2), второму — число 3. После этого занумеруем рациональные числа высоты 3 и т. д. Ясно, что при этом мы установим взаимно однозначное соответствие между всеми рациональными числами и всеми натуральными числами, т. е. $R \sim N$.

Введем понятие счетного множества.

Определение 1. *Множество называется* **счетным**, *если оно эквивалентно множеству натуральных чисел.*

Согласно этому определению и рассуждениям, проведенным выше, мы получаем, что множество рациональных чисел является счетным множеством.

Докажем следующие два простых утверждения о счетных множествах.

Утверждение 1. *Всякое непустое подмножество счетного множества является или множеством, состоящим из конечного числа элементов, или множеством счетным.*

Доказательство. Пусть A — исходное счетное множество, т. е. $A \sim N$ — множеству натуральных чисел. Это означает, что элементы множества A можно занумеровать каким-нибудь способом. Расположим элементы множества A в виде последовательности: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Пусть B — непустое подмножество множества A. Рассмотрим последовательно элементы $a_1, a_2, a_3, \ldots$ множества A. Если $a_1 \in B$, то этот элемент мы обозначим через b_1; если $a_1 \overline{\in} B$, мы переходим к рассмотрению элемента a_2. При рассмотрении элемента a_2 могут представиться две возможности: а) элемент $a_2 \in B$; если при этом было выполнено, что и $a_1 \in B$, то элемент a_2 мы обозначим через b_2; если же $a_1 \overline{\in} B$, то элемент a_2 обозначается через b_1; б) элемент $a_2 \overline{\in} B$, тогда переходим к рассмотрению элемента a_3 и т. д. Ясно, что при этом может случиться, что все элементы множества B будут расположены в виде конечной последовательности: $b_1, b_2, \ldots, b_M$ $(M<\infty)$. В этом случае множество B состоит из конечного числа элементов. Если этого не случится, то мы выпишем все элементы множества B в виде бесконечной последовательности элементов $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, откуда следует, что множество B счетное. Утверждение доказано.

Утверждение 2. *Сумма любой конечной или счетной совокупности счетных множеств есть множество счетное.*

Доказательство. Рассмотрим, например, случай, когда имеется счетная совокупность счетных множеств. Пусть $A_1, A_2, A_3, \ldots$ — совокупность множеств, каждое из которых счетно. Расположим элементы множеств $A_1, A_2, A_3, \ldots$ в виде последовательностей:

$$A_1 = \{a_{11}, \quad a_{12}, \quad a_{13}, \quad \ldots\},$$
$$A_2 = \{a_{21}, \quad a_{22}, \quad a_{23}, \quad \ldots\},$$
$$A_3 = \{a_{31}, \quad a_{32}, \quad a_{33}, \quad \ldots\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Пусть $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Произведем нумерацию элементов a множества $A = \{a\}$ следующим образом *:

$$a_1 = a_{11},\ a_2 = a_{21},\ a_3 = a_{12},\ a_4 = a_{31},\ a_5 = a_{22},\ a_6 = a_{13} \text{ и т. д.}$$

У некоторых множеств A_i и A_j могут оказаться общие элементы (при $i \neq j$). В этом случае мы их учитываем только один раз.

Таким образом, элементы множества A можно занумеровать, т. е. поставить во взаимно однозначное соответствие с множеством натуральных чисел N, т. е. A счетно. Утверждение доказано.

Возникает вопрос: существуют ли бесконечные несчетные множества, т. е. такие бесконечные множества, которые нельзя поставить во взаимно однозначное соответствие с множеством натуральных чисел? Ответ содержится в доказываемой ниже теореме.

Теорема 2.2. *Множество всех точек сегмента* [0, 1] *несчетно.*

Доказательство. Рассмотрим интервал (0, 1). Очевидно, что если мы докажем, что интервал (0, 1) несчетен, то и сегмент [0, 1] будет несчетен, так как множество точек сегмента [0, 1] отличается от множества точек интервала (0,1) всего двумя точками: 0 и 1. Итак, докажем, что множество точек интервала (0, 1) несчетно. Допустим противное, т. е. предположим, что все вещественные числа интервала (0, 1) можно занумеровать.

Записывая все числа интервала (0, 1) в виде бесконечных десятичных дробей, получим, что

$$x_1 = 0,\ a_{11}a_{12}\ldots a_{1n}\ldots,$$
$$x_2 = 0,\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n}\ldots,$$
$$\cdots\cdots\cdots,$$
$$x_n = 0,\ a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn}\ldots,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Рассмотрим на интервале (0,1) вещественное число $x = 0, b_1b_2\ldots \ldots b_n\ldots$, где b_1 — любая цифра, отличная от a_{11}, 0 и 9; b_2 — любая цифра, отличная от a_{22}, 0 и 9; и т. д.; b_n — любая цифра, отличная от a_{nn}, 0 и 9. Достаточно доказать, что число x не совпадает ни с одним из чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. Число x не содержит после запятой нулей и девяток, т. е. это число не принадлежит классу ра-

* В записи всех элементов множеств $A_1, A_2, \ldots$, приведенной выше, стрелки указывают порядок, в котором мы производим нумерацию.

циональных чисел, представимых двумя способами в виде бесконечных десятичных дробей. В таком случае число x допускает единственное представление в виде бесконечной десятичной дроби и оно отлично от всех чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, ибо совпадение числа x с каким-либо числом x_n означало бы совпадение b_n и a_{nn}. Таким образом, интервал (0, 1), а вместе с тем и сегмент [0, 1] несчетен. Теорема доказана.

Определение 2. *Множество, эквивалентное множеству точек сегмента* [0, 1], *называется множеством мощности континуума.*

Из доказанной теоремы 2.2 следует, что множества мощности континуума и счетные множества не являются эквивалентными между собой множествами. В частности, из теоремы 2.2 следует, что существуют иррациональные числа, так как уже на сегменте [0, 1] не все числа рациональны: в противном случае их можно было бы перенумеровать. Из теоремы 2.2 также следует, что иррациональных чисел несчетное множество, так как если бы их было счетное множество или конечное число, то по утверждению 2 и всех чисел — рациональных и иррациональных — было бы счетное множество.

Рассмотрим два произвольных множества A и B. Если эти множества являются эквивалентными, то мы будем говорить, что они имеют одинаковую мощность или являются равномощными.

Для обозначения равномощности множеств A и B используют следующую символику:

$$m(A)=m(B)\ *.$$

Если множество A эквивалентно некоторому подмножеству множества B и при этом множество A не содержит подмножества, эквивалентного множеству B, то будем говорить, что мощность множества A меньше мощности множества B.

Для обозначения того, что мощность множества A меньше мощности B, используют следующую символику:

$$m(A)<m(B).$$

Например, из данного выше определения множества мощности континуума, из теоремы 2.2 и из утверждения 1 о счетных множествах следует, что мощность счетного множества меньше мощности множества сегмента [0, 1], т. е. мощности континуума.

Итак, нами введено сравнение мощностей двух множеств. Логически возможны еще два случая:

* Величину $m(A)$, представляющую собой общую характеристику класса всех эквивалентных множеству A множеств, принято называть кардинальным числом. В частности, если A состоит из конечного числа элементов, то $m(A)$ равно количеству элементов этого множества.

а) Множество A содержит подмножество, эквивалентное множеству B, а множество B содержит подмножество, эквивалентное A.

б) Множества A и B не эквивалентны, и ни одно из них не содержит подмножества, эквивалентного другому множеству. Нетрудно доказать, что в случае а) множества A и B будут эквивалентны. Случай же б) на самом деле невозможен.

Заметим еще, что трудной проблемой оказался вопрос о существовании множества промежуточной мощности между мощностью счетных множеств и мощностью континуума. Оказалось, что утверждение как о существовании, так и об отсутствии множества промежуточной мощности не противоречит аксиомам теории множеств и не может быть выведено из них. Тем самым это утверждение является одной из аксиом аксиоматической теории множеств.

В заключение докажем, что сегмент [0, 1] и интервал (0, 1) — эквивалентные или, что то же, равномощные множества. Для этого установим взаимно однозначное соответствие между их элементами. Выберем на сегменте [0, 1] и интервале (0, 1) последовательность точек $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$.

Точке 0 сегмента [0, 1] поставим в соответствие точку $\frac{1}{2}$ интервала (0, 1), точке 1 сегмента [0, 1] поставим в соответствие точку $\frac{1}{3}$ интервала (0, 1), далее точке $\frac{1}{2}$ сегмента [0, 1] поставим в соответствие точку $\frac{1}{4}$ интервала (0, 1) и т. д., точке $\frac{1}{n}$ сегмента [0, 1] поставим в соответствие точку $\frac{1}{n+2}$ интервала (0, 1), $n \geqslant 2$. Всем остальным точкам сегмента (т. е. точкам, отличным от 0,1 и не принадлежащим выбранной последовательности) ставятся в соответствие те же точки интервала, т. е. точки, имеющие те же абсциссы. Таким образом, взаимно однозначное соответствие между сегментом [0, 1] и интервалом (0, 1) установлено.

4. Свойства операций над множествами. Отображение множеств. Отметим ряд свойств, введенных выше операций над множествами. Отношение включения двух множеств обладает следующими свойствами:

1°) $A \subset A$;

2°) если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$;

3°) если $B \subset A$ и $A \subset C$, то $B \subset C$;

4°) $\varnothing \subset A$ для любого множества A.

Операции суммы (объединения) и пересечения множеств обладают следующими, непосредственно проверяемыми свойствами:

5°) $(\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha)\cap B=\bigcup\limits_{\alpha}(A_\alpha\cap B)$ (дистрибутивность пересечения);

6°) $(\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha)\cup B=\bigcap\limits_{\alpha}(A_\alpha\cup B)$ (дистрибутивность объединения);

7°) $A\subset B$ эквивалентно условиям $A\cup B=B$ или $A\cap B=A$.

Напомним, что для подмножеств $\{A\}$ некоторого фиксированного множества E мы ввели операцию дополнения $A'=E\setminus A$. Очевидно эта операция удовлетворяет следующим свойствам:

8°) $A\cup A'=E$, $A\cap A'=\varnothing$;

9°) $\varnothing'=E$, $E'=\varnothing$;

10°) $(\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha)'=\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha'$;

11°) $(\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha)'=\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha$.

Последние два свойства суть правила де Моргана *.

Симметрической разностью двух множеств A и B *назовем множество* $C(A\cup B)\setminus(A\cap B)$. Симметрическая разность множеств A и B обозначается символом $A\triangle B$. Легко видеть, что $A\triangle B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

Важнейшим понятием в анализе является понятие отображения одного множества в другое. Пусть X и Y — какие-то множества. *Если в силу некоторого закона* f *каждому элементу* $x\in X$ *соответствует элемент* $y=f(x)\in Y$, *то говорят, что задано отображение* f *множества* X *в множество* Y. Записывают этот факт в виде

$$f:X\to Y \text{ или } X\xrightarrow{f} Y.$$

В этом случае элемент $y=f(x)$ называют образом элемента x или значением f на элементе x, а элемент x — прообразом или одним из прообразов элемента y. Часто элемент $x\in X$ называют переменным или аргументом отображения f.

Образом множества $A\subset X$ при отображении $f:X\to Y$ называют множество всех таких элементов из Y, которые являются образами элементов $x\in A$. Это множество обозначается символом $f(A)$. Если $B\subset Y$, то прообразом (или полным прообразом) множества B называют совокупность всех элементов $x\in X$ таких, что $f(x)\in B$. Прообраз множества B обозначается символом $f^{-1}(B)$.

Отображение $f:X\to Y$ иногда удобно называть функцией с областью определения X и областью (или множеством) значений $f(X)\subset Y$. В некоторых разделах математики в зависимости от природы множеств X и Y и свойств f отображение f называется оператором, функционалом и т. д.

* А. де Морган — шотландский математик (1806—1871).

Про отображение $f: X \to Y$ говорят, что оно сюръективно (или является отображением X на Y), если $f(X) = Y$; инъективно (или является вложением), если для любых элементов x_1, x_2 множества X из условия $f(x_1) = f(x_2)$ вытекает, что $x_1 = x_2$, т. е. различные элементы имеют различные образы; биективно (или взаимно однозначно), если оно сюръективно и инъективно одновременно. Если отображение $f: X \to Y$ биективно, то, как мы отмечали в п. 3, множества X и Y называются эквивалентными (или равномощными). В случае биекции $f: X \to Y$ можно определить обратное отображение $f^{-1}: Y \to X$ по правилу: если при отображении f элементу $x \in X$ соответствует элемент $y \in Y$, то $f^{-1}(y)$ полагается равным элементу x. Для любого $y \in Y$ в силу сюръективности отображения f элемент $f^{-1}(y)$ всегда существует, а ввиду инъективности отображения f этот элемент $f^{-1}(y)$ единственен.

Глава 3

ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

В гл. 1 уже указывалось, что одной из основных операций математического анализа является операция предельного перехода и что эта операция встречается в курсе анализа в различных формах.

В настоящей главе изучаются простейшие формы операции предельного перехода. Мы начинаем с изучения самой простейшей формы операции предельного перехода, основанной на понятии предела так называемой числовой последовательности.

Понятие предела числовой последовательности облегчит нам введение и другой весьма важной формы операции предельного перехода, основанной на понятии предельного значения (или, короче, предела) функции.

В конце главы дается общее определение предела функции по базе.

§ 1. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ И ЕЕ ПРЕДЕЛ

1. Понятие последовательности. Арифметические операции над последовательностями. Понятие числовой последовательности известно из курса средней школы. Примерами числовых последовательностей могут служить: 1) последовательность всех элементов арифметической или геометрической прогрессии; 2) последовательность периметров правильных n-угольников, вписанных в данную окружность; 3) последовательность рациональных чисел $x_1=0{,}3$, $x_2=0{,}33$, $x_3=0{,}333$, ..., приближающих число 1/3.

Если каждому значению n из натурального ряда чисел 1, 2, ..., n, ... *ставится в соответствие по определенному закону некоторое вещественное число x_n, то множество занумерованных вещественных чисел*

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots \tag{3.1}$$

мы и будем называть ч и с л о в о й п о с л е д о в а т е л ь н о с т ь ю *или просто* п о с л е д о в а т е л ь н о с т ь ю.

Отдельные числа x_n мы будем называть элементами или членами последовательности (3.1). Для сокращенной записи последовательности (3.1) будем использовать символ $\{x_n\}$.

Так, например, символ $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ обозначает последовательность $1,\ 1/2^2,\ 1/3^2,\ \ldots,\ 1/n^2,\ \ldots$, а символ $\{1+(-1)^n\}$ обозначает последовательность 0, 2, 0, 2, ...

Рассмотрим наряду с последовательностью (3.1) еще одну последовательность

$$y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots. \tag{3.2}$$

Назовем последовательность x_1+y_1, x_2+y_2, ..., x_n+y_n, ... *суммой последовательностей* (3.1) *и* (3.2), *последовательность* x_1-y_1, x_2-y_2, ..., x_n-y_n, ... — *разностью последовательностей* (3.1) *и* (3.2), *последовательность* $x_1\cdot y_1$, $x_2\cdot y_2$, ..., $x_n\cdot y_n$, ... — *произведением последовательностей* (3.1) *и* (3.2) *и, наконец, последовательность* $\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \ldots, \frac{x_n}{y_n}, \ldots$ — *частным последовательностей* (3.1) *и* (3.2).

Конечно, при определении частного последовательностей (3.1) и (3.2) необходимо требовать, чтобы все элементы последовательности (3.2) были отличны от нуля. Заметим, однако, что если у последовательности $\{y_n\}$ обращается в нуль лишь конечное число элементов, то частное $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ можно определить с того номера, начиная с которого все элементы y_n отличны от нуля.

2. Ограниченные, неограниченные, бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Совокупность всех элементов произвольной последовательности $\{x_n\}$ образует некоторое числовое множество. Отправляясь от понятий ограниченного сверху, снизу или с обеих сторон множества, мы приходим к следующим определениям.

Определение 1. *Последовательность* $\{x_n\}$ *называется ограниченной сверху (снизу), если существует вещественное число* M *(вещественное число* m*) такое, что каждый элемент этой последовательности* x_n *удовлетворяет неравенству*

$$x_n \leqslant M \qquad (x_n \geqslant m).$$

При этом число M (число m) называется верхней гранью (нижней гранью) последовательности $\{x_n\}$, а неравенство $x_n \leqslant M$ $(x_n \geqslant m)$ называется условием ограниченности этой последовательности сверху (снизу).

Отметим, что любая ограниченная сверху последовательность имеет бесконечное множество верхних граней* и что в условии ограниченности последовательности сверху $x_n \leqslant M$ в качестве M может браться любая из верхних граней. Аналогичное замечание относится и к нижним граням ограниченной снизу последовательности.

Определение 2. *Последовательность* $\{x_n\}$ *называется ограниченной с обеих сторон (или просто ограниченной), если она ограничена и сверху, и снизу, т. е. если существуют два*

* В самом деле, если число M — одна из верхних граней, то в силу свойства транзитивности знаков $>$ и $=$ и любое число M^*, бо́льшее M, является верхней гранью.

вещественных числа M и m такие, что каждый элемент этой последовательности x_n удовлетворяет неравенствам

$$m \leqslant x_n \leqslant M. \tag{3.3}$$

При этом числа m и M называются соответственно нижней и верхней гранями последовательности $\{x_n\}$, а неравенства (3.3) называются условием ограниченности последовательности $\{x_n\}$.

Подчеркнем, что в условии ограниченности (3.3) могут фигурировать любая нижняя и любая верхняя грани последовательности. Определение ограниченности последовательности требует существования хотя бы одной пары вещественных чисел m и M таких, что для любого элемента последовательности x_n справедливы неравенства (3.3).

Заметим, что условие ограниченности последовательности можно записать не только в форме удовлетворения неравенствам (3.3), но и в другой эквивалентной форме: *последовательность $\{x_n\}$ является ограниченной тогда и только тогда, когда существует положительное вещественное число A такое, что каждый элемент последовательности x_n удовлетворяет неравенству*

$$|x_n| \leqslant A. \tag{3.4}$$

В самом деле, если каждый элемент x_n удовлетворяет неравенству (3.4), то, положив $m=-A$, $M=+A$, мы получим, что x_n удовлетворяет неравенствам (3.3). Если, наоборот, каждый элемент x_n удовлетворяет неравенствам (3.3), то, обозначив через A наибольшее из двух чисел $|m|$ и $|M|$, мы можем утверждать, что x_n удовлетворяет неравенству (3.4).

В соответствии с определением 2 ограниченной последовательности и условием ограниченности, взятым в форме (3.4), мы можем определить понятие неограниченной последовательности.

Последовательность $\{x_n\}$ называется неограниченной, если для любого положительного вещественного числа A найдется хотя бы один элемент последовательности x_n, удовлетворяющий неравенству*

$$|x_n| > A. \tag{3.5}$$

С точки зрения этого определения всякая последовательность, которая ограничена только сверху или только снизу, является неограниченной.

Так, например, последовательность 1, 2, 1, 4, ..., 1, $2n$, ... ограничена только снизу и является неограниченной: какое бы положительное вещественное число A мы ни взяли, найдется элемент этой последовательности с четным номером, удовлетворяющий неравенству (3.5).

* Сколь бы большим мы ни взяли это число.

Последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, очевидно, является ограниченной: каждый элемент этой последовательности удовлетворяет неравенствам (3.3) при любых $m \leqslant 0$ и $M \geqslant 1$.

Введем теперь понятия бесконечно большой и бесконечно малой последовательностей.

Определение 3. *Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой, если для любого положительного вещественного числа A* найдется номер N такой**, что при всех $n \geqslant N$ элементы x_n этой последовательности удовлетворяют неравенству* (3.5).

Очевидно, что всякая бесконечно большая последовательность является неограниченной, ибо определение бесконечно большой последовательности требует, чтобы для любого $A>0$ неравенству (3.5) удовлетворяли все элементы последовательности, начиная с некоторого номера N, а определение неограниченной последовательности требует, чтобы для любого $A>0$ неравенству (3.5) удовлетворял хотя бы один элемент последовательности.

Вместе с тем не всякая неограниченная последовательность является бесконечно большой. Так, например, рассмотренная выше последовательность 1, 2, 1, 4, ..., 1, $2n$, ..., будучи неограниченной, не является бесконечно большой, ибо для любого $A>1$ неравенство (3.5) не имеет места для элементов x_n со сколь угодно большими нечетными номерами n.

Определение 4. *Последовательность $\{\alpha_n\}$*** называется бесконечно малой, если для любого положительного вещественного числа ε**** найдется номер N такой*****, что при всех $n \geqslant N$ элементы α_n этой последовательности удовлетворяют неравенству*

$$|\alpha_n| < \varepsilon. \tag{3.6}$$

Докажем, что последовательность $q, q^2, \ldots, q^n, \ldots$ является бесконечно большой при $|q|>1$ и бесконечно малой при $|q|<1$.

Пусть сначала $|q|>1$. Тогда $|q|=1+\delta$, где $\delta>0$. Используя формулу бинома Ньютона, можем записать

$$|q|^N = (1+\delta)^N = 1 + N\delta + \text{ (положительные члены)}.$$

Отсюда следует неравенство

$$|q|^N > \delta N. \tag{3.7}$$

---

* Сколь бы большим мы ни взяли это число.

** Так как этот номер N, вообще говоря, зависит от A, то иногда пишут: $N=N(A)$.

*** Элементы бесконечно малых последовательностей мы будем стремиться обозначать греческими буквами.

**** Сколь бы малым мы ни взяли это число.

***** Так как этот номер N, вообще говоря, зависит от ε, то иногда пишут: $N=N(\varepsilon)$.

Фиксируем произвольное положительное число A и выберем по нему номер N такой, чтобы было справедливо неравенство

$$\delta N > A. \tag{3.8}$$

Убедимся в том, что по любому $A>0$ можно выбрать номер N, удовлетворяющий неравенству (3.8). *Договоримся обозначать символом* $[x]$ *целую часть положительного вещественного числа* x. Поскольку неравенство (3.8) эквивалентно неравенству $N > \frac{A}{\delta}$, то этому неравенству заведомо будет удовлетворять номер N, выбранный из условия $N = \left[\frac{A}{\delta}\right] + 1 = \left[\frac{A}{|q|-1}\right] + 1$.

Заметим теперь, что поскольку $|q|>1$, то из свойств произведения вещественных чисел мы получим, что при всех $n \geqslant N$

$$|q|^n \geqslant |q|^N. \tag{3.9}$$

Сопоставляя неравенства (3.7), (3.8) и (3.9), мы получим, что для любого $A>0$ найдется номер $N = \left[\frac{A}{|q|-1}\right] + 1$ такой, что при всех $n \geqslant N$

$$|q^n| = |q|^n > A.$$

Это и доказывает, что при $|q|>1$ последовательность $\{q^n\}$ является бесконечно большой.

Рассмотрим теперь случай $|q|<1$. Мы должны доказать, что в этом случае последовательность $\{q_n\}$ является бесконечно малой. Исключая тривиальный случай $q=0$, положим $\frac{1}{|q|} = 1 + \delta$, где $\delta>0$. Используя, как и выше, бином Ньютона, мы вместо (3.7) получим неравенство

$$\frac{1}{|q|^N} > \delta N, \text{ или } |q|^N < \frac{1}{qN}. \tag{3.7'}$$

Фиксируем произвольное положительное число ε и выберем по нему номер N такой, чтобы было справедливо неравенство

$$\frac{1}{\delta N} < \varepsilon. \tag{3.8'}$$

В силу того, что неравенство (3.8′) эквивалентно неравенству $N > \frac{1}{\varepsilon\delta}$, для выбора указанного номера достаточно положить $N = \left[\frac{1}{\varepsilon\delta}\right] + 1 = \left[\frac{|q|}{\varepsilon(1-|q|)}\right] + 1$. Далее, поскольку, в силу свойств произведения вещественных чисел, при $|q|<1$ для всех $n \geqslant N$ справедливо неравенство

$$|q|^n \leqslant |q|^N, \tag{3.9'}$$

то из сопоставления неравенств (3.7′), (3.8′) и (3.9′) мы получим, что для любого $\varepsilon>0$ найдется номер $N=\left[\frac{|q|}{\varepsilon(1-|q|)}\right]+1$ такой, что при всех $n\geqslant N$ справедливо неравенство

$$|q^n|=|q|^n<\varepsilon.$$

Это и доказывает, что при $|q|<1$ последовательность является бесконечно малой.

3. Основные свойства бесконечно малых последовательностей.

Теорема 3.1. *Сумма $\{\alpha_n+\beta_n\}$ двух бесконечно малых последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ представляет собой бесконечно малую последовательность.*

Доказательство. Фиксируем произвольное положительное число ε. Так как последовательность $\{\alpha_n\}$ является бесконечно малой, то для положительного числа $\varepsilon/2$ найдется номер N_1 такой, что при $n\geqslant N_1$ справедливо неравенство

$$|\alpha_n|<\varepsilon/2. \tag{3.10}$$

Аналогично, так как последовательность $\{\beta_n\}$ является бесконечно малой, то для положительного числа $\varepsilon/2$ найдется номер N_2 такой, что при $n\geqslant N_2$ справедливо неравенство

$$|\beta_n|<\varepsilon/2. \tag{3.11}$$

Обозначим через N наибольший из двух номеров N_1 и N_2. Тогда при $n\geqslant N$ будут справедливы оба неравенства (3.10) и (3.11).

Учитывая, что модуль суммы двух чисел не превосходит суммы их модулей, мы получим, что для всех номеров $n\geqslant N$

$$|\alpha_n+\beta_n|\leqslant|\alpha_n|+|\beta_n|. \tag{3.12}$$

Из соотношений (3.12), (3.10) и (3.11) вытекает, что при $n\geqslant N$ справедливо неравенство

$$|\alpha_n+\beta_n|<\varepsilon.$$

Это и означает, что последовательность $\{\alpha_n+\beta_n\}$ является бесконечно малой. Теорема доказана.

Теорема 3.2. *Разность $\{\alpha_n-\beta_n\}$ двух бесконечно малых последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ представляет собой бесконечно малую последовательность.*

Доказательство этой теоремы отличается от доказательства теоремы 3.1 только тем, что вместо неравенства (3.12) следует взять неравенство

$$|\alpha_n-\beta_n|\leqslant|\alpha_n|+|\beta_n|.$$

Следствие. *Алгебраическая сумма любого конечного числа бесконечно малых последовательностей представляет собой бесконечно малую последовательность.*

Теорема 3.3. *Произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую последовательность представляет собой бесконечно малую последовательность.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — ограниченная и $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательности. По определению ограниченной последовательности найдется вещественное число $A>0$ такое, что для всех элементов x_n справедливо неравенство

$$|x_n| \leqslant A. \tag{3.13}$$

Фиксируем произвольное положительное число ε. Так как последовательность $\{\alpha_n\}$ является бесконечно малой, то для положительного числа ε/A найдется номер N такой, что при $n \geqslant N$ справедливо неравенство

$$|\alpha_n| < \varepsilon/A. \tag{3.14}$$

Учитывая, что модуль произведения двух чисел равен произведению модулей этих чисел, мы получим с помощью неравенств (3.13) и (3.14), что для всех $n \geqslant N$

$$|x_n \cdot \alpha_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n| < A \cdot \frac{e}{A} = \varepsilon.$$

Это и означает, что последовательность $\{x_n \cdot \alpha_n\}$ является бесконечно малой. Теорема доказана.

Теорема 3.4. *Всякая бесконечно малая последовательность является ограниченной.*

Доказательство. Пусть $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность. Фиксируем некоторое положительное число ε. По определению бесконечно малой последовательности найдется отвечающий этому ε номер N такой, что $|\alpha_n| < \varepsilon$ для всех номеров $n \geqslant N$. Обозначим через A наибольшее из следующих N чисел: ε, $|\alpha_1|$, $|\alpha_2|$, ..., $|\alpha_{N-1}|$. Тогда очевидно, что $|\alpha_n| \leqslant A$ для всех номеров n, а это и означает ограниченность последовательности $\{\alpha_n\}$. Теорема доказана.

Следствие из теорем *3.3 и 3.4. Произведение двух (и любого конечного числа) бесконечно малых последовательностей представляет собой бесконечно малую последовательность.*

Теорема 3.5. *Если все элементы бесконечно малой последовательности $\{\alpha_n\}$ равны одному и тому же числу c, то $c=0$.*

Доказательство. Допустим, что $c \neq 0$. Обозначим через ε положительное число $\varepsilon = |c|$. По определению бесконечно малой последовательности для указанного $\varepsilon = |c|$ найдется номер N такой, что $|\alpha_n| < |c|$ при всех $n \geqslant N$. Но неравенство $|\alpha_n| < |c|$ (в силу того, что все α_n равны c) превращается в заведомо абсурдное неравенство $|c| < |c|$. Следовательно, наше допущение $c \neq 0$ не имеет места, и теорема доказана.

Теорема 3.6. *Если $\{x_n\}$ — бесконечно большая последовательность, то, начиная с некоторого номера n, определено частное*

$\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ *двух последовательностей* $\{1\}$* *и* $\{x_n\}$, *которое представляет собой бесконечно малую последовательность. Если все элементы бесконечно малой последовательности* $\{\alpha_n\}$ *отличны от нуля, то частное* $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ *двух последовательностей* $\{1\}$ *и* $\{\alpha_n\}$ *представляет собой бесконечно большую последовательность.*

Доказательство. Докажем сначала первую часть теоремы. Заметим, что у бесконечно большой последовательности $\{x_n\}$ лишь конечное число элементов может быть равно нулю. В самом деле, по определению бесконечно большой последовательности для числа $A=1$ найдется номер N^* такой, что $|x_n|>A=1$ для всех $n>N^*$. Значит, при $n\geqslant N^*$ все элементы x_n не обращаются в нуль, и мы можем, начиная с номера N^*, рассматривать частное $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ последовательностей $\{1\}$ и $\{x_n\}$. Докажем, что это частное является бесконечно малой последовательностью. Фиксируем произвольное положительное число ε. По определению бесконечно большой последовательности для положительного числа $\frac{1}{\varepsilon}$ найдется номер N (этот номер мы возьмем таким, чтобы он превосходил N^*) такой, что $|x_n|>\frac{1}{\varepsilon}$ при $n\geqslant N$ или, что то же самое, $\left|\frac{1}{x_n}\right|=\frac{1}{|x_n|}<\varepsilon$ при $n\geqslant N$. Это и означает, что последовательность $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ является бесконечно малой.

Для доказательства второй части теоремы предположим, что все элементы бесконечно малой последовательности $\{\alpha_n\}$ отличны от нуля. Фиксируем произвольное положительное число A. Так как $\{\alpha_n\}$ является бесконечно малой последовательностью, то для положительного числа $\frac{1}{A}$ найдется номер N такой, что $|\alpha_n|<\frac{1}{A}$ при $n\geqslant N$ или, что то же самое, $\left|\frac{1}{\alpha_n}\right|=\frac{1}{|\alpha_n|}>A$ при $n\geqslant N$. Это и означает, что последовательность $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ является бесконечно большой. Теорема доказана.

4. Сходящиеся последовательности и их свойства. Введем фундаментальное понятие сходящейся последовательности и ее предела.

Определение 1. *Последовательность* $\{x_n\}$ *называется сходящейся, если существует такое вещественное число* a, *что последовательность* $\{x_n-a\}$ *является бесконечно малой. При этом ве-*

* Символ $\{1\}$ обозначает последовательность, все элементы которой равны 1.

щественное число a называется **предел**ом *последовательности* $\{x_n\}$*.

Если последовательность $\{x_n\}$ является сходящейся и имеет своим пределом число a, то символически это записывают так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{или} \quad x_n \to a \text{ при } n\to\infty.$$

Используя определение бесконечно малой последовательности, мы приходим к другому определению сходящейся последовательности, эквивалентному определению 1.

Определение 2. *Последовательность $\{x_n\}$ называется* **сходящейся**, *если существует такое вещественное число a, что для любого положительного вещественного числа ε найдется номер N такой**, что при всех $n\geqslant N$ элементы x_n этой последовательности удовлетворяют неравенству*

$$|x_n - a| < \varepsilon. \tag{3.15}$$

При этом число a называется **предел**ом *последовательности* $\{x_n\}$.

Неравенство (3.15) можно записать в эквивалентной форме

$$-\varepsilon < x_n - a < +\varepsilon$$

или, что то же самое,

$$a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon. \tag{3.15'}$$

На геометрическом языке неравенства (3.15′) означают, что элементы x_n при $n\geqslant N$ лежат в интервале $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$, который мы договорились называть ε-окрестностью точки a.

Это позволяет сформулировать еще одно определение сходящейся последовательности, эквивалентное определениям 1 и 2.

Определение 3. *Последовательность $\{x_n\}$ называется* **сходящейся**, *если существует такое число a, что в любой ε-окрестности точки a находятся все элементы последовательности $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера (зависящего, конечно, от ε).*

Установим специальное представление для элементов любой сходящейся последовательности $\{x_n\}$. В силу определения 1 разность $x_n - a = \alpha_n$ является элементом бесконечно малой последовательности. Следовательно, элемент x_n сходящейся последовательности, имеющей своим пределом вещественное число a, может быть представлен в следующем специальном виде:

$$x_n = a + \alpha_n, \tag{3.16}$$

где α_n — элемент некоторой бесконечно малой последовательности $\{\alpha_n\}$.

---

* В соответствии с этим определением всякая бесконечно малая последовательность является сходящейся и имеет своим пределом число $a=0$.

** Так как этот номер N, вообще говоря, зависит от ε, то иногда пишут: $N=N(\varepsilon)$.

Замечание 1. *Из определения сходящейся последовательности и ее предела сразу же вытекает, что удаление любого конечного числа элементов последовательности не влияет на сходимость этой последовательности и величину ее предела.*

Замечание 2. *Последовательности, не являющиеся сходящимися, принято называть расходящимися.*

Замечание 3. Иногда формально договариваются трактовать бесконечно большие последовательности как последовательности, сходящиеся к пределу ∞. Такая формализация позволяет использовать для бесконечно большой последовательности $\{x_n\}$ следующую символику

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

Если при этом элементы бесконечно большой последовательности, начиная с некоторого номера, имеют положительный [отрицательный] знак, то используют следующую символику*:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \left[\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty\right].$$

В качестве примера *докажем, что последовательность* $\{x_n\}$ *с элементами*

$$x_n = \underbrace{0{,}33\ldots3}_{n \text{ раз}}$$

сходится к пределу $a = 1/3$. Фиксируем произвольное положительное число ε и докажем возможность выбора по этому ε такого номера N, что $\left|x_n - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$. Так как число 1/3 представимо бесконечной десятичной дробью 0,333..., то из правила упорядочения вещественных чисел вытекают следующие неравенства:

$$\underbrace{0{,}33\ldots3}_{n \text{ раз}} \leqslant \frac{1}{3} \leqslant \underbrace{0{,}33\ldots3}_{n \text{ раз}} + \frac{1}{10^n},$$

справедливые для любого номера n.

Из последних неравенств мы получим для числа $x_n = \underbrace{0{,}33\ldots3}_{n \text{ раз}}$ следующее соотношение:

$$\left|x_n - \frac{1}{3}\right| \leqslant \frac{1}{10^n}.$$

Так как $\frac{1}{10^n} \leqslant \frac{1}{10^N}$ для всех $n \geqslant N$, то для нахождения по данному $\varepsilon > 0$ номера N такого, что $\left|x_n - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$, достаточно выбрать этот номер N из условия $\frac{1}{10^N} < \varepsilon$.

---

* Иными словами, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty[=-\infty]$, если для любого $A > 0$ найдется отвечающий этому A номер N такой, что $x_n > A[x_n < -A]$ для всех $x \geqslant N$.

Напомним, что в п. 2 мы установили возможность выбора номера N из условия $|q|^N<\varepsilon$ для любого $|q|<1$. Там доказано, что такой номер N можно взять равным

$$N=\left[\frac{|q|}{\varepsilon(1-|q|)}\right]+1.$$

В нашем случае $|q|=0,1$, так что

$$N=\left[\frac{1}{9\varepsilon}\right]+1.$$

Перейдем к установлению свойств произвольных сходящихся последовательностей.

Теорема 3.7. *Сходящаяся последовательность имеет только один предел.*

Доказательство. Предположим, что два вещественных числа a и b являются пределами сходящейся последовательности $\{x_n\}$. Тогда в силу специального представления элементов сходящейся последовательности (3.16) мы получим, что $x_n=a+\alpha_n$ и $x_n=b+\beta_n$, где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — некоторые бесконечно малые последовательности. Из последних двух равенств получим, что $\alpha_n-\beta_n=b-a$. В силу теоремы 3.2 последовательность $\{\alpha_n-\beta_n\}$ является бесконечно малой, а в силу равенства $\alpha_n-\beta_n=b-a$ все элементы этой бесконечно малой последовательности равны одному и тому же вещественному числу $b-a$. На основании теоремы 3.5 это число $b-a$ равно нулю, т. е. $b=a$. Теорема доказана.

Теорема 3.8. *Всякая сходящаяся последовательность является ограниченной.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — сходящаяся последовательность и a — ее предел. Фиксируем некоторое положительное число ε и по нему номер N такой, что $|x_n-a|<\varepsilon$ при $n\geqslant N$ или, что то же самое, $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$ при $n\geqslant N$. Обозначим через A наибольшее из следующих $(N+1)$ чисел: $|a-\varepsilon|$, $|a+\varepsilon|$, $|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N-1}|$. Тогда, очевидно, $|x_n|\leqslant A$ для всех номеров n, а это и доказывает ограниченность последовательности $\{x_n\}$. Теорема доказана.

Замечание 4. *Не всякая ограниченная последовательность является сходящейся.* Так, например, последовательность 0, 1, 0, 1, ..., 0, 1, ... является ограниченной, но не является сходящейся. В самом деле, обозначим n-й член этой последовательности символом x_n и предположим, что эта последовательность сходится к некоторому пределу a. Но тогда каждая из последовательностей $\{x_{n+1}-a\}$ и $\{x_n-a\}$ являлась бы бесконечно малой. Стало быть, являлась бы бесконечно малой и разность этих последовательностей $\{x_{n+1}-x_n\}$, а этого быть не может в силу того, что $|x_{n+1}-x_n|=1$ для всех номеров n.

Следующие четыре теоремы показывают, что четыре арифметические операции над элементами сходящихся последовательностей приводят к аналогичным операциям над их пределами.

Теорема 3.9. *Сумма сходящихся последовательностей* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$ *представляет собой сходящуюся последовательность, предел которой равен сумме пределов последовательностей* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$.

Доказательство. Предположим, что последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся к пределам a и b соответственно. Тогда в силу специального представления элементов сходящейся последовательности (3.16) будут справедливы соотношения

$$x_n = a + \alpha_n, \qquad y_n = b + \beta_n, \tag{3.17}$$

в которых α_n и β_n представляют собой элементы некоторых бесконечно малых последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$. Из соотношений (3.17) вытекает, что

$$(x_n + y_n) - (a + b) = \alpha_n + \beta_n. \tag{3.18}$$

Так как сумма $\{\alpha_n + \beta_n\}$ двух бесконечно малых последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ представляет собой бесконечно малую последовательность (теорема 3.1), то из соотношения (3.18) вытекает в силу определения 1, что последовательность $\{x_n + y_n\}$ сходится и вещественное число $a+b$ является ее пределом. Теорема доказана.

Теорема 3.10. *Разность сходящихся последовательностей* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$ *представляет собой сходящуюся последовательность, предел которой равен разности пределов последовательностей* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3.9, только вместо соотношения (3.18) мы получим соотношение

$$(x_n - y_n) - (a - b) = \alpha_n - \beta_n.$$

Теорема 3.11. *Произведение сходящихся последовательностей* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$ *представляет собой сходящуюся последовательность, предел которой равен произведению пределов последовательностей* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$.

Доказательство. Предположим, что последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся к пределам a и b соответственно. Тогда для элементов этих последовательностей справедливы специальные представления (3.17), перемножая которые, мы получим

$$x_n \cdot y_n = a \cdot b + a \cdot \beta_n + b \cdot a_n + \alpha_n \cdot \beta_n$$

или, что то же самое,

$$x_n y_n - a \cdot b = a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \cdot \beta_n. \tag{3.19}$$

Для доказательства теоремы в силу определения 1 остается убедиться в том, что в правой части (3.19) стоит элемент бесконечно малой последовательности, но это сразу же вытекает из теоремы

3.3 (согласно этой теореме последовательности $\{a\cdot\beta_n\}$ и $\{b\cdot\alpha_n\}$ являются бесконечно малыми), из следствия из теорем 3.3 и 3.4 (согласно этому следствию последовательность $\{\alpha_n\cdot\beta_n\}$ является бесконечно малой) и из теоремы 3.1 (согласно этой теореме сумма трех бесконечно малых последовательностей $\{a\cdot\beta_n\}$, $\{b\cdot\alpha_n\}$ и $\{\alpha_n\cdot\beta_n\}$ является бесконечно малой последовательностью). Теорема доказана.

Теореме о частном двух сходящихся последовательностей предпошлем следующую лемму.

Лемма 1. *Если последовательность $\{y_n\}$ сходится к отличному от нуля пределу b, то, начиная с некоторого номера, определено частное $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ последовательностей $\{1\}$ и $\{y_n\}$, которое представляет собой ограниченную последовательность.*

Доказательство. Учитывая, что $b\neq 0$, обозначим через ε положительное число $\varepsilon=\frac{|b|}{2}$. Для этого ε найдется номер N такой, что при $n\geqslant N$ справедливо неравенство $|y_n-b|<\varepsilon$ или, что то же самое,

$$|y_n-b|<\frac{|b|}{2}. \tag{3.20}$$

Итак, для всех номеров n, начиная с номера N, выполняется неравенство (3.20). Убедимся в том, что из неравенства (3.20) вытекает следующее неравенство:

$$|y_n|>\frac{|b|}{2}, \tag{3.21}$$

которое тем самым оказывается справедливым также для всех номеров n, начиная с номера N. В самом деле, так как модуль суммы двух чисел не превосходит суммы модулей этих чисел, то, исходя из тождества $b\equiv(b-y_n)+y_n$ и используя неравенство (3.20), мы получим

$$|b|\leqslant|b-y_n|+|y_n|<\frac{|b|}{2}+|y_n|.$$

Из последнего неравенства сразу же вытекает неравенство (3.21), справедливость которого, начиная с номера N, установлена.

Неравенство (3.21) позволяет утверждать, что при $n\geqslant N$ элементы y_n не обращаются в нуль и, начиная с номера N, можно рассматривать частное $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$.

Из (3.21), в свою очередь, вытекает, что для всех $n\geqslant N$ справедливо неравенство

$$\left|\frac{1}{y_n}\right|<\frac{2}{|b|}.$$

Это последнее неравенство и доказывает, что последовательность $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$, если ее рассматривать, начиная с номера N, является ограниченной. Лемма доказана.

Теорема 3.12. *Частное двух сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, предел второй из которых отличен от нуля, определено, начиная с некоторого номера, и представляет собой сходящуюся последовательность, предел которой равен частному пределов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.*

Доказательство. Предположим, что последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся к пределам a и $b\neq 0$ соответственно. В силу леммы 1 найдется номер N такой, что при $n\geqslant N$ элементы y_n не обращаются в нуль, определена последовательность $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ и эта последовательность является ограниченной. Начиная с указанного номера N, мы и будем рассматривать частное $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$. В силу определения 1 достаточно доказать, что последовательность $\left\{\frac{x_n}{y_n}-\frac{a}{b}\right\}$ является бесконечно малой. Будем исходить из тождества

$$\frac{x_n}{y_n}-\frac{a}{b}=\frac{x_n\cdot b-y_n\cdot a}{y_n\cdot b}. \tag{3.22}$$

Так как для элементов x_n и y_n справедливы специальные представления (3.17), то

$$x_n\cdot b-y_n\cdot a=(a+\alpha_n)\cdot b-(b+\beta_n)\cdot a=\alpha_n b-\beta_n\cdot a. \tag{3.23}$$

Подставляя (3.23) в (3.22), получим

$$\frac{x_n}{y_n}-\frac{a}{b}=\frac{1}{y_n}\left(\alpha_n-\frac{a}{b}\beta_n\right). \tag{3.24}$$

Остается доказать, что в правой части (3.24) стоит элемент бесконечно малой последовательности, но это сразу вытекает из теоремы 3.3 и из того, что последовательность $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ (в силу леммы 1) является ограниченной, а последовательность $\left\{\alpha_n-\frac{a}{b}\beta_n\right\}$ (как разность двух бесконечно малых) является бесконечно малой последовательностью. Теорема доказана.

Убедимся теперь в том, что неравенства, которым удовлетворяют элементы сходящихся последовательностей, приводят к аналогичным неравенствам для пределов этих последовательностей.

Теорема 3.13. *Если все элементы сходящейся последовательности $\{x_n\}$, по крайней мере начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенству $x_n\geqslant b\,[x_n\leqslant b]$, то и предел x этой последовательности удовлетворяет неравенству $x\geqslant b\,[x\leqslant b]$.*

Доказательство. Предположим, что все элементы x_n, по крайней мере начиная с некоторого номера N^*, удовлетворяют неравенству $x_n \geqslant b$. Докажем, что и предел x этой последовательности удовлетворяет неравенству $x \geqslant b$. Допустим, что это не так, т. е. справедливо неравенство $x < b$.

Тогда по определению сходящейся последовательности для положительного числа $\varepsilon = b - x$ найдется такой номер N (этот номер мы возьмем еще и таким, чтобы он превосходил N^*), что при $n \geqslant N$ будет справедливо неравенство $|x_n - x| < \varepsilon$ или $|x_n - x| < b - x$. Последнее неравенство эквивалентно неравенствам — $(b - x) < x_n - x < b - x$, правое из которых означает, что $x_n < b$ при всех $n \geqslant N$, а это противоречит условию теоремы. Полученное противоречие означает, что наше предположение о том, что $x < b$, неверно, т. е. $x \geqslant b$.

Случай $x_n \leqslant b$ рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Замечание 5. *Если все элементы сходящейся последовательности $\{x_n\}$ удовлетворяют строгому неравенству $x_n > b$, то отсюда, вообще говоря, не вытекает, что и предел x этой последовательности удовлетворяет строгому неравенству $x > b$.* (Можно лишь утверждать, что $x \geqslant b$.)

Например, если $x_n = \frac{1}{n}$, то для всех номеров $x_n > 0$, однако предел $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = x = 0$ не удовлетворяет неравенству $x > 0$.

Следствие 1. *Если все элементы двух сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, по крайней мере начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенствам $x_n \leqslant y_n$, то и пределы этих последовательностей удовлетворяют такому же неравенству*

$$\lim_{n \to \infty} x_n \leqslant \lim_{n \to \infty} y_n. \tag{3.25}$$

В самом деле, начиная с указанного номера, все элементы последовательности $\{y_n - x_n\}$ неотрицательны. В силу теоремы 3.13 и предел указанной последовательности $\lim\limits_{n \to \infty} (y_n - x_n)$ неотрицателен. В силу теоремы 3.10 $\lim\limits_{n \to \infty} (y_n - x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} y_n - \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ и мы получим, что $\lim\limits_{n \to \infty} y_n - \lim\limits_{n \to \infty} x_n \geqslant 0$. Из последнего неравенства вытекает (3.25).

Следствие 2. *Если все элементы сходящейся последовательности $\{x_n\}$ находятся на сегменте $[a, b]$, то и предел x этой последовательности лежит на сегменте $[a, b]$.*

В самом деле, так как $a \leqslant x_n \leqslant b$ для всех номеров n, то (в силу теоремы 3.13) $a \leqslant x \leqslant b$.

Последнюю теорему, к доказательству которой мы сейчас переходим, можно назвать принципом двустороннего ограничения.

Теорема 3.14. *Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — две сходящиеся последовательности, имеющие общий предел a. Пусть, кроме того, все элементы третьей последовательности $\{z_n\}$, по крайней мере начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенствам*

$$x_n \leqslant z_n \leqslant y_n. \tag{3.26}$$

Тогда последовательность $\{z_n\}$ сходится к тому же самому пределу a.

Доказательство. Предположим, что неравенства (3.26) справедливы, начиная с номера N^*. Тогда, начиная с того же самого номера N^*, справедливы и неравенства

$$x_n - a \leqslant z_n - a \leqslant y_n - a. \tag{3.27}$$

Из неравенств (3.27) вытекает, что для каждого номера n, превосходящего N^*,

$$|z_n - a| \leqslant \max\{|x_n - a|, \quad |y_n - a|\}. \tag{3.28}$$

(Эта запись означает, что $|z_n - a|$ не превосходит наибольшего из двух чисел $|x_n - a|$ и $|y_n - a|$.)

Фиксируем произвольное положительное число ε. Тогда в силу сходимости последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ к пределу a найдутся номера N_1 и N_2 такие, что

$$\begin{cases} |x_n - a| < \varepsilon & \text{при } n \geqslant N_1, \\ |y_n - a| < \varepsilon & \text{при } n \geqslant N_2. \end{cases} \tag{3.29}$$

Если мы теперь обозначим через N наибольший из трех номеров N^*, N_1 и N_2, то при $n \geqslant N$ будут справедливы оба неравенства в (3.29) и мы получим в силу (3.28), что при $n \geqslant N$ справедливо неравенство

$$|z_n - a| < \varepsilon.$$

Это и доказывает сходимость последовательности $\{z_n\}$ к пределу a. Теорема доказана.

§ 2. МОНОТОННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

1. Понятие монотонной последовательности.

Определение 1. *Последовательность $\{x_n\}$ называется неубывающей [невозрастающей], если каждый элемент этой последовательности, начиная со второго, не меньше [не больше] предыдущего ее элемента, т. е. если для всех номеров n $(n = 1, 2, \ldots)$ справедливо неравенство*

$$x_n \leqslant x_{n+1} \qquad [x_n \geqslant x_{n+1}]. \tag{3.30}$$

Определение 2. *Последовательность $\{x_n\}$ называется монотонной, если она является либо неубывающей, либо невозрастающей.*

Если элементы неубывающей последовательности для всех номеров n удовлетворяют строгому неравенству $x_n < x_{n+1}$, то эту последовательность называют возрастающей.

Аналогично, если элементы невозрастающей последовательности для всех номеров n удовлетворяют строгому неравенству $x_n > x_{n+1}$, то эту последовательность называют убывающей.

Заметим, что всякая монотонная последовательность заведомо ограничена с одной стороны (либо сверху, либо снизу). В самом деле, всякая неубывающая последовательность ограничена снизу (в качестве нижней грани можно взять величину ее первого элемента), а всякая невозрастающая последовательность ограничена сверху (в качестве верхней грани также можно взять величину ее первого элемента).

Отсюда следует, что неубывающая последовательность будет ограниченной с обеих сторон, или просто ограниченной, тогда и только тогда, когда она ограничена сверху, а невозрастающая последовательность будет ограниченной тогда и только тогда, когда она ограничена снизу.

Рассмотрим примеры монотонных последовательностей.

1. Последовательность 1, 1, 2, 2, ... является неубывающей. Она ограничена снизу величиной своего первого элемента, а сверху не ограничена.

2. Последовательность $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \ldots, \frac{n+1}{n}, \ldots$ является убывающей. Она ограничена с обеих сторон: сверху величиной своего первого элемента 2, а снизу, например, числом 1.

2. Теорема о сходимости монотонной ограниченной последовательности. Справедливо следующее фундаментальное утверждение.

Основная теорема 3.15. *Если неубывающая (невозрастающая) последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху (снизу), то она сходится.*

Доказательство. Рассмотрим случай неубывающей и ограниченной сверху последовательности $\{x_n\}$. Множество всех элементов такой последовательности ограничено сверху, а потому по основной теореме 2.1 гл. 2 у этого множества существует точная верхняя грань, которую мы обозначим символом $\bar{x}$. Докажем, что это число $\bar{x}$ и является пределом последовательности $\{x_n\}$. Во-первых, заметим, что по определению верхней грани любой элемент x_n последовательности $\{x_n\}$ удовлетворяет неравенству

$$x_n \leqslant \bar{x}. \tag{3.31}$$

Далее фиксируем произвольное положительное число ε и заметим, что по определению точной верхней грани найдется хотя бы один элемент последовательности x_N, удовлетворяющий неравенству

$$\bar{x} - \varepsilon < x_N. \tag{3.32}$$

Учтем теперь, что последовательность $\{x_n\}$ является неубывающей и вследствие этого $x_N \leqslant x_n$ для всех номеров n, удовлетворяющих неравенству $n \geqslant N$. Сопоставляя неравенство $x_N \leqslant x_n$ с неравенством (3.32), мы получим, что для всех $n \geqslant N$

$$\bar{x} - \varepsilon < x_n. \tag{3.33}$$

Объединяя неравенства (3.31) и (3.33), мы получим, что для всех $n \geqslant N$ справедливы неравенства $\bar{x} - \varepsilon < x_n \leqslant \bar{x}$.

Следовательно, для всех $n \geqslant N$ справедливо неравенство $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$, которое и доказывает, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к пределу $\bar{x} = \sup\{x_n\}$.

Если последовательность $\{x_n\}$ является невозрастающей и ограничена снизу, то совершенно аналогично доказывается, что она сходится к пределу $x = \inf\{x_n\}$. Теорема доказана.

Замечание 1. Теорему 3.15 можно сформулировать в другом виде. Во-первых, заметим, что в силу сказанного в п. 1 последовательность $\{x_n\}$, удовлетворяющая условию теоремы 3.15, является ограниченной с обеих сторон, или просто ограниченной. Поэтому теорему 3.15 можно переформулировать так: *для того чтобы монотонная последовательность $\{x_n\}$ сходилась, достаточно, чтобы она была ограничена.*

Легко убедиться в том, что эта формулировка может быть заменена более «сильной»: *для того чтобы монотонная последовательность $\{x_n\}$ сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена* (необходимость вытекает из теоремы 3.8).

Замечание 2. Конечно, не всякая сходящаяся последовательность является монотонной. Например, заведомо сходящаяся к нулю последовательность $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \ldots$ не является монотонной, так как знаки ее элементов чередуются.

Замечание 3. Из приведенного выше доказательства теоремы 3.15 вытекает, что *все элементы неубывающей, ограниченной сверху последовательности $\{x_n\}$ не больше ее предела $\bar{x}$ ($x_n \leqslant \bar{x}$).* Аналогично легко убедиться в том, что *все элементы невозрастающей, ограниченной снизу последовательности не меньше ее предела $\underline{x}$.*

Извлечем важное следствие из теоремы 3.15.

Договоримся называть бесконечную последовательность сегментов $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$ стягивающейся системой сегментов, если выполнены два требования: 1) каждый следующий сегмент содержится в предыдущем, т. е. $a_n \leqslant a_{n+1}$, $b_{n+1} \leqslant b_n$ для любого $n = 1, 2, \ldots$; 2) длина n-го сегмента $[a_n, b_n]$, т. е. разность $b_n - a_n$, стремится к нулю при $n \to \infty$.

Следствие из теоремы 3.15. *У всякой стягивающейся системы сегментов $\{[a_n, b_n]\}$ существует и притом единственная точка c, принадлежащая всем сегментам этой системы.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что точка c, принадлежащая всем сегментам, может быть только одна. В самом деле, если бы нашлась еще одна точка d, отличная от c и принадлежащая всем сегментам, то, предположив ради определенности, что $d>c$, мы получили бы, что сегмент $[c, d]$ принадлежит всем сегментам $[a_n, b_n]$. Но тогда для любого номера n выполнялись бы неравенства $b_n-a_n \geqslant d-c>0$, что невозможно в силу того, что $b_n-a_n \to 0$ при $n\to\infty$.

Докажем теперь, что существует точка c, принадлежащая всем сегментам. Так как система сегментов является стягивающейся, то последовательность левых концов $\{a_n\}$ не убывает, а последовательность правых концов $\{b_n\}$ не возрастает. Поскольку обе эти последовательности ограничены (все их элементы находятся на сегменте $[a_1, b_1]$), то обе они сходятся (в силу теоремы 3.15). Из того, что разность b_n-a_n является бесконечно малой, вытекает, что эти две последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся к общему пределу, который мы обозначим через c. В силу замечания 3 для любого номера n справедливы неравенства $a_n \leqslant c \leqslant b_n$, т. е. c принадлежит всем сегментам $[a_n, b_n]$. Следствие доказано.

3. Число e. Применим теорему 3.15 для доказательства сходимости последовательности $\{x_n\}$, элемент x_n которой определяется равенством

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

В силу теоремы 3.15 достаточно доказать, что эта последовательность 1) является возрастающей; 2) ограничена сверху.

Применяя формулу бинома Ньютона, получим для x_n следующее выражение:

$$x_n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}.$$

Это выражение перепишем в следующем виде:

$$x_n = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \qquad (3.34)$$

Для следующего элемента последовательности $\{x_n\}$ в полной аналогии с (3.34) получится следующее выражение:

$$x_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right). \quad (3.35)$$

Для того чтобы убедиться в том, что последовательность $\{x_n\}$ является возрастающей, сравним между собой выражения (3.34) и (3.35). Во-первых, заметим, что правая часть (3.34) состоит из n слагаемых, а правая часть (3.35) — из $n+1$ слагаемых, причем последнее $(n+1)$-е слагаемое в правой части (3.35) является строго положительным.

Сопоставим теперь между собой любое из остальных n слагаемых в правой части (3.35) с соответствующим слагаемым в правой части (3.34). Легко видеть, что для любого номера k, равного 2, 3, ..., n, справедливо неравенство

$$\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)<$$

$$<\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right).$$

Это последнее неравенство означает, что k-е слагаемое в правой части (3.34) меньше соответствующего k-го слагаемого в правой части (3.35).

Итак, мы доказали, что $x_n<x_{n+1}$, т. е. последовательность $\{x_n\}$ является возрастающей.

Докажем теперь, что эта последовательность ограничена сверху. Заметим, что если каждую круглую скобку в правой части (3.34) заменить единицей, то указанная правая часть возрастет. Поэтому

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}. \quad (3.36)$$

Заметим далее, что для любого номера $k\geqslant 2$ справедливо неравенство $k!=2\cdot 3\ldots k\geqslant 2^{k-1}$.

Поэтому неравенство (3.36) дает право утверждать, что

$$x_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3. \quad (3.37)$$

(Мы воспользовались формулой для суммы членов геометрической прогрессии.) Неравенство (3.37) доказывает ограниченность последовательности $\{x_n\}$.

По основной теореме 3.15 последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, который, следуя Л. Эйлеру *, мы обозначим через e.

* Леонард Эйлер (1707—1783) — великий математик, член Петербургской Академии наук, бо́льшую часть жизни провел в России, по происхождению швейцарец.

Убедимся в том, что число e удовлетворяет неравенствам $2 \leqslant e \leqslant 3$. Для этого (в силу следствия 2 из теоремы 3.13) достаточно доказать, что каждый элемент x_n последовательности $\{x_n\}$ удовлетворяет неравенствам $2 \leqslant e \leqslant 3$.

Неравенство $x_n \leqslant 3$ вытекает из (3.37), а неравенство $2 \leqslant x_n$ вытекает из (3.34), если отбросить в (3.34) все члены, кроме первого.

В дальнейшем выяснится, что число e играет важную роль в математике, и будет указан способ вычисления этого числа с любой степенью точности.

4. Примеры сходящихся монотонных последовательностей. Начнем с рассмотрения последовательности, которая широко используется в современной вычислительной математике для приближенного нахождения корня квадратного из положительного вещественного числа a. Эта последовательность определяется следующей рекуррентной формулой *:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{3.38}$$

где в качестве первого приближения x_1 берется любое положительное число.

Прежде всего докажем, что такая последовательность $\{x_n\}$ сходится, для чего в силу теоремы 3.15 достаточно доказать, что она ограничена снизу и, начиная со второго номера, является невозрастающей.

Начнем с доказательства ограниченности снизу. По условию $x_1 > 0$. Но тогда из рекуррентной формулы (3.38), взятой при $n=1$, вытекает, что $x_2 > 0$, далее из той же формулы (3.38), взятой при $n=2$, вытекает, что $x_3 > 0, \ldots$. Продолжая эти рассуждения далее, мы последовательно докажем, что все $x_n > 0$. Итак, рассматриваемая последовательность ограничена снизу.

Докажем теперь, что при $n \geqslant 2$ все элементы x_n удовлетворяют неравенству $x_n \geqslant \sqrt{a}$. Переписав формулу (3.38) в виде

$$x_{n+1} = \frac{\sqrt{a}}{2}\left(\frac{x_n}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{x_n}\right), \tag{3.39}$$

воспользуемся тривиальным неравенством $t + \frac{1}{t} \geqslant 2$, справедливым для всех $t > 0$ **.

---

* Рекуррентная формула (от латинского recurrens — возвращающийся) — формула, выражающая $(n+1)$-й элемент последовательности через значения ее первых n элементов.

** Это неравенство для всех $t > 0$ эквивалентно неравенству $t^2 + 1 \geqslant 2t$, вытекающему из того, что $(t-1)^2 \geqslant 0$.

Взяв в этом неравенстве $t = \frac{x_n}{\sqrt{a}} > 0$, мы получим, что $\frac{x_n}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{x_n} \geqslant 2$, и поэтому соотношение (3.39) дает $x_{n+1} \geqslant \sqrt{a}$ при $n=1, 2, \ldots$. Это и означает, что $x_n \geqslant \sqrt{a}$ при $n=2, 3, \ldots$.

Докажем, наконец, что последовательность $\{x_n\}$, если ее рассматривать с номера $n=2$, является невозрастающей. Из рекуррентной формулы (3.38) вытекает, что

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{x_n^2}\right).$$

Из последнего соотношения, учитывая, что $x_n \geqslant \sqrt{a}$ при $n \geqslant 2$, получим, что $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant 1$ при $n > 2$ или $x_{n+1} \leqslant x_n$ при $n \geqslant 2$. Итак, при $n \geqslant 2$ последовательность $\{x_n\}$ является невозрастающей.

По теореме 3.15 последовательность $\{x_n\}$ сходится к некоторому пределу x. Остается найти этот предел. Учитывая, что $x_n \geqslant \sqrt{a}$ при $n \geqslant 2$, мы получим (в силу теоремы 3.13), что $x \geqslant \sqrt{a} > 0$.

Принимая во внимание, что $x > 0$, перейдем к пределу при $n \to \infty$ в рекуррентном соотношении (3.38). Мы получим в пределе при $n \to \infty$ из (3.38) следующее равенство:

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right).$$

Это равенство представляет собой уравнение для определения предела x. Единственный положительный корень этого уравнения есть $x = \sqrt{a}$.

Итак, мы окончательно доказали, что последовательность $\{x_n\}$, определяемая рекуррентной формулой (3.38) при любом выборе $x_1 > 0$, сходится к пределу $\sqrt{a}$.

В качестве другого применения теоремы 3.15 рассмотрим вопрос о вычислении предела последовательности $\{x_n\}$, элементы которой имеют вид

$$x_n = \frac{t^n}{n!}, \tag{3.40}$$

где t — любое фиксированное вещественное число. Для любого фиксированного t найдется номер N такой, что $|t| < n+1$ при всех $n \geqslant N$. Но тогда, поскольку $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{t}{n+1}$, мы получим, что $|x_{n+1}| < |x_n|$ при всех $n \geqslant N$, т. е., начиная с номера N, последовательность $\{|x_n|\}$ является убывающей. Так как, кроме того, эта последовательность ограничена снизу (например, числом нуль), то

по теореме 3.15 она сходится к некоторому пределу x. Для нахождения x запишем соотношение (3.40) для номера $n+1$:

$$x_{n+1}=\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{t^n}{n!}\cdot\frac{t}{n+1}=x_n\cdot\frac{t}{n+1}.$$

Таким образом, $|x_{n+1}|=|x_n|\frac{|t|}{n+1}$, и, перейдя в последнем равенстве к пределу при $n\to\infty$, мы получим соотношение

$$|x|=|x|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{|t|}{n+1}=0.$$

Итак, последовательность $|x_n|$, а вместе с ней и последовательность (3.40), сходится к пределу $x=0$.

В обоих рассмотренных примерах мы применили часто употребляемый прием: сначала с помощью теоремы 3.15 доказали существование предела последовательности, а затем нашли этот предел, устремив номер n к бесконечности в рекуррентном соотношении, выражающем $(n+1)$-й элемент последовательности через ее n-й элемент.

В качестве третьего примера изучим вопрос о сходимости последовательности $\{x_n\}$, элемент x_n которой имеет вид

$$x_n=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}}} \tag{3.41}$$

при условии, что $a>0$ и общее число извлекаемых корней равно n.

Указанную последовательность $\{x_n\}$ можно задать рекуррентным соотношением

$$x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}\quad(n=1,2,\ldots) \tag{3.42}$$

при условии, что

$$x_1=\sqrt{a}. \tag{3.43}$$

Для доказательства сходимости рассматриваемой последовательности достаточно (в силу теоремы 3.15) доказать, что она возрастает и ограничена.

Сначала докажем возрастание последовательности (3.41), т. е. докажем, что для любого номера

$$x_n<x_{n+1}. \tag{3.44}$$

Доказательство этого неравенства проведем по индукции. Достаточно доказать два утверждения: 1) неравенство (3.44) справедливо для номера $n=1$, т. е. справедливо неравенство

$$x_1\leqslant x_2; \tag{3.45}$$

2) из справедливости неравенства (3.44) для данного номера n

вытекает справедливость этого неравенства и для номера $n+1$, т. е. вытекает справедливость неравенства

$$x_{n+1} < x_{n+2}. \tag{3.46}$$

Справедливость неравенства (3.45) сразу вытекает из равенства (3.43) и из соотношения $x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}} > \sqrt{a}$.

Докажем, что из справедливости неравенства (3.44) вытекает справедливость неравенства (3.46). Из неравенства (3.44) и рекуррентной формулы (3.42) вытекает, что

$$x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} < \sqrt{a + x_{n+1}}. \tag{3.47}$$

С другой стороны, записывая рекуррентное соотношение (3.42) для номера $n+1$, мы получим равенство

$$x_{n+2} = \sqrt{a + x_{n+1}}. \tag{3.48}$$

Из сопоставления равенства (3.48) с неравенством (3.47) и вытекает неравенство (3.46). Тем самым индукция завершена и возрастание последовательности (3.41) доказано.

Докажем теперь, что эта последовательность ограничена сверху. Снова пользуясь методом математической индукции, мы докажем, что для всех номеров n

$$x_n \leqslant M, \tag{3.49}$$

где M — наибольшее из двух чисел a и 2.

Сначала проверим, что неравенство (3.49) справедливо для номера $n=1$. Пользуясь равенством (3.43) и рассматривая отдельно случаи $0<a\leqslant 2$ и $a>2$, мы получим

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{a} \leqslant \sqrt{2} < 2 \quad \text{при } 0 < a \leqslant 2, \\ x_1 &= \sqrt{a} < a \qquad\qquad \text{при } a > 2. \end{aligned} \tag{3.50}$$

Из (3.50) вытекает, что $x_1 \leqslant M$, где $M = \max\{a, 2\}$.

Пусть теперь неравенство (3.49) справедливо для данного номера n. Пользуясь рекуррентным соотношением (3.42) и рассматривая отдельно случаи $0<a\leqslant 2$ и $a>2$, мы получим, что

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \sqrt{a + x_n} \leqslant \sqrt{2 + 2} = 2 \quad \text{при } 0 < a \leqslant 2, \\ x_{n+1} &= \sqrt{a + x_n} \leqslant \sqrt{a + a} = \sqrt{2a} < a \text{ при } a > 2. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Из (3.51) вытекает справедливость неравенства $x_{n+1} \leqslant M$, где $M = \max\{a, 2\}$.

Таким образом, индукция завершена, и ограниченность последовательности (3.41) доказана.

По теореме 3.15 последовательность (3.41) сходится к некоторому пределу x.

Остается найти этот предел.

Из соотношения (3.41) очевидно, что все элементы рассматриваемой последовательности неотрицательны. Следовательно, в силу теоремы 3.13 и искомый предел x этой последовательности неотрицателен.

Возводя в квадрат рекуррентное соотношение (3.42), мы получим равенство

$$x^2_{n+1}=a+x_n. \tag{3.52}$$

Так как последовательность $\{x_n\}$ сходится к пределу x, то, переходя в равенстве (3.52) к пределу при $n\to\infty$ и пользуясь теоремой о пределе суммы и произведения двух сходящихся последовательностей, мы получим следующее соотношение для определения искомого предела x:

$$x^2=a+x$$

или, что то же самое,

$$x^2-x-a=0. \tag{3.53}$$

Соотношение (3.53) представляет собой квадратное уравнение для определения искомого предела x. Это уравнение имеет два корня:

$$x=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}>0 \text{ и } x=\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}<0.$$

Так как искомый предел, как уже указано выше, является неотрицательным числом, то мы окончательно получим, что он совпадает с положительным корнем уравнения (3.53), т. е. равен

$$x=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}.$$

§ 3. ПРОИЗВОЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

1. Предельные точки, верхний и нижний пределы последовательности. Рассмотрим некоторую последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ и произвольную возрастающую последовательность целых положительных чисел $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$. Выберем из последовательности $\{x_n\}$ элементы с номерами $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ и расположим их в порядке возрастания указанных номеров. Мы получим при этом новую последовательность

$$x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}, \ldots,$$

которую принято называть подпоследовательностью исходной последовательности $\{x_n\}$.

В частности, и сама последовательность $\{x_n\}$ может рассматриваться как подпоследовательность с номерами $k_n=n$.

Заметим сразу же, что всегда $k_n \geqslant n$, ибо любая подпоследовательность, не совпадающая со всей последовательностью, получается путем некоторого прореживания элементов последовательности.

Справедливы два тривиальных утверждения:

1°. *Если последовательность $\{x_n\}$ сходится к пределу a, то и любая ее подпоследовательность сходится к тому же самому пределу a.*

2°. *Если все подпоследовательности некоторой последовательности $\{x_n\}$ сходятся, то все они сходятся к одному и тому же пределу a (к этому же пределу a сходится и вся последовательность).*

Докажем сначала утверждение 1°.

Фиксируем произвольное положительное число ε и, пользуясь сходимостью последовательности $\{x_n\}$ к пределу a, выберем по этому ε номер N такой, что $|x_n - a| < \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$. Пусть $\{x_{k_n}\}$ — произвольная подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$. Так как $k_N \geqslant N$, то для всех номеров $n \geqslant N$ элементы подпоследовательности $\{x_{k_n}\}$ удовлетворяют неравенству $|x_{k_n} - a| < \varepsilon$, а это и означает, что подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$ сходится к пределу a.

Для доказательства утверждения 2° достаточно учесть, что так как сама последовательность $\{x_n\}$ (как частный случай подпоследовательности) сходится к некоторому пределу a, то и любая ее подпоследовательность сходится к тому же пределу a (в силу утверждения 1°).

В полной аналогии с утверждением 1° доказывается, что *любая подпоследовательность бесконечно большой последовательности представляет собой также бесконечно большую последовательность.*

Введем фундаментальное понятие предельной точки последовательности.

Определение 1. *Точка x бесконечной прямой $(-\infty, +\infty)$ называется предельной точкой последовательности $\{x_n\}$, если в любой ε-окрестности точки x содержится бесконечно много элементов этой последовательности.*

Определение 2. *Точка x бесконечной прямой $(-\infty, +\infty)$ называется предельной точкой последовательности $\{x_n\}$, если из этой последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к пределу x.*

Убедимся в том, что определения 1 и 2 эквивалентны.

1) Пусть в любой ε-окрестности x содержится бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$. Рассмотрим совокупность ε-окрестностей точки x, для которых ε последовательно равно $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$.

В первой из этих окрестностей выберем элемент последовательности x_{k_1} с некоторым номером k_1, во второй из указанных окрестностей выберем элемент последовательности x_{k_2} с номером k_2, удовлетворяющим условию $k_2 > k_1$, в третьей из указанных окрест-

ностей выберем элемент последовательности x_{k_3} с номером k_3, удовлетворяющим условию $k_3 > k_2 \ldots$. Этот процесс можно продолжать неограниченно, так как в любой ε-окрестности точки x содержится бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$. В результате мы получим подпоследовательность $x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}, \ldots, x_{k_n}, \ldots$ последовательности $\{x_n\}$, которая сходится к пределу x, ибо $|x_{k_n} - x| < \frac{1}{n}$.

2) Предположим, что из последовательности $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к пределу x. Тогда в любой ε-окрестности точки x лежит бесконечно много элементов подпоследовательности (все, начиная с некоторого номера). Так как каждый элемент подпоследовательности является элементом и всей последовательности, то в любой ε-окрестности x лежит бесконечно много элементов последовательности.

Эквивалентность определений 1 и 2 доказана.

Выясним вопрос о наличии предельных точек у сходящейся последовательности.

Лемма 1. *Каждая сходящаяся последовательность имеет только одну предельную точку, совпадающую с пределом этой последовательности.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится к пределу x. Тогда в любой ε-окрестности x лежит бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$ (все, начиная с некоторого номера), а поэтому x является предельной точкой последовательности $\{x_n\}$.

Остается доказать, что ни одно число x', отличное от x, не является предельной точкой последовательности $\{x_n\}$, но это непосредственно вытекает из доказанного выше утверждения 1, согласно которому из сходимости всей последовательности к пределу x вытекает сходимость любой ее подпоследовательности к тому же пределу x.

Приведем пример *ограниченной последовательности* $\{x_n\}$, *имеющей две предельные точки.* Докажем, что последовательность $\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1-\frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}, \ldots$ имеет только две предельные точки $x=0$ и $x=1$. Тот факт, что эти две точки $x=0$ и $x=1$ являются предельными, вытекает из того, что подпоследовательность всех нечетных элементов рассматриваемой последовательности сходится к пределу $x=0$, а подпоследовательность всех четных элементов рассматриваемой последовательности сходится к пределу $x=1$. Остается доказать, что ни одно число x_0, отличное от 0 и 1, не является предельной точкой нашей последовательности. Так как $x_0 \neq 0$ и $x_0 \neq 1$, то заведомо можно указать столь малое положительное число ε, что ε-окрестности трех точек 0, 1 и x_0 не будут иметь общих точек (рис. 3.1).

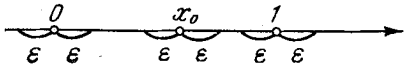

Рис. 3.1

Но все нечетные элементы нашей последовательности, начиная с некоторого номера, находятся в ε-окрестности числа 0, а все четные элементы нашей последовательности, начиная с некоторого номера, находятся в ε-окрестности числа 1. Поэтому за пределами ε-окрестностей чисел 0 и 1 (и, в частности, в ε-окрестности числа x_0) может лежать лишь конечное число элементов нашей последовательности. Это и означает, что x_0 не является предельной точкой последовательности.

Приведем теперь пример *ограниченной последовательности* $\{x_n\}$, *имеющей бесконечно много предельных точек.* Выше (в п. 3 § 7 гл. 2) мы установили, что множество всех рациональных чисел из сегмента [0, 1] можно занумеровать в последовательность $\{x_n\}$. Докажем, что любое вещественное число x из сегмента [0, 1] является предельной точкой указанной последовательности $\{x_n\}$. Заметим, что, каково бы ни было число x из сегмента [0, 1] для любого $0<\varepsilon<1/2$ хотя бы одно из двух чисел $x-\varepsilon$ и $x+\varepsilon$ также принадлежит сегменту [0, 1].

Предположим ради определенности, что число $x+\varepsilon$ принадлежит сегменту [0, 1]. Между двумя не равными друг другу вещественными числами x и $x+\varepsilon$, в силу леммы 2 § 3 гл. 2, лежит бесконечно много различных рациональных чисел. Это означает, что при любом $0<\varepsilon<1/2$ в ε-окрестности точки x лежит бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$, т. е. x является предельной точкой этой последовательности.

Естественно, возникает идея рассмотрения наибольшей и наименьшей предельных точек последовательности.

Определение 3. *Наибольшая предельная точка последовательности* $\{x_n\}$ *называется* **верхним пределом** *этой последовательности и обозначается символом*

$$\overline{x}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n.$$

Определение 4. *Наименьшая предельная точка последовательности* $\{x_n\}$ *называется* **нижним пределом** *этой последовательности и обозначается символом*

$$\underline{x}=\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n.$$

Возникает вопрос о существовании хотя бы одной предельной точки и верхнего и нижнего пределов у любой ограниченной последовательности.

Справедлива следующая замечательная теорема.

Основная теорема 3.16. *У всякой ограниченной последовательности существуют верхний и нижний пределы и, в частности, существует хотя бы одна предельная точка.*

Доказательство. Остановимся на доказательстве существования у любой ограниченной последовательности хотя бы одной предельной точки и верхнего предела. (Существование нижнего предела доказывается аналогично.)

Пусть $\{x_n\}$ — произвольная ограниченная последовательность. По условию ограниченности найдутся два вещественных числа m и M такие, что любой элемент x_n последовательности $\{x_n\}$ удовлетворяет неравенствам $m \leqslant x_n \leqslant M$.

Рассмотрим множество $\{x\}$ всех вещественных чисел x таких, что правее * каждого из этих чисел либо вовсе нет элементов последовательности $\{x_n\}$, либо таких элементов лишь конечное число.

Иными словами, вещественное число x принадлежит множеству $\{x\}$, если правее x лежит не более чем конечное число элементов последовательности $\{x_n\}$, и не принадлежит множеству $\{x\}$, если правее этого числа x лежит бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$.

Заметим, что множество $\{x\}$ заведомо не является пустым: ему принадлежит любое вещественное число x, удовлетворяющее неравенству $x \geqslant M$ (ибо правее такого x нет элементов последовательности $\{x_n\}$). Кроме того, очевидно, что множество $\{x\}$ ограничено снизу и в качестве его нижней грани может быть взято любое число, меньшее m (правее такого числа лежат все элементы последовательности $\{x_n\}$, а их бесконечно много).

По основной теореме 2.1 гл. 2 у множества $\{x\}$ существует точная нижняя грань, которую мы обозначим символом $\bar{x}$. Докажем, что это число $\bar{x} = \inf\{x\}$ и является верхним пределом последовательности $\{x_n\}$.

Достаточно доказать два утверждения:

1°. Число $\bar{x}$ является предельной точкой последовательности $\{x_n\}$ (т. е. в любой ε-окрестности $\bar{x}$ лежит бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$).

2°. Ни одно число $\bar{\bar{x}}$, большее $\bar{x}$, уже не является предельной точкой последовательности $\{x_n\}$ (это и будет означать, что $\bar{x}$ является наибольшей предельной точкой, т. е. верхним пределом $\{x_n\}$).

Для доказательства утверждения 1° фиксируем произвольное положительное число ε. По определению нижней грани любое число, меньшее $\bar{x}$ (и, в частности, число $\bar{x}-\varepsilon$), не принадлежит введенному нами множеству $\{x\}$. Значит, правее $\bar{x}-\varepsilon$ лежит бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$.

---

* Напомним, что термин «y лежит правее x» означает, что числа x и y связаны неравенством $y > x$.

Далее, из того, что число $\bar{x}$ является точной нижней гранью $\{x\}$, и из неравенства $\bar{x}<\bar{x}+\varepsilon$ вытекает, что найдется хотя бы один элемент x' множества $\{x\}$, удовлетворяющий неравенствам $\bar{x}\leqslant x'<\bar{x}+\varepsilon$, т. е. лежащий левее $\bar{x}+\varepsilon$ (рис. 3.2). В силу определения множества $\{x\}$ правее этого числа x' лежит не более чем конечное число элементов последовательности $\{x_n\}$.

На рис. 3.2 условно указано, что правее числа $\bar{x}-\varepsilon$ лежит бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$, а правее числа x' лежит не более чем конечное число элементов этой последовательности.

Рис. 3.2

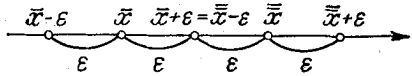

Рис. 3.3

Так как правее $\bar{x}-\varepsilon$ лежит бесконечно много, а правее x' — лишь конечное число элементов последовательности $\{x_n\}$, то мы приходим к выводу, что на полусегменте $(\bar{x}-\varepsilon, x']$ (а значит, и на интервале $(\bar{x}-\varepsilon, x+\varepsilon)$) лежит бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$.

Итак, мы доказали, что для любого $\varepsilon>0$ в ε-окрестности точки $\bar{x}$ лежит бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$. Это и означает, что $\bar{x}$ является предельной точкой последовательности $\{x_n\}$. Утверждение 1° доказано.

Подчеркнем, что попутно мы доказали, что для любого $\varepsilon>0$ правее числа $\bar{x}+\varepsilon$ лежит не более чем конечное число элементов последовательности $\{x_n\}$.

Это последнее утверждение используем для доказательства утверждения 2° о том, что $\bar{x}$ является наибольшей предельной точкой.

Пусть $\bar{\bar{x}}$ — любое число, большее $\bar{x}$. Обозначим через ε положительное число $\varepsilon=(\bar{\bar{x}}-\bar{x})/2$. При таком выборе ε интервалы $(\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon)$ и $(\bar{\bar{x}}-\varepsilon, \bar{\bar{x}}+\varepsilon)$, т. е. ε-окрестности точек $\bar{x}$ и $\bar{\bar{x}}$, не будут иметь общих точек, а точнее, вся ε-окрестность точки x будет лежать правее числа $\bar{x}+\varepsilon$, т. е. правой границы ε-окрестности точки $\bar{x}$ (рис. 3.3).

Выше мы установили, что для любого $\varepsilon>0$ правее $\bar{x}+\varepsilon$ лежит не более чем конечное число элементов последовательности $\{x_n\}$. Значит, в рассматриваемой нами ε-окрестности точки $\bar{\bar{x}}$ лежит не более чем конечное число элементов последовательности $\{x_n\}$, а это и означает, что $\bar{\bar{x}}$ не является предельной точкой последовательности $\{x_n\}$. Утверждение 2° доказано.

Мы доказали существование у ограниченной последовательности $\{x_n\}$ верхнего предела (т. е. наибольшей предельной точки). Совершенно аналогично доказывается, что у такой последовательности существует нижний предел, являющийся точной верхней гранью того множества вещественных чисел $\{x\}$, левее каждого из которых лежит не более чем конечное число элементов последовательности $\{x_n\}$. Теорема 3.16 доказана.

Следствие 1 из теоремы 3.16. *Если $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность, $\underline{x}$ и $\bar{x}$ — ее нижний и верхний пределы, ε — любое положительное число, то на интервале $(\underline{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon)$ лежат все элементы этой последовательности, начиная с некоторого номера (зависящего, конечно, от ε).*

Достаточно доказать, что для любого $\varepsilon>0$ вне интервала $(\underline{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon)$ лежит не более чем конечное число элементов последовательности $\{x_n\}$. Тем более достаточно доказать, что правее $\bar{x}+\frac{\varepsilon}{2}$ и левее $\underline{x}-\frac{\varepsilon}{2}$ лежит не более чем конечное число элементов последовательности $\{x_n\}$. Тот факт, что для любого $\varepsilon>0$ правее $\bar{x}+\frac{\varepsilon}{2}$ лежит не более чем конечное число элементов $\{x_n\}$, уже установлен в процессе доказательства теоремы 3.16. Совершенно аналогично доказывается, что для любого $\varepsilon>0$ левее $\underline{x}-\frac{\varepsilon}{2}$ лежит не более чем конечное число элементов последовательности $\{x_n\}$.

Следствие 2 из теоремы 3.16. *Пусть $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность, $\underline{x}$ и $\bar{x}$ — ее нижний и верхний пределы, (a, b) — интервал, вне которого лежит не более чем конечное число элементов последовательности $\{x_n\}$. Тогда интервал $(\underline{x}, \bar{x})$ содержится в интервале (a, b) и, в частности, $\bar{x}-\underline{x}\leqslant b-a$.*

Доказательство. Достаточно доказать два неравенства $\bar{x}\leqslant b$ и $a\leqslant\underline{x}$. Первое из этих неравенств вытекает из того, что точка b, правее которой лежит не более чем конечное число элементов последовательности $\{x_n\}$, принадлежит множеству $\{x\}$, рассмотренному при доказательстве теоремы 3.16, а $\bar{x}$ является точной нижней гранью этого множества. Второе неравенство $a\leqslant\underline{x}$ устанавливается аналогично.

Следствие 3 из теоремы 3.16 (теорема Больцано—Вейерштрасса*). *Из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Эта теорема является непосредственным следствием теоремы 3.16 и определения 2 предельной точки.

Теорема 3.16 проливает свет на то, как устроено множество всех предельных точек любой ограниченной последовательности.

---

* Бернгард Больцано — чешский философ и математик (1781—1848), Карл Вейерштрасс — немецкий математик (1815—1897).

Если, как и выше, обозначить через $\underline{x}$ и $\bar{x}$ нижний и верхний пределы этой последовательности, то можно утверждать, что все ее предельные точки лежат на сегменте $[\underline{x}, \bar{x}]$, причем если указанная последовательность не является сходящейся, то она имеет по крайней мере две предельные точки $\underline{x}$ и $\bar{x}$. Рассмотренная нами выше последовательность $\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1-\frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}, \ldots$ представляет собой пример последовательности, имеющей только две предельные точки $\underline{x}=0$ и $\bar{x}=1$.

Другая рассмотренная выше последовательность $\{x_n\}$, содержащая все рациональные числа из сегмента $[0, 1]$, представляет собой пример последовательности, предельные точки которой покрывают весь сегмент $[\underline{x}, \bar{x}]$, у которого $\underline{x}=0$, $\bar{x}=1$.

Легко построить пример последовательности, предельными точками которой служат: 1) наперед заданное конечное множество точек $a_1, a_2, \ldots, a_k$; 2) наперед взятая бесконечная последовательность точек $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ * (во втором случае каждая предельная точка последовательности предельных точек $\{a_n\}$ будет являться предельной точкой исходной последовательности $\{x_n\}$).

2. Расширение понятий предельной точки и верхнего и нижнего пределов. Аналогом теоремы Больцано — Вейерштрасса для неограниченной последовательности является следующее утверждение.

Лемма 2. *Из всякой неограниченной последовательности можно выделить бесконечно большую подпоследовательность (и, в частности, бесконечно большую подпоследовательность, все элементы которой имеют определенный знак).*

Доказательство. Прежде всего заметим, что если у неограниченной последовательности отбросить любое конечное число первых ее элементов, то после такого отбрасывания получится снова неограниченная последовательность **. Пусть $\{x_n\}$ — произвольная неограниченная последовательность. Тогда найдется элемент x_{k_1} этой последовательности, удовлетворяющий неравенству $|x_{k_1}|>1$. Учитывая, что последовательность $\{x_n\}$, рассматриваемая с номера k_1+1, также является неограниченной, мы получим, что найдется элемент этой последовательности x_{k_2}, удовлетворяющий неравенству $|x_{k_2}|>2$ при $k_2>k_1$. Продолжая эти рассуждения далее, мы получим, что для любого номера n найдется элемент x_{k_n}, удовлетворяющий неравенству $|x_{k_n}|>n$ при $k_n>k_{n-1}$.

---

* Таковой является последовательность

$$\underbrace{a_1}, \underbrace{a_1, a_2}, \underbrace{a_1, a_2, a_3}, \ldots.$$

** Ибо предположение о том, что это не так, приводит к противоречию с требованием неограниченности исходной последовательности.

Очевидно, что построенная нами подпоследовательность x_{k_1}, $x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}, \ldots$ является бесконечно большой. Замечая, что эта подпоследовательность заведомо содержит бесконечно много либо положительных, либо отрицательных членов, мы может выделить из нее бесконечно большую подпоследовательность, все элементы которой имеют определенный знак. Лемма доказана.

Из леммы 2 и из теоремы Больцано — Вейерштрасса вытекает следующее утверждение.

Лемма 3. *Из совершенно произвольной последовательности можно выделить либо сходящуюся подпоследовательность, либо бесконечно большую подпоследовательность, все элементы которой имеют определенный знак.*

Лемма 3 естественно приводит к идее расширения понятия предельной точки последовательности. Договоримся формально дополнить введенные выше конечные предельные точки последовательности еще двумя возможными предельными точками $+\infty$ и $-\infty$.

Будем говорить, что $+\infty$ $[-\infty]$ *является предельной точкой последовательности* $\{x_n\}$, *если из этой последовательности можно выделить бесконечно большую подпоследовательность, все элементы которой положительны* [*отрицательны*].

При таком расширении понятия предельной точки из леммы 3 вытекает следующее утверждение: *у совершенно произвольной последовательности существует хотя бы одна предельная точка* *.

Естественно, считая, что $+\infty$ и $-\infty$ связаны с любым конечным вещественным числом x соотношением $-\infty<x<+\infty$, убедимся в том, что *у совершенно произвольной последовательности* $\{x_n\}$ *существуют верхний и нижний пределы (т. е. существуют наибольшая и наименьшая предельные точки).*

Ради определенности остановимся на доказательстве существования верхнего предела.

В силу теоремы 3.16 достаточно рассмотреть лишь случай, когда последовательность $\{x_n\}$ не является ограниченной.

Если при этом последовательность $\{x_n\}$ не является ограниченной сверху, то из нее можно выделить бесконечно большую последовательность, все элементы которой положительны, и поэтому $+\infty$ является предельной точкой, а значит, и верхним пределом последовательности $\{x_n\}$.

Остается рассмотреть случай, когда неограниченная последовательность $\{x_n\}$ является ограниченной сверху, т. е. когда существует вещественное число M такое, что все элементы x_n последовательности удовлетворяют неравенству $x_n \leqslant M$. Так как при этом последовательность $\{x_n\}$ не является ограниченной снизу, то из нее можно выделить бесконечно большую подпоследовательность,

* Либо конечная, либо равная $+\infty$ или $-\infty$.