все элементы которой отрицательны, т. е. $-\infty$ является предельной точкой такой последовательности.

Если при этом указанная последовательность $\{x_n\}$ не имеет ни одной конечной предельной точки, то единственная предельная точка $-\infty$ и является верхним пределом этой последовательности.

Если же при этом у указанной последовательности есть хотя бы одна конечная предельная точка x_0, то, фиксировав некоторое $\varepsilon>0$, мы выделим из этой последовательности подпоследовательность тех ее элементов x_n, которые удовлетворяют неравенствам * $x_0-\varepsilon<x_n\leqslant M$.

Выделенная подпоследовательность ограничена, и по теореме 3.16 у нее существует наибольшая предельная точка, которая является наибольшей предельной точкой (т. е. верхним пределом) и всей последовательности $\{x_n\}$. Существование у совершенно произвольной последовательности верхнего предела доказано. Аналогично доказывается, что у совершенно произвольной последовательности существует нижний предел.

В заключение заметим, что почти все понятия и утверждения, установленные нами в этом и в предыдущем пунктах, переносятся на случай *произвольного числового множества* $\{x\}$, *имеющего бесконечное число элементов.*

Точку а бесконечной прямой $(-\infty, +\infty)$ *назовем предельной точкой такого множества, если в любой* ε*-окрестности точки а содержится бесконечно много элементов этого множества.*

Наибольшую и наименьшую предельные точки множества $\{x\}$ назовем соответственно верхней и нижней предельными точками этого множества.

Повторяя рассуждения теоремы 3.16 с заменой термина «последовательность $\{x_n\}$» термином «множество $\{x\}$, содержащее бесконечное число элементов», мы придем к следующему утверждению: *у всякого ограниченного множества* $\{x\}$, *имеющего бесконечное число элементов, существуют верхняя и нижняя предельные точки (и, в частности, существует хотя бы одна предельная точка).*

Из этого утверждения вытекает следующее обобщение теоремы Больцано — Вейерштрасса: *из элементов всякого ограниченного множества* $\{x\}$, *имеющего бесконечное число элементов, можно выделить сходящуюся подпоследовательность* **.

Как и для случая последовательности, удобно расширить понятие предельной точки и считать, что $+\infty$ $[-\infty]$ *является предельной точкой множества* $\{x\}$, *если из элементов этого мно-*

---

* Заметим, что $x_0\leqslant M$, ибо все элементы x_n последовательности $\{x_n\}$ удовлетворяют неравенству $x_n\leqslant M$. Далее заметим, что в силу того, что x_0 — предельная точка, существует бесконечно много элементов x_n последовательности $\{x_n\}$, удовлетворяющих неравенству $x_0-\varepsilon\leqslant x_n\leqslant M$.

** Любые два элемента которой являются различными элементами множества $\{x\}$.

жества можно выделить бесконечно большую последовательность, состоящую из положительных [отрицательных] чисел.

Эта формализация позволяет нам утверждать, что *у совершенно произвольного числового множества $\{x\}$, имеющего бесконечное число элементов, существуют хотя бы одна предельная точка, а также верхняя и нижняя предельные точки.*

3. Критерий Коши* сходимости последовательности. При изучении вопроса о сходимости последовательности $\{x_n\}$ с помощью определения сходящейся последовательности приходится оценивать разность $x_n - a$ элементов последовательности и ее предполагаемого предела a.

Иными словами, приходится предугадывать величину предела a этой последовательности.

В этом пункте мы установим «внутренний» критерий сходимости последовательности, позволяющий сделать заключение о ее сходимости лишь по величине ее элементов и не использующий величины предполагаемого предела этой последовательности. Для установления такого критерия введем понятие фундаментальной последовательности.

Определение. *Последовательность $\{x_n\}$ называется фундаментальной, если для любого положительного числа ε найдется номер N такой, что для всех номеров n, удовлетворяющих условию $n \geqslant N$, и для любого натурального p $(p=1, 2, \ldots)$ справедливо неравенство*

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

Установим два важных свойства любой фундаментальной последовательности.

Свойство 1. *Для любого положительного числа ε найдется элемент фундаментальной последовательности x_N такой, что в ε-окрестности этого элемента x_N находятся все элементы x_n этой последовательности с номерами n, удовлетворяющими условию $n \geqslant N$.*

Другими словами, для любого $\varepsilon > 0$ найдется элемент фундаментальной последовательности x_N, вне ε-окрестности которого лежит не более чем конечное число элементов этой последовательности.

Для доказательства этого свойства следует фиксировать произвольное положительное число ε и взять в определении фундаментальной последовательности номер n равным N. Мы получим при этом, что для любого натурального p $(p=1, 2, \ldots)$ элементы фундаментальной последовательности удовлетворяют неравенству

$$|x_{N+p} - x_N| < \varepsilon$$

или, что то же самое, неравенству

$$x_N - \varepsilon < x_{N+p} < x_N + \varepsilon.$$

* Огюстен Луи Коши — французский математик (1789—1857).

Так как p — любое натуральное число, то последние неравенства и означают, что все элементы фундаментальной последовательности, номер которых не меньше N, находятся в интервале $(x_N-\varepsilon, x_N+\varepsilon)$, т. е. в ε-окрестности x_N. Свойство 1 доказано.

Свойство 2. *Фундаментальная последовательность является ограниченной.*

Доказательство. Фиксируем некоторое $\varepsilon>0$. Так как последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной, то для этого ε (в силу свойства 1) найдется элемент x_N такой, что все элементы x_n с номерами $n\geqslant N$ удовлетворяют неравенству

$$x_N-\varepsilon<x_n<x_N+\varepsilon.$$

Обозначим теперь через A наибольшее из следующих $(N+1)$ чисел: $|x_1|$, $|x_2|, \ldots, |x_{N-1}|$, $|x_N-\varepsilon|$, $|x_N+\varepsilon|$. Тогда, очевидно, для всех номеров n будет справедливо неравенство $|x_n|\leqslant A$, которое и означает ограниченность последовательности $\{x_n\}$. Свойство 2 доказано.

Докажем теперь следующую вспомогательную теорему.

Теорема 3.17. *Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной и ее верхний и нижний пределы $\bar{x}$ и $\underline{x}$ совпадали между собой.*

Доказательство. 1) *Необходимость.* Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится. Тогда она ограничена (в силу теоремы 3.8) и имеет единственную предельную точку (в силу леммы 1 из п. 1 этого параграфа). Это и означает, что ее верхний и нижний пределы $\bar{x}$ и $\underline{x}$ совпадают между собой.

2) *Достаточность.* Пусть последовательность $\{x_n\}$ ограничена (при этом она в силу теоремы 3.16 имеет верхний предел $\bar{x}$ и нижний предел $\underline{x}$), и пусть $\bar{x}=\underline{x}$. Положим $x=\bar{x}=\underline{x}$. В силу следствия 1 из теоремы 3.16 для любого $\varepsilon>0$ в интервале $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ лежат элементы последовательности $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера. В силу определения 3 сходящейся последовательности (см. п. 4 § 1) это и означает, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к пределу x. Теорема 3.17 доказана.

Докажем теперь следующую важнейшую теорему.

Основная теорема 3.18 (критерий Коши сходимости последовательности). *Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.*

Доказательство. 1) *Необходимость.* Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится к некоторому пределу x. Докажем, что эта последовательность является фундаментальной. Фиксируем произвольное положительное число ε. Так как последовательность $\{x_n\}$ сходится к пределу x, то для положительного числа $\varepsilon/2$ найдется номер N такой, что при всех $n\geqslant N$

$$|x_n - x| < \varepsilon/2. \tag{3.54}$$

Если p — любое натуральное число, то при всех $n \geqslant N$ и подавно будет справедливо неравенство

$$|x_{n+p} - x| < \varepsilon/2 \tag{3.55}$$

(ибо при $n \geqslant N$ заведомо будет справедливо неравенство $n+p \geqslant N$).

Так как модуль суммы двух чисел не превосходит суммы их модулей, то из неравенств (3.54) и (3.55) мы получим, что при всех $n \geqslant N$ и для любого натурального p

$$|x_{n+p} - x_n| = |[x_{n+p} - x] + [x - x_n]| \leqslant |x_{n+p} - x| + |x_n - x| < \varepsilon,$$

а это и означает фундаментальность последовательности $\{x_n\}$.

2) *Достаточность.* Пусть последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной. Требуется доказать, что эта последовательность является сходящейся. В силу теоремы 3.17 достаточно доказать, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена и что ее верхний и нижний пределы $\bar{x}$ и $\underline{x}$ совпадают между собой.

Ограниченность любой фундаментальной последовательности уже установлена нами выше (см. свойство 2). Остается доказать, что для любой фундаментальной последовательности $\{x_n\}$ верхний предел $\bar{x}$ и нижний предел $\underline{x}$ совпадают. Фиксируем произвольное положительное число ε. В силу свойства 1 фундаментальной последовательности найдется элемент этой последовательности x_N такой, что вне ε-окрестности этого элемента, т. е. вне интервала $(x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon)$ лежит не более чем конечное число элементов последовательности $\{x_n\}$. Но тогда в силу следствия 2 из теоремы 3.16 интервал $(\underline{x}, \bar{x})$ обязан содержаться в интервале $(x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon)$ и, в частности, должно быть справедливо неравенство $\bar{x} - \underline{x} \leqslant (x_N + \varepsilon) - (x_N - \varepsilon) = 2\varepsilon$.

Так как, кроме того, $\bar{x} \geqslant \underline{x}$, то для любого $\varepsilon > 0$ будут справедливы неравенства $0 \leqslant \bar{x} - \underline{x} \leqslant 2\varepsilon$. В силу произвольности ε из этих неравенств вытекает, что $\bar{x} - \underline{x} = 0$ *, т. е. $\bar{x} = \underline{x}$. Критерий Коши полностью доказан.

Применим критерий Коши для установления расходимости последовательности $\{x_n\}$ с элементами $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.

Заметим, что если для любого номера n натуральное число p взять равным n, то мы получим, что для всех номеров n

$$|x_{n+p} - x| = |x_{2n} - x_n| = \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) -$$

* В самом деле, если бы разность $\bar{x} - \underline{x}$ равнялась положительному числу α, то, взяв в качестве ε число $\alpha/3$, мы бы получили противоречие с неравенством $\bar{x} - \underline{x} \leqslant 2\varepsilon$.

$$-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=\underline{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}}\geqslant$$
$$\geqslant n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2},$$

ибо подчеркнутая сумма содержит n слагаемых, наименьшее из которых равно $\frac{1}{2n}$.

Таким образом, для положительного числа $\varepsilon=\frac{1}{2}$ не существует номера N такого, что при всех $n\geqslant N$ и для любого натурального p справедливо неравенство $|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$. Это означает, что рассматриваемая последовательность не является фундаментальной и (в силу критерия Коши) расходится.

В качестве второго примера применим критерий Коши для установления сходимости последовательности $\{x_n\}$ с элементами $x_n=1+q+\ldots+q^n$, где q — любое число из интервала $0<q<1$.

Для любого номера n и любого натурального числа p ($p=1, 2, \ldots$) справедливо неравенство

$$|x_{n+p}-x_n|=(1+q+\ldots+q^{n+p})-(1+q+\ldots+q^n)=$$
$$=q^{n+1}+q^{n+2}+\ldots+q^{n+p}=\frac{q^{n+1}-q^{n+1+p}}{1-q}<\frac{q^{n+1}}{1-q}. \qquad (3.56)$$

Фиксируем произвольное положительное число ε. Так как при $0<q<1$ последовательность $\{q^n\}$ является бесконечно малой, то для положительного числа $\varepsilon(1-q)$ найдется номер N такой, что при всех $n\geqslant N$ справедливо неравенство

$$q^n<\varepsilon(1-q). \qquad (3.57)$$

Из неравенств (3.56) и (3.57) вытекает, что при всех $n\geqslant N$ и для любого натурального p

$$|x_{n+p}-x_n|<\frac{\varepsilon(1-q)}{1-q}=\varepsilon,$$

а это означает, что рассматриваемая последовательность является фундаментальной и (в силу критерия Коши) сходится.

§ 4. ПРЕДЕЛ (ИЛИ ПРЕДЕЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ) ФУНКЦИИ

Перейдем теперь к изучению другой более сложной формы операции предельного перехода, основанной на понятии предела (или предельного значения) функции. Но прежде всего мы должны уточнить сами понятия переменной величины и функции.

1. Понятия переменной величины и функции. Как мы уже видели в гл. 1, к понятию функции приводит изучение двух перемен-

ных величин, изменение которых взаимообусловлено. Поэтому естественно начать с уточнения понятия переменной величины.

Рассмотрение реальных физических переменных величин приводит нас к выводу, что эти величины не всегда могут принимать произвольные значения. Так, скорость материальной точки не может быть больше $3\cdot10^{10}$ см/с (т. е. скорости света в пустоте), температура тела не может быть меньше —273°, смещение материальной точки, совершающей гармонические колебания по закону $y=A\cos(\omega t+\delta)$, может принимать значения только из сегмента $[-A, +A]$.

Отвлекаясь от конкретных физических свойств наблюдаемых в природе переменных величин, мы приходим к понятию математической переменной величины, характеризуемой только численными значениями, которые она может принимать *.

Множество $\{x\}$ всех значений, которые может принимать данная переменная величина x, называется областью изменения данной переменной величины. Переменная величина считается заданной, если задана область ее изменения.

В дальнейшем мы, как правило, будем обозначать переменные величины малыми латинскими буквами x, y, t, ..., а области изменения этих переменных величин соответственно символами $\{x\}$, $\{y\}$, $\{t\}$, ...

Перейдем теперь к уточнению понятия функции.

Пусть задана переменная величина x, имеющая областью изменения некоторое множество $\{x\}$.

Если каждому значению переменной x из множества $\{x\}$ ставится в соответствие по известному закону некоторое число y, то говорят, что на множестве $\{x\}$ задана функция $y=y(x)$ или $y=f(x)$.

При этом переменная x называется аргументом или независимой переменной, множество $\{x\}$ называется областью задания функции, а то число y, которое соответствует данному значению x, называется частным значением функции в точке x. Совокупность всех частных значений образует вполне определенное множество $\{y\}$, которое называют либо областью изменения функции, либо множеством всех значений функции.

В обозначении $y=f(x)$ букву f часто называют характеристикой функции.

Для обозначения аргумента, функции и ее характеристики могут употребляться различные символы.

Остановимся на примерах функций.

1°. $y=\sqrt{4-x^2}$. Эта функция задана на сегменте $-2\leqslant x\leqslant 2$ (при этом выражение под знаком корня является неотрицатель-

* Понятие переменной величины также относится к числу начальных математических понятий.

ным), а множеством всех ее значений является сегмент $0 \leqslant y \leqslant 2$ (рис. 3.4).

2°. Так называемая функция Дирихле*, которая определяется так:

$$y = D(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число,} \\ 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число.} \end{cases}$$

Эта функция задана на бесконечной прямой $-\infty < x < +\infty$, а множество всех ее значений состоит из двух точек 0 и 1.

3°.

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

(Термин «sgn» происходит от латинского слова signum — знак.) Читается: «y равно сигнум x». Эта функция задана на всей бесконечной прямой $-\infty < x < +\infty$, а множество всех ее значений состоит из трех точек $y = -1$, $y = 0$ и $y = 1$ (рис. 3.5).

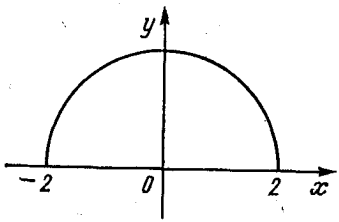

Рис. 3.4

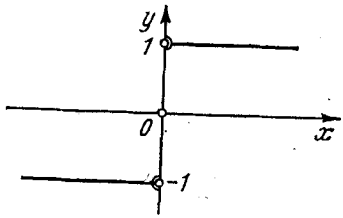

Рис. 3.5

4°. $y = [x]$, или $y = E(x)$, где символ $[x]$ или $E(x)$ обозначает целую часть числа x или, точнее, наибольшее целое число, не превосходящее x. Читается: «y равно антье x» (от французского слова entier — целый). Эта функция задана на всей бесконечной прямой $-\infty < x < +\infty$, а множеством всех ее значений является множество всех целых чисел (рис. 3.6).

5°. $y = n!$. Эта функция задана на множестве всех натуральных чисел $n = 1, 2, 3, \ldots$. Множеством всех значений этой функции является множество натуральных чисел вида $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$ (рис. 3.7).

Часто закон, устанавливающий соответствие между множеством всех значений аргумента и множеством всех значений функции, задается посредством формул. Такой способ задания функции называется аналитическим.

* Петер Густав Лежен-Дирихле — немецкий математик (1805—1859).

При этом следует подчеркнуть, что функция может задаваться разными формулами на разных участках области своего задания.

Например, функция

$$y=\begin{cases}-x & \text{при } x<0,\\ x^2 & \text{при } x\geqslant 0\end{cases}$$

задана аналитическим способом на всей бесконечной прямой $-\infty<x<+\infty$ (рис. 3.8).

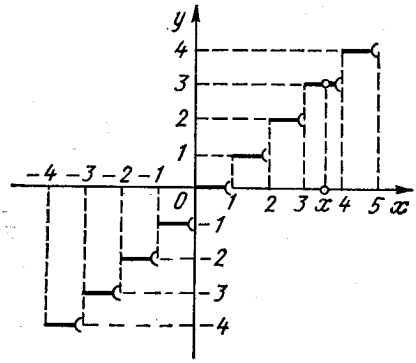

Рис. 3.6

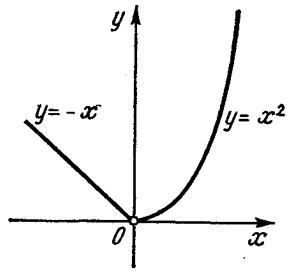

Рис. 3.8

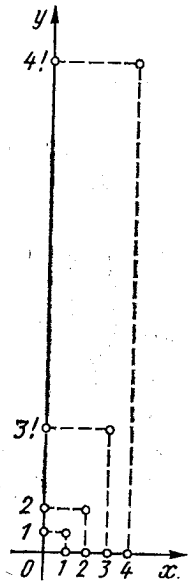

Рис. 3.7

Весьма распространенным способом задания функции является так называемый **табличный** способ, заключающийся в задании таблицы отдельных значений аргумента и соответствующих им значений функции. При таком способе задания можно приближенно вычислить не содержащиеся в таблице значения функции, отвечающие промежуточным значениям аргумента. Для этого применяется метод **интерполяции**, заключающийся в замене функции между ее соседними табличными значениями какой-либо функцией простой природы (например, линейной или квадратичной). Примером табличного способа задания функции может служить расписание движения поезда, которое определяет местополо-

жение поезда в отдельные моменты времени. Интерполяция позволяет приближенно определить местоположение поезда в любой промежуточный момент времени.

В практике физических измерений весьма распространенным является и еще один способ задания функции — так называемый графический способ, при котором соответствие между аргументом и функцией задается посредством графика (снимаемого, например, на осциллографе).

2. Предел функции по Гейне и по Коши. Пусть функция $y=f(x)$ определена на некотором бесконечном множестве $\{x\}$, и пусть a — точка бесконечной прямой $(-\infty, +\infty)$, быть может и не принадлежащая множеству $\{x\}$, но обладающая тем свойством, что в любой δ-окрестности этой точки a имеются точки множества $\{x\}$, отличные от a *.

Например, множеством $\{x\}$ может служить интервал (a, b); в этом случае точка a, являясь граничной точкой интервала, ему не принадлежит, но в любой δ-окрестности a содержатся точки указанного интервала.

Другим примером множества $\{x\}$, на котором задана функция $f(x)$, может служить множество всех рациональных чисел, принадлежащих интервалу $(a-\delta, a+\delta)$ с выкинутой точкой a.

Заметим, кстати, что *при любом* $\delta>0$ *интервал* $(a-\delta, a+\delta)$, *из которого выкинута точка* a, *принято называть* **проколотой** δ-**окрестностью точки** a.

Определение 1 (предел функции по Гейне**). *Число* b *называется* **пределом** (*или* **предельным значением**) *функции* $y=f(x)$ *в точке* a (*или при* $x\to a$), *если для любой последовательности значений аргумента* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, *сходящейся к* a *и состоящей из чисел* x_n, *отличных от* a, *соответствующая последовательность значений функции* $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ ... *сходится к числу* b.

Определение 1* (предел функции по Коши). *Число* b *называется* **пределом** (*или* **предельным значением**) *функции* $y=f(x)$ *в точке* a (*или при* $x\to a$), *если для любого положительного числа* ε *найдется отвечающее ему положительное число* δ *такое****, *что для всех значений аргумента* x, *удовлетворяющих условию* $0<|x-a|<\delta$, *справедливо неравенство*

$$|f(x)-b|<\varepsilon. \tag{3.58}$$

Для обозначения предельного значения функции $y=f(x)$ в точке a используют следующую символику:

$$\lim_{x\to a} f(x)=b \quad \text{или} \quad f(x)\to b \quad \text{при } x\to a.$$

---

* Это означает, что a является предельной точкой множества $\{x\}$.

** Генрих Эдуард Гейне — немецкий математик (1821—1881).

*** Так как δ зависит от ε, то иногда пишут: $\delta=\delta(\varepsilon)$.

Прежде чем доказывать эквивалентность определений 1 и 1*, сделаем несколько замечаний, разъясняющих смысл этих определений.

Замечание 1. Подчеркнем важность фигурирующего в определении 1 требования, обязывающего элементы последовательности значений аргумента x_n быть отличными от a, и аналогичного требования в определении 1*, обязывающего брать значения аргумента x, удовлетворяющие условию $0<|x-a|$, т. е. отличные от a. Это требование вызвано уже тем, что функция $y=f(x)$ может быть не определена в точке a. Отсутствие этого требования сделало бы невозможным использование предела функции для определения производной функции. В самом деле, из гл. 1 нам известно, что производная $f'(a)$ функции $f(x)$ в точке a представляет собой предел при $x\to a$ следующей функции:

$$F(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Очевидно, что эта функция $F(x)$ не определена в точке a и это вызвано существом дела.

Замечание 2. Особо подчеркнем, что множество $\{x\}$, на котором задана функция $f(x)$, вовсе не обязано сплошь покрывать некоторую проколотую δ-окрестность точки a. От этого множества $\{x\}$ требуется только, чтобы оно имело хотя бы один элемент в любой проколотой δ-окрестности точки a. Примером множества $\{x\}$ может служить множество всех элементов последовательности $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, лежащих в фиксированной δ-окрестности точки $a=0$.

Замечание 3. Заметим, что фигурирующее в определении 1* условие $0<|x-a|<\delta$ эквивалентно соотношениям $a-\delta<x<a+\delta$, $x\neq a$, т. е. означает, что x принадлежит проколотой δ-окрестности точки a. Аналогично, фигурирующее в определении 1* неравенство (3.58) эквивалентно неравенствам $b-\varepsilon<f(x)<b+\varepsilon$, т. е. означает, что $f(x)$ принадлежит ε-окрестности b.

Замечание 4. Привлекая идею приближения функции $f(x)$ в окрестности точки a с наперед заданной точностью ε, мы можем следующим образом перефразировать определение 1* предела функции по Коши: *число b называется предельным значением функции $f(x)$ в точке a, если для любой наперед заданной точности $\varepsilon>0$ можно указать такую δ-окрестность точки a, что для всех значений аргумента x, отличных от a и принадлежащих указанной δ-окрестности точки a, число b приближает значение функции $f(x)$ с точностью ε* (рис. 3.9).

Замечание 5. Отметим, что функция $f(x)$ может иметь в точке a только один предел. В самом деле, для определения предела функции по Гейне это вытекает из единственности предела последовательности $\{f(x_n)\}$, а для определения предела функции

по Коши это вытекает из устанавливаемой ниже эквивалентности этого предела пределу функции по Гейне.

Докажем теперь следующую важную теорему.

Теорема 3.19. *Определения 1 и 1* предела функции по Гейне и по Коши являются эквивалентными.*

Доказательство. 1) Пусть сначала число b является пределом функции $y=f(x)$ в точке a по Коши. Докажем, что это же число b является пределом функции $y=f(x)$ в точке a и по Гейне. Пусть $\{x_n\}$ — любая сходящаяся к a последовательность значений аргумента, все элементы которой отличны от a. Требуется доказать, что соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к b.

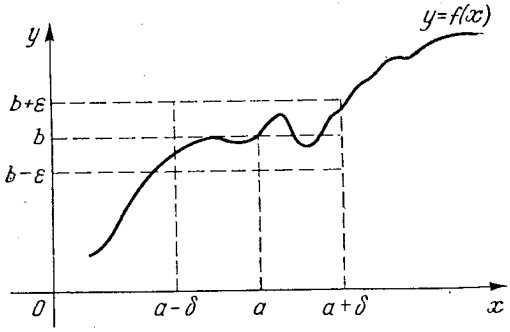

Рис. 3.9

Фиксируем произвольное положительное число ε и по нему положительное число δ, которое в силу определения предела функции по Коши гарантирует справедливость неравенства (3.58) для всех значений x, для которых $0<|x-a|<\delta$.

В силу сходимости последовательности $\{x_n\}$ к a для указанного положительного числа δ найдется номер N такой, что при всех $n\geqslant N$ справедливо неравенство $|x_n-a|<\delta$. Поскольку $x_n\neq a$ для всех номеров n, то при всех $n\geqslant N$ справедливы неравенства $0<|x_n-a|<\delta$ и, значит, в силу определения предела функции по Коши при всех $n\geqslant N$ справедливо неравенство $|f(x_n)-b|<\varepsilon$. Это и означает, что последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к числу b.

2) Пусть теперь число b является пределом функции $y=f(x)$ в точке a по Гейне. Докажем, что это же число b является пределом функции $y=f(x)$ в точке a и по Коши. Предположим, что это не так. Тогда для некоторого положительного числа ε и для сколь угодно малого положительного числа δ найдется хотя бы одно значение аргумента x такое, что $0<|x-a|<\delta$, но $|f(x)-b|\geqslant\varepsilon$.

Таким образом, мы можем взять последовательность $\delta_n=\frac{1}{n}$ $(n=1, 2, \ldots)$ и утверждать, что для каждого ее элемента $\delta_n=\frac{1}{n}$ найдется хотя бы одно значение аргумента x_n такое, что

$$0<|x_n-a|<\frac{1}{n}, \quad \text{но } |f(x_n)-b|\geqslant\varepsilon. \tag{3.59}$$

Левое из неравенств (3.59) означает, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к a и состоит из чисел, отличных от a. Но в таком случае согласно определению предела по Гейне соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ обязана сходиться к числу b, а этому противоречит правое из неравенств (3.59), справедливое для всех номеров n. Полученное противоречие доказывает теорему.

Приведем примеры функций, как обладающих, так и не обладающих в данной точке a предельным значением.

1°. Функция $f(x)=c=\text{const}$ имеет равный c предел в каждой точке a бесконечной прямой. В самом деле, для любого значения аргумента x разность $f(x)-c$ равна нулю, и поэтому $|f(x)-c|<\varepsilon$ для любого $\varepsilon>0$ и для всех значений аргумента (в данном случае для любого $\varepsilon>0$ в определении предела по Коши можно брать в качестве δ любое положительное число).

2°. Функция $f(x)=x$ в любой точке a бесконечной прямой имеет предел, равный a. В самом деле, для этой функции последовательности значений аргумента и соответствующих значений функции тождественны, и поэтому, если последовательность $\{x_n\}$ сходится к a, то и последовательность $\{f(x_n)\}$ также сходится к a.

3°. Функция Дирихле $D(x)$, значения которой в рациональных точках равны единице, а в иррациональных точках — нулю, не имеет предела ни в одной точке a бесконечной прямой. Это вытекает из того, что для сходящейся к a последовательности рациональных значений аргумента предел последовательности соответствующих значений функции равен единице, в то время как для сходящейся к a последовательности иррациональных значений аргумента предел последовательности соответствующих значений функции равен нулю.

Введем теперь понятие одностороннего (т. е. правого или левого) предела функции в данной точке a. Для этого нам прежде всего следует уточнить характер того множества $\{x\}$, на котором задана функция $f(x)$. Мы теперь потребуем, чтобы это *множество $\{x\}$ для любого $\delta>0$ имело хотя бы один элемент, принадлежащий интервалу $(a, a+\delta)$ [интервалу $(a-\delta, a)$].*

Определение 2 (правый [левый] предел функции по Гейне). *Число b называется правым пределом [левым пределом] функции $y=f(x)$ в точке a, если для любой последовательности значений аргумента $\{x_n\}$, сходящейся к a и состоящей из чисел, бо́льших a [меньших a], соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к числу b.*

Определение 2* (правый [левый] предел функции по Коши). *Число b называется правым пределом [левым пределом] функции $y=f(x)$ в точке a, если для любого положительного числа ε найдется отвечающее ему положительное число δ такое, что для всех значений аргумента x,*

удовлетворяющих условию $a<x<a+\delta$ [*условию* $a-\delta<x<a$], *справедливо неравенство* (3.58).

Для обозначения правого [левого] предела функции $f(x)$ в точке a используют следующую символику:

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=b \quad [\lim_{x\to a-0} f(x)=b]$$

или более краткую символику

$$f(a+0)=b \quad [f(a-0)=b].$$

В полной аналогии с теоремой 3.19 доказывается *эквивалентность определений* 2 *и* 2*: следует лишь во всех проведенных при доказательстве этой теоремы рассуждениях брать значения аргумента x и элементы последовательности $\{x_n\}$ бо́льшими числа a [меньшими числа a].

В качестве примера рассмотрим функцию

$$f(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}+1, & \text{если } x>0,\\ 0, & \text{если } x=0,\\ -1, & \text{если } x<0.\end{cases}$$

Эта функция имеет в точке $a=0$ как правый, так и левый пределы, причем $\operatorname{sgn}(0+0)=+1$, $\operatorname{sgn}(0-0)=-1$. В самом деле, для любой сходящейся к $a=0$ последовательности $\{x_n\}$, состоящей из чисел, больших нуля, соответствующая последовательность $\{\operatorname{sgn} x_n\}$ сходится к $+1$, а для любой сходящейся к $a=0$ последовательности $\{x_n\}$, состоящей из чисел, меньших нуля, соответствующая последовательность $\{\operatorname{sgn} x_n\}$ сходится к -1.

Из проведенных рассуждений вытекает, что у рассматриваемой функции $y=\operatorname{sgn} x$ не существует в точке $a=0$ предела.

Итак, функция $y=\operatorname{sgn} x$ не имеет в точке $a=0$ предела, но имеет в этой точке правый предел, равный $+1$, и левый предел, равный -1. Тот факт, что правый и левый пределы этой функции не равны друг другу, не является случайным, ибо справедливо следующее утверждение: *если функция $f(x)$ имеет в точке a как правый, так и левый пределы и если эти односторонние пределы равны одному и тому же числу b, то эта функция имеет в точке a предел, равный b**.

Для доказательства этого утверждения достаточно воспользоваться определениями 1* и 2* и учесть, что если неравенство (3.58) справедливо для значений аргумента x, удовлетворяющих условиям $a<x<a+\delta$ и $a-\delta<x<a$, то неравенство (3.58) справедливо и для всех значений аргумента x, удовлетворяющих условию $0<|x-a|<\delta$.

---

* Очевидно, справедливо и обратное утверждение: если функция $f(x)$ имеет в точке a равный b предел, то как правый, так и левый пределы $f(x)$ в точке a существуют и оба равны b.

Сформулируем теперь понятие предела функции при $x \to \infty$. Для введения этого понятия следует потребовать, чтобы *множество* $\{x\}$, *на котором задана функция* $y=f(x)$, *для любого* $\delta>0$ *имело хотя бы один элемент, лежащий вне сегмента* $[-\delta, +\delta]$.

Определение 3 (предел функции при $x \to \infty$ по Гейне). *Число* b *называется* ***пределом (или предельным значением) функции*** $y=f(x)$ ***при*** $x \to \infty$, *если для любой бесконечно большой последовательности значений аргумента* $\{x_n\}$ *соответствующая последовательность значений функции* $\{f(x_n)\}$ *сходится к числу* b.

Определение 3* (предел функции при $x \to \infty$ по Коши). *Число* b *называется* ***пределом (или предельным значением) функции*** $y=f(x)$ ***при*** $x \to \infty$, *если для любого положительного числа* ε *найдется отвечающее ему положительное число* δ *такое, что для всех значений аргумента* x, *удовлетворяющих условию* $|x|>\delta$, *справедливо неравенство* (3.58).

Для обозначения предела функции $y=f(x)$ при $x \to \infty$ используют следующий символ:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b.$$

В полной аналогии с теоремой 3.19 доказывается *эквивалентность определений* 3 *и* 3*. Следует лишь в рассуждениях, использованных при доказательстве этой теоремы, всюду заменить сходящуюся последовательность значений аргумента $\{x_n\}$ бесконечно большой последовательностью значений аргумента $\{x_n\}$, а неравенство $0<|x-a|<\delta$ заменить неравенством $|x|>\delta$.

Примером функции, имеющей предел при $x \to \infty$, может служить функция $f(x)=\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$, В самом деле, для любой бесконечно большой последовательности значений аргумента $\{x_n\}$ соответствующая последовательность значений функции $f(x_n)=1/x_n$ (в силу теоремы 3.6) является бесконечно малой, т. е. имеет своим пределом число $b=0$. Значит, в силу определения 3

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Сформулируем, наконец, понятие предела функции при стремлении x к бесконечности определенного знака. Для введения такого понятия потребуем, чтобы *функция* $y=f(x)$ *была задана на таком множестве* $\{x\}$, *которое для любого* $\delta>0$ *имеет хотя бы один элемент, лежащий правее* δ [*левее* — δ].

Определение 4 (предел функции при $x \to +\infty$ $[x \to -\infty]$ по Гейне). *Число* b *называется* ***пределом (или предельным значением) функции*** $y=f(x)$ ***при*** $x \to +\infty$ [*при* $x \to -\infty$], *если для любой бесконечно большой последовательности значений аргумента* $\{x_n\}$, *все элементы которой*

положительны [отрицательны], соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к числу b.

Определение 4* (предел функции при $x\to+\infty$ [$x\to-\infty$] по Коши). *Число b называется пределом (или предельным значением) функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$ [при $x\to-\infty$], если для любого положительного числа ε найдется отвечающее ему положительное число δ такое, что для всех значений аргумента x, удовлетворяющих условию $x>\delta$ [$x<-\delta$], справедливо неравенство* (3.58).

Для обозначения введенных понятий используется следующая символика:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b \quad [\lim_{x\to-\infty} f(x)=b].$$

Эквивалентность определений 4 *и* 4* доказывается по схеме доказательства теоремы 3.19: следует только во всех рассуждениях заменить сходящуюся последовательность значений аргумента $\{x_n\}$ на бесконечно большую последовательность значений аргумента $\{x_n\}$, состоящую из положительных [отрицательных] чисел, а неравенство $0<|x-a|<\delta$ заменить неравенством $x>\delta$ [$x<-\delta$].

Замечание 6. Отметим, что изученное нами в § 1—3 понятие предела числовой последовательности $\{x_n\}$ можно рассматривать как частный случай предела функции при $x\to+\infty$. В самом деле, если взять в качестве $\{x\}$ множество всех натуральных чисел 1, 2, ..., n, ..., а в качестве функции $f(x)$, заданной на этом множестве, ту функцию, которая каждому значению аргумента n ставит в соответствие n-й член последовательности x_n, то определение 4* предела такой функции при $x\to+\infty$ в точности совпадет с определением предела числовой последовательности $\{x_n\}$.

Замечание 7. Естественно, возникает идея связать воедино все введенные нами понятия пределов функции и предел числовой последовательности. В § 5 настоящей главы вводится понятие общего предела функции по базе, включающее в себя как частный случай все введенные нами понятия пределов функции и понятие предела числовой последовательности.

3. Критерий Коши существования предела функции. Ради определенности рассмотрим подробно случай предела функции $y=f(x)$ в точке a, введенного определениями 1 и 1*.

Определение. *Будем говорить, что функция $y=f(x)$ удовлетворяет в точке a условию Коши, если для любого положительного числа ε найдется отвечающее ему положительное число δ такое, что для любых двух значений аргумента x' и x'', удовлетворяющих условиям*

$$0<|x'-a|<\delta,\ 0<|x''-a|<\delta, \tag{3.60}$$

справедливо неравенство

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon. \tag{3.61}$$

Теорема 3.20 (критерий Коши существования предела функции в точке a). *Для того чтобы функция $y=f(x)$ имела в точке a конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы функция $y=f(x)$ удовлетворяла в точке a условию Коши.*

Доказательство. 1) *Необходимость.* Пусть существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$. Фиксируем произвольное положительное число ε. В силу определения 1* предела функции по Коши для положительного числа $\varepsilon/2$ найдется положительное число δ такое, что, каковы бы ни были два значения аргумента x' и x'', удовлетворяющие условиям $0<|x'-a|<\delta$, $0<|x''-a|<\delta$, для соответствующих значений функции справедливы неравенства

$$|f(x')-b|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |f(x'')-b|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{3.62}$$

Так как модуль суммы двух величин не превосходит суммы их модулей, то в силу неравенств (3.62) мы получим, что

$$|f(x')-f(x'')|=|[f(x')-b]+[b-f(x'')]|\leqslant$$
$$\leqslant|f'(x')-b|+|f(x'')-b|<\varepsilon,$$

а это и означает, что функция $y=f(x)$ удовлетворяет в точке a условию Коши.

2) *Достаточность.* Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет в точке a условию Коши. Требуется доказать, что функция $f(x)$ имеет в точке a предел. Пусть $\{x_n\}$ — произвольная последовательность значений аргумента, сходящаяся к a и состоящая из чисел, отличных от a. В силу определения 1 предела по Гейне достаточно доказать, что соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к некоторому числу b и что это число b одно и то же для всех сходящихся к a последовательностей $\{x_n\}$, состоящих из чисел, отличных от a.

Докажем сначала, что для каждой сходящейся к a последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента, отличных от a, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к некоторому пределу. Фиксируем произвольное положительное число ε и по нему отвечающее ему, согласно условию Коши, положительное число δ. В силу сходимости последовательности $\{x_n\}$ к a и в силу условия $x_n\neq a$ для этого $\delta>0$ найдется номер N такой, что $0<|x_n-a|<\delta$ при $n\geqslant N$. Если теперь p — любое натуральное число ($p=1, 2, 3, \ldots$), то тем более $0<|x_{n+p}-a|<\delta$ при $n\geqslant N$ *.

Таким образом, при $n\geqslant N$ и для любого натурального p справедливы два неравенства:

$$0<|x_{n+p}-a|<\delta,\ 0<|x_n-a|<\delta.$$

* Ибо если $n\geqslant N$, то и подавно $n+p\geqslant N$.

Из этих двух неравенств и из условия Коши вытекает, что при $n \geqslant N$ и для любого натурального p

$$|f(x_{n+p})-f(x_n)|<\varepsilon,$$

а это означает фундаментальность последовательности $\{f(x_n)\}$. В силу критерия Коши сходимости числовой последовательности (см. теорему 3.18) последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к некоторому числу b.

Остается доказать, что для любых двух сходящихся к a последовательностей значений аргумента $\{x_n\}$ и $\{x_n'\}$, все элементы которых отличны от a, соответствующие последовательности значений функции $\{f(x_n)\}$ и $\{f(x_n')\}$ сходятся к одному и тому же пределу. Предположим, что последовательности $\{f(x_n)\}$ и $\{f(x_n')\}$ сходятся к пределам b и b' соответственно. Рассмотрим новую последовательность значений аргумента $x_1, x_1', x_2, x_2', x_3, x_3', \ldots, x_n, x_n', \ldots$, также сходящуюся к a и состоящую из чисел, отличных от a. В силу доказанного выше соответствующая последовательность значений функции $f(x_1), f(x_1'), f(x_2), f(x_2'), \ldots, f(x_n), f(x_n'), \ldots$ обязана сходиться к некоторому пределу b''. Но тогда в силу утверждения, доказанного в начале п. 1 § 3, и любая подпоследовательность этой последовательности обязана сходиться к тому же самому пределу b''. Значит, как подпоследовательность нечетных элементов $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$, так и подпоследовательность четных элементов $f(x_1'), f(x_2'), \ldots, f(x_n'), \ldots$ обе сходятся к b''. Отсюда вытекает, что $b=b'=b''$. Теорема полностью доказана.

Аналогично формулируется условие Коши и доказывается критерий Коши и для случаев правого [левого] предела в точке a, предела при $x\to\infty$ и предела при $x\to+\infty$ $[x\to-\infty]$.

При формулировке условия Коши достаточно в приведенном выше определении заменить условия (3.60) для случая правого [левого] предела в точке a условиями

$$a<x'<a+\delta,\ a<x''<a+\delta \quad [a-\delta<x'<a,\ a-\delta<x''<a],$$

для случая предела при $x\to\infty$ условиями

$$|x'|>\delta,\ |x''|>\delta$$

и, наконец, для случая предела при $x\to+\infty$ $[x\to-\infty]$ условиями

$$x'>\delta,\ x''>\delta \quad [x'<-\delta,\ x''<-\delta].$$

Соответствующие критерии Коши доказываются по схеме доказательства теоремы 3.20: следует только во всех рассуждениях понимать под последовательностями значений аргумента $\{x_n'\}$ и $\{x_n''\}$ в случае правого [левого] предела в точке a последовательности, сходящиеся к a и состоящие из чисел, бо́льших a [меньших a], в случае предела при $x\to\infty$ бесконечно большие последовательности и, наконец, в случае предела при $x\to+\infty$ $[x\to-\infty]$ бес-

конечно большие последовательности, состоящие из положительных [отрицательных] чисел.

4. Арифметические операции над функциями, имеющими предел. Справедлива следующая фундаментальная теорема.

Основная теорема 3.21. *Пусть две функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы на одном и том же множестве $\{x\}$ и имеют в точке a пределы, соответственно равные b и c. Тогда функции $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ и $f(x)/g(x)$ имеют в точке a пределы, соответственно равные $b+c$, $b-c$, $b\cdot c$, b/c (в случае частного нужно дополнительно требовать, чтобы c было отлично от нуля).*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — произвольная сходящаяся к a последовательность значений аргумента, все элементы которой отличны от a. В силу определения 1 предела по Гейне соответствующие последовательности значений функции $\{f(x_n)\}$ и $\{g(x_n)\}$ сходятся к пределам b и c соответственно. Но тогда в силу теорем 3.9—3.12 последовательности $\{f(x_n)+g(x_n)\}$, $\{f(x_n)-g(x_n)\}$, $\{f(x_n)\cdot g(x_n)\}$ и $\left\{\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\right\}$ сходятся к пределам $b+c$, $b-c$, $b\cdot c$ и b/c соответственно. Это последнее в силу произвольности последовательности значений аргумента $\{x_n\}$, сходящейся к a, и в силу определения 1 предела по Гейне означает, что функции $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ и $f(x)/g(x)$ имеют в точке a пределы, соответственно равные $b+c$, $b-c$, $b\cdot c$ и b/c. Теорема доказана.

Доказательство соответствующей теоремы для случаев правого [левого] предела в точке a, предела при $x\to\infty$ и предела при $x\to+\infty$ $[x\to-\infty]$ проводится по той же схеме. Все отличие состоит в том, что в качестве последовательности значений аргумента $\{x_n\}$ следует взять в случае правого [левого] предела в точке a последовательность, сходящуюся к a и состоящую из чисел, больших a [меньших a], в случае предела при $x\to\infty$ — бесконечно большую последовательность и, наконец, в случае предела при $x\to+\infty$ $[x\to-\infty]$ бесконечно большую последовательность, состоящую из положительных [отрицательных] чисел.

Рассмотрим примеры применения теоремы 3.21. Выше в п. 2 мы убедились в том, что для любой точки a бесконечной прямой $\lim\limits_{x\to a} x = a$. Используя теорему 3.21, мы можем утверждать, что

$$\lim_{x\to a} x^2 = \lim_{x\to a} x\cdot\lim_{x\to a} x = a\cdot a = a^2$$

и, вообще, для любого номера n

$$\lim_{x\to a} x^n = a^n.$$

Пусть теперь $P_n(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n$, где b_0, b_1, ..., b_{n-1}, $b_n\neq 0$ — некоторые постоянные числа. Такая функция $P_n(x)$ называется многочленом степени n. В силу той же теоремы 3.21

$$\lim_{x\to a} P_n(x) = \lim_{x\to a} [b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n] = b_0 + b_1 a + \ldots + b_n a^n = P_n(a)$$

для любой точки a бесконечной прямой.

Итак, *многочлен $P_n(x)$ имеет предел в любой точке a бесконечной прямой, и этот предел равен частному значению этого многочлена в точке a.*

Пусть, наконец, $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — два произвольных многочлена степеней n и m соответственно. Частное $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ принято называть рациональной дробью. В силу теоремы 3.21 для случая частного

$$\lim_{x\to a} R(x) = \lim_{x\to a} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \frac{\lim\limits_{x\to a} P_n(x)}{\lim\limits_{x\to a} Q_m(x)} = \frac{P_n(a)}{Q_m(a)} = R(a)$$

в любой точке a, не являющейся корнем многочлена $Q_m(x)$. Таким образом, *рациональная дробь имеет предел в каждой точке a бесконечной прямой, не являющейся корнем ее знаменателя, и этот предел равен частному значению этой дроби в указанной точке a.*

5. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Ради определенности будем рассматривать предел функции в точке a.

Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой в точке a, если предел этой функции в точке a равен нулю.

Примером бесконечно малой в точке a функции может служить функция $\alpha(x) = (x-a)^n$, где n — любое целое положительное число.

В самом деле, в конце предыдущего пункта мы установили, что многочлен $(x-a)^n$ имеет предел в каждой точке a, причем этот предел равен частному значению этого многочлена в точке $x=a$, т. е. равен нулю.

Заметим, что *если функция $f(x)$ имеет предел в точке a, равный числу b, то функция $\alpha(x) = f(x) - b$ является бесконечно малой в точке a.*

Это вытекает из того, что пределы каждой из функций $f(x)$ и $g(x) \equiv b$ в точке a равны числу b, и из теоремы 3.21 для случая разности $f(x) - g(x)$.

Сформулированное утверждение приводит нас к следующему специальному представлению для функции $f(x)$, имеющей равный b предел в точке a:

$$f(x) = b + \alpha(x), \tag{3.63}$$

где $\alpha(x)$ — некоторая бесконечно малая в точке a функция. Представление (3.63) весьма удобно в различных приложениях теории пределов.

Введем теперь понятие бесконечно большой в данной точке a справа [или слева] функции.

Функция $A(x)$ называется бесконечно большой в точке a справа [слева] функцией, если для любой сходящейся к a последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента, все элементы которой больше a [меньше a], соответствующая последовательность значений функции $\{A(x_n)\}$ является бесконечно большой последовательностью, все элементы которой, начиная с некоторого номера, либо положительны, либо отрицательны.

Для бесконечно больших в точке a справа [слева] функций используется следующая символика:

$$\lim_{x\to a+0} A(x) = +\infty \left[\lim_{x\to a-0} A(x) = +\infty\right]$$

или

$$\lim_{x\to a+0} A(x) = -\infty \left[\lim_{x\to a-0} A(x) = -\infty\right].$$

Иногда употребляют более лаконичную символику:

$$A(a+0) = +\infty \,[A(a-0) = +\infty]$$

или

$$A(a+0) = -\infty \,[A(a-0) = -\infty].$$

Остановимся на методике сравнения двух бесконечно малых в данной точке a функций. *Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — две функции, заданные для одних и тех же значений аргумента и обе являющиеся бесконечно малыми в точке a.*

1°. Говорят, что $\alpha(x)$ *является в точке a бесконечно малой более высокого порядка, чем $\beta(x)$ (имеет в точке a более высокий порядок малости, чем $\beta(x)$), если*

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0. \tag{3.64}$$

2°. Говорят, что $\alpha(x)$ *и $\beta(x)$ являются в точке a бесконечно малыми одного порядка (имеют в точке a одинаковый порядок малости), если предел, стоящий в левой части* (3.64), *равен конечному числу, отличному от нуля.*

3°. Говорят, что $\alpha(x)$ *и $\beta(x)$ являются в точке a эквивалентными бесконечно малыми, если предел, стоящий в левой части* (3.64), *равен единице.*

Для обозначения того, что $\alpha(x)$ является в данной точке бесконечно малой более высокого порядка, чем $\beta(x)$, используют следующую запись:

$$\alpha = o(\beta)$$

(читается: «α равно o малому от β»).

Итак, *символ $o(\beta)$ обозначает любую бесконечно малую в данной точке a функцию, имеющую в этой точке более высокий порядок малости, чем бесконечно малая в той же точке функция*

$\beta(x)$. Из этого определения символа «o малое» вытекают следующие его свойства:

1) $o(\beta)+o(\beta)=o(\beta)$, $o(\beta)-o(\beta)=o(\beta)$;

2) если $\gamma=o(\beta)$, то $o(\beta)+o(\gamma)=o(\beta)$;

3) если α и β — любые две бесконечно малые в данной точке функции, то $\alpha\cdot\beta=o(\alpha)$ и $\alpha\cdot\beta=o(\beta)$.

Аналогично сравниваются две бесконечно большие в данной точке a справа (или слева) функции.

Пусть $A(x)$ и $B(x)$ определены для одних и тех же значений аргумента и для определенности

$$\lim_{x\to a+0} A(x)=+\infty, \quad \lim_{x\to a+0} B(x)=+\infty.$$

1°. Говорят, что $A(x)$ *имеет в точке a справа более высокий порядок роста, чем $B(x)$, если функция* $\frac{A(x)}{B(x)}$ *является бесконечно большой в точке a справа.*

2°. Говорят, что $A(x)$ *и $B(x)$ имеют в точке a справа одинаковый порядок роста, если предел функции* $\frac{A(x)}{B(x)}$ *при $x\to a+0$ равен конечному числу, отличному от нуля.*

Приведем примеры сравнения бесконечно малых и бесконечно больших функций.

1. Функции $\alpha(x)=x^3-x^5$ и $\beta(x)=5x^3+x^4$ являются в точке $x=0$ бесконечно малыми одного порядка, ибо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3-x^5}{5x^3+x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1-x^2}{5+x}=\frac{1}{5}.$$

2. Функции $\alpha(x)=(x-2)^2\cdot(x-1)$ и $\beta(x)=(x-2)^2$ являются в точке $x=2$ эквивалентными бесконечно малыми, ибо

$$\lim_{x\to 2}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2(x-1)}{(x-2)^2}=\lim_{x\to 2}(x-1)=1.$$

3. Функции $A(x)=\frac{2+x}{x}$ и $B(x)=\frac{1}{x}$ являются бесконечно большими одинакового порядка роста в точке $x=0$ как справа, так и слева, ибо

$$\lim_{x\to 0}\frac{A(x)}{B(x)}=\lim_{x\to 0}(2+x)=2.$$

Аналогично определяются и сравниваются функции, бесконечно малые или бесконечно большие при $x\to\infty$, а также при $x\to+\infty$ (соответственно при $x\to-\infty$).

§ 5. ОБЩЕЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ ПО БАЗЕ

Анализируя определения различных видов предела функции $f(x)$ по Коши, мы легко можем заметить, что во всех этих определениях требуется, чтобы для любого $\varepsilon>0$ все значения этой функции, отвечающие значениям аргумента x, принадлежащим некоторому множеству C_δ, удовлетворяли неравенству (3.58), т. е. принадлежали ε-окрестности b.

При этом множество C_δ, определенное для всех $\delta>0$, имеет разный вид при определении различных видов предела. При определении предела в точке a множество C_δ представляет собой проколотую δ-окрестность точки a, при определении правого [левого] предела в точке a множество C_δ представляет собой интервал $(a, a+\delta)$ [соответственно $(a-\delta, a)$], при определении предела при $x\to\infty$ множество C_δ представляет собой внешнюю часть сегмента $[-\delta, +\delta]$ и, наконец, при определении предела при $x\to\infty$ [при $x\to-\infty$] множество C_δ представляет собой открытую полупрямую $(\delta, +\infty)$ [соответственно $(-\infty, -\delta)$].

Если функция $f(x)$ задана на множестве $\{x\}$, то во всех определениях пределов по Коши требуется, чтобы неравенство (3.58) было справедливо для тех элементов множества $\{x\}$, которые принадлежат соответствующему множеству C_δ. Договоримся обозначать символом B_δ подмножество тех элементов $\{x\}$, которые принадлежат C_δ, т. е. положим

$$B_\delta=\{x\}\cap C_\delta.$$

Естественно, возникает вопрос, какими общими свойствами обладает совокупность всех подмножеств B_δ множества $\{x\}$.

Анализ условий, при которых формулируются определения 1*—4* пределов функции по Коши, приводит нас к выводу, что множество $\{x\}$ задания функции $f(x)$ всякий раз имеет хотя бы один элемент, принадлежащий C_δ, т. е. множество B_δ *всегда не является пустым.*

Далее легко убедиться в том, что для всех видов пределов пересечение двух любых множеств совокупности $\{B_\delta\}$ представляет собой некоторое множество той же совокупности.

Так, например, пересечение двух множеств B_δ и B_δ', первое из которых состоит из значений аргумента, принадлежащих проколотой δ-окрестности точки a, а второе — из значений аргумента, принадлежащих проколотой δ'-окрестности точки a, представляет собой совокупность значений аргумента, принадлежащих проколотой δ''-окрестности точки a, где δ'' — наименьшее из двух положительных чисел δ и δ', т. е. представляет собой множество B_δ'' той же совокупности $\{B_\delta\}$.

В более общей ситуации, которая может встретиться, например, при изучении функции нескольких переменных, *пересече-*

ние двух любых множеств совокупности $\{B_\delta\}$ само может не являться элементом этой совокупности, но обязательно содержит элемент этой совокупности.

Проведенное рассмотрение, естественно, приводит нас к фундаментальному понятию базы множества $\{x\}$ задания функции.

Определение 1. *Будем говорить, что бесконечная совокупность $B=\{B_\delta\}$ подмножеств B_δ множества $\{x\}$ образует базу (или базис фильтра) множества $\{x\}$, если для элементов этой совокупности выполнены два требования: 1) каждый элемент B_δ является непустым подмножеством множества $\{x\}$; 2) в пересечении любых двух элементов совокупности $\{B_\delta\}$ обязательно содержится некоторый элемент этой же совокупности.*

Приведем примеры наиболее употребительных баз (базисов фильтра).

1°. Пусть функция $f(x)$ задана на множестве $\{x\}$, имеющем хотя бы один элемент в любой проколотой δ-окрестности точки a. Указанную проколотую δ-окрестность точки a обозначим символом C_δ и положим $B_\delta=\{x\}\cap C_\delta$. Очевидно, совокупность $B=\{B_\delta\}$ множеств B_δ при всех $\delta>0$ образует базу множества $\{x\}$, ибо каждое множество B_δ при любом $\delta>0$ не является пустым и пересечение любых двух множеств совокупности $\{B_\delta\}$, как уже отмечалось выше, представляет собой множество из той же совокупности.

Рассмотренную базу $\{B_\delta\}$ принято обозначать символом $x\to a$.

2°. Пусть функция $f(x)$ задана на множестве $\{x\}$, имеющем при любом $\delta>0$ хотя бы один элемент, принадлежащий интервалу $(a, a+\delta)$ [соответственно $(a-\delta, a)$]. Обозначив указанный интервал символом C_δ, положим $B_\delta=\{x\}\cap C_\delta$. Тривиально проверяется, что совокупность $B=\{B_\delta\}$ множеств B_δ, отвечающих всевозможным $\delta>0$, образует базу множества $\{x\}$.

Указанную базу принято обозначать символом $x\to a+0$ [соответственно $x\to a-0$].

3°. Пусть функция $f(x)$ задана на множестве $\{x\}$, имеющем хотя бы один элемент вне сегмента $[-\delta, +\delta]$ при любом $\delta>0$. Положим $C_\delta=(-\infty, +\infty)\setminus[-\delta, +\delta]$, $B_\delta=\{x\}\cap C_\delta$. Легко проверить, что совокупность $B=\{B_\delta\}$ образует базу множества $\{x\}$.

Эту базу принято обозначать символом $x\to\infty$.

4°. Пусть функция $f(x)$ задана на множестве $\{x\}$, имеющем при любом $\delta>0$ хотя бы один элемент на полупрямой $(+\delta, +\infty)$ [соответственно $(-\infty, -\delta)$]. Обозначим указанную полупрямую символом C_δ и положим $B_\delta=\{x\}\cap C_\delta$. Легко убедиться в том, что совокупность $B=\{B_\delta\}$ образует базу множества $\{x\}$.

Эту базу обозначают символом $x\to+\infty$ [соответственно $x\to-\infty$].

5°. Пусть, наконец, множество $\{x\}$ представляет собой множество всех натуральных чисел 1, 2, 3, ..., n, ... Положив $B_\delta = \{x\} \cap (+\delta, +\infty)$ для любого $\delta > 0$, мы легко убедимся и в том, что совокупность $B = \{B_\delta\}$ образует базу множества $\{x\}$.

Эту базу принято обозначать символом $n \to \infty$.

Сформулируем теперь фундаментальное определение предела функции $f(x)$ по базе B множества ее задания, содержащее в себе как все рассмотренные выше виды предела функции, так и предел числовой последовательности.

Предположим, что функция $f(x)$ задана на множестве $\{x\}$ и что совокупность $B = \{B_\delta\}$ подмножеств B_δ множества $\{x\}$ образует базу множества $\{x\}$.

Множество всех значений, которые принимает функция $f(x)$, когда ее аргумент x пробегает множество B_δ, договоримся называть образом множества B_δ и обозначать символом $f(B_\delta)$.

Определение 2. *Число b называется пределом функции $f(x)$ по базе B множества ее задания, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой элемент B_δ базы B, образ $f(B_\delta)$ которого принадлежит ε-окрестности точки b, т. е. принадлежит интервалу $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$.*

Для обозначения предела функции $f(x)$ по базе B множества ее задания будем использовать символ

$$\lim_B f(x) = b.$$

Читатель без труда проверит, что это общее определение предела по базе содержит в себе как частные случаи изученные выше виды пределов, отвечающие базам $x \to a$, $x \to a+0$, $x \to a-0$, $x \to \infty$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ и $n \to \infty$.

Легко проверить также, что для общего определения предела по базе остаются справедливыми основные свойства предела, отвечающего простейшей базе $x \to a$.

Мы ограничимся тем, что докажем критерий Коши существования общего предела функции $f(x)$ по базе B множества ее задания.

Теорема 3.22. *Для существования предела функции $f(x)$ по базе $B = \{B_\delta\}$ множества ее задания необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашелся элемент B_δ базы B, образ $f(B_\delta)$ которого содержится в некотором интервале длины 2ε.*

Доказательство. 1) *Необходимость* очевидна: если существует предел b функции $f(x)$ по базе B, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется элемент этой базы B_δ, образ которого $f(B_\delta)$ содержится в интервале $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$, имеющем длину 2ε.

2) *Достаточность.* Пусть для любого $\varepsilon > 0$ существует элемент B_δ базы B, образ которого $f(B_\delta)$ содержится в некотором интервале длины 2ε. Рассмотрим бесконечно малую последова-

тельность положительных чисел $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$. Для каждого ε_n найдется элемент базы B_{δ_n}, образ которого $f(B_{\delta_n})$ содержится в некотором интервале длины $2\varepsilon_n$.

По определению базы в пересечении элементов B_{δ_1} и B_{δ_2} обязательно лежит некоторый элемент базы, который мы обозначим символом $\widehat{B}_{\delta_2}$. Образ этого элемента $f(\widehat{B}_{\delta_2})$ лежит как в некотором интервале I_1 длины $2\varepsilon_1$, так и в некотором интервале I_2' длины $2\varepsilon_2$. Пересечение интервалов I_1 и I_2' представляет собой интервал I_2 длины, не большей $2\varepsilon_2$, содержащийся в интервале I_1. Далее, по определению базы в пересечении элементов $\widehat{B}_{\delta_2}$ и B_{δ_3} обязательно лежит некоторый элемент базы, который мы обозначим символом $\widehat{B}_{\delta_3}$. Образ этого элемента $f(\widehat{B}_{\delta_3})$ лежит как в интервале I_2 длины, не большей $2\varepsilon_2$, так и в некотором интервале I_3' длины $2\varepsilon_3$. Пересечение интервалов I_2 и I_3' представляет собой интервал I_3 длины, не большей $2\varepsilon_3$, содержащийся в интервале I_2.

Продолжая эти рассуждения далее, мы построим последовательность элементов базы $\widehat{B}_{\delta_2}, \widehat{B}_{\delta_3}, \ldots, \widehat{B}_{\delta_n}, \ldots$ таких, что образ $f(\widehat{B}_{\delta_n})$ каждого элемента $\widehat{B}_{\delta_n}$ содержится в некотором интервале I_n длины, не большей $2\varepsilon_n$, причем в последовательности интервалов $I_2, I_3, \ldots, I_n, \ldots$ каждый следующий интервал содержится в предыдущем. Обозначим символом $\bar{I}_n$ сегмент, получающийся добавлением к интервалу I_n его концов. Так как последовательность $\bar{I}_2, \bar{I}_3, \ldots, \bar{I}_n, \ldots$ представляет собой стягивающуюся систему сегментов (см. п. 2 § 2), то в силу следствия из теоремы 3.15 существует, и притом единственная, точка b, принадлежащая всем сегментам.

Остается доказать, что b является пределом функции $f(x)$ по базе B, т. е. убедиться в том, что для любого $\varepsilon>0$ найдется элемент базы B, образ которого содержится в интервале $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$.

В силу того, что система сегментов $\{\bar{I}_n\}$ является стягивающейся и b является общей точкой всех сегментов, мы можем утверждать, что для любого $\varepsilon>0$ найдется сегмент $\bar{I}_n$ с достаточно большим номером n, содержащийся в интервале $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$. Это означает, что при соответствующем номере n элемент базы $\widehat{B}_{\delta_n}$ имеет образ $f(\widehat{B}_{\delta_n})$, содержащийся в интервале $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$. Теорема доказана.

Подчеркнем, что доказанная теорема содержит в качестве частных случаев как критерий Коши сходимости числовой последовательности, так и критерии Коши существования всех рассмотренных выше видов предела функции.

В качестве возможных обобщений изложенной теории можно рассматривать функции, заданные на подмножествах произвольного метрического пространства (см. по этому поводу дополнение 2 к гл. 12).

Замечание. Базы B и D множества $\{x\}$ называются эквивалентными, если для любого элемента B_{δ_1} базы B найдется такой элемент D_{δ_2} базы D, что $D_{\delta_2} \subset B_{\delta_1}$, и для любого элемента D_{δ_1} базы D найдется такой элемент B_{δ_2} базы B, что $B_{\delta_2} \subset D_{\delta_1}$. Совокупность всевозможных эквивалентных между собой баз B множества $\{x\}$ называется фильтром множества $\{x\}$.

Нетрудно убедиться, что утверждения о пределах функции по *эквивалентным базам B и D справедливы одновременно.*

Глава 4

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

В настоящей главе будет всесторонне изучаться важнейшее понятие математического анализа — понятие непрерывности функции.

В дополнении 2 к гл. 12 понятие непрерывности будет введено в общей ситуации, когда задано отображение одного метрического пространства в другое.

§ 1. ПОНЯТИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИИ

1. Определение непрерывности функции. Пусть точка a принадлежит области задания функции $f\{x\}$* и любая ε-окрестность точки a содержит отличные от a точки области задания функции $f\{x\}$**.

Формальное определение непрерывности в точке a. *Функция $f\{x\}$ называется непрерывной в точке a, если функция $f(x)$ имеет в точке a предел и этот предел равен частному значению $f(a)$ функции $f(x)$ в точке a.*

Используя определения предела функции $y=f(x)$ в точке a по Гейне и по Коши, мы приходим к определению непрерывности функции в данной точке a по Гейне и по Коши.

Определение 1 (непрерывность в точке a по Гейне). *Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке a, если для любой сходящейся к a последовательности значений аргумента $x_1, x_2, \ldots, x_n$, соответствующая последовательность значений функции $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ сходится к числу $f(a)$.*

Замечание 1. По сравнению с определением 1 предела функции по Гейне (см. п. 2 § 4, гл. 3) в определении непрерывности по Гейне мы опустили требование, обязывающее все элементы последовательности $\{x_n\}$ быть отличными от a. Это можно сделать в силу того, что добавление к элементам последовательности $\{f(x_n)\}$, сходящейся к числу $f(a)$, любого числа новых элементов, равных $f(a)$, не нарушит сходимости этой последовательности к $f(a)$.

---

* Заметим, что этого не требовалось, когда мы рассматривали предел функции $f(x)$ в точке a.

** Т. е. точка a является предельной точкой множества $\{x\}$, на котором задана функция $f(x)$.

Определение 1* (непрерывность в точке a по Коши). *Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a, если для любого положительного числа ε найдется отвечающее ему положительное число δ такое, что для всех значений аргумента x, удовлетворяющих условию $|x-a|<\delta$, справедливо неравенство $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.*

Замечание 2. По сравнению с определением 1* предела функции по Коши (см. п. 2 § 4, гл. 3) в определении непрерывности по Коши мы опустили требование, обязывающее все значения аргумента x удовлетворять неравенству $|x-a|>0$, т. е. быть отличными от a. Это можно сделать в силу того, что для значений $x=a$ разность $f(x)-f(a)$ равна нулю и удовлетворяет неравенству $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ при любом $\varepsilon>0$.

Условие непрерывности функции $f(x)$ в точке a символически можно выразить следующим равенством:

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a).$$

Так как $a=\lim\limits_{x\to a} x$, то этому равенству можно придать следующую форму:

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(\lim_{x\to a} x).$$

Следовательно, для непрерывной в точке a функции символ $\lim\limits_{x\to a}$ предельного перехода и символ f характеристики функции можно менять местами.

Из теоремы об эквивалентности определений предельного значения по Гейне и по Коши (см. теорему 3.19 из п. 2 § 4 гл. 3) следует, что *определения непрерывности функции по Гейне и по Коши (определения 1 и 1*) эквивалентны.*

Сформулируем теперь определение односторонней непрерывности функции $f(x)$ в точке a, т. е. непрерывности в точке a либо только справа, либо только слева.

От множества $\{x\}$ задания функции $f(x)$ мы на этот раз должны потребовать, чтобы это *множество включало точку a и для любого $\delta>0$ имело хотя бы один элемент, лежащий на интервале $(a, a+\delta)$ [соответственно $(a-\delta, a)$].*

Формальное определение непрерывности в точке a справа [слева]. *Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a справа [слева], если правый [левый] предел этой функции в точке a существует и равен частному значению $f(a)$ функции $f(x)$ в точке a.*

Используя определения правого [левого] предела функции $f(x)$ в точке a по Гейне и по Коши, мы придем к определениям непрерывности функции $f(x)$ в точке a справа [слева] по Гейне и по Коши.

Определение 2 (непрерывность функции в точке a справа [слева] по Гейне). *Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a справа [слева], если для любой сходящейся к a последовательности значений аргумента $\{x_n\}$, все элементы которой удовлетворяют условию $x_n > a$ $[x_n < a]$, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к числу $f(a)$.*

Заметим, что в этом определении условие $x_n > a$ $[x_n < a]$ можно заменить менее жестким условием $x_n \geqslant a$ $[x_n \leqslant a]$, ибо добавление к последовательности $\{f(x_n)\}$, сходящейся к $f(a)$, какого угодно числа новых элементов, равных $f(a)$, не нарушит сходимости этой последовательности к $f(a)$.

В применениях более эффективно условие $x_n > a$ $[x_n < a]$.

Определение 2* (непрерывность функции в точке a справа [слева] по Коши). *Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a справа [слева], если для любого положительного числа ε найдется отвечающее ему положительное число δ такое, что для всех значений аргумента x, удовлетворяющих условию $a < x < a + \delta$ $[a - \delta < x < a]$, справедливо неравенство*

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Заметим, что и в этом определении условие $a < x < a + \delta$ $[a - \delta < x < a]$ можно было бы заменить менее жестким условием $a \leqslant x < a + \delta$ $[a - \delta < x \leqslant a]$.

Эквивалентность определений 2 и 2 вытекает из эквивалентности соответствующих определений предела функции.*

Тот факт, что функция $f(x)$ непрерывна в точке a справа [слева], записывают так:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a) \text{ или } f(a+0) = f(a)$$

$$\left[\lim_{x \to a-0} f(x) = f(a) \text{ или } f(a-0) = f(a)\right].$$

Замечание 3. *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке a и слева, и справа, то она непрерывна в этой точке.* Действительно, в силу утверждения, доказанного в п. 2 § 4 гл. 3, в этом случае существует предел функции в точке a, равный $f(a)$.

Точки, в которых функция не обладает свойством непрерывности, называются точками разрыва этой функции.

Рассмотрим примеры.

1) Степенная функция $f(x) = x^n$, где n — натуральное число, непрерывна в каждой точке a бесконечной прямой $(-\infty, +\infty)$.

Действительно, в гл. 3 было установлено, что предельное значение этой функции в любой точке a бесконечной прямой равно частному значению a^n.

2) Многочлены и рациональные дроби имеют в каждой точке области задания предельное значение, равное частному значению (см. п. 3 § 4 гл. 3). Поэтому они являются непрерывными функциями в каждой точке области задания.

3) Функция $f(x)=\operatorname{sgn} x$ имеет разрыв в точке $x=0$ и непрерывна во всех остальных точках числовой оси. Действительно, в точке $x=0$, как было показано в гл. 3, существуют правый (равный $+1$) и левый (равный -1) пределы функции $\operatorname{sgn} x$. Поскольку эти односторонние пределы не равны друг другу, функция $\operatorname{sgn} x$ в точке 0 разрывна (не является непрерывной). В остальных точках оси она обладает предельным значением, равным частному значению, и непрерывна.

4) Функция Дирихле $D(x)$ (см. § 4 гл. 3) разрывна в каждой точке числовой оси, поскольку она не имеет предельного значения ни в одной точке.

Заметим, однако, что функция $f(x)=x\cdot D(x)$, где $D(x)$ — функция Дирихле, является непрерывной в точке $x=0$ и разрывной во всех остальных точках бесконечной прямой. Разрывность $f(x)$ в любой точке $x_0\neq 0$ устанавливается точно так же, как для функции $D(x)$ (для любой сходящейся к x_0 последовательности $\{x_n\}$ рациональных точек соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к числу $x_0\neq 0$, а для любой сходящейся к x_0 последовательности $\{x_n\}$ иррациональных точек соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к нулю).

Убедимся в том, что функция $f(x)=x\cdot D(x)$ непрерывна в точке $x=0$. Для любой бесконечно малой последовательности значений аргумента $\{x_n\}$ последовательность $\{D(x_n)\}$ ограничена, а потому (в силу теоремы 3.3 из гл. 3) последовательность $f(x_n)=x_n\cdot D(x_n)$ является бесконечно малой, т. е. имеет предел нуль, равный частному значению $f(0)$.

Мы будем говорить, что *функция непрерывна на множестве $\{x\}$, если она непрерывна в каждой точке этого множества.*

Например, функция, непрерывная в каждой точке интервала, называется непрерывной на интервале.

Особо *договоримся называть функцию $f(x)$ непрерывной на сегменте $[a, b]$, если она непрерывна в каждой внутренней точке этого сегмента и, кроме того, непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b.*

Выше, давая определение непрерывности функции $f(x)$ в точке a, мы предположили, что точка a обладает тем свойством, что в любой ее ε-окрестности содержатся точки области задания, отличные от a. Формально этого предположения можно бы было и не делать и допустить, что точка a обладает ε-окрестностью, свободной от точек области задания функции, а в самой точке a функция определена. В этом случае формально функцию $f(x)$ можно считать непрерывной в точке a. Однако вся содержательная часть понятия непрерывности функции относится как раз

к случаю, когда a — предельная точка области определения функции.

Определение непрерывности функции можно дать и в следующей, эквивалентной форме.

Определение 1**. *Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a, если для любой окрестности точки $f(a)$ найдется такая окрестность точки a, что образ всех точек множества задания функции, лежащих в этой окрестности точки a, при отображении, осуществляемом функцией $f(x)$, целиком лежит в указанной окрестности точки $f(a)$.*

В дополнении 2 к гл. 12 будет показано (даже в более общей ситуации), что последнее определение непрерывности эквивалентно предыдущим. Предлагается в качестве упражнения проверить это.

Используя введенное в § 5 гл. 3 общее определение предела функции $f(x)$ по базе B множества ее задания, мы можем объединить в одной формулировке понятие непрерывности в точке a, в точке a справа и в точке a слева.

Пусть функция $f(x)$ задана на множестве $\{x\}$, которое включает точку a и допускает базу B одного из видов $x \to a$, $x \to a+0$, $x \to a-0$*.

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a, если ее предел по базе B множества ее задания существует и равен $f(a)$.

2. Арифметические операции над непрерывными функциями. Убедимся в том, что арифметические операции над непрерывными функциями приводят снова к непрерывным функциям.

Справедлива следующая теорема.

Основная теорема 4.1. *Пусть на одном и том же множестве заданы функции $f(x)$ и $g(x)$, непрерывные в точке a. Тогда функции $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ и $\frac{f(x)}{g(x)}$ непрерывны в точке a (в случае частного нужно дополнительно требовать $g(a)\neq 0$).*

Доказательство. Так как непрерывные в точке a функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют в точке a пределы, соответственно равны $f(a)$ и $g(a)$, то в силу теоремы 3.21 из гл. 3 пределы функций $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ и $\frac{f(x)}{g(x)}$ существуют и равны соответственно $f(a)+g(a)$, $f(a)-g(a)$, $f(a)\cdot g(a)$ и $\frac{f(a)}{g(a)}$. Но как раз эти величины равны частным значениям перечисленных функций в точке a. По определению эти функции непрерывны в точке a, что и требовалось доказать.

---

* См. § 5 гл. 3.

3. Сложная функция и ее непрерывность. *Функции, полученные в результате суперпозиции двух или нескольких функций, мы будем называть сложными.* Под суперпозицией двух функций мы понимаем функцию, полученную в результате наложения или последовательного применения указанных двух функций в определенном порядке. Ясно, что достаточно определить сложную функцию, полученную в результате суперпозиции только двух функций. Указанный алгоритм можно будет применять, беря суперпозицию трех и большего конечного числа функций.

Пусть функция $x=\varphi(t)$ задана на множестве $\{t\}$, и пусть $\{x\}$ — множество ее значений. Допустим, что на множестве $\{x\}$ задана функция $y=f(x)$. Тогда говорят, что на множестве $\{t\}$ задана сложная функция $y=f[\varphi(t)]=F(t)$ или $y=f(x)$, где $x=\varphi(t)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.2. *Пусть функция $x=\varphi(t)$ непрерывна в точке a, а функция $y=f(x)$ непрерывна в точке $b=\varphi(a)$. Тогда сложная функция $y=f[\varphi(t)]=F(t)$ непрерывна в точке a.*

Доказательство. Пусть $\{t_n\}$ — произвольная последовательность значений аргумента сложной функции, сходящаяся к a. Так как функция $x=\varphi(t)$ непрерывна в точке a, то (в силу определения 1 непрерывности по Гейне) соответствующая последовательность значений функции $x_n=\varphi(t_n)$ сходится к числу $b=\varphi(a)$. Далее, поскольку функция $y=f(x)$ непрерывна в точке $b=\varphi(a)$ и для нее указанная выше последовательность $\{x_n\}$, сходящаяся к $b=\varphi(a)$, является последовательностью значений аргумента, то (в силу того же определения 1 непрерывности по Гейне) соответствующая последовательность значений функции $f(x_n)=$ $=f[\varphi(t_n)]=F(t_n)$ сходится к числу $f(b)=f[\varphi(a)]=F(a)$.

Итак, для любой последовательности $\{t_n\}$ значений аргумента сложной функции, сходящейся к a, соответствующая последовательность значений самой сложной функции $\{F(t_n)\}=f[\varphi(t_n)]$ сходится к числу $F(a)=f[\varphi(a)]$. В силу определения 1 непрерывности по Гейне сложная функция непрерывна в точке a. Теорема доказана.

§ 2. СВОЙСТВА МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ

1. Монотонные функции. Введем понятие монотонной функции.

Определение 1. *Функция $f(x)$ называется неубывающей [невозрастающей] на множестве $\{x\}$, если для любых x_1 и x_2 из этого множества таких, что $x_1<x_2$, справедливо неравенство $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ $[f(x_1)\geqslant f(x_2)]$.*

Неубывающие и невозрастающие функции называют монотонными функциями.

Определение 2. *Функция называется возрастающей [убывающей] на множестве $\{x\}$, если для любых x_1 и x_2 из*

этого множества таких, что $x_1<x_2$, *справедливо неравенство* $f(x_1)<f(x_2)$ $[f(x_1)>f(x_2)]$.

Возрастающие и убывающие функции называются строго монотонными.

Приведем примеры монотонных функций.

1. Функция $f(x)=x^3$ — строго монотонна, а именно возрастает на всей числовой оси.

2. Функция $y=x^2$ — возрастает на полуоси $x\geqslant 0$ и убывает на полуоси $x\leqslant 0$.

3. Функция $y=\operatorname{sgn} x$ — неубывающая на всей числовой оси.

4. Функция $f(x)=\frac{1}{x}$ — убывает на множествах $x<0$ и $x>0$.

2. Понятие обратной функции. Пусть функция $y=f(x)$ задана на сегменте $[a, b]$, и пусть сегмент $[\alpha, \beta]$ является множеством значений этой функции. Пусть, кроме того, каждому y из сегмента $[\alpha, \beta]$ соответствует только одно значение x из сегмента $[a, b]$, для которого $f(x)=y$. Тогда на сегменте $[\alpha, \beta]$ определена функция, которая каждому y из $[\alpha, \beta]$ ставит в соответствие то значение x из $[a, b]$, для которого $f(x)=y$. Эта функция обозначается символом $x=f^{-1}(y)$ и называется обратной для функции $y=f(x)$.

В проведенных выше рассуждениях вместо сегментов $[a, b]$ и $[\alpha, \beta]$ можно было бы рассматривать интервалы (a, b) и (α, β) или, например, случай, когда один или оба из этих интервалов превращаются в бесконечную прямую или открытую полупрямую.

Можно рассматривать и самый общий случай, когда задано отображение f одного множества $\{x\}$ на другое множество $\{y\}$, причем отображение f устанавливает взаимно однозначное соответствие между элементами этих множеств. Тогда можно определить обратное отображение f^{-1} множества $\{y\}$ на множество $\{x\}$. В этом случае уравнение $y=f(x)$ можно разрешить относительно x, т. е. можно однозначно определить x, зная элемент y, и мы имеем $x=f^{-1}(y)$.

Отметим, что если $x=f^{-1}(y)$ — обратная функция для $y=f(x)$, то, очевидно, функция $y=f(x)$ является обратной для функции $x=f^{-1}(y)$. Поэтому функции $y=f(x)$ и $x=f^{-1}(y)$ называются взаимно обратными. Очевидно, что $f[f^{-1}(y)]=y$, $f^{-1}[f(x)]=x$.

Приведем примеры взаимно обратных функций.

1. Пусть на сегменте $[a, b]$ задана функция $y=2x$. Множеством значений этой функции будет сегмент $[2a, 2b]$. Функция $x=f^{-1}(y)=\frac{y}{2}$, определенная на $[2a, 2b]$, будет обратной к заданной функции $y=2x$.

2. Рассмотрим на сегменте $[0, 2]$ функцию $y=x^2$. Множество значений этой функции есть сегмент $[0, 4]$. На этом сегменте определена обратная к заданной функции функция $x=\sqrt{y}$.

3. Рассмотрим на сегменте [0, 1] функцию

$$y=\begin{cases} x, \text{ если } x\text{ — рациональное число,} \\ 1-x, \text{ если } x\text{ — иррациональное число.} \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что заданная на сегменте [0, 1] функция

$$x=\begin{cases} y, \text{ если } y\text{ — рациональное число,} \\ 1-y, \text{ если } y\text{ — иррациональное число,} \end{cases}$$

будет обратной к заданной функции.

Докажем несколько утверждений о монотонных функциях.

Начнем с доказательства леммы, справедливой для любой монотонной (не обязательно строго монотонной) функции.

Лемма. *Если функция $f(x)$ является монотонной на сегменте $[a, b]$, то у нее существуют правый и левый пределы в любой внутренней точке сегмента $[a, b]$ и, кроме того, существуют правый предел в точке a и левый предел в точке b.*

Доказательство. Для полного доказательства леммы достаточно доказать два факта: 1) существование правого предела в любой точке c, удовлетворяющей неравенствам $a\leqslant c<b$; 2) существование левого предела в любой точке c, удовлетворяющей неравенствам $a<c\leqslant b$.

Мы установим только первый из указанных двух фактов, ибо второй устанавливается аналогично.

При этом мы проведем все рассуждения для функции $f(x)$, неубывающей на сегменте $[a, b]$ (ибо для невозрастающей функции они проводятся аналогично).

Итак, пусть функция $f(x)$ не убывает на $[a, b]$, c — любая точка, удовлетворяющая неравенствам $a\leqslant c<b$. Рассмотрим множество $\{f(x)\}$ всех значений функции $f(x)$ для значений аргумента x, удовлетворяющих неравенствам $c<x\leqslant b$. Это множество $\{f(x)\}$ непусто (в силу того, что $c<b$) и ограничено снизу (в силу неубывания функции $f(x)$ для всех x из полусегмента $c<x\leqslant b$ справедливо неравенство $f(c)\leqslant f(x)$, которое означает, что $f(c)$ является нижней гранью рассматриваемого множества). По основной теореме 2.1 гл. 2 у рассматриваемого множества существует точная нижняя грань, которую мы обозначим символом γ. Докажем, что это число γ и является правым пределом функции $f(x)$ в точке c, т. е. докажем, что $\gamma=f(c+0)$.

Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$. По определению точной нижней грани найдется положительное число δ, не превосходящее $b-c$ и такое, что значение функции $f(c+\delta)$ удовлетворяет неравенству $f(c+\delta)<\gamma+\varepsilon$.

Но тогда в силу неубывания функции $f(x)$ для всех x из интервала $c<x<c+\delta$ и подавно будет справедливо неравенство $f(x)<\gamma+\varepsilon$. Так как, кроме того, для всех x из указанного интервала справедливо неравенство $\gamma\leqslant f(x)$, то мы получим, что для всех x из интервала $c<x<c+\delta$ справедливы неравенства

$$\gamma \leqslant f(x) < \gamma + \varepsilon \text{ или } |\gamma - f(x)| < \varepsilon,$$

а это и означает (в силу определения правого предела по Коши), что число γ является правым пределом $f(x)$ в точке c. Лемма доказана.

Замечание к лемме. В предположениях леммы при условии неубывания $f(x)$ для любых c и x, удовлетворяющих соотношениям $a \leqslant c < x \leqslant b$, будут справедливы неравенства

$$f(a) \leqslant f(c) \leqslant f(c+0) \leqslant f(x) \leqslant f(b), \tag{4.1}$$

а для любых c и x, удовлетворяющих соотношениям $a \leqslant x < c \leqslant b$, будут справедливы неравенства

$$f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(c-0) \leqslant f(c) \leqslant f(b). \tag{4.2}$$

При условии невозрастания $f(x)$ все знаки в неравенствах (4.1) и (4.2) следует заменить на противоположные.

Пусть, например, $f(x)$ не убывает на $[a, b]$ и $a \leqslant c < x \leqslant b$. Тогда $f(a) \leqslant f(c) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$. Из последних неравенств сразу же вытекает, что $f(a) \leqslant f(c) \leqslant f(c+0) \leqslant f(b)$. Для завершения доказательства неравенств (4.1) следует убедиться в том, что $f(c+0) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$ для любого x из полуинтервала $c < x \leqslant b$, но это сразу вытекает из того, что число $\gamma = f(c+0)$ является, как доказано в лемме, точной нижней гранью множества значений $f(x)$ на полуинтервале $c < x \leqslant b$. Справедливость неравенств (4.2) проверяется аналогично.

Докажем теперь три теоремы о строго монотонных функциях.

Теорема 4.3. *Пусть функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на сегменте $[a, b]$, и пусть $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$. Тогда, если множеством всех значений функции $y = f(x)$ является сегмент $[\alpha, \beta]$ (соответственно сегмент $[\beta, \alpha]$), то на этом последнем сегменте определена обратная для $y = f(x)$ функция $x = f^{-1}(y)$, которая также возрастает (убывает) на указанном сегменте.*

Доказательство. Проведем все рассуждения в предположении, что $f(x)$ возрастает на сегменте $[\alpha, \beta]$ (для убывающей функции рассуждения аналогичны).

Убедимся в том, что функция $y = f(x)$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между сегментами $a \leqslant x \leqslant b$ и $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$. Действительно, то, что каждому x из $[a, b]$ соответствует только одно значение y из $[\alpha, \beta]$, следует из самого понятия функции $y = f(x)$, а то, что каждому y из $[\alpha, \beta]$ соответствует только одно x из $[a, b]$, вытекает из возрастания функции $y = f(x)$.

Убедимся теперь, что если $y = f(x)$ возрастает на $[a, b]$, то и $x = f^{-1}(y)$ также возрастает на $[\alpha, \beta]$. Пусть $y_1 < y_2$, где y_1 и y_2 — любые два числа из $[\alpha, \beta]$. Тогда $x_1 = f^{-1}(y_1) < x_2 = f^{-1}(y_2)$, ибо из неравенства $x_1 \geqslant x_2$ и из возрастания функции $y = f(x)$ следовало бы, что $y_1 \geqslant y_2$, что противоречит неравенству $y_1 < y_2$. Теорема доказана.

Замечание 1. Совершенно аналогично доказывается более общее утверждение: *пусть $y=f(x)$ задана и возрастает (убывает) на некотором множестве $\{x\}$, а $\{y\}$ — множество всех значений этой функции. Тогда на множестве $\{y\}$ определена обратная для $y=f(x)$ функция $x=f^{-1}(y)$, которая также возрастает (убывает) на указанном множестве $\{y\}$.*

Теорема 4.4. *Пусть функция $y=f(x)$ возрастает (или убывает) на сегменте $[a, b]$, и пусть $\alpha=f(a)$, $\beta=f(b)$. Тогда для того, чтобы функция $y=f(x)$ являлась непрерывной на сегменте $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы любое число γ, заключенное между α и β, было значением этой функции.*

Доказательство. Все рассуждения проведем для возрастающей на сегменте $[a, b]$ функции, ибо для убывающей функции они аналогичны.

1) *Необходимость.* Пусть функция $y=f(x)$ возрастает и непрерывна на сегменте $[a, b]$. Требуется доказать, что любое число γ, удовлетворяющее условиям $\alpha<\gamma<\beta$, является значением функции в некоторой точке c сегмента $[a, b]$.

Пусть $\{x\}$ — множество всех значений x из сегмента $[a, b]$, для которых $f(x)\leqslant\gamma$. Это множество $\{x\}$ непусто (ему принадлежит, например, точка a, ибо $f(a)=\alpha<\gamma$) и ограничено сверху (например, числом b). По основной теореме 2.1 гл. 2 у множества $\{x\}$ существует точная верхняя грань, которую мы обозначим через c: $c=\sup\{x\}$. Остается доказать, что $f(c)=\gamma$.

Сначала убедимся в том, что $f(x)\leqslant\gamma$ для всех x из $[a, b]$, лежащих левее c, и $f(x)>\gamma$ для всех x из $[a, b]$, лежащих правее c.

В самом деле, если $x<c$, то по определению точной верхней грани найдется x' из полуинтервала $x<x'\leqslant c$, принадлежащее множеству $\{x\}$, т. е. такое, что $f(x')\leqslant\gamma$. Но тогда из возрастания $f(x)$ будет вытекать, что и $f(x)\leqslant\gamma$ (ибо $f(x)<f(x')$).

Далее, любое x, лежащее правее c, не принадлежит множеству $\{x\}$, а потому для такого x справедливо неравенство $f(x)>\gamma$.

Теперь убедимся в том, что c является внутренней точкой сегмента $[a, b]$. Докажем, что $c<b$. Предположим, что это не так, т. е. допустим, что $c=b$. Возьмем любую сходящуюся к $c=b$ возрастающую последовательность $\{x_n\}$ точек сегмента $[a, b]$. Так как все ее элементы x_n лежат левее c, то $f(x_n)\leqslant\gamma$ для всех номеров n, а поэтому (в силу теоремы 3.13 гл. 3) и $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\leqslant\gamma$. Но так как функция $f(x)$ непрерывна в точке $c=b$, то $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(b)$. Тем самым мы получаем неравенство $\beta=f(b)\leqslant\gamma$, которое противоречит условию $\gamma<\beta$. Полученное противоречие доказывает, что $c<b$.

Совершенно аналогично доказывается, что $a<c$.

Итак, доказано, что c — внутренняя точка сегмента $[a, b]$.

Теперь для того, чтобы доказать, что $f(c)=\gamma$, рассмотрим две

сходящиеся к c с разных сторон последовательности точек сегмента $[a, b]$ — возрастающую последовательность $\{x_n'\}$ и убывающую последовательность $\{x_n''\}$. В силу того, что функция $f(x)$ непрерывна в точке c,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n') = \lim_{n\to\infty} f(x_n'') = f(c).$$

С другой стороны, поскольку $x_n' < c < x_n''$ для любого номера n, то $f(x_n') \leqslant \gamma$, $f(x_n'') > \gamma$ (для любого номера n). Но тогда в силу теоремы 3.13

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n') = f(c) \leqslant \gamma, \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n'') = f(c) \geqslant \gamma,$$

т. е. $f(c) = \gamma$.

Необходимость доказана.

2) *Достаточность*. Пусть функция $f(x)$ возрастает на сегменте $[a, b]$, и пусть любое число γ из сегмента $[\alpha, \beta]$ является значением этой функции. Докажем, что функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$. Достаточно доказать, что $f(x)$ непрерывна справа в любой точке c, удовлетворяющей условиям $a \leqslant c < b$, и непрерывна слева в любой точке c, удовлетворяющей условиям $a < c \leqslant b$.

Мы ограничимся доказательством непрерывности справа в любой точке c, удовлетворяющей условиям $a \leqslant c < b$, ибо вторая часть утверждения доказывается аналогично.

Предположим, что функция $f(x)$ не является непрерывной справа в некоторой точке c, удовлетворяющей условиям $a \leqslant c < b$. Тогда ее правый предел $f(c+0)$, который существует согласно доказанной выше лемме, будет отличен от значения $f(c)$, и поэтому справедливые в силу замечания к указанной лемме неравенства (4.1) примут вид

$$\alpha = f(a) \leqslant f(c) < f(c+0) \leqslant f(x) \leqslant f(b) = \beta \qquad (4.2')$$

(для всех x из полуинтервала $c < x \leqslant b$).

Неравенства (4.2′) означают, что содержащийся в $[\alpha, \beta]$ интервал $(f(c), f(c+0))$ не содержит значений функции $f(x)$*, а это противоречит тому, что любое число γ из сегмента $[\alpha, \beta]$ является значением этой функции. Теорема 4.4 полностью доказана.

Теорема 4.5. *Пусть функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) и непрерывна на сегменте $[a, b]$, и пусть $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$. Тогда на сегменте $[\alpha, \beta]$ (соответственно на сегменте $[\beta, \alpha]$) определена обратная для $y = f(x)$ функция $x = f^{-1}(y)$, которая возрастает (убывает) и непрерывна на указанном сегменте.*

Кратко можно сказать, что из строгой монотонности и непрерывности на сегменте $[a, b]$ данной функции вытекают существо-

* В самом деле, для $x \leqslant c$ значение $f(x)$ удовлетворяет неравенству $f(x) \leqslant f(c)$ (в силу возрастания функции), а для $x > c$ значение $f(x)$ удовлетворяет неравенству $f(c+0) \leqslant f(x)$ (в силу (4.2′)).

вание, строгая монотонность и непрерывность на соответствующем сегменте обратной функции.

Доказательство. Проведем все рассуждения для возрастающей функции, ибо для убывающей функции они проводятся аналогично.

Так как $f(x)$ возрастает и непрерывна на сегменте $[a, b]$, то в силу необходимости теоремы 4.4 множеством всех значений этой функции является сегмент $[\alpha, \beta]$. Но тогда теорема 4.3 обеспечивает существование на этом сегменте возрастающей обратной функции $x=f^{-1}(y)$. Остается доказать непрерывность указанной обратной функции на сегменте $[\alpha, \beta]$. Для этого достаточно учесть, что множеством всех значений обратной функции $x=f^{-1}(y)$ служит сегмент $[a, b]$, где $a=f^{-1}(\alpha)$, $b=f^{-1}(\beta)$, и использовать для этой обратной функции достаточность теоремы 4.4. Доказательство теоремы 4.5 завершено.

Замечание 2. *Можно показать, что из существования обратной функции для функции $f(x)$, непрерывной на сегменте $[a, b]$, следует, что $f(x)$ строго монотонна на этом сегменте* (см. п. 2 § 6 настоящей главы).

§ 3. ПРОСТЕЙШИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Простейшими элементарными функциями, как уже отмечалось, обычно называют следующие функции: $y=x^{\alpha}$, $y=a^{x}$, $y=\log_a x$, $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$, $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arctg} x$, $y=\operatorname{arcctg} x$.

Нашей основной целью является изучение вопроса об определении и непрерывности простейших элементарных функций. Следует заметить, что вопрос об определении простейших элементарных функций далеко не прост. Так, например, показательная функция $y=a^x$ легко может быть определена для рациональных значений аргумента x, вместе с тем эту функцию следует определить для произвольных вещественных значений x, т. е. следует определить возведение вещественного числа в любую вещественную степень x. Далее, определение тригонометрических функций $\sin x$ и $\cos x$ с помощью наглядных геометрических соображений имеет логический пробел. Возможность определить эти функции для всех вещественных значений аргумента x сводится к возможности установления взаимно однозначного соответствия между точками единичной окружности и всеми вещественными числами полусегмента $[0, 2\pi)$.

Всеми этими вопросами мы и будем заниматься в настоящем параграфе.

1. Показательная функция. Начнем наше рассмотрение с определения рациональных степеней положительных чисел. Для того чтобы возвести любое вещественное число x в целую положительную степень n, следует умножить это число x само на себя n раз.

Следовательно, при целом n мы можем считать определенной степенную функцию $y=x^n$ для всех вещественных значений x. Установим некоторые простейшие свойства этой функции.

Утверждение 1. *Степенная функция $y=x^n$ при $x\geqslant 0$ и целом положительном n возрастает и непрерывна.*

Доказательство. Покажем, что функция $y=x^n$ возрастает. Пусть $0\leqslant x_1<x_2$. Тогда $x_2^n-x_1^n=(x_2-x_1)(x_2^{n-1}+x_2^{n-2}\cdot x_1+\ldots+x_1^{n-1})$. Оба сомножителя в правой части, в соответствии с выбором значений x_2 и x_1, положительны. Поэтому положительна и левая часть равенства, т. е. $x_2^n>x_1^n$, а это означает возрастание функции $y=x^n$ при $x\geqslant 0$.

Непрерывность функции $y=x^n$ в любой точке a бесконечной прямой $(-\infty, +\infty)$ была установлена в примере 1 п. 1 § 1 настоящей главы. Утверждение 1 доказано.

Рассмотрим степенную функцию $y=x^n$ на сегменте $[0, N]$, где N — любое положительное число. Так как эта функция непрерывна и возрастает на указанном сегменте, то в силу теоремы 4.5 она имеет на сегменте $[0, N^n]$ возрастающую и непрерывную обратную функцию, которую мы обозначим через $x=y^{1/n}$. Поскольку N можно выбрать как угодно большим, то и N^n также можно сделать сколь угодно большим. Следовательно, функция $x=y^{1/n}$ определена для всех неотрицательных значений y. Меняя для этой функции обозначение аргумента y на x, а обозначение функции x на y, мы получим степенную функцию $y=x^{1/n}$, определенную для всех вещественных $x\geqslant 0$.

Теперь мы в состоянии определить любую рациональную степень r положительного числа a. Определим, прежде всего, $a^{1/n}$ как вещественное число b, равное значению функции $x^{1/n}$ в точке a. Далее, если $r=\frac{m}{n}$, где m и n — целые положительные числа, то мы положим

$$a^r=a^{\frac{m}{n}}=(a^{1/n})^m.$$

Кроме того, положим по определению

$$a^0=1,\ a^{-r}=\left(\frac{1}{a}\right)^r \text{ при } r>0.$$

Тем самым, мы определили любую рациональную степень положительного вещественного числа a.

Выполняются следующие свойства рациональной степени положительных вещественных чисел:

$$(a^r)^s=a^{r\cdot s},\quad a^r\cdot b^r=(a\cdot b)^r,\quad a^r\cdot a^s=a^{r+s}. \qquad (*)$$

Докажем сначала справедливость первого свойства $(*)$.

Заметим, что при целом положительном p равенство $(a^{\frac{m}{n}})^p=$

$=a^{\frac{m\cdot p}{n}}$, в котором под m и n понимаются любые целые положительные числа, заведомо справедливо, ибо как левая, так и правая части этого равенства равны произведению числа $a^{1/n}$ самого на себя $m\cdot p$ раз.

Полагая $r=\frac{m_1}{n_1}$, $s=\frac{m_2}{n_2}$, докажем равенство $(a^r)^s=a^{r\cdot s}$ в ситуации любых положительных рациональных r и s. Положим $c_1=(a^{\frac{m_1}{n_1}})^{\frac{m_2}{n_2}}$, $c_2=a^{\frac{m_1\cdot m_2}{n_1\cdot n_2}}$. Если бы c_1 было отлично от c_2, то из возрастания степенной функции $y=x^{n_2}$ следовало бы, что и $c_1^{n_2}\neq c_2^{n_2}$, а последнее соотношение, в силу уже доказанной справедливости равенства $(a^{\frac{m}{n}})^p=a^{\frac{m\cdot p}{n}}$ при целом p, означало бы, что $(a^{\frac{m_1}{n_1}})^{m_2}\neq a^{\frac{m_1\cdot m_2}{n_1}}$. Полученное соотношение противоречит уже доказанному нами для целых положительных m_1, n_1 и m_2 равенству $(a^{\frac{m_1}{n_1}})^{m_2}=a^{\frac{m_1\cdot m_2}{n_1}}$. Тем самым $c_1=c_2$, и первое равенство $(*)$ доказано для любых положительных рациональных r и s.

Распространение этого равенства на неположительные r и s не представляет труда в силу нашей договоренности о том, что

$$a^0=1,\ a^{-r}=\frac{1}{a^r} \text{ при } r>0.$$

Второе равенство $(*)$ также достаточно доказать для положительного рационального r. Полагая это r равным m/n, где m и n — целые положительные числа, заметим, что нам достаточно доказать равенство $a^{1/n}\cdot b^{1/n}=(a\cdot b)^{1/n}$, ибо перемножением m таких равенств будет доказано общее соотношение $a^r\cdot b^r=(a\cdot b)^r$.

Для доказательства равенства $a^{1/n}\cdot b^{1/n}=(a\cdot b)^{1/n}$ заметим, что в силу свойств взаимно обратных функций $y=x^{1/n}$ и $x=y^n$ мы можем утверждать, что $(b^{1/n})^n=b$, $(a^{1/n})^n=a$, $((ab)^{1/n})^n=ab$. Поэтому, положив $c_1=a^{1/n}\cdot b^{1/n}$, $c_2=(ab)^{1/n}$ и предполагая, что $c_1\neq c_2$, мы получили бы, что $c_1^n\neq c_2^n$, что противоречит равенству $a\cdot b=ab$.

Докажем теперь последнее свойство $(*)$, учитывая, что первые два уже доказаны. Пусть $r=\frac{m_1}{n_1}$, $s=\frac{m_2}{n_2}$, тогда $r=\frac{m_1\cdot n_2}{n_1\cdot n_2}$, $s=\frac{m_2\cdot n_1}{n_2\cdot n_1}$, и мы приходим к следующему равенству:

$$a^r\cdot a^s=(a^{\frac{1}{n_1\cdot n_2}})^{m_1\cdot n_2}\cdot(a^{\frac{1}{n_1\cdot n_2}})^{m_2\cdot n_1}=(a^{\frac{1}{n_1\cdot n_2}})^{m_1\cdot n_2+m_2\cdot n_1}.$$

(Последнее равенство справедливо, так как $m_1\cdot n_2$ и $m_2\cdot n_1$ — целые числа.)

Таким образом,

$$a^r \cdot a^s = a^{\frac{m_1 \cdot n_2 + m_2 \cdot n_1}{n_1 \cdot n_2}} = a^{\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2}} = a^{r+s},$$

что и требовалось.

При $a>1$ и рациональном $r>0$ справедливо неравенство $a^r>1$.

В самом деле, пусть $r=\frac{m}{n}$ и $a^r=a^{m/n}\leqslant 1$. Перемножая почленно n указанных неравенств, получим $a^m\leqslant 1$. Но это неравенство противоречит неравенству $a^m>1$, полученному почленным перемножением m неравенств вида $a>1$.

Отметим также, что если рациональная дробь $r=\frac{m}{n}$ имеет нечетный знаменатель n, то определение рациональной степени можно распространить и на отрицательные числа, полагая при $a>0$, что

$$(-a)^r=a^r, \text{ если } m \text{ четное},$$

$$(-a)^r=-a^r, \text{ если } m \text{ нечетное}.$$

Убедимся в том, что *функция $y=a^x$ при $a>1$, определенная нами на множестве рациональных чисел, монотонно возрастает на этом множестве.*

Действительно, пусть r_1 и r_2 — два рациональных числа таких, что $r_2>r_1$. Тогда

$$a^{r_2}-a^{r_1}=a^{r_1}(a^{r_2-r_1}-1). \tag{4.3}$$

Поскольку $r_2-r_1>0$ и $a>1$, то (в силу установленного выше) $a^{r_2-r_1}>1$. Таким образом, правая часть равенства (4.3) положительна. Следовательно,

$$a^{r_2}-a^{r_1}>0, \text{ т. е. } a^{r_2}>a^{r_1},$$

что и требовалось.

Определим, наконец, функцию $y=a^x$ не только для рациональных значений x, но и для любых вещественных значений. Пусть x — произвольное вещественное число. Рассмотрим всевозможные рациональные числа α и β, удовлетворяющие неравенствам

$$\alpha<x<\beta. \tag{4.4}$$

Определим a^x при $a>1$ как вещественное число y, удовлетворяющее неравенствам

$$a^\alpha\leqslant y\leqslant a^\beta \tag{4.5}$$

при всевозможных рациональных α и β, удовлетворяющих неравенствам (4.4).

Оказывается, что такое число y существует и притом только одно. Следовательно, таким путем функция $y=a^x$ будет определена на множестве всех вещественных x.

Мы покажем, что эта функция возрастает и непрерывна на всей вещественной прямой. Эти результаты содержатся в доказываемых ниже утверждениях.

Утверждение 2. *Для любых фиксированных вещественных чисел x и $a>1$ и всевозможных рациональных чисел α и β, удовлетворяющих неравенствам* (4.4), *существует и притом единственное вещественное число y, удовлетворяющее неравенствам* (4.5).

Доказательство. Докажем сначала существование такого числа y. Фиксируем произвольное рациональное число β, удовлетворяющее правому неравенству (4.4), и рассмотрим всевозможные рациональные числа α, удовлетворяющие левому неравенству (4.4). Так как $\alpha<\beta$ и показательная функция, определенная на множестве рациональных чисел, возрастает, то $a^\alpha<a^\beta$. Таким образом, множество $\{a^\alpha\}$ ограничено сверху, и число a^β является одной из верхних граней этого множества. Из основной теоремы 2.1 следует, что множество $\{a^\alpha\}$ имеет точную верхнюю грань, которую мы обозначим через y. Покажем, что y удовлетворяет неравенствам (4.5). Из определения верхней грани вытекает справедливость левого неравенства (4.5), а справедливость правого неравенства (4.5) вытекает из того, что a^β — одна из верхних граней, а y — точная верхняя грань множества $\{a^\alpha\}$.

Докажем теперь, что такое число y только одно. Достаточно доказать, что для любого $\varepsilon>0$ найдутся такие рациональные числа α и β, удовлетворяющие неравенствам (4.4), для которых $a^\beta-a^\alpha<\varepsilon$. Тогда любые два числа y_1 и y_2, удовлетворяющие неравенствам (4.5), обязаны совпасть, так как разность между ними по модулю меньше любого наперед заданного числа $\varepsilon>0$.

Фиксируем произвольное положительное число ε и некоторое рациональное число β_0, удовлетворяющее правому неравенству (4.4). Тогда так как $a^\alpha<a^{\beta_0}$, то

$$a^\beta-a^\alpha=a^\alpha(a^{\beta-\alpha}-1)\leqslant a^{\beta_0}(a^{\beta-\alpha}-1).$$

Неравенство $a^\beta-a^\alpha<\varepsilon$ будет доказано, если мы установим возможность выбора в неравенствах (4.4) таких рациональных α и β, что $a^{\beta-\alpha}-1<\frac{\varepsilon}{a^{\beta_0}}$.

В гл. 2 было доказано, что для любого натурального n можно выбрать рациональные числа α и β, удовлетворяющие неравенствам (4.4), так, что разность $\beta-\alpha$ будет меньше $1/n$. Таким образом, достаточно доказать, что существует такое натуральное n, что

$$a^{1/n}-1<\frac{\varepsilon}{a^{\beta_0}}.$$

Пусть $a^{1/n}=1+\delta_n$. Так как $a^{1/n}>1$, то δ_n положительно. Используя первые два члена бинома Ньютона, мы получим, что

$$a=(a^{1/n})^n=(1+\delta_n)^n>1+n\cdot\delta_n.$$

Отсюда $a-1>n\cdot\delta_n$, т. е. $0<\delta_n<\frac{a-1}{n}$. Значит $a^{1/n}-1<\frac{a-1}{n}$. Выберем теперь натуральное n удовлетворяющим неравенству $\frac{a-1}{n}<\frac{\varepsilon}{a^{\beta_0}}$ или $n>\frac{(a-1)\cdot a^{\beta_0}}{\varepsilon}$. Тогда $a^{1/n}-1<\frac{a-1}{n}<\frac{\varepsilon}{a^{\beta_0}}$, и доказательство однозначной определенности числа y, удовлетворяющего неравенствам (4.5), завершено. Утверждение 2 доказано.

Заметим, что если x — рациональное число и a^x — значение в точке x показательной функции, первоначально определенной лишь на множестве рациональных чисел, то a^x и является тем единственным числом y, которое удовлетворяет неравенствам (4.5).

Утверждение 3. *Показательная функция $y=a^x$ при $a>1$ возрастает на всей бесконечной прямой.*

Доказательство. Пусть x_1 и x_2 — любые два вещественных числа такие, что $x_1<x_2$. Всегда существуют рациональные числа α и β такие, что $x_1<\alpha<\beta<x_2$ (см. лемму 2 § 3 гл. 2). Так как $x_1<\alpha$ и $\beta<x_2$, то по определению показательной функции выполнены неравенства $a^{x_1}\leqslant a^\alpha$, $a^\beta\leqslant a^{x_2}$. С другой стороны, так как $\alpha<\beta$, то из возрастания показательной функции на множестве рациональных чисел вытекает $a^\alpha<a^\beta$. Сопоставляя неравенства $a^{x_1}\leqslant a^\alpha$, $a^\alpha<a^\beta$ и $a^\beta\leqslant a^{x_2}$ и используя свойство транзитивности знаков $>$ и $=$, получим, что $a^{x_1}<a^{x_2}$, а это и доказывает возрастание функции a^x. Утверждение доказано.

Утверждение 4. *Показательная функция $y=a^x$ при $a>1$ является непрерывной функцией в любой точке бесконечной прямой.*

Доказательство. Пусть x — произвольное вещественное число, а $\{x_n\}$ — любая сходящаяся к x последовательность. В силу определения непрерывности по Гейне достаточно доказать, что для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер N, что $|a^{x_n}-a^x|<\varepsilon$ при всех $n\geqslant N$. Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$ и по нему рациональные числа α и β такие, что $\alpha<x<\beta$ и $a^\beta-a^\alpha<\varepsilon$. Возможность фиксировать по любому $\varepsilon>0$ такие рациональные числа α и β была установлена в утверждении 2. Поскольку последовательность $\{x_n\}$ сходится к x и $\alpha<x<\beta$, то существует такой номер N, что при всех $n\geqslant N$ справедливы неравенства $\alpha<x_n<\beta$. Так как показательная функция монотонно возрастает, то $a<a^x<a^\beta$, $a^\alpha<a^{x_n}<a^\beta$ при всех $n\geqslant N$.

Таким образом, оба числа a^{x_n} и a^x при $n\geqslant N$ заключены между двумя числами a^α и a^β, разность между которыми $a^\beta-a^\alpha$ меньше ε. Отсюда следует, что при $n\geqslant N$ справедливо неравенство

$|a^{x_n}-a^x|<\varepsilon$, которое и доказывает непрерывность показательной функции в произвольной точке x. Утверждение 4 доказано.

Получим теперь некоторые следствия из доказанных свойств показательной функции. Прежде всего заметим, что если $0<a<1$, то $a=\frac{1}{b}$, где $b>1$. Поэтому функцию $y=a^x$ при $0<a<1$ можно определить как функцию $y=b^{-x}$ при $b=\frac{1}{a}>1$.

Следствие 1. *Показательная функция $y=a^x$ при $a>1$ положительна (при всех значениях x).*

Если x — произвольная точка числовой оси, а r — рациональное число такое, что $r<x$, то по определению показательной функции на множестве рациональных чисел $a^r>0$, а по утверждению 3 $a^x>a^r$ при $a>1$. Следовательно, $a^x>0$.

Следствие 2. *Показательная функция $y=a^x$ при $a>1$ удовлетворяет условиям:* $\lim\limits_{n\to-\infty}a^x=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty$.

В самом деле, так как $a>1$, то $a=1+\delta$, где $\delta>0$ и $a^n=(1+\delta)^n>n\delta$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=+\infty$. В силу монотонности функции $y=a^x$ получаем, что и $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty$. Так как $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}a^{-n}=0$, и поэтому $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0$.

Следствие 3. *Значения функции $y=a^x$ при $a>1$ заполняют всю положительную полупрямую $y>0$.*

Действительно, по следствию 1 функция $y=a^x$ принимает только положительные значения, а по следствию 2 она принимает как сколь угодно малые, так и сколь угодно большие положительные значения. Из непрерывности и строгой монотонности a^x и из теоремы 4.4 вытекает, что любое положительное число является значением функции $y=a^x$.

Следствие 4. *Для любых вещественных чисел x_1 и x_2 справедливы соотношения*

$$(a^{x_1})^{x_2}=a^{x_1\cdot x_2},\quad a^{x_1}\cdot b^{x_1}=(a\cdot b)^{x_1},\quad a^{x_1}\cdot a^{x_2}=a^{x_1+x_2}.$$

В самом деле, эти соотношения уже были установлены нами для рациональных показателей. Отсюда вытекает справедливость их и для произвольных вещественных показателей. Убедимся, например, в справедливости первого соотношения. Пусть $\{r'_n\}$ и $\{r_n''\}$ — последовательности рациональных чисел, сходящиеся соответственно к x_1 и x_2. Тогда $(a^{r'_n})^{r''_n}=a^{r'_n\cdot r''_n}$. Переходя к пределу при $n\to\infty$ и используя непрерывность показательной функции, получим $(a^{x_1})^{x_2}=a^{x_1\cdot x_2}$. Аналогично устанавливаются и остальные равенства.

Заметим теперь, что мы фактически изучили и свойства показательной функции $y=a^x$ при $0<a<1$. Действительно, ее непре-

рывность следует из самого определения. Из определения следует также, что эта функция монотонно убывает на бесконечной прямой. Следствия 1, 3, 4 верны и для функции $y=a^x$ при $0<a<1$, а следствие 2, очевидно, будет выглядеть так:

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} a^x = 0.$$

На рис. 4.1 и 4.2 изображены графики показательной функции $y=a^x$ для случаев $a>1$ и $0<a<1$.

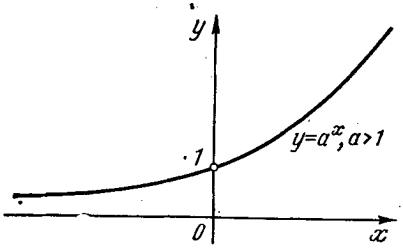

Рис. 4.1

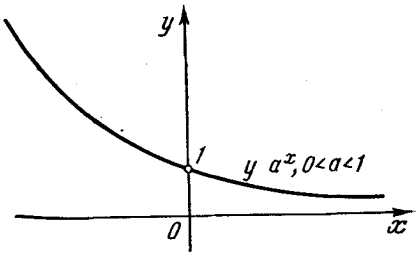

Рис. 4.2

Замечание. Показательную функцию можно было бы определить как решение некоторого функционального уравнения, удовлетворяющее определенным условиям. Можно доказать, что существует, и притом единственная, функция $f(x)$, определенная на всей бесконечной прямой и удовлетворяющая трем требованиям:

1) для любых вещественных x_1 и x_2 выполнено соотношение $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$;

2) $f(0)=1$*, $f(1)=a$ при $a>1$;

3) функция $f(x)$ непрерывна при $x=0$.

Такой функцией и является построенная выше функция $f(x)=a^x$ при $a>1$.

2. Логарифмическая функция. Логарифмическую функцию мы определим как обратную к показательной. Пусть $[c, d]$ — произвольный сегмент бесконечной прямой. На этом сегменте функция $y=a^x$ при $a>1$ возрастает и непрерывна. Поэтому в силу теоремы 4.5 функция $y=f(x)=a^x$ имеет на сегменте $[a^c, a^d]$ возрастающую и непрерывную обратную функцию $x=f^{-1}(y)$, которая и называется логарифмической и обозначается так:

$$x=f^{-1}(y)=\log_a y.$$

Заменяя обозначение аргумента y на x, а обозначение функции x на y, запишем ее в более привычном нам виде:

$$y=\log_a x.$$

* Можно доказать, что требование $f(0)=1$ является следствием остальных требований (и потому может быть опущено).

Случай $0<a<1$ рассматривается аналогично. Отметим следующие свойства логарифмической функции, вытекающие из ее определения:

1) *Логарифмическая функция определена для всех положительных значений x.* В самом деле, аргумент логарифмической функции представляет собой значения показательной функции, которые, как мы знаем, только положительны и заполняют всю полупрямую $x>0$.

2) *Логарифмическая функция непрерывна и возрастает на всей полупрямой $x>0$ при $a>1$ и непрерывна и убывает на всей полупрямой $x>0$ при $0<a<1$, причем*

$$\lim_{x\to 0+0}\log_a x=-\infty,\ \lim_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty \text{ при } a>1,$$

$$\lim_{x\to 0+0}\log_a x=+\infty,\ \lim_{x\to+\infty}\log_a x=-\infty \text{ при } 0<a<1.$$

Справедливость этих свойств вытекает из свойств показательной функции.

3) *Для любых положительных x_1 и x_2*

$$\log_a(x_1\cdot x_2)=\log_a x_1+\log_a x_2.$$

Это свойство также вытекает из свойств показательной функции.

Замечание. Следует особо выделить логарифмическую функцию $y=\log_e x$, где $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Для этой функции используется обозначение $y=\ln x$. Логарифмы по основанию e называются натуральными.

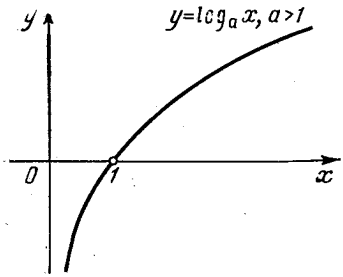

Рис. 4.3

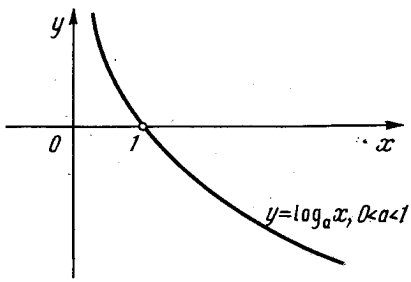

Рис. 4.4

На рис. 4.3 и 4.4 изображены графики логарифмической функции $y=\log_a x$ для случаев $a>1$ и $0<a<1$.

3. Степенная функция. Определим теперь степенную функцию с любым вещественным показателем α через суперпозицию логарифмической функции и показательной. Пусть $x>0$. Тогда общая степенная функция определяется так:

$$y = x^{\alpha} = (a^{\log_a x})^{\alpha} = a^{\alpha \cdot \log_a x},$$

где a — любое фиксированное число, ради определенности бо́льшее единицы:

Из этого определения и из того, что при $a>1$ логарифмическая функция возрастает на всей полупрямой $x>0$, а показательная функция возрастает на всей бесконечной прямой, вытекает, что *степенная функция* $y=x^{\alpha}=a^{\alpha\cdot\log_a x}$ *возрастает при* $\alpha>0$ *и убывает при* $\alpha<0$ *на полупрямой* $x>0$.

Справедливы следующие свойства:

1) *Для степенной функции выполнены соотношения:*

$$\lim_{x\to 0+0} x^{\alpha} = 0 \text{ при } \alpha > 0, \quad \lim_{x\to 0+0} x^{\alpha} = +\infty \text{ при } \alpha < 0.$$

В самом деле, пусть $\{x_n\}$ — любая сходящаяся к нулю справа последовательность значений аргумента x_n. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \log_a x_n = -\infty$, то из свойств показательной функции вытекает, что $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\alpha\cdot\log_a x_n} = 0$ при $\alpha>0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\alpha\cdot\log_a x_n} = +\infty$ при $\alpha<0$. По определению положим $0^{\alpha}=0$ при $\alpha>0$ и будет считать это выражение неопределенным при $\alpha\leqslant 0$.

2) *Степенная функция* $y=x^{\alpha}=a^{\alpha\cdot\log_a x}$ *непрерывна в каждой точке* x *открытой полупрямой* $x>0$.

Это сразу же вытекает из теоремы 4.2 непрерывности сложной функции с учетом того, что функция $u=\alpha\cdot\log_a x$ непрерывна в любой точке $x>0$, а функция $y=a^u$ непрерывна в любой точке u бесконечной прямой.

Замечание. Если показатель α степенной функции представляет собой рациональное число m/n, где n — нечетное целое число, то степенную функцию $y=x^{\alpha}$ можно определить на всей числовой оси, полагая при $x<0$:

$$y = |x|^{\alpha}, \text{ если } \alpha = \frac{m}{n} \text{ и } m \text{ четное},$$

$$y = -|x|^{\alpha}, \text{ если } \alpha = \frac{m}{n} \text{ и } m \text{ нечетное}.$$

На рис. 4.5—4.7 изображены графики степенной функции $y=x^{\alpha}$ для различных значений α.

4. Тригонометрические функции. Мы уже имеем представление о тригонометрических функциях $y=\sin x$ и $y=\cos x$ и функциях, которые через них выражаются, $y=\operatorname{tg} x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$, $y=\operatorname{ctg} x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$, $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$, $y=\operatorname{cosec} x=\dfrac{1}{\sin x}$.

Во введении к этому параграфу мы уже говорили о логических пробелах, возникающих при определении функций $y=\sin x$ и

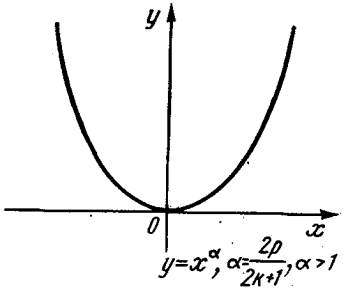

Рис. 4.5

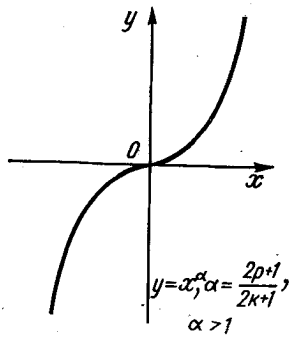

Рис. 4.6

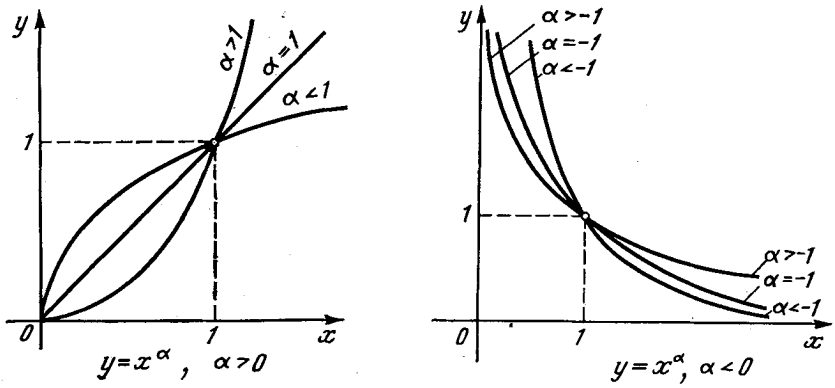

Рис. 4.7

$y=\cos x$ с помощью наглядных геометрических соображений. Логически безупречно эти функции можно определить как решение некоторой системы функциональных уравнений. Точнее, можно доказать следующее утверждение: *существует и притом единственная пара функций $f(x)$ и $g(x)$, определенных для всех вещественных значений аргумента x и удовлетворяющих условиям:*

1) $f(x_1+x_2)=f(x_1)g(x_2)+f(x_2)\cdot g(x_1)$,
$g(x_1+x_2)=g(x_1)\cdot g(x_2)-f(x_1)\cdot g(x_2)$, $\quad f^2(x)+g^2(x)=1$;

2) $f(0)=0,\ g(0)=1,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\ \ g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$;

3) *если* $0<x<\frac{\pi}{2}$, *то* $0<f(x)<x<\frac{f(x)}{g(x)}$*. $\qquad$ (4.6)

* Справедливость неравенства $x<\frac{f(x)}{g(x)}$ для $0<x<\frac{\pi}{2}$ следует из остальных сформулированных здесь условий (см. по этому поводу указываемое ниже дополнение к книге В. А. Ильина и Э. Г. Позняка).

Первую из этих функций назовем синусом и обозначим символом $f(x)=\sin x$, вторую назовем косинусом и обозначим символом $g(x)=\cos x$.

Доказательство приведенного утверждения можно найти в дополнении к гл. 4 книги В. А. Ильина и Э. Г. Позняка «Основы математического анализа», 1 (М., Наука, 1982).

Нетрудно доказать, что из свойств 1), 2) и 3) можно извлечь в виде следствий все другие свойства функций $y=\sin x$ и $y=\cos x$, известные читателю из школьных учебников и устанавливаемые в средней школе из наглядных геометрических соображений. Впрочем, этот факт сразу вытекает из того, что свойства 1), 2) и 3) определяют единственную пару функций $f(x)$ и $g(x)$ и что введенные в средней школе из наглядных геометрических соображений функции $f(x)=\sin x$ и $g(x)=\cos x$ этими тремя свойствами обладают.

В качестве примера установим с помощью свойств 1), 2), 3) некоторые свойства функций $y=\sin x$ и $y=\cos x$, которые понадобятся нам при доказательстве непрерывности этих функций и для отыскания участков их монотонности.

а) Из третьего соотношения 1), имеющего вид $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, сразу же вытекает, что $\sin^2 x\leqslant 1$ и $\cos^2 x\leqslant 1$, т. е.

$$|\sin x|\leqslant 1, \qquad |\cos x|\leqslant 1. \tag{4.7}$$

б) Далее, с помощью первых двух соотношений 1) и первых двух равенств 2) мы получим, что

$$\sin 0=\sin[x+(-x)]=\sin x\cdot\cos(-x)+\cos x\cdot\sin(-x)=0,$$
$$\cos 0=\cos[x+(-x)]=\cos x\cdot\cos(-x)-\sin x\cdot\sin(-x)=1.$$

Полученные два равенства представляют собой систему двух уравнений относительно двух неизвестных $\cos(-x)$ и $\sin(-x)$. Решая эту систему и учитывая, что $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, мы получим, что

$$\cos(-x)=\cos x, \qquad \sin(-x)=-\sin x, \tag{4.8}$$

т. е. $\cos x$ представляет собой четную функцию, а $\sin x$ — нечетную функцию *.

в) Из соотношений 1), в свою очередь, вытекают равенства

$$\begin{aligned}\sin(x_1-x_2)&=\sin[x_1+(-x_2)]=\sin x_1\cdot\cos(-x_2)+\\&+\cos x_1\cdot\sin(-x_2)=\sin x_1\cdot\cos x_2-\cos x_1\cdot\sin x_2,\\ \cos(x_1-x_2)&=\cos[x_1+(-x_2)]=\cos x_1\cdot\cos(-x_2)-\\&-\sin x_1\cdot\sin(-x_2)=\cos x_1\cdot\cos x_2+\sin x_1\cdot\sin x_2.\end{aligned} \tag{4.9}$$

* Функция $\varphi(x)$, определенная для всех вещественных значений x, называется четной, если $\varphi(-x)=\varphi(x)$ (для любого значения x), и нечетной, если $\varphi(-x)=-\varphi(x)$ (также для любого значения x).

г) Из первого соотношения 1) и первого соотношения (4.9) мы получим, что

$$\sin x_2 = \sin\left(\frac{x_2+x_1}{2}+\frac{x_2-x_1}{2}\right) =$$

$$= \sin\frac{x_2+x_1}{2}\cdot\cos\frac{x_2-x_1}{2}+\sin\frac{x_2-x_1}{2}\cdot\cos\frac{x_2+x_1}{2},$$

$$\sin x_1 = \sin\left(\frac{x_2+x_1}{2}-\frac{x_2-x_1}{2}\right) =$$

$$= \sin\frac{x_2+x_1}{2}\cdot\cos\frac{x_2-x_1}{2}-\sin\frac{x_2-x_1}{2}\cdot\cos\frac{x_2+x_1}{2}.$$

Складывая и вычитая полученные два равенства, мы придем к соотношениям

$$\begin{aligned}\sin x_2+\sin x_1 &= 2\sin\frac{x_2+x_1}{2}\cdot\cos\frac{x_2-x_1}{2},\\ \sin x_2-\sin x_1 &= 2\cos\frac{x_2+x_1}{2}\cdot\sin\frac{x_2-x_1}{2}.\end{aligned} \tag{4.10}$$

д) Далее, из первого соотношения (4.9) и из последних двух равенств 2) получим, что

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos x-\cos\frac{\pi}{2}\cdot\sin x = \cos x,$$

т. е.

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right). \tag{4.11}$$

е) Убедимся, наконец, в периодичности функций $f(x)=\sin x$ и $g(x)=\cos x$ с периодом 2π. Из первых двух соотношений 1) при $x=x_1=x_2$ получим, что

$$\sin 2x = 2\sin x\cdot\cos x, \qquad \cos 2x = \cos^2 x-\sin^2 x. \tag{4.12}$$

Учитывая, что в силу равенств 2) $\sin\frac{\pi}{2}=1$, $\cos\frac{\pi}{2}=0$, мы получим из соотношений (4.12) при $x=\frac{\pi}{2}$, что $\sin\pi=0$, $\cos\pi=-1$, а из последних двух равенств и из соотношений (4.12) при $x=\pi$ получим, что $\sin 2\pi=0$, $\cos 2\pi=1$.

Используя последние два равенства, мы получим из первых двух соотношений 1), что

$$\sin(x+2\pi) = \sin x\cdot\cos 2\pi+\sin 2\pi\cdot\cos x = \sin x,$$

$$\cos(x+2\pi) = \cos x\cdot\cos 2\pi-\sin x\cdot\sin 2\pi = \cos x,$$