$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(\Delta x)^n + \frac{f^{(n-1)}(x_0+\theta\Delta x)}{(n+1)!}(\Delta x)^{n+1}. \qquad (6.53)$$

(Здесь θ — некоторое число из интервала $0<\theta<1$.) Формула Тейлора (6.53) является естественным обобщением формулы Лагранжа (6.5) (см. § 3). Формула Лагранжа (6.5) получается из формулы (6.53) в частном случае $n=0$.

3. Формула Маклорена. Принято называть формулой Маклорена * формулу Тейлора (6.33) с центром в точке $a=0$. Таким образом, формула Маклорена дает представление функции в окрестности точки $x=0$. Запишем формулу Маклорена для произвольной функции с остаточным членом в форме Лагранжа, Коши и Пеано**:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x), \qquad (6.54)$$

где остаточный член имеет вид:

1) в форме Лагранжа

$$R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x) \quad (0<\theta<1); \qquad (6.55)$$

2) в форме Коши

$$R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}f^{(n+1)}(\theta x); \qquad (6.56)$$

3) в форме Пеано

$$R_{n+1}(x) = o(x^n). \qquad (6.57)$$

(Мы использовали формулы (6.46), (6.47) и (6.48).)

Перейдем к оценке остаточного члена в формуле Тейлора — Маклорена, к отысканию разложения по формуле Маклорена важнейших элементарных функций и к рассмотрению различных приложений этой формулы.

§ 9. ОЦЕНКА ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА. РАЗЛОЖЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Оценка остаточного члена для произвольной функции. Оценим для произвольной функции $f(x)$ остаточный член в формуле Маклорена (6.54), взятый в форме Лагранжа (6.55).

Предположим, что рассматриваемая нами функция $f(x)$ обладает следующим свойством: *существует такое вещественное число M, что для всех номеров n и для всех значений аргумента x из рас-*

* Колин Маклорен — английский математик (1698—1746).

** При этом предполагается, что $f(x)$ имеет $(n+1)$-ю производную в окрестности точки $x=0$, а для остаточного члена в форме Пеано $(n-1)$-ю производную в окрестности точки $x=0$ и n-ю производную в самой точке $x=0$.

сматриваемой окрестности точки $x=0$ справедливо неравенство

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant M. \tag{6.58}$$

Функцию, обладающую указанным свойством, будем называть функцией, совокупность всех производных которой ограничена в окрестности точки $x=0$.

Из неравенства (6.58) и из того, что $0<\theta<1$ вытекает, что

$$|f^{(n)}(\theta x)| \leqslant M, \tag{6.59}$$

и поэтому из формулы (6.55) получим

$$|R_{n+1}(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\,|f^{(n+1)}(\theta x)| \leqslant M\,\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Итак, мы получаем следующую универсальную оценку остаточного члена для функции, совокупность всех производных которой ограничена числом M в окрестности точки $x=0$:

$$|R_{n+1}(x)| \leqslant M\,\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{6.60}$$

Напомним, что при любом фиксированном x

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

(см. пример из п. 4 § 2 гл. 3). Отсюда вытекает, что, выбирая достаточно большой номер n, мы можем сделать правую часть (6.60) как угодно малой. Это дает нам возможность применять формулу Маклорена для приближенного вычисления функций, обладающих указанным свойством, с любой наперед заданной точностью. Приведем примеры функций, совокупность всех производных которых ограничена в окрестности точки $x=0$.

1) $f(x)=e^x$, $f^{(n)}(x)=e^x$. Совокупность всех производных этой функции ограничена на любом сегменте $[-r, r]$ $(r\geqslant 0)$ числом $M=e^r$.

2) $f(x)=\cos x$ или $f(x)=\sin x$. Совокупность всех производных каждой из этих функций ограничена всюду на бесконечной прямой числом $M=1$.

2. Разложение по формуле Маклорена некоторых элементарных функций. А. $f(x)=e^x$. Поскольку $f^{(n)}(x)=e^x$, $f^{(n)}(0)=1$ для любого n, формула Маклорена (6.54) имеет вид

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x), \tag{6.61}$$

где остаточный член в форме Лагранжа равен

$$R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,e^{\theta x} \quad (0<\theta<1). \tag{6.62}$$

На любом сегменте $[-r, r]$ $(r>0)$ в силу того, что $|e^{\theta x}|<e^r$, получим следующую оценку для остаточного члена:

$$|R_{n+1}(x)|<\frac{r^{n+1}}{(n+1)!}e^r. \tag{6.62*}$$

Б. $f(x)=\sin x$. Поскольку $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$,

$$f^{(n)}(0)=\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}0 & \text{при четном } n,\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & \text{при нечетном } n,\end{cases}$$

формула Маклорена (6.54) имеет вид

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\frac{x^n}{n!}+R_{n+1}(x), \tag{6.63}$$

где n — нечетное число, а остаточный член в форме Лагранжа равен

$$R_{n+1}(x)=\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}\sin\left(\theta x+n\frac{\pi}{2}+\pi\right)\quad(0<\theta<1).$$

Очевидно, что на любом сегменте $[-r, r]$ $(r>0)$ для остаточного члена справедлива следующая оценка:

$$|R_{n+1}(x)|\leqslant\frac{r^{n+2}}{(n+2)!}. \tag{6.64}$$

В. $f(x)=\cos x$. Поскольку $f^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$,

$$f^{(n)}(0)=\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}0 & \text{при нечетном } n,\\ (-1)^{\frac{n}{2}} & \text{при четном } n,\end{cases}$$

формула Маклорена (6.54) имеет вид

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{x^n}{n!}+R_{n+2}(x), \tag{6.65}$$

где n — четное число, а остаточный член в форме Лагранжа равен

$$R_{n+2}(x)=\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}\cos\left(\theta x+n\frac{\pi}{2}+\pi\right)\quad(0<\theta<1).$$

На любом сегменте $[-r, r]$ $(r>0)$ получаем для остаточного члена оценку (6.64).

Г. $f(x)=\ln(1+x)$. Поскольку

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n},\quad f(0)=0,\ f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!,$$

формула Маклорена (6.54) имеет вид

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x). \quad (6.66)$$

Остаточный член на этот раз запишем и оценим и в форме Лагранжа, и в форме Коши:

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}} \quad \text{(в форме Лагранжа).} \quad (6.67)$$

$$R_{n+1}(x) = (-1)^n x^{n+1}\frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} \quad \text{*(в форме Коши).} \quad (6.68)$$

Для оценки функции $\ln(1+x)$ для значений x, принадлежащих сегменту $0 \leqslant x \leqslant 1$, удобнее исходить из остаточного члена в форме Лагранжа (6.67). Переходя в формуле (6.67) к модулям, получим для всех x из сегмента $0 \leqslant x \leqslant 1$

$$|R_{n+1}(x)| < \frac{1}{n+1}. \quad (6.69)$$

Из оценки (6.69) очевидно, что для всех x из сегмента $0 \leqslant x \leqslant 1$ $R_{n+1}(x) \to 0$ при $n \to \infty$.

Оценим теперь функцию $\ln(1+x)$ для отрицательных значений x из сегмента $-r \leqslant x \leqslant 0$, где $0 < r < 1$. Для этого будем исходить из остаточного члена в форме Коши (6.68).

Перепишем этот остаточный член в виде

$$R_{n+1}(x) = (-1)^n \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n \frac{x^{n+1}}{1+\theta x}. \quad (6.70)$$

Принимая во внимание, что для рассматриваемых значений x выражение $\frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1$, и переходя в формуле (6.70) к модулям, будем иметь

$$|R_{n+1}(x)| < \frac{r^{n+1}}{1-r}. \quad (6.71)$$

Так как $r < 1$, то оценка (6.71) позволяет утверждать, что $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n+1} = 0$.

Д. $f(x) = (1+x)^\alpha$, где α — вещественное число. Поскольку

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ \ldots\ (\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ \ldots\ (\alpha-n+1),$$

---

* Еще раз отметим, что в формулах (6.67) и (6.68) значения θ являются, вообще говоря, различными.

формула Маклорена (6.54) имеет вид

$$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+R_{n+1}(x), \qquad (6.72)$$

где остаточный член в форме Лагранжа равен

$$R_{n+1}(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-(n+1)}x^{n+1}\,(0<\theta<1). \qquad (6.73)$$

В частном случае, когда $\alpha=n$ — натуральное число, $R_{n+1}(x)=0$, и мы получим известную из элементарного курса формулу бинома Ньютона

$$(1+x)^n=1+\frac{n}{1!}x+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\ldots+x^n. \qquad (6.74)$$

Если нужно получить разложение не двучлена $(1+x)^n$, а двучлена $(a+x)^n$, то можно вынести a^n за скобку и воспользоваться формулой (6.74). При этом получим

$$(a+x)^n=a^n\left(1+\frac{x}{a}\right)^n=$$
$$=a^n\left[1+\frac{n}{1!}\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\ldots+\left(\frac{x}{a}\right)^n\right].$$

Таким образом, общий случай бинома Ньютона является частным случаем формулы Маклорена.

Е. $f(x)=\operatorname{arctg}x$. Поскольку

$$f^{(n)}(x)=\frac{(n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}\cdot\sin\left[n\left(\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

(см. пример 5 из п. 2 § 6 гл. 5), то

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0 & \text{при четном } n,\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)! & \text{при нечетном } n,\end{cases}$$

и формула Маклорена (6.54) принимает вид

$$\operatorname{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{x^n}{n}+R_{n+2}(x), \qquad (6.75)$$

где n — нечетное число, а остаточный член в форме Лагранжа равен

$$R_{n+2}(x) = \frac{x^{n+2}}{(n+2)} \frac{\sin\left[(n+2)\left(\operatorname{arctg}\theta x + \frac{\pi}{2}\right)\right]}{[1+(\theta x)^2]^{\frac{n+2}{2}}} \quad (0<\theta<1).$$

Для остаточного члена на любом сегменте $[-r, r]$ (где $r>0$) справделива оценка

$$|R_{n+2}(x)| < \frac{r^{n+2}}{(n+2)}. \tag{6.76}$$

Из оценки (6.76) очевидно, что при любом $r \leqslant 1$ остаточный член $R_{n+2}(x)$ стремится к нулю при $n \to \infty$.

§ 10. ПРИМЕРЫ ПРИЛОЖЕНИЙ ФОРМУЛЫ МАКЛОРЕНА

1. Вычисление числа e на ЭВМ. В п. 3 § 2 гл. 3 мы ввели число e как предел последовательности $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ и получили для e грубую оценку вида $2 \leqslant e \leqslant 3$.

В этом пункте мы укажем, как вычислить число e с любой интересующей нас точностью.

Воспользуемся формулой Маклорена (6.61) и оценкой остаточного члена (6.62*), положив в этих формулах $x=r=1$. Мы получим при этом, что

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + R_{n+1}(1). \tag{6.77}$$

где

$$|R_{n+1}(1)| \leqslant \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}. \tag{6.78}$$

Выбирая номер n в (6.77) и (6.78) достаточно большим, мы можем оценить с помощью этих формул число e с любой наперед заданной интересующей нас точностью.

Алгоритм вычисления числа e, основанный на формулах (6.77) и (6.78), легко реализуется на электронно-вычислительных машинах.

Мы приведем пример вычисления числа e по этим формулам при $n=400$. Вычисления велись в МГУ на электронно-вычислительной машине БЭСМ-6 с 600 знаками после запятой. Учитывая возможные ошибки округления, мы отбросили последние 10 знаков и приводим результат вычисления с 590 знаками после запятой*:

2,718281 828459 045235 360287 471352 662497 757247 093699 959574 966967 627724 076630 353547 594571 382178 525166 427427 466391 932003 059921

* Для читателей, знакомых со стандартным алгоритмическим языком АЛГОЛ, на с. 261 приведена записанная на этом языке программа вычислений.

817413 596629 043572 900334 295260 595630 738132 328627 943490 763233
829880 753195 251019 011573 834187 930702 154089 149934 884167 509244
761460 668082 264800 168477 411853 742345 442437 107539 077744 992069
551702 761838 606261 331384 583000 752044 933826 560297 606737 113200
709328 709127 443747 047230 696977 209310 141692 836819 025515 108657
463772 111252 389784 425056 953696 770785 449969 967946 864454 905987
931636 889230 098793 127736 178215 424999 229576 351482 208269 895193
668033 182528 869398 496465 105820 939239 829488 793320 36...

Таким образом, использование формулы Маклорена дает возможность вычислить e с любой интересующей нас точностью.

2. Доказательство иррациональности числа e. Докажем теперь с помощью той же формулы Маклорена (6.77), что число e является иррациональным.

Используем для $R_{n+1}(1)$ формулу (6.62), положив в ней $x=1$. Мы получим, что

$$R_{n+1}(1)=\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}, \tag{6.79}$$

где θ — некоторое число, удовлетворяющее неравенствам $0<\theta<1$. Из этих неравенств и из (6.79) вытекает, что $R_{n+1}(1)$ удовлетворяет неравенствам

$$\frac{1}{(n+1)!}<R_{n+1}(1)<\frac{3}{(n+1)!}. \tag{6.80}$$

Итак, для e справедливо представление (6.77) с неравенствами для $R_{n+1}(1)$ вида (6.80).

Предположим теперь, что число e является рациональным, т. е. его можно представить в виде $e=\frac{m}{n}$, где m и n — некоторые целые положительные числа, второе из которых (n), мы, не ограничивая общности, можем считать не меньшим двух*.

Выбирая в формуле Маклорена (6.77) номер n равным знаменателю рациональной дроби $e=\frac{m}{n}$, мы получим, умножая формулу Маклорена (6.77) на $n!$, что каждое из чисел $n!\,e$ и $n!\left(1+\frac{1}{1!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)$ является целым, в то время как число $n!\,R_{n+1}$ в силу неравенств (6.80) удовлетворяет условиям $\frac{1}{n+1}<n!\;R_{n+1}(1)<$

* Если бы в представлении $e=\frac{m}{n}$ число n оказалось равным единице, то мы взяли бы эквивалентное ему представление $e=\frac{2m}{2n}$, в знаменателе которого стоит число $2n=2$.

$< \frac{3}{n+1}$ и заведомо не является целым *. Таким образом, при умножении формулы Маклорена (6.77) на число $n!$ мы получаем соотношение

$$n!\,e - n!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) = n!\,R_{n+1}(1),$$

в левой части которого стоит целое число, а в правой части — число, не являющееся целым.

Мы получаем противоречие, которое доказывает, что наше предположение о том, что e — рациональное число, является ошибочным.

Иррациональность e доказана.

3. Вычисление значений тригонометрических функций. Легко убедиться в том, что значения тригонометрических функций $\sin x$ и $\cos x$ для x, принадлежащих сегменту $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, полностью определяют значения этих функций для всех x. Поэтому мы можем ограничиться вычислением $\sin x$ и $\cos x$ для значений x из указанного сегмента. Желая обеспечить точность 10^{-4}, положим в формуле (6.63) и в оценке (6.64) $n=5$, $r=\frac{\pi}{4}$. Тогда

$$|R_{n+2}(x)| = |R_7(x)| \leqslant \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^7}{7!} < 10^{-4},$$

и поэтому для любого x, удовлетворяющего условию $|x| \leqslant \frac{\pi}{4}$, с точностью до 10^{-4}

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

Аналогично, полагая в формуле (6.65) и в оценке (6.64) $n=6$, $r=\frac{\pi}{4}$, получим

$$|R_{n+2}(x)| = |R_8| \leqslant \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^8}{8!} < 10^{-5},$$

---

* Достаточно учесть, что в представлении $e = \frac{m}{n}$, как уже сказано выше, можно считать $n \geqslant 2$, а при $n \geqslant 2$ из неравенств $\frac{1}{n+1} < n!\,R_{n+1}(1) < \frac{3}{n+1}$ вытекает, что $0 < n!R_{n+1} < 1$, т. е. $n!R_{n+1}(1)$ не является целым.

и поэтому для любого x, удовлетворяющего условию $|x| \leqslant \frac{\pi}{4}$, с точностью до 10^{-5}

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}.$$

4. Асимптотическая оценка элементарных функций и вычисление пределов. Формула Тейлора — Маклорена является мощным средством для вычисления тонких пределов.

Из установленного нами в п. 2 § 9 разложения ряда элементарных функций вытекают асимптотические * оценки этих функций, характеризующие их поведение в окрестности точки $x=0$, т. е. при малых значениях $|x|$ с точностью до членов любой степени n малой величины x.

Беря в формулах Маклорена для функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ и $\operatorname{arctg} x$ остаточный член в форме Пеано, мы получим, что для любого номера n справедливы следующие оценки:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), \qquad (6.81)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + o(x^n),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n),$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}).$$

Приведем примеры использования асимптотических оценок (6.81).

1°. Привлекая вторую из оценок (6.81), взятую при $n=1$, вычислим предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left[-\frac{1}{3!} + o(x)\right] = -\frac{1}{3!}.$$

* Формулу или оценку, характеризующую поведение функции $f(x)$ при $x \to a$ (в данном случае при $x \to 0$), называют асимптотической.

2°. $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{x^3\sin x}$.

Исходя из вида знаменателя, можно заключить, что определяющую роль должны играть члены четвертого порядка относительно x (ибо $\sin x=x+o(x)$). Пользуясь (6.81), можно записать:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5), \tag{6.82}$$

$$\sin x=x+o(x), \tag{6.83}$$

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2}+o(z^2). \tag{6.84}$$

Значит, при $z=-\dfrac{x^2}{2}$ получим

$$e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4). \tag{6.85}$$

Из формул (6.82), (6.83) и (6.85) следует, что

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4)-1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}}{x^4+o(x^4)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{12}+\alpha(x)}{1+\alpha(x)}=\frac{1}{12}.$$

(Здесь символом $\alpha(x)$ мы обозначили величину $\dfrac{o(x^4)}{x^4}$, являющуюся бесконечно малой при $x\to 0$.)

3°. $I=\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x+\dfrac{x^3}{2}\right)^{\frac{1}{x(\sin x-x)}}$. Обозначим через y величину $y=\left(\cos x+\dfrac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x(\sin x-x)}}$. Тогда $I=\lim\limits_{x\to 0}y$. Прологарифмируем y (так как при малых x это выражение положительно):

$$\ln y=\frac{1}{x(\sin x-x)}\ln\left(\cos x+\frac{x^2}{2}\right).$$

Вычислим $$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\cos x+\frac{x^2}{2}\right)}{x(\sin x-x)}.$$

Поскольку $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$, $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$,

получим
$$\lim_{x\to 6} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)}{-\frac{x^4}{6} + o(x^5)}.$$

Учтем теперь, что $\ln(1+z) = z + o(z)$. Из этой формулы
$\ln\left(1 + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) = \frac{x^4}{24} + o(x^4)$. Таким образом,

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{24} + o(x^4)}{-\frac{x^4}{6} + o(x^5)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{24} + \frac{o(x^4)}{x^4}}{-\frac{1}{6} + o(x)} = -\frac{1}{4}.$$

Отсюда
$$I = \lim_{x\to 0} y = e^{-\frac{1}{4}}.$$

Программа вычисления числа e

```
    Система Алгол—БЭСМ6, вариант 10—12—69
begin integer i, c, p, n, m; integer array a, b, e [0 : 601];
  m:=400; marg (39, 50, 39, 10, 0, 0);
  e[0]:=1; b[0]:=1;
  for i :=1 step 1 until 601 do
    a [i] : =b [i] : =e [i] : =0;
  for n : =1 step 1 until m do
  begin for i : =0 step 1 until 600 do
    a [i] : =b [i]; c : =a [0];
    for i =0 step 1 until 600 do
    begin b [i] : =c÷n;
      c : = (c—n×b [i])×10+a [i+1] end
    p : =0
    for i :=600 step—1 until 0 do
    begin c : =e [i]+b [i]+p;
      p : =0
      if c<10 then e [i] : =c else
      begin e [i] : =c—10; p : =1 end
    end
end
for n : =1 step 1 until 6 do
begin output ('10/', 'zd.', e [0]);
      for i : =1 step 1 until 590 do
       output ('zd', e [i])
  end
end
```

Глава 7

ИССЛЕДОВАНИЕ ГРАФИКА ФУНКЦИИ И ОТЫСКАНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

В настоящей главе мы применим разработанный в предыдущих двух главах аппарат дифференциального исчисления для *исследования графика функции* и для *отыскания как локальных, так и глобальных экстремумов функции.*

§ 1. ОТЫСКАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ТОЧЕК

1. Признаки монотонности функции. Из предыдущей главы мы уже знаем, что изучение вопроса об участках монотонности дифференцируемой функции $f(x)$ сводится к исследованию знака первой производной этой функции.

Для удобства сформулируем еще раз найденные нами в предыдущей главе условия монотонности функции.

1°. *Для того чтобы дифференцируемая на интервале* (a, b) *функция* $f(x)$ *не убывала (не возрастала) на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы производная* $f'(x)$ *этой функции была неотрицательна (неположительна) всюду на этом интервале.*

2°. *Для того чтобы дифференцируемая на интервале* (a, b) *функция* $f(x)$ *возрастала (убывала) на интервале* (a, b), *достаточно, чтобы производная* $f'(x)$ *была положительна (отрицательна) всюду на этом интервале.*

Найдем участки монотонности функции $f(x)=x^3-3x^2-4$. Производная $f'(x)=3x(x-2)$ этой функции положительна при $-\infty<x<0$, отрицательна при $0<x<2$ и положительна при $2<x<+\infty$. Поэтому, согласно сказанному, данная функция $f(x)$ возрастает на полупрямой $(-\infty, 0)$ убывает на интервале $(0, 2)$ и возрастает на полупрямой $(2, +\infty)$.

График этой функции изображен на рис. 7.1.

2. Отыскание стационарных точек. Напомним определения локального максимума и локального минимума функции.

Пусть функция $f(x)$ *определена всюду в некоторой окрестности точки* c. *Тогда эта функция имеет в точке* c *локальный максимум* [*или соответственно локальный минимум*], *если существует такая окрестность точки* c, *что для всех точек этой окрестности значение* $f(c)$ *является наибольшим* [*или соответственно наименьшим*] *среди всех значений* $f(x)$ *этой функции.*

Локальный максимум и локальный минимум объединяются общим названием локальный экстремум.

В § 1 предыдущей главы нами было установлено необходимое условие экстремума дифференцируемой в данной точке функции.

Это условие имеет следующий вид: *если функция $y=f(x)$ дифференцируема в данной точке c и имеет в этой точке локальный экстремум, то $f'(c)=0$.*

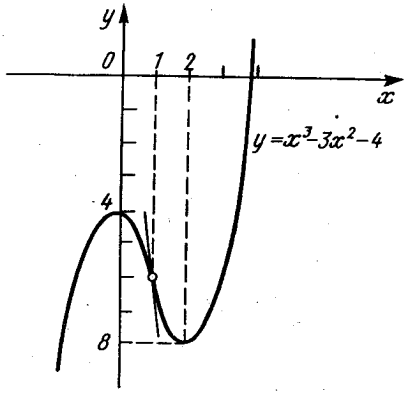

Рис. 7.1

Вместе с тем в § 1 гл. 6 было указано, что обращение в нуль производной является только необходимым и не является достаточным условием локального экстремума дифференцируемой в данной точке функции.

Так, функция $f(x)=x^3$ имеет производную $f'(x)=3x^2$, обращающуюся в нуль в точке $x=0$, но никакого экстремума в этой точке $x=0$ функция $f(x)=x^3$ не имеет (график этой функции см. на рис. 6.2).

Точки, в которых производная $f'(x)$ функции $f(x)$ обращается в нуль, будем называть стационарными *точками функции $f(x)$.*

Каждая стационарная точка — это точка возможного экстремума функции.

Однако сделать заключение о том, что в данной стационарной точке на самом деле имеется экстремум, можно лишь на основании дополнительного исследования, для проведения которого мы должны установить достаточные условия экстремума.

Такие условия будут установлены в ближайших трех пунктах.

3. Первое достаточное условие экстремума.

Теорема 7.1. *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема всюду в некоторой окрестности точки c, и пусть точка c является стационарной точкой функции $f(x)$. Тогда если в пределах указанной окрестности производная $f'(x)$ положительна (отрицательна) слева от точки c и отрицательна (положительна) справа от точки c, то функция $f(x)$ имеет в точке c локальный максимум (минимум). Если же в пределах указанной окрестности точки c производная $f'(x)$ имеет один и тот же знак слева и справа от точки c, то экстремума в точке c нет.*

Доказательство. 1) Пусть сначала производная $f'(x)$ в пределах рассматриваемой окрестности положительна (отрица-

тельна) слева от c и отрицательна (положительна) справа от c. Требуется доказать, что значение $f(c)$ является наибольшим (наименьшим) среди всех значений $f(x)$ в рассматриваемой окрестности. Обозначим через x_0 *любое* значение аргумента из рассматриваемой окрестности, отличное от c. Достаточно доказать, что

$$f(c)-f(x_0)>0 \quad (<0).$$

Так как функция $f(x)$ дифференцируема всюду в рассматриваемой окрестности точки c, то на сегменте, ограниченном точками c и x_0, для функции $f(x)$ выполнены все условия теоремы 6.4 Лагранжа. В силу этой теоремы

$$f(c)-f(x_0)=f'(\xi)(c-x_0), \tag{7.1}$$

где ξ — некоторое значение аргумента между c и x_0. Поскольку производная $f'(\xi)$ положительна (отрицательна) при $x_0<c$ и отрицательна (положительна) при $x_0>c$, правая часть (7.1) положительна (отрицательна).

2) Пусть теперь производная $f'(x)$ имеет один и тот же знак слева и справа от c. Обозначая, как и выше, через x_0 любое значение аргумента, отличное от c, и повторяя проведенные выше рассуждения, мы теперь докажем, что правая часть (7.1) имеет *разные* знаки при $x_0<c$ и при $x_0>c$. Это доказывает отсутствие экстремума в точке c.

Вытекающее из теоремы 7.1 правило можно кратко сформулировать так: 1) *если при переходе через данную стационарную точку с производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус (с минуса на плюс), то функция $f(x)$ имеет в точке с локальный максимум (минимум);* 2) *если же при переходе через данную стационарную точку с производная $f'(x)$ не меняет знака, то экстремума в точке с нет.*

Примеры. 1) *Найти точки экстремума функции* $f(x)=x^3-3x^2-4$. Поскольку $f'(x)=3x(x-2)$, то функция $f(x)$ имеет две стационарные точки: $x=0$ и $x=2$. При переходе через точку $x=0$ производная меняет знак с плюса на минус, а при переходе через точку $x=2$ — с минуса на плюс. Следовательно, $x=0$ — точка локального максимума, а $x=2$ — точка локального минимума (см. рис. 7.1).

2) *Найти точки экстремума функции* $f(x)=(x-2)^5$. Производная $f'(x)=5(x-2)^4$ обращается в нуль в единственной точке $x=2$. Так как $f'(x)$ положительна как слева, так и справа от этой точки, то функция $f(x)=(x-2)^5$ не имеет точек экстремума. График функции $f(x)=(x-2)^5$ изображен на рис. 7.2.

Иногда вызывает затруднение исследование знака первой производной $f'(x)$ слева и справа от стационарной точки. На этот случай мы укажем другое достаточное условие экстремума в данной стационарной точке c, не требующее исследования знака

$f'(x)$ в окрестности c, но зато *предполагающее существование в точке c отличной от нуля конечной второй производной* $f^{(2)}(x)$.

4. Второе достаточное условие экстремума.

Теорема 7.2. *Пусть функция $f(x)$ имеет в данной стационарной точке c конечную вторую производную. Тогда функция $f(x)$ имеет в точке c локальный максимум, если $f^{(2)}(c)<0$, и локальный минимум, если $f^{(2)}(c)>0$.*

Доказательство. Из условия $f^{(2)}(c)<0$ (>0) и из доказанной в гл. 6 теоремы 6.1 вытекает, что функция $f'(x)$ убывает (возрастает) в точке c. Поскольку по условию $f'(c)=0$, то най-

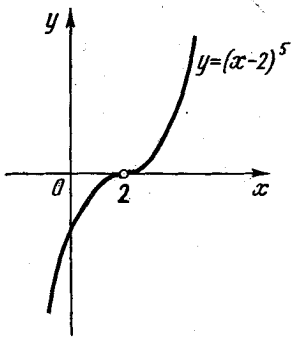

Рис. 7.2

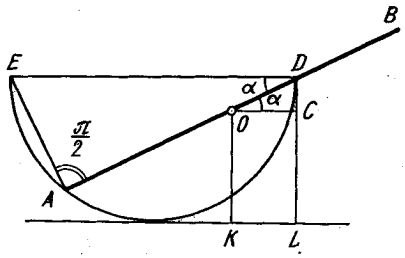

Рис. 7.3

дется такая окрестность точки c, в пределах которой $f'(x)$ положительна (отрицательна) слева от c и отрицательна (положительна) справа от c. Но тогда по предыдущей теореме $f(x)$ имеет в точке c локальный максимум (минимум)

Замечание. Теорема 7.2 имеет, вообще говоря, более узкую сферу действия, чем теорема 7.1. Так, теорема 7.2 не решает вопроса об экстремуме для случая, когда вторая производная $f^{(2)}(x)$ не существует в точке c, а также для случая, когда $f^{(2)}(c)=0$. В последнем случае для решения вопроса о наличии экстремума нужно изучить поведение в точке c производных высших порядков, что будет сделано нами ниже в п. 5.

Примеры. 1) В неподвижную чашку, имеющую форму полушара радиуса r, опущен однородный стержень длины l (рис. 7.3). Предполагая, что $2r<l<4r$, найти положение равновесия стержня.

Положению равновесия стержня соответствует минимальное значение его потенциальной энергии, т. е. наинизшее положение центра его тяжести O (поскольку стержень является однородным, центр тяжести его совпадает с его серединой). Обозначая через OK перпендикуляр к плоскости, на которой стоит чашка,

мы сведем задачу к отысканию того положения стержня AB, при котором отрезок OK имеет минимальную длину. Прежде всего вычислим длину отрезка OK как функцию угла α наклона стержня к плоскости, на которой стоит чашка. Пусть прямая DL параллельна прямой OK, а прямая OC перпендикулярна OK (D — точка, в которой стержень опирается на край чашки).

Из рассмотрения прямоугольного треугольника EAD следует, что $AD=ED\cos\alpha=2r\cos\alpha$. По условию $AO=\frac{l}{2}$. Таким образом,

$$OD=AD-AO=2r\cos\alpha-\frac{l}{2}.$$

С другой стороны, $DC=DL-OK=r-OK$. Поэтому из рассмотрения прямоугольного треугольника ODC следует, что

$$\sin\alpha=\frac{DC}{OD}=\frac{r-OK}{2r\cos\alpha-\frac{l}{2}}.$$

Таким образом, длина отрезка OK, которую мы обозначим $f(\alpha)$, равна

$$f(\alpha)=r+\frac{l}{2}\sin\alpha-r\sin 2\alpha.$$

Переходим к отысканию того значения угла α, которое доставляет минимум $f(\alpha)$. (Понятно, что мы можем ограничиться значениями угла α из первой четверти.) Так как

$$f'(\alpha)=\frac{l}{2}\cos\alpha-2r\cos 2\alpha=\frac{l}{2}\cos\alpha+2r-4r\cos^2\alpha,$$

то стационарные точки находятся как решения квадратного уравнения

$$4r\cos^2\alpha-\frac{l}{2}\cos\alpha-2r=0.$$

Поскольку $\cos\alpha$ в первой четверти положителен, то нам пригоден только положительный корень этого уравнения

$$\cos\alpha_0=\frac{l+\sqrt{l^2+128r^2}}{16r}. \tag{7.2}$$

Хотя по смыслу задачи и ясно, что единственная стационарная точка α_0 является точкой минимума функции $f(\alpha)$, мы установим это строго при помощи теоремы 7.2. Достаточно убедиться в том, что $f^{(2)}(\alpha_0)>0$. Поскольку

$$f^{(2)}(\alpha)=-\frac{l}{2}\sin\alpha+4r\sin 2\alpha=8r\sin\alpha\cdot\left(\cos\alpha-\frac{l}{16r}\right),$$

то в силу (7.2)

$$f^{(2)}(\alpha)=8r\sin\alpha_0\left(\cos\alpha_0-\frac{l}{16r}\right)=\frac{\sin\alpha_0}{2}\sqrt{l^2+128r^2}>0.$$

Тем самым установлено, что положению равновесия стержня отвечает угол наклона его к плоскости, на которой стоит чашка, определяемый формулой (7.2).

2) Еще раз найдем точки эксртемума функции $f(x)=x^3-3x^2-4$. Стационарными точками этой функции, как мы уже видели выше, являются точки $x=0$ и $x=2$. Так как

$$f^{(2)}(x)=6x-6,\quad f^{(2)}(0)=-6<0,\quad f^{(2)}(2)=6>0,$$

то в силу теоремы 7.2 функция $f(x)$ имеет максимум в точке 0 и минимум в точке 2. Экстремальные значения этой функции равны

$$f_{\max}=f(0)=-4,\quad f_{\min}=f(2)=-8.$$

5. Третье достаточное условие экстремума. Установим еще одно *достаточное* условие локального экстремума, пригодное в случае, когда вторая производная функции в данной стационарной точке обращается в нуль.

Теорема 7.3. *Пусть $n\geqslant 1$ — некоторое нечетное число, и пусть функция $y=f(x)$ имеет производную порядка n в некоторой окрестности точки c и производную порядка $n+1$ в самой точке c. Тогда, если выполнены соотношения*

$$f'(c)=f^{(2)}(c)=\ldots=f^{(n)}(c)=0,\quad f^{(n+1)}(c)\neq 0, \tag{7.3}$$

то функция $y=f(x)$ имеет в точке c локальный экстремум, точнее, локальный максимум при $f^{(n+1)}(c)<0$ и локальный минимум при $f^{(n+1)}(c)>0$.

Доказательство. При $n=1$ теорема 7.3 совпадает с уже доказанной выше теоремой 7.2, так что нужно вести доказательство лишь при нечетном $n\geqslant 3$.

Пусть нечетное число n удовлетворяет условию $n\geqslant 3$, и пусть ради определенности $f^{(n+1)}(c)>0$. Докажем, что функция $y=f(x)$ имеет в точке c локальный минимум.

Так как $f^{(n+1)}(c)>0$, то, в силу теоремы 6.1 о достаточном условии возрастания функции в точке, функция $f^{(n)}(x)$ возрастает в точке c. Но тогда, поскольку $f^{(n)}(c)=0$, можно утверждать, что всюду в достаточно малой окрестности точки c функция $f^{(n)}(x)$ отрицательна слева от c и положительна справа от c.

Заметив это, разложим функцию $f'(x)$ в окрестности точки c по формуле Тейлора, записав остаточный член в форме Лагранжа (см. § 7 и 8 гл. 6). Мы получим, что для всех x из достаточно малой окрестности точки c между x и c найдется точка ξ такая, что

$$f'(x)=f'(c)+\frac{f^{2}(c)}{1!}(x-c)+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-2)!}(x-c)^{n-2}+$$

$$+\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1}.$$

В силу соотношений (7.3) написанное разложение принимает вид

$$f'(x)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1}. \tag{7.4}$$

Выше мы установили, что для всех x из достаточно малой окрестности точки c производная $f^{(n)}(x)$ отрицательна слева от c и положительна справа от c. Так как ξ лежит между x и c, то для всех x из достаточно малой окрестности точки c величина $f^{(n)}(\xi)$ (а значит, в силу нечетности n и вся правая часть (7.4)) отрицательна слева от c и положительна справа от c.

Итак, с помощью равенства (7.4) мы доказали, что *производная $f'(x)$ для всех x из достаточно малой окрестности точки c отрицательна слева от c и положительна справа от c.*

В этой ситуации, в силу первого достаточного условия экстремума (т. е. теоремы 7.1), функция $y=f(x)$ имеет в точке c локальный минимум.

Случай $f^{(n+1)}(c)<0$ рассматривается совершенно аналогично. Те же рассуждения и формула (7.4) в этом случае дают возможность заключить, что функция $y=f(x)$ имеет в точке c локальный максимум. Теорема полностью доказана.

Замечание. Очень важным является требование нечетности числа n в теореме 7.3. При четном n и при сохранении всех остальных условий теоремы 7.3 никакого экстремума у функции $y=f(x)$ в точке c не будет (см. по этому поводу теорему 7.10 из п. 5 § 3 этой главы).

6. Экстремум функции, недифференцируемой в данной точке. Выше мы рассмотрели вопрос о наличии у функции $f(x)$ экстремума *в такой точке c, в которой функция $f(x)$ дифференцируема.* В этом пункте мы изучим вопрос о наличии экстремума в точке c у такой функции, которая недифференцируема в точке c, но дифференцируема всюду в некоторой окрестности справа и слева от c и, кроме того, непрерывна в точке c.

Оказывается, теорема 7.1 может быть обобщена на случай такой функции. Именно, имеет место следующее утверждение.

Теорема 7.4. *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема всюду в некоторой окрестности точки c, за исключением, быть может, самой точки c, и непрерывна в точке c.*

Тогда, если в пределах указанной окрестности производная $f'(x)$ положительна (отрицательна) слева от точки c и отрицательна (положительна) справа от точки c, то функция $f(x)$ имеет в точке c локальный максимум (минимум). Если же производная $f'(x)$ имеет один и тот же знак слева и справа от точки c, то экстремума в точке c нет.

Доказательство в точности совпадает с доказательством теоремы 7.1.

Достаточно заметить, что условия теоремы 7.4 и на этот раз обеспечивают применимость к $f(x)$ теоремы 6.4 Лагранжа по сегменту, ограниченному точками c и x_0, где x_0 — любое число из достаточно малой окрестности точки c.

Примеры. 1) *Найти точки экстремума функции* $f(x)=|x|$. Эта функция дифференцируема всюду на бесконечной прямой, кроме точки $x=0$, и непрерывна в точке $x=0$, причем производная $f'(x)$ равна 1 при $x>0$ и равна -1 при $x<0$.

Теорема 7.1 к этой функции неприменима, а согласно теореме 7.4 она имеет минимум при $x=0$ (рис. 7.4).

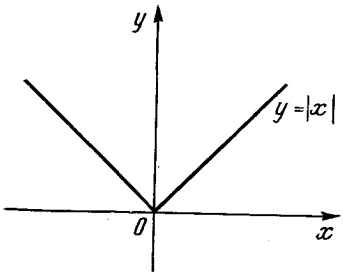

Рис. 7.4

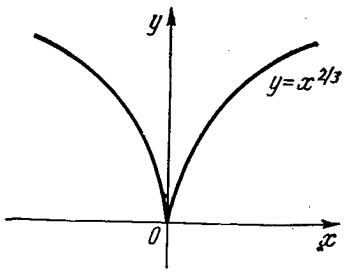

Рис. 7.5

2) *Найти точки экстремума функции* $y=x^{2/3}$. Эта функция непрерывна на всей бесконечной прямой и дифференцируема всюду на этой прямой, за исключением точки $x=0$. Производная при $x\neq 0$ равна

$$y'=\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

В предыдущем примере производная имела в точке $x=0$ конечный скачок*, на этот раз производная имеет в точке $x=0$ разрыв 2-го рода («бесконечный скачок»). Из выражения для производной заключаем, что эта производная отрицательна слева от точки $x=0$ и положительна справа от этой точки. Значит, теорема 7.4 позволяет утверждать, что рассматриваемая функция имеет минимум в точке $x=0$ (график рассматриваемой функции изображен на рис. 7.5).

* В том смысле, что эта производная хотя и не существовала в точке $x=0$, но имела в этой точке правое и левое предельные значения, не совпадающие между собой.

3) *Найти точки экстремума функции*

$$y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{при } x\neq 0,\\ 0 & \text{при } x=0.\end{cases}$$

Легко видеть, что функция непрерывна на всей бесконечной прямой. В самом деле, единственной «сомнительной» точкой является точка $x=0$, но и в этой точке функция непрерывна, ибо

$$\lim_{x\to 0+0} y=\lim_{x\to 0-0} y=0.$$

Далее, очевидно, что рассматриваемая функция дифференцируема на всей бесконечной прямой, кроме точки $x=0$. Всюду, кроме этой точки, производная определяется формулой

$$y'=\frac{1+e^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}}{(1+e^{\frac{1}{x}})^2}.$$

Легко видеть, что предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ не существует, так что функция $y=f(x)$ недифференцируема в точке $x=0$. Поскольку производная y' положительна и слева, и справа от точки $x=0$, рассматриваемая функция согласно теореме 7.4 не имеет экстремума в точке $x=0$, а значит, и вообще не имеет экстремумов. (График рассматриваемой функции изображен на рис. 7.6.)

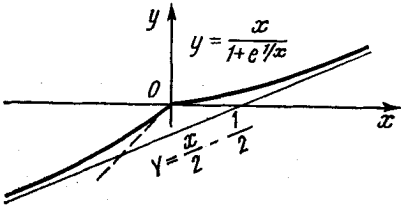

Рис. 7.6

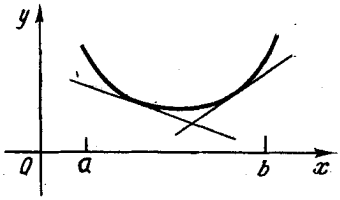

Рис. 7.7

7. Общая схема отыскания экстремумов. Переходим к общей схеме отыскания точек локального экстремума. Предположим, что *функция $f(x)$ непрерывна на интервале* (a, b) и ее производная*

* Вместо интервала (a, b) можно рассматривать бесконечную прямую или открытую полупрямую.

$f'(x)$ существует и непрерывна на этом интервале всюду, кроме конечного числа точек.

Кроме того, предположим, что *производная $f'(x)$ обращается в нуль на интервале (a, b) не более чем в конечном числе точек.* Иными словами, мы предполагаем, что на интервале (a, b) имеется лишь конечное число точек, в которых производная $f'(x)$ не существует или обращается в нуль. Обозначим эти точки символами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(a<x_1<x_2<\ldots<x_n<b)$. В силу сделанных предположений *производная $f'(x)$ сохраняет постоянный знак на каждом из интервалов (a, x_1), $(x_1, x_2), \ldots, (x_n, b)$.* Значит, *вопрос о наличии экстремума в каждой из точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$ может быть решен (в утвердительном или отрицательном смысле) при помощи теоремы* 7.4.

§ 2. ВЫПУКЛОСТЬ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

Предположим, что функция $f(x)$ дифференцируема в любой точке интервала (a, b). Тогда, как установлено в п. 3 § 1 гл. 5, *существует касательная к графику функции $y=f(x)$, проходящая через любую точку $M(x, f(x))$ этого графика $(a<x<b)$, причем эта касательная не параллельна* оси Oy.*

Определение. *Будем говорить, что график функции $y=f(x)$ имеет на интервале (a, b) выпуклость, направленную вниз (вверх), если график этой функции в пределах указанного интервала лежит не ниже (не выше) любой своей касательной.*

Замечание 1. Термин «график лежит *не ниже* (или *не выше*) своей касательной» имеет смысл, ибо касательная не параллельна оси Oy.

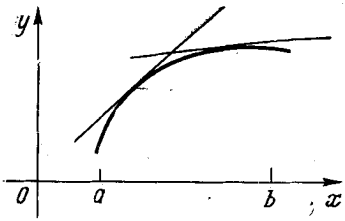

Рис. 7.8

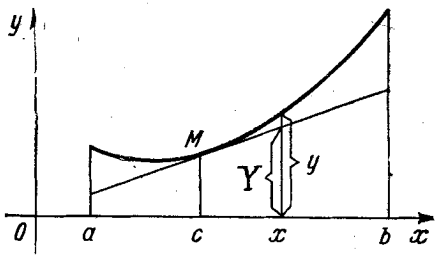

Рис. 7.9

На рис. 7.7 изображен график функции, имеющий на интервале (a, b) выпуклость, направленную вниз, а на рис. 7.8 изображен график функции, имеющий выпуклость, направленную вверх.

* Ибо угловой коэффициент ее, равный производной $f'(x)$, конечен.

Теорема 7.5. *Если функция $y=f(x)$ имеет на интервале (a, b) конечную вторую производную и если эта производная неотрицательна (неположительна) всюду на этом интервале, то график функции $y=f(x)$ имеет на интервале (a, b) выпуклость, направленную вниз (вверх).*

Доказательство. Ради определенности рассмотрим случай, когда вторая производная $f^{(2)}(x)\geqslant 0$ всюду на (a, b). Обозначим через *c любую* точку интервала (a, b) (рис. 7.9). Требуется доказать, что график функции $y=f(x)$ в пределах интервала (a, b) лежит не ниже касательной, проходящей через точку $M(c, f(c))$. Запишем уравнение указанной касательной, обозначая ее текущую ординату через Y. Поскольку угловой коэффициент указанной касательной равен $f'(c)$, то ее уравнение имеет вид *

$$Y-f(c)=f'(c)(x-c). \tag{7.5}$$

Разложим функцию $f(x)$ в окрестности точки c по формуле Тейлора, беря в этой формуле $n=1$. Получим

$$y=f(x)=f(c)+\frac{f'(c)}{1!}(x-c)+\frac{f^{(2)}(\xi)}{2!}(x-c)^2, \tag{7.6}$$

где остаточный член взят в форме Лагранжа, ξ заключено между c и x. (Поскольку по условию $f(x)$ имеет вторую производную на интервале (a, b), формула (7.6) справедлива для любого x из интервала (a, b); см. §§ 7 и 8 гл. 6.)

Сопоставляя (7.6) и (7.5), будем иметь

$$y-Y=\frac{f^{(2)}(\xi)}{2}(x-c)^2. \tag{7.7}$$

Поскольку вторая производная по условию $\geqslant 0$ всюду на (a, b), то правая часть (7.7) *неотрицательна*, т. е. для всех x из (a, b) справедливо $y-Y\geqslant 0$, или $y\geqslant Y$.

Последнее неравенство доказывает, что график функции $y=f(x)$ всюду в пределах интервала (a, b) лежит не ниже касательной (7.5).

Аналогично доказывается теорема для случая $f^{(2)}(x)\leqslant 0$.

Замечание 2. Если $f^{(2)}(x)=0$ всюду на интервале (a, b), то, как легко убедиться, $y=f(x)$ — линейная функция, т. е. график ее есть прямая линия. В этом случае направление выпуклости можно считать произвольным.

Теорема 7.6. *Пусть вторая производная функции $y=f(x)$ непрерывна и положительна (отрицательна) в точке c. Тогда существует такая окрестность ** точки c, в пределах которой график*

* Уравнение прямой, проходящей через точку $M(a, b)$ и имеющей угловой коэффициент k, имеет вид $Y-b=k(x-a)$ (см. курс аналитической геометрии).

** Напомним, что окрестностью точки c называется интервал, содержащий точку c.

функции $y=f(x)$ имеет выпуклость, направленную вниз (вверх).

Доказательство. По теореме об устойчивости знака непрерывной функции найдется такая окрестность точки c, в пределах которой вторая производная $f^{(2)}(x)$ положительна (отрицательна). По предыдущей теореме график функции $y=f(x)$ имеет в пределах этой окрестности выпуклость, направленную вниз (вверх).

Таким образом, направление выпуклости графика функции полностью характеризуется знаком второй производной этой функции.

Пример. Исследовать направление выпуклости графика функции $y=x^3-3x^2-4$. Из вида второй производной $f^{(2)}(x)=6(x-1)$ вытекает, что эта производная отрицательна при $x<1$ и положительна при $x>1$. Таким образом, выпуклость графика функции $y=x^3-3x^2-4$ направлена вверх на участке $(-\infty, 1)$ и вниз на участке $(1, \infty)$ (см. рис. 7.1).

§ 3. ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

1. Определение точки перегиба. Необходимое условие перегиба. Пусть a, b и c — некоторые три числа, связанные неравенствами $a<c<b$. Предположим, что функция $y=f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b), т. е. существует касательная к графику этой функции во всех точках, абсциссы которых принадлежат интервалу (a, b). Предположим, кроме того, что график функции $y=f(x)$ имеет определенное направление выпуклости на каждом из интервалов (a, c) и (c, b).

Определение. *Точка $M(c, f(c))$ графика функции $y=f(x)$ называется точкой перегиба этого графика, если существует такая окрестность точки c оси абсцисс, в пределах которой график функции $y=f(x)$ слева и справа от c имеет разные направления выпуклости.*

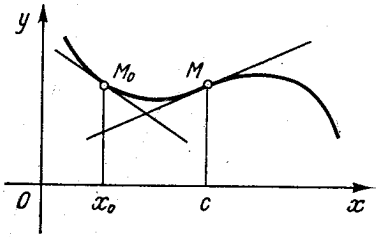

Рис. 7.10

На рис. 7.10 изображен график функции, имеющий перегиб в точке $M(c, f(c))$.

Иногда при определении точки перегиба графика функции $y=f(x)$ дополнительно требуют, *чтобы указанный график всюду в пределах достаточно малой окрестности точки c оси абсцисс слева и справа от c лежал по разные стороны от касательной к этому графику в точке $M(c, f(c))$.* Ниже мы докажем, что это свойство будет вытекать из данного нами определения в предположении, что производная $f'(x)$ является непрерывной в c.

Докажем следующие две леммы.

Лемма 1. *Пусть функция $y=f(x)$ имеет производную $f'(x)$ всюду в δ-окрестности точки c, причем эта производная непрерывна в точке c. Тогда, если график функции $y=f(x)$ имеет на интервале $(c, c+\delta)$ выпуклость, направленную вниз [вверх], то всюду в пределах интервала $(c, c+\delta)$ этот график лежит не ниже [не выше] касательной к графику, проведенной в точке $M(c, f(c))$.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$ точек интервала $(c, c+\delta)$, сходящуюся к точке c. Через каждую точку $M_n(x_n, f(x_n))$ графика функции $y=f(x)$ проведем касательную к этому графику, т. е. прямую*

$$Y_n=f(x_n)+f'(x_n)(x-x_n).$$

Так как по условию график функции $y=f(x)$ имеет на интервале $(c, c+\delta)$ выпуклость, направленную вниз [вверх], то для любого номера n и любой *фиксированной* точки x интервала $(c, c+\delta)$

$$f(x)-Y_n=f(x)-f(x_n)-f'(x_n)(x-x_n)\geqslant 0 \quad [\leqslant 0]. \qquad (*)$$

Из условия непрерывности $f'(x)$ (и тем более $f(x)$) в точке c и из определения непрерывности по Гейне вытекает, что существует предел

$$\lim_{n\to\infty}(f(x)-Y_n)=\lim_{n\to\infty}\{f(x)-f(x_n)-f'(x_n)(x-x_n)\}=$$
$$=f(x)-f(c)-f'(c)(x-c).$$

Из существования последнего предела в силу неравенства $(*)$ и теоремы 3.13 из § 1 гл. 3 мы получим, что

$$f(x)-f(c)-f'(c)(x-c)\geqslant 0 \quad [\leqslant 0].$$

Если обозначить через Y текущую ординату касательной (7.5), проходящей через точку $M(c, f(c))$, то последнее неравенство можно переписать в виде

$$f(x)-Y\geqslant 0 \quad [\leqslant 0].$$

Итак, переходя в $(*)$ к пределу при $n\to\infty$ и используя теорему 3.13, мы получим, что $f(x)-Y\geqslant 0$ $[\leqslant 0]$ для любой фиксированной точки x из интервала $(c, c+\delta)$, причем Y обозначает текущую ординату касательной, проведенной через точку $M(c, f(c))$. Лемма доказана.

Замечание. Аналогично формулируется и доказывается лемма 1 и для случая, когда график функции имеет определенное направление выпуклости не на интервале $(c, c+\delta)$, а на интервале $(c-\delta, c)$.

---

* Мы используем уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_n(x_n, f(x_n))$ и имеющей угловой коэффициент, равный $f'(x_n)$. Текущую ординату этой прямой обозначаем через Y_n.

Лемма 2. *Пусть функция $y=f(x)$ имеет производную $f'(x)$ в некоторой окрестности точки c, причем эта производная непрерывна в точке c. Тогда, если график функции $y=f(x)$ имеет перегиб в точке $M(c, f(c))$, то в пределах достаточно малой δ-окрестности точки c этот график слева и справа от c лежит по разные стороны от касательной, проведенной через точку $M(c, f(c))$.*

Для доказательства этой леммы следует выбрать $\delta>0$ настолько малым, чтобы на каждом из интервалов $(c-\delta, c)$ и $(c, c+\delta)$ график функции $y=f(x)$ имел определенное направление выпуклости (это направление будет *различным* на интервалах $(c-\delta, c)$ и $(c, c+\delta)$. После этого для доказательства леммы 2 остается применить лемму 1 к функции $y=f(x)$ по каждому из интервалов $(c-\delta, c)$ и $(c, c+\delta)$.

Лемма 2 позволяет нам установить необходимое условие перегиба графика дважды дифференцируемой в данной точке функции $y=f(x)$.

Теорема 7.7 (необходимое условие перегиба графика дважды дифференцируемой функции). *Если функция $y=f(x)$ имеет в точке c вторую производную и график этой функции имеет перегиб в точке $M(c, f(c))$, то $f^{(2)}(c)=0$.*

Доказательство. Пусть, как выше, Y — текущая ордината касательной $Y=f(c)+f'(c)(x-c)$, проходящей через точку графика $M(c, f(c))$.

Рассмотрим функцию

$$F(x)=f(x)-Y=f(x)-f(c)-f'(c)(x-c),$$

равную разности $f(x)$ и линейной функции $f(c)+f'(c)(x-c)$.

Эта функция $F(x)$, как и функция $f(x)$, имеет в точке c вторую производную (а потому имеет первую производную в некоторой окрестности c, причем эта первая производная непрерывна в точке c). В силу леммы 2 в малой окрестности точки c график функции $y=f(x)$ лежит слева и справа от c по разные стороны от касательной, проходящей через точку $M(c, f(c))$, а потому функция $F(x)$ в малой окрестности точки c имеет слева и справа от c *разные знаки.*

Значит, *функция $F(x)$ не может иметь в точке c локального экстремума.*

Предположим теперь, что $f^{(2)}(c)\neq 0$. Тогда, поскольку $F'(x)=f'(x)-f'(c)$, $F^{(2)}(x)=f^{(2)}(x)$, выполняются условия $F'(c)=0$, $F^{(2)}(c)\neq 0$ и функция $F(x)$ в силу теоремы 7.2 имеет в точке c локальный экстремум. Полученное противоречие доказывает, что предположение $f^{(2)}(c)\neq 0$ является неверным, т. е. $f^{(2)}(c)=0$. Теорема доказана.

Тот факт, что обращение в нуль второй производной является *лишь необходимым* условием перегиба графика дважды дифференцируемой функции, вытекает, например, из рассмотрения

графика функции $y=x^4$. Для этой функции вторая производная $y''=12x^2$ обращается в нуль в точке $x=0$, но ее график не имеет перегиба в точке $M(0, 0)$.

В силу теоремы 7.7 для отыскания всех точек перегиба графика дважды дифференцируемой функции $y=f(x)$ нужно рассмотреть все корни уравнения $f^{(2)}(x)=0$.

Поскольку равенство нулю второй производной является лишь необходимым условием перегиба, то нужно дополнительно исследовать вопрос о наличии перегиба в каждой точке, для которой $f^{(2)}(x)=0$. Для проведения такого исследования следует установить *достаточные условия перегиба*, к чему мы и переходим.

2. Первое достаточное условие перегиба.

Теорема 7.8. *Пусть функция $y=f(x)$ имеет вторую производную в некоторой окрестности точки c и $f^{(2)}(c)=0$. Тогда, если в пределах указанной окрестности вторая производная $f^{(2)}(x)$ имеет разные знаки слева и справа от c, то график этой функции имеет перегиб в точке M $(c, f(c))$.*

Доказательство. Заметим, во-первых, что график функции $y=f(x)$ имеет касательную в точке $M(c, f(c))$, ибо из условий теоремы вытекает существование конечной производной $f'(c)$. Далее, из того, что $f^{(2)}(x)$ слева и справа от c имеет разные знаки, и из теоремы 7.5 заключаем, что направление выпуклости слева и справа от c является различным. Теорема доказана.

Пример. Найти точки перегиба графика функции $f(x)=$ $=x^3-3x^2-4$. Эту функцию мы неоднократно рассматривали выше (график ее изображен на рис. 7.1). Поскольку $f^{(2)}(x)=$ $=6x-6=6(x-1)$, то единственное значение аргумента, для которого возможен перегиб, есть $x=1$. Этому значению аргумента соответствует точка графика $M(1, -6)$. Так как $f^{(2)}(x)$ имеет разные знаки при $x>1$ и при $x<1$, то точка $M(1, -6)$ является точкой перегиба графика рассматриваемой функции.

3. Некоторые обобщения первого достаточного условия перегиба. Прежде всего заметим, что *в условиях теоремы 7.8 можно отказаться от требования двукратной дифференцируемости функции $y=f(x)$ в самой точке c, сохраняя это требование лишь для точек, лежащих в некоторой окрестности слева и справа от c. При этом следует дополнительно предположить существование конечной производной $f'(c)$.*

Доказательство теоремы 7.8 с указанными изменениями дословно совпадает с доказательством, приведенным выше.

Далее можно договориться при определении точки перегиба не исключать случая, когда касательная к графику в рассматриваемой точке параллельна оси Oy*. При такой договоренности в теореме 7.8 можно отказаться даже от требования однократной

* В этом случае первая производная $f'(x)$ в точке c принимает бесконечное значение.

дифференцируемости функции $f(x)$ в самой точке c и сформулировать эту теорему следующим образом:

Пусть функция $y=f(x)$ имеет конечную вторую производную всюду в некоторой окрестности точки c, за исключением, быть может, самой точки c. Пусть, далее, функция $y=f(x)$ непрерывна в точке c и график этой функции имеет касательную в точке $M(c, f(c))$. Тогда, если в пределах указанной окрестности вторая производная $f^{(2)}(x)$ имеет разные знаки слева и справа от точки c, то график функции $y=f(x)$ имеет перегиб в точке $M(c, f(c))$.*

Доказательство сформулированного утверждения полностью аналогично доказательству теоремы 7.8.

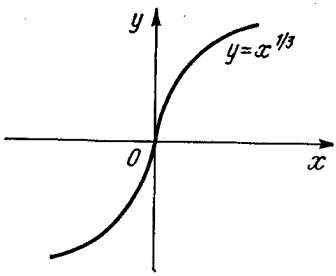

Рис. 7.11

Пример. Найти точки перегиба графика функции $y=x^{1/3}$. Эта функция имеет вторую производную всюду на бесконечной прямой, за исключением точки $x=0$. В точке $x=0$ рассматриваемая функция непрерывна, но уже первая производная обращается в бесконечность. Однако график функции $y=x^{1/3}$ имеет в точке (0, 0) касательную, параллельную оси Oy** (рис. 7.11).

Так как вторая производная $y^{(2)}=-\frac{2}{9}\frac{1}{x^{5/3}}$ имеет слева и справа от точки $x=0$ разные знаки, то график функции $y=x^{1/3}$ имеет перегиб в точке (0, 0).

4. Второе достаточное условие перегиба. На случай, когда нежелательно исследование знака второй производной в окрестности точки c, мы сформулируем второе достаточное условие перегиба, предполагающее существование у функции $y=f(x)$ в точке c конечной третьей производной.

Теорема 7.9. *Если функция $y=f(x)$ имеет в точке c конечную третью производную и удовлетворяет в этой точке условиям $f^{(2)}(c)=0$, $f^{(3)}(c)\neq 0$, то график этой функции имеет перегиб в точке $M(c, f(c))$.*

Доказательство. Из условия $f^{(3)}(c)\neq 0$ и из теоремы 6.1 вытекает, что функция $f^{(2)}(x)$ либо возрастает, либо убывает в точке c. Так как $f^{(2)}(c)=0$, то и в том, и в другом случае найдется такая окрестность точки c, в пределах которой $f^{(2)}(x)$ имеет *разные знаки слева и справа от c*. Но тогда по предыдущей теореме график функции $y=f(x)$ имеет перегиб в точке $M(c, f(c))$.

---

* Быть может, параллельную оси Oy.

** Это вытекает, например, из того, что график обратной функции $x=y^3$ имеет в этой точке касательную $x=0$.

Замечание. Конечно, теорема 7.9 имеет более узкую сферу действия, чем теорема 7.8. Так, теорема 7.9 не решает вопроса о наличии перегиба для случая, когда у функции $y=f(x)$ не существует конечной третьей производной, а также для случая, *когда* $f^{(3)}(c)=0$. В последнем случае для решения вопроса о наличии перегиба нужно изучить поведение в точке c производных высших порядков, что будет сделано нами ниже (см. п. 5).

Возвратимся к примеру, рассмотренному в п. 2, и покажем, что вопрос о наличии перегиба у графика функции $y=x^3-3x^2-4$ может быть решен и при помощи теоремы 7.9. В самом деле, $f^{(3)}(x)=6\neq 0$, значит, точка $M(1, -6)$ является точкой перегиба согласно теореме 7.9.

5. Третье достаточное условие перегиба. Установим еще одно достаточное условие перегиба, пригодное для случая, когда в данной точке c обращаются в нуль как вторая, так и третья производные рассматриваемой функции.

Аналогом теоремы 7.3 является следующее утверждение.

Теорема 7.10. *Пусть $n\geqslant 2$ некоторое четное число, и пусть функция $y=f(x)$ имеет производную порядка n в некоторой окрестности точки c и производную порядка $n+1$ в самой точке c. Тогда, если выполнены соотношения*

$$f^{(2)}(c)=f^{(3)}(c)=\ldots=f^{(n)}(c)=0, \qquad f^{(n+1)}(c)\neq 0, \tag{7.3*}$$

то график функции $y=f(x)$ имеет перегиб в точке $M(c, f(c))$.

Доказательство. При $n=2$ теорема 7.10 совпадает с уже доказанной выше теоремой 7.9, так что нужно вести доказательство *лишь для четного* $n\geqslant 4$.

Пусть четное число n удовлетворяет условию $n\geqslant 4$, и пусть $f^{(n+1)}(c)\neq 0$. Тогда, в силу теоремы 6.1 о достаточном условии возрастания или убывания функции в точке, функция $f^{(n)}(x)$ либо убывает в точке c (при $f^{(n+1)}(c)<0$), либо возрастает в этой точке (при $f^{(n+1)}(c)>0$). Поскольку, кроме того, $f^{(n)}(c)=0$, то и в том, и в другом случае всюду в достаточно малой окрестности точки c функция $f^{(n)}(x)$ *имеет разные знаки справа и слева от* c.

Заметив это, разложим функцию $f^{(2)}(x)$ в окрестности точки c по формуле Тейлора, записав остаточный член в форме Лагранжа (см. § 7 и 8 гл. 6). Мы получим, что для всех x из достаточно малой окрестности точки c между x и c найдется точка ξ такая, что

$$f^{(2)}(x)=f^{(2)}(c)+\frac{f^{(3)}(c)}{1!}(x-c)+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-3)!}(x-c)^{n-3}+$$

$$+\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-2)!}(x-c)^{n-2}.$$

В силу соотношений (7.3*) написанное разложение принимает вид

$$f^{(2)}(x)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-2)!}(x-c)^{n-2}. \qquad (7.4^*)$$

Выше мы установили, что для всех x из достаточно малой окрестности точки c производная $f^{(n)}(x)$ имеет разные знаки справа и слева от c. Так как ξ лежит между x и c, то для всех x из достаточно малой окрестности точки c величина $f^{(n)}(\xi)$ (а значит, в силу четности n и вся правая часть (7.4*)) имеет разные знаки справа и слева от c. Итак, в силу равенства (7.4*) для всех x из достаточно малой окрестности точки c производная $f^{(2)}(x)$ имеет разные знаки справа и слева от c. В силу теоремы 7.8 график функции $y=f(x)$ имеет перегиб в точке $M(c, f(c))$. Теорема доказана.

Замечание. Очень важным является требование *четности* n в теореме 7.10 (сравните эту теорему с теоремой 7.3). Рис. 7.12 и 7.13 иллюстрируют исследование на экстремум и перегиб графи-

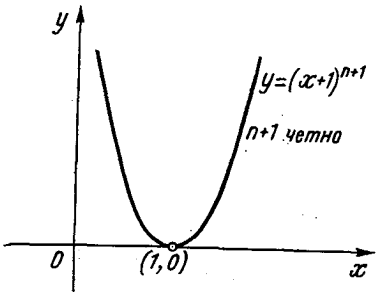

Рис. 7.12

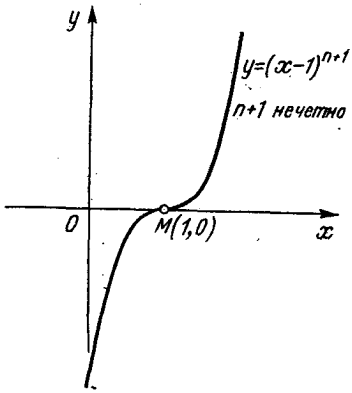

Рис. 7.13

ка функции $y=(x-1)^{n+1}$. В силу теорем 7.3 и 7.10 эта функция имеет минимум в точке $x=1$ при нечетном n, а ее график имеет перегиб в точке $M(1, 0)$ при четном n (проверьте это сами).

§ 4. АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

Определение 1. *Говорят, что прямая $x=a$ является вертикальной асимптотой графика функции $y=f(x)$, если хотя бы один из пределов*

$$\lim_{x\to a+0} f(x) \quad \text{или} \quad \lim_{x\to a-0} f(x)$$

равен $+\infty$ или $-\infty$.

Пример. График функции $y=\frac{1}{x}$ имеет вертикальную асимптоту $x=0$, ибо $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{1}{x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{1}{x}=-\infty$ (рис. 7.14).

Предположим, далее, что функция $y=f(x)$ определена для сколь угодно больших значений аргумента. Ради определенности будем рассматривать сколь угодно большие значения положительного знака.

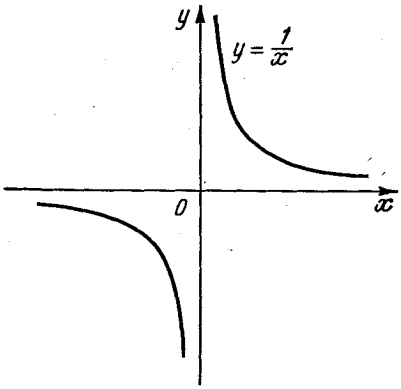

Рис. 7.14

Определение 2. *Говорят, что прямая*

$$Y=kx+b \tag{7.8}$$

является наклонной асимптотой графика функции $y=f(x)$ *при* $x\to+\infty$, *если* $f(x)$ *представима в виде*

$$f(x)=kx+b+\alpha(x), \tag{7.9}$$

где

$$\lim_{x\to+\infty}\alpha(x)=0.$$

Теорема 7.11. *Для того чтобы график функции* $y=f(x)$ *имел* $x\to+\infty$ *наклонную асимптоту* (7.8), *необходимо и достаточно, чтобы существовали два предела*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k \text{ и } \lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=b. \tag{7.10}$$

Доказательство. 1) *Необходимость.* Пусть график функции $y=f(x)$ имеет при $x\to+\infty$ асимптоту (7.8), т. е. для $f(x)$ справедливо представление (7.9). Тогда

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{kx+b+\alpha(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[k+\frac{b}{x}+\frac{\alpha(x)}{x}\right]=k,$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to+\infty}[b+\alpha(x)]=b.$$

2) *Достаточность.* Пусть существуют пределы (7.10). Второй из этих пределов дает право утверждать, что разность $f(x)-kx-b$ является бесконечно малой при $x\to+\infty$. Обозначив эту бесконечно малую через $\alpha(x)$, получим для $f(x)$ представление (7.9). Теорема доказана.

Замечание. Аналогично определяется наклонная асимптота и доказывается теорема 7.11 и для случая $x\to-\infty$.

Пример. График функции $y=\frac{2x^2+x}{x+1}$ имеет наклонную

асимптоту $Y=2x-1$ и при $x\to+\infty$, и при $x\to-\infty$ и, кроме того, имеет вертикальную асимптоту $x=-1$ (рис. 7.15). В самом деле,

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2+x}{x(x+1)}=2,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-2x]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[-1+\frac{1}{x+1}\right]=-1,$$

$$\lim_{x\to-1+0}f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to-1-0}f(x)=-\infty.$$

Наряду с линейной асимптотой (7.8) рассматривают также и асимптоты более сложного вида.

Говорят, что парабола n-го порядка, определяемая многочленом

$$Y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0, \tag{7.8*}$$

является асимптотой графика функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$, если функция $f(x)$ представима в виде

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0+\alpha(x),$$

$$\lim_{x\to+\infty}\alpha(x)=0.$$

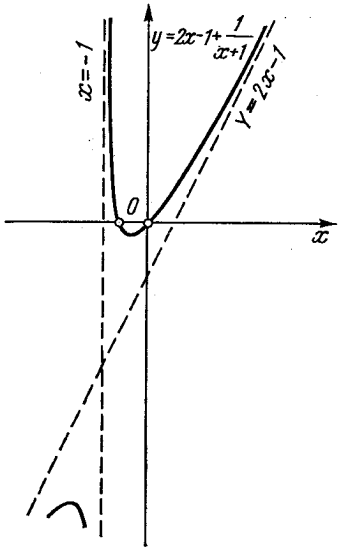

Рис. 7.15

Легко доказать следующее утверждение.

Для того чтобы график функции $y=f(x)$ имел при $x\to+\infty$ асимптоту (7.8), необходимо и достаточно, чтобы существовали следующие $n+1$ пределов:*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^n}=a_n,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-a_nx^n}{x^{n-1}}=a_{n-1},\ \ldots,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2)}{x}=a_1,$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x)]=a_0.$$

§ 5. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

В этом параграфе мы изложим схему, по которой целесообразно проводить исследование графика функции, и приведем пример, иллюстрирующий эту схему.

Для исследования графика функции $y=f(x)$ целесообразно прежде всего провести следующие исследования:

1°. Уточнить область задания функции.

2°. Выяснить вопрос о существовании асимптот (вертикальных и наклонных).

3°. Найти области возрастания и убывания функции и точки экстремума.

4°. Найти области сохранения направления выпуклости и точки перегиба.

5°. Найти точки пересечения графика функции с осью Ox.

По полученным данным легко строится эскиз графика функции. В качестве примера построим график функции

$$y=\frac{x^3-5x^2+19x-15}{x^2}. \tag{7.11}$$

Будем следовать изложенной выше схеме.

1°. Поскольку функция (7.11) представляет собой рациональную дробь, то она определена и непрерывна всюду на бесконечной прямой, кроме точки $x=0$, в которой обращается в нуль знаменатель.

2°. Выясним вопрос о существовании асимптот. Очевидно, что

$$\lim_{x\to 0\pm 0}\frac{x^3-5x^2+19x-15}{x^2}=-\infty,$$

поэтому график функции имеет *вертикальную асимптоту* $x=0$.

Далее, из существования пределов

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-5x^2+19x-15}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1-\frac{5}{x}+\frac{19}{x^2}-\frac{15}{x^3}\right)=1,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-5x^2+19x-15-x^3}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(-5+\frac{19}{x}-\frac{15}{x^2}\right)=-5$$

вытекает, что при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$ график функции имеет *наклонную асимптоту* $Y=x-5$.

3°. Для нахождения областей возрастания и убывания вычислим первую производную функции (7.11):

$$y'=\frac{x^3-19x+30}{x^3}=\frac{(x+5)(x-2)(x-3)}{x^3}.$$

Имея в виду, кроме того, что сама функция и первая производная не существуют при $x=0$, мы получим следующие области сохранения знака y:

Область значения x	$-\infty < x < -5$	$-5 < x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x < 3$	$3 < x < +\infty$
Знак y'	+	—	+	—	+
Поведение функции	возрастает	убывает	возрастает	убывает	возрастает

Из приведенной таблицы очевидно, что функция имеет следующие точки экстремума:

1) максимум при $x=-5$, причем $f(-5)=-14,4$;
2) максимум при $x=2$, причем $f(2)=2,75$;
3) минимум при $x=3$, причем $f(3)=2,666\ldots$.

4°. Для нахождения областей сохранения направления выпуклости вычислим вторую производную

$$y^{(2)}=\frac{38x-90}{x^4}=\frac{38\left(x-\frac{45}{19}\right)}{x^4}.$$

Имея в виду, что сама функция и ее производные не существуют в точке $x=0$, мы получим следующие области сохранения знака $y^{(2)}$:

Область значений x	$-\infty < x < 0$	$0 < x < \frac{45}{19}$	$\frac{45}{19} < x < +\infty$
Знак $y^{(2)}$	—	—	+
Направление выпуклости графика	вверх	вверх	вниз

Из приведенной таблицы очевидно, что график функции имеет перегиб в точке $\left(\frac{45}{19}, f\left(\frac{45}{19}\right)\right)$. Легко подсчитать, что

$$f\left(\frac{45}{19}\right)=\frac{6968}{2565}\approx 2,72.$$

5°. Остается найти точки пересечения графика с осью Ox. Эти точки соответствуют вещественным корням уравнения

$$x^3-5x^2+19x-15=0.$$

Легко видеть, что

$$x^3-5x^2+19x-15=(x-1)(x^2-4x+15).$$

Поскольку квадратный трехчлен $x^2-4x+15$ не имеет вещественных корней, то рассматриваемое уравнение имеет только один ве-

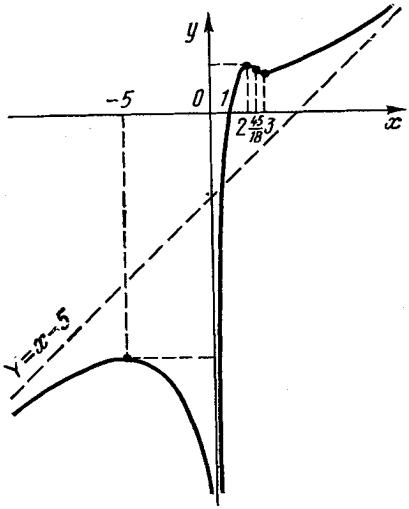

Рис. 7.16

щественный корень $x=1$, так что график функции пересекает ось Ox в точке (1,0). По полученным данным строим эскиз графика рассматриваемой функции (рис. 7.16).

§ 6. ГЛОБАЛЬНЫЕ МАКСИМУМ И МИНИМУМ ФУНКЦИИ НА СЕГМЕНТЕ. КРАЕВОЙ ЭКСТРЕМУМ

1. Отыскание максимального и минимального значений функции, определенной на сегменте. Рассмотрим функцию $y=f(x)$, определенную на сегменте $[a, b]$ и *непрерывную* на нем. До сих пор мы занимались лишь отысканием локальных максимумов и минимумов функции. Теперь поставим задачу об отыскании глобальных максимумов и минимумов или, по-другому, об отыскании максимального и минимального значений $f(x)$ на сегменте $[a, b]$. Подчеркнем, что в силу теоремы Вейерштрасса (см. теорему 4.15 из гл. 4) непрерывная функция $f(x)$ обязательно достигает в некоторой точке сегмента $[a, b]$ своего максимального (минимального) значения. Ради определенности остановимся на отыскании максимального значения $f(x)$ на сегменте $[a, b]$.

Максимальное значение функции $f(x)$ может достигаться либо во внутренней точке x_0 сегмента $[a, b]$ (тогда оно совпадает с

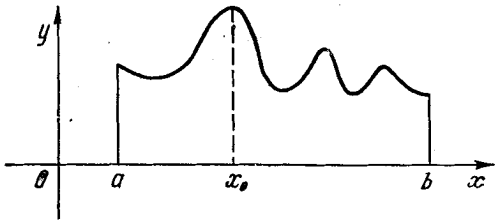

Рис. 7.17

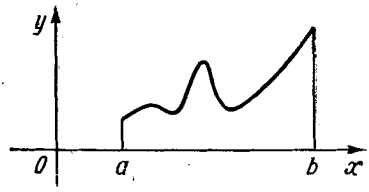

Рис. 7.18

одним из локальных максимумов функции $f(x)$) (рис. 7.17), либо на одном из концов сегмента $[a, b]$ (рис. 7.18). Отсюда ясно, что *для нахождения максимального значения функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ нужно сравнить между собой значения $f(x)$ во всех*

точках локального максимума и в граничных точках сегмента a и b. Наибольшее из этих значений и будет максимальным значением $f(x)$ на сегменте $[a, b]$. Аналогично находится и минимальное значение $f(x)$ на сегменте $[a, b]$.

Если желательно избежать исследования стационарных точек, то можно просто сравнить между собой значения $f(x)$ во всех стационарных точках и в граничных точках a и b. Наибольшее (наименьшее) из этих значений, очевидно, и будет максимальным (минимальным) значением функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$.

Отметим далее, что если $f(x)$ имеет на сегменте $[a, b]$ *лишь одну* точку локального максимума (или *лишь одну* точку локального минимума), то без сравнения значения $f(x)$ в этой точке с $f(a)$ и $f(b)$ можно утверждать, что это значение является максимальным (минимальным) значением $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ (рис. 7.19).

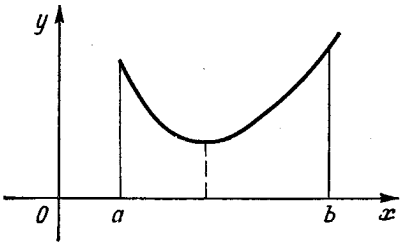

Рис. 7.19

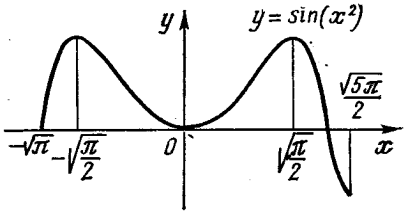

Рис. 7.20

Аналогичными средствами решается вопрос об отыскании максимального (минимального) значения функции $y=f(x)$ на интервале, полупрямой и бесконечной прямой (при условии, что это значение существует).

Может случиться так, что дифференцируемая функция вовсе не имеет на сегменте $[a, b]$ (или полупрямой $a \leqslant x < +\infty$) стационарных точек.

В таком случае $f(x)$ является монотонной на этом сегменте (полупрямой) и ее максимальное и минимальное значения достигаются на концах этого сегмента (на конце этой полупрямой).

В качестве примера *рассмотрим задачу об отыскании максимального и минимального значений функции* $y=\sin(x^2)$ на сегменте $-\sqrt{\pi} \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{5\pi}}{2}$.

Поскольку $y'=2x\cos(x^2)$, указанная функция имеет на рассматриваемом сегменте три стационарные точки: $x=0$ и $x=\pm\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Сравнивая значения функции в указанных точках и на концах сегмента

$$f(0)=0,\ f\left(\pm\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)=1,\ f(-\sqrt{\pi})=0,$$

$$f\left(\frac{\sqrt{5\pi}}{2}\right)=\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

убедимся в том, что максимальное значение рассматриваемой функции равно $+1$ и достигается в двух внутренних точках сегмента: $x_1=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ и $x_2=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, а минимальное значение рассматриваемой функции равно $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ и достигается на правом конце сегмента $\frac{\sqrt{5\pi}}{2}$.

График рассматриваемой функции изображен на рис. 7.20.

2. Краевой экстремум. Пусть функция $y=f(x)$ определена на некотором сегменте $[a, b]$. Будем говорить, что эта *функция имеет в граничной точке b этого сегмента* к р а е в о й м а к с и м у м *(*к р а е в о й м и н и м у м*), если найдется левая полуокрестность точки b, в пределах которой значение $f(b)$ является наибольшим (наименьшим) среди всех других значений этой функции.*

Аналогично определяются краевой максимум и краевой минимум в граничной точке a сегмента $[a, b]$.

Краевой максимум и краевой минимум объединяются общим названием: к р а е в о й э к с т р е м у м.

Имеет место следующее д о с т а т о ч н о е у с л о в и е к р а е в о г о э к с т р е м у м а: *для того чтобы функция $y=f(x)$ имела в точке b сегмента $[a, b]$ краевой максимум (краевой минимум), достаточно, чтобы эта функция имела в точке b положительную (отрицательную) левую производную**. (Д о к а з а т е л ь с т в о совершенно аналогично доказательству теоремы 7.1.) Из указанного достаточного условия краевого экстремума непосредственно вытекает следующее н е о б х о д и м о е у с л о в и е к р а е в о г о э к с т р е м у м а функции, имеющей в точке b левую производную: *для того чтобы функция $y=f(x)$, обладающая в точке b левой производной, имела в этой точке краевой максимум (краевой минимум), необходимо, чтобы указанная производная была неотрицательной (неположительной).*

Аналогично, *для того чтобы функция $y=f(x)$, обладающая в точке a правой производной, имела в этой точке краевой макси-*

---

* Для граничной точки a достаточным условием краевого максимума (краевого минимума) является отрицательность (положительность) правой производной в точке a.

мум (краевой минимум), необходимо, чтобы указанная производная была неположительной (неотрицательной).

3. Теорема Дарбу *.

Определение. Будем говорить, что функция $f(x)$ имеет производную на сегменте $[a, b]$, если $f(x)$ имеет конечную производную в каждой внутренней точке $[a, b]$ и, кроме того, имеет конечные односторонние производные $f'(a+0)$ и $f'(b-0)$.

Очевидно, функция, имеющая производную на сегменте, будет непрерывной на этом сегменте **.

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 7.12 (теорема Дарбу). *Пусть функция $f(x)$ имеет производную на сегменте $[a, b]$. Тогда, каково бы ни было число C, заключенное между $A=f'(a+0)$ и $B=f'(b-0)$, на этом сегменте найдется точка ξ такая, что $f'(\xi)=C$.*

Итак, производная при одном только условии существования на сегменте $[a, b]$ принимает любое промежуточное значение.

Доказательство. Сначала докажем следующее утверждение: *если $F(x)$ имеет конечную производную на $[a, b]$ и если $F'(a+0)$ и $F'(b-0)$ — числа разных знаков, то на сегменте $[a, b]$ найдется точка ξ такая, что $F'(\xi)=0$.*

Пусть ради определенности $F'(a+0)<0$, $F'(b-0)>0$. Тогда функция $F(x)$ имеет краевой максимум на обоих концах сегмента $[a, b]$. Но это означает, что минимальное значение $F(x)$ на сегменте $[a, b]$ достигается в некоторой внутренней точке ξ этого сегмента (функция $F(x)$ имеет производную, а значит, и непрерывна на сегменте $[a, b]$ и поэтому достигает на этом сегменте своего минимального значения). В указанной точке ξ функция $F(x)$ имеет локальный минимум, и поэтому $F'(\xi)=0$.

Для доказательства теоремы 7.12 остается положить $F(x)=f(x)-Cx$ *** и применить к $F(x)$ только что доказанное утверждение.

Заметим, что непрерывность производной $f'(x)$ мы не предполагали.

Из теоремы Дарбу сразу же следует доказанное в п. 3 § 4 гл. 6 утверждение об отсутствии у прозводной точек разрыва первого рода.

---

* Гастон Дарбу — французский математик (1842—1917).

** В самом деле, из существования производной $f'(x)$ во внутренних точках $[a, b]$, вытекает непрерывность $f(x)$ во внутренних точках $[a, b]$, а из существования односторонних производных $f'(a+0)$ и $f'(b-0)$ вытекает непрерывность справа в точке a и слева в точке b.

*** При этом мы, не ограничивая общности, предполагаем, что $f'(a+0)=A<C<B=f'(b-0)$.

ДОПОЛНЕНИЕ

Алгоритм отыскания экстремальных значений функции, использующий только значения этой функции

Предположим, что функция $f(x)$ задана на сегменте $[a, b]$, мы располагаем значениями этой функции в узлах сетки, получающейся при делении сегмента $[a, b]$ на 2^n равных частей $(n=1, 2, 3, \ldots)$.

Ради определенности остановимся на отыскании точки минимума функции $f(x)$.

При этом мы будем предполагать, что выполнены следующие два условия: 1) функция $f(x)$ имеет на сегменте $[a, b]$ единственную точку минимума c; 2) при $a<c$ функция $f(x)$ убывает на сегменте $[a, c]$ (т. е. убывает слева от точки минимума), а при $c<b$ функция $f(x)$ возрастает на сегменте $[c, b]$ (т. е. возрастает справа от точки минимума).

Эти условия будут выполнены, например, в случае, если функция $f(x)$ два раза дифференцируема на сегменте $[a, b]$, причем $f'(c)=0$, а $f''(x)$ строго положительна на $[a, b]$. Однако для выполнения указанных двух условий дифференцируемость $f(x)$, вообще говоря, не требуется.

Мы сейчас укажем алгоритм построения стягивающейся системы сегментов *, содержащих точку c минимума функции $f(x)$.

Остановимся на построении первого сегмента стягивающейся системы, имея в виду, что все последующие сегменты этой системы строятся по тому же принципу, что и первый ее сегмент.

Разделим сегмент $[a, b]$ при помощи точек $a=x_0$, x_1, x_2, x_3 и $x_4=b$ на четыре равных частичных сегмента $[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1, 2, 3, 4)$.

Данный частичный сегмент $[x_{i-1}, x_i]$ договоримся называть сегментом убывания, если $f(x_{i-1})>f(x_i)$, т. е. если значение функции $f(x)$ на левом его конце строго больше, чем на правом, и соответственно сегментом возрастания, если $f(x_{i-1})<f(x_i)$, т. е. если значение функции $f(x)$ на левом конце строго меньше, чем на правом.

Так как функция $f(x)$ имеет на сегменте $[a, b]$ единственную точку минимума c, то указанная точка минимума c принадлежит одному из четырех частичных сегментов $[x_{i-1}, x_i]$.

Тот частичный сегмент $[x_{i-1}, x_i]$, которому принадлежит точка минимума c, можем являться либо сегментом возрастания, либо сегментом убывания, либо, наконец, сегментом, на концах которого функция $f(x)$ имеет равные значения.

---

* Определение и свойства стягивающейся системы сегментов см. в п. 2 § 2 гл. 3.

Кроме того, из того, что по условию функция $f(x)$ убывает слева от точки минимума c и возрастает справа от этой точки, вытекает, что *если данный частичный сегмент содержит точку минимума c, то любой частичный сегмент, лежащий налево от данного, является сегментом убывания, а любой частичный сегмент, лежащий направо от данного, является сегментом возрастания.*

Но тогда можно утверждать, что тот частичный сегмент, который содержит точку минимума c, является либо самым правым сегментом убывания, либо самым левым сегментом возрастания, либо, наконец, частичным сегментом, на концах которого $f(x)$ имеет равные значения.

Сформулированное утверждение позволяет указать алгоритм построения первого сегмента $[a_1, b_1]$ стягивающейся системы сегментов $[a_n, b_n]$, каждый из которых содержит точку минимума c.

Рассмотрим четыре возможных случая.

1) Среди частичных сегментов $[x_{i-1}, x_i]$ есть сегмент, на концах которого $f(x)$ имеет равные значения. В этом случае этот сегмент содержит точку минимума c*, и мы примем его за первый сегмент $[a_1, b_1]$ стягивающейся системы.

2) Все частичные сегменты $[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1, 2, 3, 4)$ являются сегментами убывания. В этом случае точка минимума c лежит на самом правом из частичных сегментов, т. е. на сегменте $[x_3, x_4]$, и мы примем этот сегмент за $[a_1, b_1]$.

3) Все частичные сегменты $[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1, 2, 3, 4)$ являются сегментами возрастания. В этом случае точка минимума лежит на самом левом из частичных сегментов, т. е. на сегменте $[x_0, x_1]$, и мы примем этот сегмент за $[a_1, b_1]$.

4) Среди частичных сегментов имеются как сегменты убывания, так и лежащие правее их сегменты возрастания. В этом случае можно утверждать, что точка минимума c лежит на объединении самого правого сегмента убывания и самого левого сегмента возрастания. Указанное объединение двух частичных сегментов мы и примем за $[a_1, b_1]$.

Тем самым мы указали однозначный алгоритм построения первого сегмента $[a_1, b_1]$ из стягивающейся системы сегментов $\{[a_n, b_n]\}$.

Второй сегмент этой системы $[a_2, b_2]$ строится, отправляясь от $[a_1, b_1]$, точно так же, как сегмент $[a_1, b_1]$ строился, отправляясь от $[a, b]$. По такому же принципу, отправляясь от n-го сегмента $[a_n, b_n]$, строится $(n+1)$-й сегмент стягивающейся системы.

---

* Точка минимума c не может лежать налево от частичного сегмента $[x_{i-1}, x_i]$, на концах которого $f(x)$ имеет равные значения, ибо при этом указанный сегмент является сегментом возрастания. Аналогично предположение о том, что c лежит направо от частичного сегмента, на концах которого $f(x)$ имеет равные значения, привело бы к тому, что этот частичный сегмент является сегментом убывания.

Ясно, что построенная система сегментов $\{[a_n, b_n]\}$ является стягивающейся и, поскольку все эти сегменты содержат точку минимума c, обе последовательности правых концов $\{b_n\}$ этих сегментов и левых их концов $\{a_n\}$ сходятся к точке минимума c.

Аналогично строится алгоритм отыскания точки максимума функции $f(x)$, имеющей на сегменте $[a, b]$ единственную точку максимума c при условии, что эта функция возрастает слева от c при $c>a$ и убывает справа от c при $c<b$.

Глава 8

ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

В этой главе мы изучим операцию, обратную по отношению к операции дифференцирования, т. е. займемся вопросом о восстановлении функции по известной производной этой функции.

Изучение этого вопроса естественно приведет нас к понятиям первообразной и неопределенного интеграла (уже упоминавшимся в гл. 1).

Откладывая до гл. 9 вопрос о существовании первообразной и неопределенного интеграла, мы изучим в настоящей главе важнейшие методы интегрирования и выделим классы функций, неопределенные интегралы от которых выражаются через элементарные функции.

§ 1. ПОНЯТИЕ ПЕРВООБРАЗНОЙ ФУНКЦИИ И НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. Понятие первообразной функции. К числу важных задач механики относятся задача об определении закона движения материальной точки по заданной ее скорости, а также задача об определении закона движения и скорости материальной точки по заданному ее ускорению *.

Эти задачи приводят к математической проблеме *отыскания функции по заданной производной этой функции.*

Переходим к рассмотрению этой проблемы.

Определение. *Функция $F(x)$ называется первообразной функцией (или просто первообразной) для функции $f(x)$ на интервале (a, b), если в любой точке x интервала (a, b) функция $F(x)$ дифференцируема и имеет производную $F'(x)$, равную $f(x)$.*

Замечание. Аналогично определяется первообразная для функции $f(x)$ *на бесконечной прямой и на полупрямой* **.

---

* Вместо ускорения материальной точки можно задать действующую на эту точку силу (ибо согласно второму закону Ньютона сила определяет ускорение этой точки).

** Можно ввести первообразную для функции $f(x)$ и на сегменте $[a, b]$, понимая под такой первообразной функцию $F(x)$, имеющую производную $F'(x)$ в любой внутренней точке сегмента $[a, b]$, равную $f(x)$, и, кроме того, имеющую правую производную $F'(a+0)$, равную $f(a+0)$, и левую производную $F'(b-0)$, равную $f(b-0)$.

Примеры. 1) Функция $F(x)=\sqrt{1-x^2}$ является первообразной для функции $f(x)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ на интервале $(-1, +1)$, ибо в любой точке x этого интервала $\left(\sqrt{1-x^2}\right)'=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$.

2) Функция $F(x)=\sin x$ является первообразной для функции $f(x)=\cos x$ на бесконечной прямой $(-\infty, +\infty)$, ибо в каждой точке x бесконечной прямой $(\sin x)'=\cos x$.

3) Функция $F(x)=\ln x$ является первообразной для функции $f(x)=\frac{1}{x}$ на открытой полупрямой $x>0$, ибо в каждой точке x этой полупрямой $(\ln x)'=\frac{1}{x}$.

Если $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на интервале (a, b), то, очевидно, и функция $F(x)+C$, где C — любая постоянная, является первообразной для функции $f(x)$ на интервале (a, b).

Естественно, возникает вопрос, как связаны между собой различные первообразные для одной и той же функции $f(x)$.

Справедлива следующая основная теорема.

Теорема 8.1. *Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — любые первообразные для функции $f(x)$ на интервале (a, b), то всюду на этом интервале $F_1(x)-F_2(x)=C$, где C — некоторая постоянная.*

Другими словами, две любые первообразные для одной и той же функции могут отличаться лишь на постоянную.

Доказательство. Положим $\Phi(x)=F_1(x)-F_2(x)$. Так как каждая из функций $F_1(x)$ и $F_2(x)$ дифференцируема на интервале (a, b), то в силу теоремы 5.5 и функция $\Phi(x)$ дифференцируема на интервале (a, b), причем всюду на этом интервале $\Phi'(x)=F_1'(x)-F_2'(x)=f(x)-f(x)=0$.

В п. 1 § 4 гл. 6 была доказана теорема 6.5 следующего содержания: если функция $\Phi(x)$ дифференцируема всюду на интервале (a, b) и если всюду на этом интервале $\Phi'(x)=0$, то функция $\Phi(x)$ является постоянной на интервале (a, b).

Из этой теоремы получим, что $\Phi(x)=F_1(x)-F_2(x)=C=\text{const}$, что и требовалось доказать.

Следствие. Если $F(x)$ — *одна* из первообразных функций для функции $f(x)$ на интервале (a, b), то *любая* первообразная $\Phi(x)$ для функции $f(x)$ на интервале (a, b) имеет вид $\Phi(x)=F(x)+C$, где C — некоторая постоянная.

2. Неопределенный интеграл.

Определение. *Совокупность всех первообразных функций для данной функции $f(x)$ на интервале (a, b) называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ (на этом интервале) и обозначается символом*

$$\int f(x)\,dx. \tag{8.1}$$

В этом обозначении знак $\int$ называется знаком интеграла, выражение $f(x)dx$ — подынтегральным выражением а сама функция $f(x)$ — подынтегральной функцией.

Если $F(x)$ — одна из первообразных функций для функции $f(x)$ на интервале (a, b), то в силу следствия из теоремы 8.1

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{8.2}$$

где C — любая постоянная *.

Подчеркнем, что если *первообразная (а значит, и неопределенный интеграл) для функции $f(x)$ на интервале (a, b) существует, то подынтегральное выражение в формуле (8.1) представляет собой дифференциал любой из этих первообразных.*

В самом деле, пусть $F(x)$ — любая из первообразных для функции $f(x)$ на интервале (a, b), т. е. для всех x из интервала (a, b) $F'(x) = f(x)$. Тогда $f(x)dx = F'(x)dx = dF$.

Примеры. 1) $\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sqrt{1-x^2} + C$ на интервале $-1 < x < 1$, ибо функция $F(x) = \sqrt{1-x^2}$ является одной из первообразных для функции $f(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ на указанном интервале.

2) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$ на всей бесконечной прямой $-\infty < x < +\infty$, ибо функция $F(x) = \sin x$ является одной из первообразных для функции $f(x) = \cos x$ на бесконечной прямой.

В этой главе мы не будем заниматься вопросом о *существовании* первообразных (или неопределенных интегралов) для широких классов функций. Здесь мы лишь отметим, что в § 4 гл. 9 будет доказано, что *для всякой функции $f(x)$, непрерывной на интервале (a, b), существует на этом интервале первообразная функция (и неопределенный интеграл).*

3. Основные свойства неопределенного интеграла. Прежде всего отметим два свойства, непосредственно вытекающие из определения неопределенного интеграла:

1°. $d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx$.

2°. $\int dF(x) = F(x) + C$.

Свойство 1° означает, что знаки d и $\int$ взаимно сокращаются в случае, если знак дифференциала стоит перед знаком интеграла.

Свойство 2° означает, что знаки $\int$ и d взаимно сокращаются и в случае, если знак интеграла стоит перед знаком дифференциала, но в этом случае к $F(x)$ следует добавить произвольную постоянную C.

---

* Равенство (8.2) следует понимать как равенство двух множеств.

Для установления свойства 1° достаточно взять дифференциал от обоих частей формулы (8.2) и учесть, что $dF(x) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx$.

Для установления свойства 2° достаточно в левой части (8.2) воспользоваться равенством $dF(x) = f(x)\,dx$.

Следующие два свойства обычно называют *линейными свойствами интеграла:*

3°. $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$.

4°. $\int [Af(x)]\,dx = A\int f(x)\,dx \quad (A = \text{const})$.

Подчеркнем, что равенство в формулах 3° и 4° имеет условный характер: его следует понимать как равенство правой и левой частей с точностью до произвольного постоянного слагаемого (это понятно, поскольку каждый из интегралов, фигурирующих в формулах 3° и 4°, определен с точностью до произвольного постоянного слагаемого).

Поскольку две первообразные для одной и той же функции могут отличаться лишь на постоянную, то для доказательства свойства 3° достаточно доказать, что если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, а $G(x)$ — первообразная для $g(x)$, то функция $F(x) \pm G(x)$ является первообразной для функции $f(x) \pm g(x)$. Это последнее непосредственно вытекает из того, что производная (алгебраической) суммы функций равна сумме производных этих функций, т. е.

$$[F(x) \pm G(x)]' = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x).$$

Аналогично доказывается свойство 4°. В этом случае используется равенство $[AF(x)]' = AF'(x) = Af(x)$.

4. Таблица основных неопределенных интегралов. В гл. 5 мы получили таблицу производных простейших элементарных функций (см. § 5 гл. 5), представляющую собой вычислительный аппарат дифференциального исчисления. Каждая формула этой таблицы, устанавливающая, что та или иная функция $F(x)$ имеет производную, равную $f(x)$, приводит нас, в силу определения неопределенного интеграла, к соответствующей формуле интегрального исчисления

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Таким путем мы приходим к следующей таблице основных неопределенных интегралов:

1°. $\int 0 \cdot dx = C$.

2°. $\int 1 \cdot dx = x + C$.

3°. $\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$.

4°. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0)$.

5°. $\int a^x\,dx = a^x/\ln a + C \quad (0 < a \neq 1), \quad \int e^x\,dx = e^x + C$.

6°. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

7°. $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

8°. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x)\,dx =$
$= \operatorname{tg} x + C \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n = 0,\ \pm 1,\ \ldots\right).$

9°. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int (1 + \operatorname{ctg}^2 x)\,dx = -\operatorname{ctg} x + C\ (x \neq \pi n,$ где $n = 0,\ \pm 1,\ \ldots).$

10°. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C \end{cases} \quad (-1 < x < 1).$

11°. $\int \frac{dx}{1 + x^2} = \begin{cases} \operatorname{arcctg} x + C, \\ -\operatorname{arc\,tg} x + C. \end{cases}$

12°. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C$ (в случае знака «минус» либо $x > 1$, либо $x < -1$).

13°. $\int \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1 + x}{1 - x}\right| + C \quad (|x| \neq 1).$

К этим формулам можно присоединить и соответствующие формулы для гиперболических функций:

14°. $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C.$

15°. $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C.$

16°. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

17°. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C \quad (x \neq 0).$

Сделаем замечания в отношении формул 4°, 12° и 13°. Формула 4° справедлива для любого интервала, не содержащего значения $x = 0$. В самом деле, если $x > 0$, то из формулы $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ заключаем, что $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$, , а если $x < 0$, то из формулы $[\ln(-x)]' = \frac{1}{x}$ заключаем, что $\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C$. Тем самым формула 4° оправдана для любого $x \neq 0$.

Формулы 12° и 13° занимают исключительное положение в нашей таблице, ибо эти формулы не имеют аналогов среди формул таблицы производных.

Однако для проверки формул 12° и 13° достаточно убедиться в том, что производные выражений, стоящих в правых частях этих формул, совпадают с соответствующими подынтегральными функциями.

Наша ближайшая цель — дополнить таблицу неопределенных интегралов основными приемами и методами интегрирования. Но прежде чем приступить к реализации этой цели, сделаем одно важное замечание.

В гл. 1 и 4 мы ввели понятие элементарной функции, а в п. 5 § 5 гл. 5 установили, что производная любой элементарной функции представляет собой также элементарную функцию. Иными словами, мы установили, что *операция дифференцирования не выводит нас из класса элементарных функций.*

Отметим сразу же, что с операцией интегрирования дело обстоит иначе. Можно доказать, что *интегралы от некоторых элементарных функций уже не являются элементарными функциями.*

Примерами таких интегралов могут служить следующие:

1°. $\int e^{-x^2}\,dx.$

2°. $\int \cos(x^2)\,dx.$

3°. $\int \sin(x^2)\,dx.$

4°. $\int \frac{dx}{\ln x} \quad (0 < x \neq 1).$

5°. $\int \frac{\cos x}{x}\,dx \quad (x \neq 0).$

6°. $\int \frac{\sin x}{x}\,dx.$

Каждый из указанных интегралов *представляет собой функцию, не являющуюся элементарной.* Указанные функции не только реально существуют *, но и играют большую роль в различных вопросах физики. Так, например, интеграл 1°, называемый *интегралом Пуассона* или *интегралом ошибок,* широко используется в статистической физике, в теории теплопроводности и диффузии, интегралы 2° и 3°, называемые *интегралами Френеля,* широко применяются в оптике. Часто встречаются в приложениях и интегралы 4°—6°, первый из которых называется *интегральным логарифмом,* а последние два — *интегральными косинусом* и *синусом.*

Для всех перечисленных новых функций (интеграла Пуассона, интегралов Френеля, интегрального логарифма, синуса и косинуса) составлены таблицы и графики.

Ввиду важности для приложений эти функции изучены с такой же полнотой, как и простейшие элементарные функции. Вообще, следует подчеркнуть *условность* понятия *простейшей элементарной функции.*

---

* Мы уже отмечали, что в § 4 гл. 9 будет доказано существование неопределенного интеграла от любой непрерывной функции. Существование интегралов 1°—6° обеспечивается непрерывностью подынтегральных функций.

§ 2. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

1. Интегрирование заменой переменной (подстановкой). Замена переменной — один из самых эффективных приемов интегрирования. Этот прием базируется на следующем элементарном утверждении.

Пусть функция $t=\varphi(x)$ определена и дифференцируема на множестве $\{x\}$, представляющем собой либо интервал, либо открытую полупрямую, либо бесконечную прямую, и пусть символ $\{t\}$ обозначает множество всех значений этой функции. Пусть, далее, для функции $g(t)$ существует на множестве $\{t\}$ первообразная функция $G(t)$, т. е.

$$\int g(t)\,dt = G(t) + C. \tag{8.3}$$

Тогда всюду на множестве $\{x\}$ для функции $g[\varphi(x)]\varphi'(x)$ существует первообразная функция, равная $G[\varphi(x)]$, т. е.

$$\int g[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx = G[\varphi(x)] + C. \tag{8.4}$$

Для доказательства этого утверждения достаточно воспользоваться правилом дифференцирования сложной функции*

$$\frac{d}{dx}\{G[\varphi(x)]\} = G'[\varphi(x)]\,\varphi'(x)$$

и учесть, что по определению первообразной $G'(t)=g(t)$. Предположим теперь, что нам требуется вычислить интеграл

$$\int f(x)\,dx. \tag{8.5}$$

В ряде случаев удается выбрать в качестве новой переменной такую дифференцируемую функцию $t=\varphi(x)$, что имеет место равенство

$$f(x) = g[\varphi(x)]\varphi'(x), \tag{8.6}$$

причем функция $g(t)$ легко интегрируется, т. е. интеграл

$$\int g(t)\,dx = G(t) + C$$

просто вычисляется. Доказанное выше утверждение позволяет нам написать следующую формулу для интеграла (8.5):

$$\int f(x)\,dx = G[\varphi(x)] + C.$$

Этот прием вычисления интеграла (8.5) и называется *интегрированием путем замены переменной.*

Конечно, такой прием применим не ко всякому интегралу. Кроме того, следует подчеркнуть, что выбор правильной подста-

* См. п. 1 § 3 гл. 5.

новки в значительной мере определяется искусством вычислителя. Приведем ряд примеров, иллюстрирующих только что изложенный метод.

1°. Вычислить $\int \sin 3x\,dx$. Для вычисления этого интеграла следует сделать простейшую подстановку $t=3x$, $dt=3dx$. В результате этой замены получим

$$\int \sin 3x\,dx=\int \frac{1}{3}\sin t\,dt=-\frac{1}{3}\cos t+C=-\frac{1}{3}\cos 3x+C.$$

2°. Вычислить $\int \frac{dx}{x+a}$. Этот интеграл вычисляется посредством замены $t=x+a$, $dt=dx$.

При этом получим

$$\int \frac{dx}{x+a}=\int \frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|x+a|+C \quad (x\neq -a).$$

3°. Вычислить $\int e^{\cos x}\sin x\,dx$. Легко видеть, что этот интеграл вычисляется путем замены $t=\cos x$.

В самом деле, при этом $dt=-\sin x\,dx$ и

$$\int e^{\cos x}\sin x\,dx=-\int e^t\,dt=-e^t+C=-e^{\cos x}+C.$$

4°. Вычислить $\int \frac{(\operatorname{arc\,tg} x)^{100}}{1+x^2}\,dx$. Для вычисления этого интеграла удобна замена $t=\operatorname{arc\,tg} x$. В самом деле, при такой замене

$$dt=\frac{dx}{1+x^2} \text{ и } \int \frac{(\operatorname{arc\,tg} x)^{100}}{1+x^2}\,dx=\int t^{100}\,dt=\frac{t^{101}}{101}+C=\frac{(\operatorname{arc\,tg} x)^{101}}{101}+C.$$

5°. Вычислить интеграл $I=\int (5x-6)^{1984}dx$. Конечно, раскрывая подынтегральную функцию по формуле бинома Ньютона, мы можем свести этот интеграл к сумме тысячи девятисот восьмидесяти пяти табличных интегралов. Но гораздо проще сделать замену переменной $t=5x-6$, $dt=5dx$, в результате которой мы получим, что

$$I=\frac{1}{5}\int t^{1984}\,dt=\frac{t^{1985}}{9925}+C=\frac{(5x-6)^{1985}}{9925}+C.$$

6°. Вычислить $\int \frac{dx}{\cos x}$. Чтобы усмотреть ту замену, посредством которой может быть взят этот интеграл, перепишем его в виде

$$\int \frac{dx}{\cos x}=\int \frac{\cos x\,dx}{\cos^2 x}=\int \frac{\cos x\,dx}{1-\sin^2 x}.$$

После этого понятно, что следует положить $t=\sin x$, $dt=\cos x\,dx$.

В результате получим

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$$

7°. Вычислить интеграл $\int \frac{x^5\,dx}{(3x)^{12}+1}$. Для вычисления этого интеграла удобна замена $t=(3x)^6$, $dt=4374\,x^5dx$. В результате указанной замены получим

$$\int \frac{x^5\,dx}{(3x)^{12}+1} = \frac{1}{4374} \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{\operatorname{arc\,tg} t}{4374} + C = \frac{\operatorname{arc\,tg} (3x)^6}{4374} + C.$$

8°. Вычислить $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}$. Для вычисления этого интеграла оказывается удобной тригонометрическая подстановка $t = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a}$, $x = a \operatorname{tg} t$, $dx = a \frac{dt}{\cos^2 t}$.

В результате этой подстановки интеграл принимает вид

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2} \int \cos t\,dt = \frac{\sin t}{a^2} + C =$$

$$= \frac{\operatorname{tg} t}{a^2 \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} + C = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2+a^2}} + C.$$

9°. Вычислить $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}$. Здесь оказывается удобной подстановка $t = \arcsin \frac{x}{a}$, $x = a \sin t$, $dx = a \cos t\,dt$. При этом

$$\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{\operatorname{tg} t}{a^2} + C =$$

$$= \frac{1}{a^2} \frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} + C = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2-x^2}} + C.$$

10. Вычислить $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx$. Для вычисления этого интеграла оказывается удобной замена $2t = \arccos \frac{x}{a}$, $x = a \cos 2t$, $dx = -2a \sin 2t\,dt$. Мы получим

$$\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx = -4a \int \cos^2 t\,dt = -4a \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt =$$

$$= -2at - 2a \int \cos 2t\,dt = -2at - a \sin 2t + C =$$

$$= -a \left[\arccos \frac{x}{a} + \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2} \right] + C.$$

2. Интегрирование по частям. К числу весьма эффективных методов интегрирования относится *метод интегрирования по частям.* Этот метод основывается на следующем утверждении.

Пусть каждая из функций $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируема на множестве $\{x\}$ и, кроме того, на этом множестве существует первообразная для функции $v(x)u'(x)$. Тогда на множестве $\{x\}$ существует первообразная и для функции $u(x)v'(x)$, причем справедлива формула

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx. \tag{8.8}$$

Замечание. Определение дифференциала и свойство инвариантности его формы позволяют записать формулу (8.8) в виде

$$\int u\,dv = u(x)v(x) - \int v\,du. \tag{8.9}$$

Для доказательства сформулированного утверждения запишем формулу для производной произведения функций $u(x)$ и $v(x)$

$$[u(x)v(x)]' = u(x)v'(x) + u'(x)v(x). \tag{8.10}$$

Умножим равенство (8.10) на dx и возьмем интеграл от обеих частей полученного таким путем равенства. Так как по условию для всех x из множества $\{x\}$ существует $\int v(x)u'(x)dx$ и $\int [u(x)v(x)]'dx = u(x)v(x) + C$ (см. свойство 2° из п. 3 § 1), то для всех x из множества $\{x\}$ существует и интеграл $\int u(x)v'(x)dx$, причем справедлива формула (8.8) (или (8.9)).

Формула (8.9) *сводит вопрос о вычислении интеграла $\int u dv$ к вычислению интеграла $\int v du$.* В ряде конкретных случаев этот последний интеграл без труда вычисляется.

Вычисление интеграла $\int u dv$ посредством применения формулы (8.9) и называют *интегрированием по частям.* Заметим, что при конкретном применении формулы интегрирования по частям (8.9) очень удобно пользоваться таблицей дифференциалов, выписанной нами в п. 6 § 4 гл. 5.

Переходим к рассмотрению примеров.

1°. Вычислим интеграл $I = \int x^n \ln x\,dx$ $(n \neq -1)$. Полагая $u = \ln x$, $dv = x^n dx$ и используя формулу (8.9), получим $du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$,

$$I = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) + C.$$

2°. Вычислим, далее, интеграл $I = \int x \operatorname{arc\,tg} x\,dx$. Полагая $u = \operatorname{arc\,tg} x$, $dv = x dx$ и используя формулу (8.9), будем иметь