Действительно, пусть $f(x_0)=\beta>0$. Тогда в силу непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 найдется такая окрестность точки x_0, что для любого сегмента $[c, d]$, $c\neq d$, лежащего целиком в этой окрестности, будет выполнено неравенство $f(x)\geqslant\beta/2$. Но тогда в силу оценки из п. б)

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_c^d f(x)\,dx \geqslant \int_c^d \frac{\beta}{2}\,dx = \frac{\beta}{2}(d-c) = \alpha > 0.$$

Следовательно, $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \alpha > 0$.

г) *Если функция $f(x)$ интегрируема по Риману на сегменте $[a, b]$, то функция $|f(x)|$ интегрируема на этом сегменте и*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Рассмотрим функцию $\varphi(t)=|t|$. Согласно теореме 9.4 из интегрируемости $f(x)$ следует интегрируемость $\varphi(f(x))=|f(x)|$ (так как функция $\varphi(t)=|t|$ на любом сегменте удовлетворяет условию Липшица*). Выберем теперь число $\alpha=\pm 1$ так, чтобы $\alpha\int_a f(x)\,dx \geqslant 0$. Очевидно, что $\alpha f(x)\leqslant|\alpha f(x)|=|f(x)|$. Тогда в силу свойства б)

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \alpha\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \alpha f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

что и требовалось.

д) **Первая формула среднего значения.** *Пусть каждая из функций $f(x)$ и $g(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$ и функция $g(x)$, кроме того, неотрицательна (или неположительна) на этом сегменте.*

*Обозначим через M и m точные грани $f(x)$ на сегменте $[a, b]$**. Тогда найдется число μ, удовлетворяющее неравенствам $m\leqslant\mu\leqslant M$ и такое, что справедлива следующая формула:*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \mu\int_a^b g(x)\,dx. \qquad (*)$$

При дополнительном предположении о непрерывности $f(x)$ на сег-

---

* Функция $\varphi(t)=|t|$, очевидно, удовлетворяет условию Липшица на любом сегменте, ибо $|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|=||t_1|-|t_2||\leqslant|t_1-t_2|$.

** Интегрируемая на $[a, b]$ функция ограничена на $[a, b]$, и потому у нее существуют на $[a, b]$ точные грани.

менте $[a, b]$ можно утверждать, что на этом сегменте найдется точка ξ такая, что справедлива формула

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx. \qquad (**)$$

Формулу $(**)$ принято называть первой формулой среднего значения. Формулу $(*)$ иногда также называют первой формулой среднего значения.

Заметим сразу же, что формула $(**)$ сразу вытекает из формулы $(*)$ и из того, что непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция достигает на этом сегменте как своих точных граней M и m, так и любого промежуточного значения $\mu\,(m \leqslant \mu \leqslant M)$.

Таким образом, нужно доказать только формулу $(*)$. Для доказательства формулы $(*)$ заметим, что по определению точных граней для любого значения x из $[a, b]$ справедливы неравенства

$$m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

Предполагая ради определенности $g(x)$ неотрицательной на $[a, b]$, мы получим, умножая последние неравенства на $g(x)$, что для любого x из $[a, b]$

$$mg(x) \leqslant f(x)\,g(x) \leqslant Mg(x). \qquad (***)$$

Так как, кроме того, в силу свойств б) и в) из п. 1 каждая из функций $mg(x)$, $Mg(x)$ и $f(x)g(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то оценка $(***)$ позволяет утверждать справедливость следующих неравенств:

$$\int_a^b mg(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leqslant \int_a^b Mg(x)\,dx$$

или, что то же самое (в силу свойства б) из п. 1),

$$m\int_b^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx. \qquad (****)$$

Могут представиться два случая: 1) $\int_a^b g(x)\,dx = 0$ и 2) $\int_a^b g(x)\,dx > 0$.

В первом случае из неравенств $(****)$ вытекает, что $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = 0$, и потому формула $(*)$ справедлива при любом μ.

Во втором случае, поделив неравенства $(****)$ на число $\int_a^b g(x)\,dx$, мы получим, что

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leqslant M.$$

Для завершения доказательства формулы (*) остается обозначить символом μ число

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}.$$

Следствие. Сформулируем отдельно доказанную нами теорему для частного случая $g(x) \equiv 1$.

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, а символы M и m обозначают точные грани $f(x)$ на указанном сегменте. Тогда найдется число μ, удовлетворяющее неравенствам $m \leqslant \mu \leqslant M$ и такое, что справедлива формула

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu\,(b-a).$$

При дополнительном предположении о непрерывности $f(x)$ на $[a, b]$ можно утверждать, что на этом сегменте найдется точка ξ такая, что справедлива формула

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\,(b-a).$$

Последнюю формулу обычно также называют формулой среднего значения.

е) Вторая формула среднего значения. *Пусть функция $f(x)$ интегрируема, а функция $g(x)$ монотонна на сегменте $[a, b]$. Тогда на этом сегменте найдется число ξ такое, что*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx.$$

Установим сначала следующий факт, которым мы воспользуемся ниже

Лемма Абеля*. *Пусть числа p_i удовлетворяют условиям $p_i \geqslant p_j \geqslant 0$ при $i \leqslant j$, а числа $S_i = \sum_{k=1}^{i} q_k$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ —*

* Нильс Генрих Абель — норвежский математик (1802—1829).

неравенствам $m \leqslant S_i \leqslant M$, *где* q_k, m, M *также некоторые числа. Тогда* $mp_1 \leqslant \sum_{k=1}^{n} p_k q_k \leqslant Mp_1$.

Доказательство. Легко проверить, что

$$\sum_{k=1}^{n} p_k q_k = \sum_{k=1}^{n} p_k (S_k - S_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} S_k (p_k - p_{k+1}),$$

где положено $S_0 = 0$, $p_{n+1} = 0$. Так как $p_k \geqslant 0$, $p_k - p_{k+1} \geqslant 0$, то, заменив в последнем равенстве каждое S_i сначала на m, а затем на M, получим

$$m \sum_{k=1}^{n} (p_k - p_{k+1}) \leqslant \sum_{k=1}^{n} p_k q_k \leqslant M \sum_{k=1}^{n} (p_k - p_{k+1}),$$

но

$$\sum_{k=1}^{n} (p_k - p_{k+1}) = p_1 - p_{n+1} = p_1.$$

Таким образом, лемма доказана.

Установим теперь вторую формулу среднего значения. Допустим, что функция $g(x)$ не возрастает на $[a, b]$ и неотрицательна. Функция $f(x)g(x)$ интегрируема как произведение двух интегрируемых функций. Пусть M_k и m_k — точные грани $f(x)$ на частичных сегментах $[x_{k-1}, x_k]$.

Тогда очевидно, что

$$\sum_{k=1}^{n} m_k g(x_{k-1}) \Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) g(x_{k-1}) \Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} M_k g(x_{k-1}) \Delta x_k.$$

В силу монотонности $g(x)$ справедлива оценка

$$\sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) g(x_{k-1}) \Delta x_k \leqslant g(a) \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \Delta x_k.$$

В силу интегрируемости $f(x)$ сумма в правой, а значит, и в левой части последнего неравенства стремится к нулю при стремлении диаметра d разбиений к нулю. Следовательно, при любых числах μ_k таких, что $m_k \leqslant \mu_k \leqslant M_k$, все суммы

$$\sum_{k=1}^{n} m_k g(x_{k-1}) \Delta x_k, \quad \sum_{k=1}^{n} \mu_k g(x_{k-1}) \Delta x_k, \quad \sum_{k=1}^{n} M_k g(x_{k-1}) \Delta x_k$$

стремятся при $d \to 0$ к интегралу $\int_a^b f(x) g(x)\, dx$. Это следует из

двусторонней оценки для интегральной суммы функции $f(x)g(x)$ *.

По свойству д) настоящего пункта числа μ_k, где $m_k \leqslant \mu_k \leqslant M_k$, можно выбрать так, чтобы $\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx = \mu_k \Delta x_k$.

Заметим теперь, что функция $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, так как

$$\Delta F = F(x+\Delta x) - F(x) = \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \mu \Delta x,$$

$$\inf_{t\in[x,x+\Delta x]} f(t) \leqslant \mu \leqslant \sup_{t\in[x,x+\Delta x]} f(t),$$

и, следовательно, $\Delta F \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Рассмотрим следующие числа $S_i = \sum\limits_{k=1}^{i} \mu_k \Delta x_k = \int\limits_a^{x_i} f(t)\,dt$.

Ясно, что $m \leqslant S_i \leqslant M$, где m и M — точные грани функции $F(x)$ на сегменте $[a, b]$. Введем следующие обозначения:

$$p_k = g(x_{k-1}), \quad q_k = \mu_k \Delta x_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

В силу монотонности и неотрицательности функции $g(x)$ выполнимо $p_i \geqslant p_j \geqslant 0$ при $i \leqslant j$. Числа p_k, S_k, q_k удовлетворяют условиям леммы Абеля. Поэтому

$$mg(a) \leqslant \sum_{k=1}^{n} g(x_{k-1})\,\mu_k \Delta x_k \leqslant Mg(a).$$

Сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} g(x_{k-1})\,\mu_k \Delta x_k$ заключена между $mg(a)$ и $Mg(a)$. Устремим теперь диаметр d разбиений к нулю. Тогда и предел этой суммы будет заключен между $mg(a)$ и $Mg(a)$, т. е. будут справедливы неравенства

$$mg(a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leqslant Mg(a).$$

* Т. е. из неравенств

$$\sum_{k=1}^{n} m_k g(x_{k-1})\,\Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\,g(x_{k-1})\,\Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} M_k g(x_k)\,\Delta x_k.$$

Непрерывная функция $F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$ принимает любое значение, заключенное между ее точными гранями m и M. Так как

$$m \leqslant \frac{\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{g(a)} \leqslant M,$$

то существует точка ξ такая, что

$$F(\xi)=\int\limits_a^\xi f(t)\,dt=\frac{\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{g(a)}.$$

Следовательно, *в случае, когда $g(x)$ не возрастает и неотрицательна, доказана формула*

$$\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx=g(a)\int\limits_a^\xi f(t)\,dt.$$

Рассмотрим теперь общий случай невозрастающей функции $g(x)$. В этом случае функция $h(x)=g(x)-g(b)$ не возрастает и неотрицательна. Подставив ее вместо $g(x)$ в формулу, доказанную выше, получим, что

$$\int\limits_a^b f(x)\,[g(x)-g(b)]\,dx=[g(a)-g(b)]\int\limits_a^\xi f(x)\,dx.$$

Окончательно получаем равенство

$$\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx=g(a)\int\limits_a^\xi f(x)\,dx+g(b)\int\limits_a^b f(x)\,dx-$$

$$-g(b)\int\limits_a^\xi f(x)\,dx=g(a)\int\limits_a^\xi f(x)\,dx+g(b)\int\limits_\xi^b f(x)\,dx,$$

что и требовалось доказать*.

Рассмотрим примеры на применение оценок для интегралов.

Примеры. 1) Рассмотрим функцию

$$f(x)=\begin{cases} x^x, & x\in(0,1],\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

Эта функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[0,1]$. Легко убедиться

* Если $g(x)$ не убывает, то заменой $g_1(x)=-g(x)$ сводим этот случай к уже рассмотренному.

с помощью вычисления производной, что эта функция достигает локального минимума при $x_0=1/e$. При этом $f(1/e)=e^{-1/e}$, и это значение является ее наименьшим значением на сегменте $[0,1]$. Используя свойство б) настоящего пункта, получим, что $e^{-1/e}\leqslant \leqslant\int_0^1 x^x dx\leqslant 1$, а для числа $e^{-1/e}$ легко получить, что $e^{-1/e}=0{,}692\ldots$. Заметим, что в этом случае значение интеграла нельзя определить через значения элементарных функций.

2) Если функция $f(x)$ не является непрерывной, то формула среднего значения (**) может быть несправедливой. Рассмотрим функцию

$$f(x)=\begin{cases} 1/2, & 0\leqslant x\leqslant 1/2,\\ 3/4, & 1/2<x\leqslant 1.\end{cases}$$

Тогда $\int_0^1 f(x)\,dx=5/8$. Значение $5/8$ не принимается функцией $f(x)$ ни в одной точке ξ сегмента $[0,1]$. Следовательно, не существует числа $\xi\in[0,1]$, для которого $\int_0^1 f(x)\,dx=f(\xi)$.

§ 5. ПЕРВООБРАЗНАЯ НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ. ПРАВИЛА ИНТЕГРИРОВАНИЯ ФУНКЦИЙ

В предыдущих параграфах уже достаточно полно изучены свойства интеграла Римана. В частности, было показано, что, пользуясь определением интеграла, можно вычислить интеграл от некоторых простейших функций. Однако такое вычисление интеграла с помощью предельного перехода в интегральных суммах обладает рядом неудобств и приводит к значительным трудностям. Поэтому на повестку дня встает вопрос о простых правилах вычисления определенного интеграла Римана. Ниже нами будет дано одно из таких правил вычисления определенного интеграла, а именно будет доказана основная формула интегрального исчисления (формула Ньютона — Лейбница).

1. Первообразная. Рассмотрим интегрируемую на сегменте $[a, b]$ функцию $f(x)$. Пусть p принадлежит $[a, b]$. Тогда для любого x из $[a, b]$ функция $f(x)$ интегрируема на $[p, x]$, и поэтому на сегменте $[a, b]$ определена функция $F(x)=\int_p^x f(t)\,dt$, которая называется интегралом с переменным верхним пределом. Аналогично определяется функция $F(x)$ на интервале (a, b) при условии, что $f(x)$ определена на интервале (a, b) и интегрируема на любом сегменте, принадлежащем этому интервалу.

Теорема 9.5. *Если функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, p — любая точка этого сегмента, то производная функции $F(x)=\int\limits_p^x f(t)\,dt$ существует в каждой точке x_0 непрерывности подынтегральной функции, причем $F'(x_0)=f(x_0)$* *.

Доказательство. В силу непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что $f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon$, если $|x-x_0|<\delta$. Для всех t из $[x_0, x]$ выполняется неравенство $|t-x_0|\leqslant|x-x_0|<\delta$. Поэтому для всех таких t

$$f(x_0)-\varepsilon\leqslant f(t)\leqslant f(x_0)+\varepsilon.$$

Согласно свойству д) п. 2 § 4 (независимо от знака разности $x-x_0$) получим из последних неравенств

$$f(x_0)-\varepsilon\leqslant\frac{1}{x-x_0}\int\limits_{x_0}^x f(t)\,dt\leqslant f(x_0)+\varepsilon \text{ при } |x-x_0|<\delta.$$

(Значение $\mu=\frac{1}{x-x_0}\int\limits_{x_0}^x f(t)\,dt$ не меняется при перестановке чисел x и x_0, так как при этом одновременно меняется знак у величины $x-x_0$ и у интеграла $\int\limits_{x_0}^x f(t)\,dt$.). Но $\frac{1}{x-x_0}\int\limits_{x_0}^x f(t)\,dt=\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}$, следовательно, при $|x-x_0|<\delta$

$$f(x_0)-\varepsilon\leqslant\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}\leqslant f(x_0)+\varepsilon,$$

т. е. $F'(x)$ существует и равна $f(x_0)$. Теорема доказана.

Следствие. *Любая непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет на этом сегменте первообразную. Одной из первообразных является функция $F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$.*

Замечание 1. Теорема остается справедливой, если $f(x)$ непрерывна на интервале (a, b). В этом случае в качестве нижнего предела надлежит взять любую точку p этого интервала. Все рассуждения сохраняются.

---

* Если точка x_0 совпадает с одним из концов сегмента $[a, b]$, то под производной в точке x_0 функции $F(x)$ понимается левая или правая производная соответственно. Доказательство теоремы при этом не меняется.

Замечание 2. Можно рассматривать и функцию нижнего предела интеграла от $f(x)$, т. е. функцию $\Phi(x)=\int\limits_x^q f(t)\,dt$. Для такой функции

$$\Phi'(x)=-f(x).$$

Замечание 3. Если функция $f(x)$ интегрируема на любом сегменте, содержащемся в интервале (a, b), то интеграл с переменным верхним пределом есть непрерывная на (a, b) функция верхнего предела.

Действительно, пусть $F(x)=\int\limits_p^x f(t)\,dt$, $p\in(a, b)$. Тогда

$$\Delta F=F(x+\Delta x)-F(x)=\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt=\mu\Delta x,$$

где

$$\inf_{x\in[x,x+\Delta x]} f(x)\leqslant\mu\leqslant\sup_{x\in[x,x+\Delta x]} f(x)$$

по первой формуле среднего значения. Если функция $f(x)$ интегрируема, то она ограничена, а поэтому для всех достаточно малых Δx ограничена и величина μ, зависящая от x и Δx. Более точно, $\inf\limits_{x\in[c,d]} f(x)\leqslant\mu\leqslant\sup\limits_{x\in[c,d]} f(x)$*. Поэтому $\Delta F\to 0$ при $\Delta x\to 0$.

Замечание 4. Интегралы с переменным верхним (или нижним) пределом можно использовать для *определения* новых функций, не выражающихся через элементарные функции.

Так, например, интеграл $\int\limits_0^x e^{-t^2}dt$, как уже отмечалось, называется интегралом Пуассона, интеграл $\int\limits_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t)}}$, $0<k<1$ называется эллиптическим интегралом, интеграл $\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ — интегральным синусом, $\int\limits_1^x \frac{\cos t\,dt}{t}$ — интегральным косинусом и т. д.

2. Основная формула интегрального исчисления. Мы уже знаем из предыдущих рассмотрений, что любые две первообразные функции $f(x)$, заданной на сегменте $[a, b]$, отличаются на постоянную. Поэтому если $F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$, а $\Phi(x)$ — любая дру-

* Здесь $[c, d]$ — какой-либо фиксированный сегмент, принадлежащий интервалу (a, b) и такой, что $x\in[c, d]$, $x+\Delta x\in[c, d]$.

гая первообразная непрерывной функции $f(x)$, то $\Phi(x)-F(x)=$ $=C=\text{const}$, т. е. $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt+C$ (см. теорему 9.5). Положим в последней формуле сначала $x=a$, а затем $x=b$. Как мы условились (см. п. 1 предыдущего параграфа), $\int\limits_a^a f(t)\,dt=0$ для любой функции, принимающей конечное значение в точке a, поэтому $\Phi(a)=C$, $\Phi(b)=\int\limits_a^b f(x)\,dx+C$. Отсюда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\Phi(b)-\Phi(a),$$

и нами получена основная формула интегрального исчисления.

Сформулируем ее в виде теоремы.

Теорема (основная теорема интегрального исчисления). *Для того чтобы вычислить определенный интеграл по сегменту $[a, b]$ от непрерывной функции $f(x)$, следует вычислить значение произвольной ее первообразной в точке b и в точке a и вычесть из первого значения второе.*

Теперь мы имеем правило вычисления определенного интеграла от широкого класса интегрируемых функций. Задача вычисления определенного интеграла свелась к задаче нахождения первообразной непрерывной функции. Естественно, что не для всякой функции найти первообразную просто. Мы уже неоднократно указывали функции, первообразные которых не выражаются через элементарные функции (см. например, п. 1 этого параграфа). В этом случае, естественно, возникает вопрос о приближенном вычислении определенных интегралов, о чем пойдет речь ниже.

Основную формулу интегрального исчисления часто записывают в форме $\int\limits_a^b f(x)\,dx=\Phi(x)\big|_a^b$, где введено обозначение

$$\Phi(x)\big|_a^b=\Phi(b)-\Phi(a).$$

3. Важные правила, позволяющие вычислять определенные интегралы. При вычислении определенных интегралов очень часто используется правило замены переменной под знаком определенного интеграла.

Пусть функция $x=g(t)$ имеет непрерывную производную на

сегменте $[m, M]$ * и $\min\limits_{t\in[m,M]} g(t)=a$, $\max\limits_{t\in[m,M]} g(t)=b$, *причем* $g(m)=a$, $g(M)=b$. *Тогда* $\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_m^M f[g(t)]\,g'(t)\,dt$ (*при условии, что функция* $f(x)$ *непрерывна на сегменте* $[a, b]$).

Указанная формула называется формулой замены переменной под знаком определенного интеграла.

Доказательство. *Пусть* $\Phi(x)$ — некоторая первообразная функции $f(x)$. Функции $\Phi(x)$ и $x=g(t)$ дифференцируемы на сегментах $[a, b]$ и $[m, M]$ соответственно. Поэтому, согласно правилу вычисления производной сложной функции, для всех t из $[m, M]$

$$\frac{d}{dt}\Phi(g(t))=\Phi'(g(t))\,g'(t).$$

Заметим, что производная Φ' в выражении справа вычислена по аргументу $x:\Phi'(g(t))=\Phi'(x)$, $x=g(t)$.

Заметим также, что $\Phi'(x)=f(x)$. Подставив в правую часть формулы для $\frac{d}{dt}\Phi(g(t))$ это равенство, получаем

$$\frac{d}{dt}\Phi(g(t))=f(g(t))\,g'(t).$$

Таким образом, функция $\Phi(g(t))$ является на сегменте $m\leqslant t\leqslant M$ первообразной для функции $f(g(t))g'(t)$, т. е.

$$\int\limits_m^M f(g(t))\,g'(t)\,dt=\Phi(g(M))-\Phi(g(m))=\Phi(b)-\Phi(a)$$

согласно условию. Следовательно, с одной стороны, $\int\limits_a^b f(x)\,dx=$ $=\Phi(b)-\Phi(a)$, а с другой стороны, $\Phi(b)-\Phi(a)=\int\limits_m^M f(g(t))\,g'(t)\,dt$, что и требовалось.

Сформулируем и установим теперь правило интегрирования по частям.

Пусть функции $f(x)$ *и* $g(x)$ *имеют непрерывные производные на сегменте* $[a, b]$, *тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)\,g'(x)\,dx=f(x)\,g(x)\Big|_a^b-\int\limits_a^b g(x)\,f'(x)\,dx.$$

---

* Будем говорить, что $g(t)$ имеет непрерывную производную на сегменте $[m, M]$, если производная $g'(t)$ существует и непрерывна в любой внутренней точке $[m, M]$ и существуют конечные пределы $\lim\limits_{t\to m+0} g'(t)$ и $\lim\limits_{t\to M-0} g'(t)$.

Действительно, $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)]=f(x)g'(x)+f'(x)g(x)$. Поэтому функция $f(x)g(x)$ является первообразной функции $[f(x)g'(x)+$ $+f'(x)\cdot g(x)]$. Следовательно,

$$\int_a^b [f(x)g'(x)+f'(x)g(x)]\,dx=f(x)g(x)\Big|_a^b,$$

и наше утверждение доказано. Последнюю формулу удобно записывать в виде

$$\int_a^b f\,dg=[fg]\Big|_a^b-\int_a^b g\,df.$$

4. Остаточный член формулы Тейлора в интегральной форме. Целью этого пункта является получение формулы Тейлора для функции $f(x)$ в окрестности произвольной точки a с остаточным членом в так называемой интегральной форме.

Пусть функция $f(x)$ имеет в некоторой ε-окрестности точки a непрерывную производную $(n+1)$-го порядка. Пусть x принадлежит указанной окрестности. Рассмотрим равенство

$$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\,dt.$$

Полагая $u(t)=f'(t)$, $v(t)=-(x-t)$, применим к интегралу $\int_a^x f'(t)\,dt=\int_a^x u(t)\,dv(t)$ формулу интегрирования по частям. Получим

$$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\,dt=-[f'(t)(x-t)]\Big|_a^x+\int_a^x f''(t)(x-t)\,dt=$$

$$=f'(a)(x-a)+\int_a^x f''(t)(x-t)\,dt.$$

Таким образом, последовательно интегрируя по частям, получим

$$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\,dt=f'(a)(x-a)+\int_a^x f''(t)(x-t)\,dt=$$

$$=f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2+\frac{1}{2}\int_a^x f'''(t)(x-t)^2\,dt=\ldots$$

$$\ldots = f'(a)(x-a) + 1/2\, f''(a)(x-a)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k + R_{n+1}(x),$$

где

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt.$$

Мы видим, что $R_{n+1}(x)$ является остаточным членом разложения Тейлора для функции $f(x)$ в окрестности точки a. Эта форма остаточного члена и называется интегральной формой.

Если применить первую формулу среднего значения (см. свойство д) п. 2 § 4), то

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int_a^x (x-t)^n\,dt =$$

$$= -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\,\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\Bigg|_a^x = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

где ξ — некоторая точка сегмента $[a, x]$. Следовательно, при тех же предположениях мы получим остаточный член в форме Лагранжа. На самом деле, легко заключить (используя теорему Дарбу о прохождении производной через все промежуточные значения), что $R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$ лишь при условии существования и интегрируемости $f^{(n+1)}(x)$.

Рассмотрим теперь примеры, иллюстрирующие изложенный в этом параграфе материал.

Примеры. 1) Вычислить интегралы, применяя основную формулу интегрального исчисления:

а) $\int_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_a^b = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq -1.$

б) $\int_a^b \sin x dx = -\cos x\,|_a^b = \cos a - \cos b,$

$$\int_a^b \cos x dx = \sin b - \sin a.$$

в) $\int\limits_0^a \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^a = \operatorname{arctg} a.$

г) $\int\limits_0^a \frac{x^2}{a^3+x^3}\,dx = \frac{1}{3}\ln(a^3+x^3)\Big|_0^a = \frac{1}{3}\ln 2,\ a>0.$

2) Вычислить интегралы, применяя правило замены переменной:

а) $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}\,dx = \int\limits_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{tg}^4 x}{\cos^2 x}\,dx = \int\limits_0^1 t^4 dt = \frac{1}{5}t^5\Big|_0^1 = 1/5,$

где $t=\operatorname{tg} x$.

б) $\int\limits_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx = \int\limits_1^{\sqrt{2}} t^2 dt = \frac{1}{3}t^3\Big|_1^{\sqrt{2}} = (2\sqrt{2}-1)/3,$

где $t=\sqrt{1+x^2}$.

3) Вычислить интеграл, применяя правило интегрирования по частям:

$$I_m = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^m x dx = -\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{m-1} x d(\cos x) =$$

$$= -\sin^{m-1} x\cos x\Big|_0^{\pi/2} + (m-1)\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin^{m-2} x dx =$$

$$= (m-1)\int\limits_0^{\pi/2} (1-\sin^2 x)\sin^{m-2} x dx = (m-1)[I_{m-2}-I_m].$$

Отсюда: $I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}$ при $m \geqslant 2$.

Легко видеть, что $I_0=\pi/2$, $I_1=1$. По индукции получаем, что для $m\geqslant 2$

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m}\,\frac{2m-3}{2m-2}\cdots\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\,\frac{\pi}{2},$$

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1}\,\frac{2m-2}{2m-1}\cdots\frac{4}{5}\,\frac{2}{3}\,1 = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}.$$

4) Доказать, что для функции $f(x)=(1+x)^\alpha$ остаточный член R_{n+1} в интегральной форме стремится к нулю, если $|x|<1$. Заметим, что

$$R_{n+1}=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!}\int_0^x(1+t)^{\alpha-n-1}(x-t)^n\,dt.$$

Из очевидных неравенств $t/x\geqslant 0$, $1-x>0$ следует, что

$$\frac{t}{x}-t=\frac{t}{x}(1-x)\geqslant 0 \text{ или } \frac{x-t}{x}=1-\frac{t}{x}\leqslant 1-t.$$

Далее, поскольку x и $x-t$ — числа одного знака, то

$$\left|\frac{x-t}{x}\right|=1-\frac{t}{x}\leqslant 1-t=|1-t| \text{ или } \left|\frac{x-t}{1-t}\right|\leqslant|x|.$$

Следовательно,

$$\left|\int_0^x\frac{(x-t)^n}{(1+t)^n}(1+t)^{\alpha-1}\,dt\right|\leqslant|x|^n\int_0^x(1+t)^{\alpha-1}\,dt=C(x,\alpha)|x|^n,$$

где $C(x, \alpha)$ не зависит от n. Иными словами,

$$|R_{n+1}|\leqslant C(x,\alpha)\cdot|\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)|\,|x|^n/n!=p_n.$$

Рассмотрим какое-либо число q, удовлетворяющее условию $|x|<q<1$. Так как

$$\frac{p_{n+1}}{p_n}=\frac{|\alpha-n-1|\,|x|}{n+1}\to|x| \quad (n\to\infty),$$

то найдется такой номер N, что $\frac{p_{n+1}}{p_n}<q$ при $n\geqslant N$. Отсюда вытекает, что $p_n\leqslant p_N q^{n-N}$ при $n\geqslant N$. Устремляя в этом неравенстве n к ∞, убеждаемся в том, что p_n, а следовательно, и R_{n+1} стремится к нулю.

§ 6. НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ СУММ И ИНТЕГРАЛОВ

В этом параграфе мы получим некоторые важные неравенства для сумм и интегралов.

1. Неравенство Юнга*. Рассмотрим два неотрицательных числа a и b и два числа p и q, превосходящие единицу и такие, что $1/p+1/q=1$. Докажем следующее неравенство Юнга:

$$ab\leqslant\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(x)=x^{1/p}-x/p$ при $x\geqslant 0$. Поскольку $f'(x)=\frac{1}{p}(x^{-1/q}-1)$, то $f'(x)>0$

* Вилиам Юнг — английский математик (1882—1946).

при $0<x<1$ и $f'(x)<0$ при $x>1$. В точке $x=1$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение, причем $f(1)=1-\frac{1}{p}=\frac{1}{q}$. Следовательно, $x^{1/p}-x/p\leqslant 1/q$ при всех $x\geqslant 0$. В последнем неравенстве полагаем $x=a^p/b^p$, $b\neq 0$. Неравенство Юнга при $b\neq 0$, таким образом, установлено. При $b=0$ оно очевидно.

2. Неравенство Гёльдера* для сумм. *Пусть* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *и* $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — *какие угодно неотрицательные числа. Тогда*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q},$$

где $1/p+1/q=1$, $p\geqslant 1$, $q\geqslant 1$. Это неравенство называется неравенством Гёльдера для сумм.

Доказательство. Заметим, что указанное неравенство однородно в том смысле, что если оно выполнено для чисел a_i, b_i, то оно справедливо и для чисел ta_i, kb_i. Поэтому достаточно установить, что $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant 1$ при условии $\sum_{i=1}^{n} a_i^p=1$, $\sum_{i=1}^{n} b_i^q=1$, так как мы всегда можем разделить числа a_i и b_i соответственно на величины $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p}$ и $\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}$ **. Записав неравенство Юнга для таких чисел a_i и b_i и просуммировав эти неравенства по i, получим

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} a_i^p + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n} b_i^q.$$

Поэтому $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, что и требовалось.

Замечание. В случае $p=2$, $q=2$ неравенство Гёльдера превращается в неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2},$$

называемое неравенством Коши — Буняковского*** для сумм.

---

* О. Гёльдер — немецкий математик (1859—1937).

** Мы предполагаем, что хотя бы одно из чисел a_i и хотя бы одно из чисел b_i отлично от нуля. В противном случае неравенство очевидно.

*** Виктор Яковлевич Буняковский — русский математик (1804—1889).

3. Неравенство Минковского* для сумм. *Пусть* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — *произвольные неотрицательные числа, число* $p>1$. *Тогда справедливо следующее неравенство Минковского для сумм:*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p}.$$

Доказательство. Запишем равенство

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p = \sum_{i=1}^{n} a_i(a_i+b_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} b_i(a_i+b_i)^{p-1}.$$

К каждой из сумм, стоящих в правой части, применимо неравенство Гёльдера. Если $1/p+1/q=1$, $p>1$, $q>1$, то $(p-1)q=p$, $\frac{1}{q}=\frac{p-1}{p}$. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{(p-1)q}\right)^{1/q} +$$

$$+\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{(p-1)q}\right)^{1/q} =$$

$$=\left\{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p}\right\}\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right]^{\frac{p-1}{p}}.$$

Поделив обе части последнего неравенства на $\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right]^{\frac{p-1}{p}}$, получим доказываемое неравенство.

4. Неравенство Гёльдера для интегралов. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — две произвольные интегрируемые на сегменте $[a, b]$ функции, пусть p и q — два числа, превосходящие единицу, и $1/p+1/q=1$. Тогда справедливо неравенство Гёльдера для интегралов

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{1/q}$$

(все написанные интегралы существуют в силу следствия из теоремы 9.4′).

* Герман Минковский — немецкий математик и физик (1864—1909).

Заметим, что, как и в п. 2, достаточно рассмотреть случай, когда $\int_a^b |f(x)|^p dx \leqslant 1$ и $\int_a^b |g(x)|^q dx \leqslant 1$, и доказать неравенство $\left|\int_a^b f(x) g(x) dx\right| \leqslant 1$. Запишем неравенство Юнга в любой точке x для функций $|f(x)|$ и $|g(x)|$. Получим

$$|f(x)|\,|g(x)| \leqslant \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q.$$

Интегрируя это неравенство, получим

$$\int_a^b |f(x)|\,|g(x)|\,dx \leqslant 1,$$

но, согласно свойству д) п. 2 § 4

$$\left|\int_a^b f(x) g(x) dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,|g(x)|\,dx.$$

Поэтому доказательство завершено.

Как и при выводе неравенства Гёльдера для сумм, мы предполагали, что $\int_a^b |f(x)|dx \neq 0$ и $\int_a^b |g(x)|dx \neq 0$. В противном случае неравенство очевидно.

Замечание. В случае $p=2$, $q=2$ неравенство Гёльдера *превращается в неравенство*

$$\left|\int_a^b f(x) g(x) dx\right| \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{1/2},$$

которое называется неравенством Коши—Буняковского для интегралов.

5. Неравенство Минковского для интегралов. *Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — любые две неотрицательные и интегрируемые на сегменте $[a, b]$ функции и число $p>1$. Тогда справедливо неравенство Минковского для интегралов*

$$\left\{\int_a^b (f(x)+g(x))^p dx\right\}^{1/p} \leqslant \int_a^b \left(f^p(x)\,dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b g^p(x)\,dx\right)^{1/p}.$$

Заметим, что согласно следствию из теоремы 9.4′ все подынтегральные функции интегрируемы.

Доказательство. Точно так же, как и при доказательстве неравенства Минковского для сумм, запишем равенство

$$\int_a^b (f(x)+g(x))^p\,dx=$$

$$=\int_a^b f(x)(f(x)+g(x))^{p-1}\,dx+\int_a^b g(x)(f(x)+g(x))^{p-1}\,dx.$$

Далее применяем к интегралам, стоящим справа, неравенство Гёльдера и, как и в п. 3, получаем доказательство.

По индукции можно доказать и более общее неравенство для функций $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_n(x)$, неотрицательных и интегрируемых на сегменте $[a, b]$:

$$\left\{\int_a^b (f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x))^p\,dx\right\}^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\int_a^b f_1^p(x)\,dx\right)^{1/p}+\left(\int_a^b f_2^p(x)\,dx\right)^{1/p}+\ldots+\left(\int_a^b f_n^p(x)\,dx\right)^{1/p}.$$

§ 7. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ РИМАНА

1. Предел интегральных сумм по базису фильтра. Рассмотрим множество всех разбиений $\{x_k\}$ сегмента $[a, b]$. Обозначим это множество* всевозможных разбиений символом P^*. Каждому фиксированному разбиению $\{x_k\}\in P^*$ отвечает некоторая интегральная сумма σ. Таким образом, получается отображение множества разбиений в множество интегральных сумм. Выберем в P^* базис фильтра (базу) $B^*=\{B_\delta^*\}$ с элементами

$$B_\delta^*=\{\{x_k\}\in P^*: d<\delta\}.$$

Эта запись означает: элемент B_δ^* есть разбиение $\{x_k\}$ с диаметром d, меньшим δ. Вспоминая общее определение предела по базе (базису фильтра), мы можем записать, что

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{d\to 0}\sigma,$$

где предел означает предел числовой функции σ (интегральной суммы функции $f(x)$) по базису фильтра ($d\to 0$). В силу свойств предела по базе такой предел является единственным. Ясно, что все теоремы предыдущих параграфов, где использовался предел сумм при стремлении диаметра разбиений к нулю,

* Предполагается, что каждому разбиению отвечает и некоторый выбор промежуточных точек.

можно сформулировать, используя понятие предела по базису фильтра.

2. Критерий интегрируемости Лебега. Будем говорить, что множество A точек сегмента $[a, b]$ имеет меру нуль, если для любого $\varepsilon>0$ можно указать не более чем счетную систему интервалов, покрывающую все точки множества A и имеющую сумму длин, не большую чем ε. Заметим, что число интервалов может быть и бесконечным, однако они имеют длины a_n такие, что если

$$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n, \text{ то } \lim_{n\to\infty} S_n=I<\varepsilon.$$

В теории, изучающей меру множеств, доказывается следующий критерий интегрируемости функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ по Риману.

Теорема 9.6 (критерий Лебега). *Для того чтобы ограниченная на сегменте $[a, b]$ функция $f(x)$ была интегрируемой по Риману на этом сегменте, необходимо и достаточно, чтобы множество точек разрыва этой функции имело меру нуль.*

Доказательство этой теоремы можно найти в книге В. А. Ильина, Э. Г. Позняка «Основы математического анализа», II, с. 265—266.

ДОПОЛНЕНИЕ 1

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Изученное в гл. 9 понятие определенного интеграла Римана существенно использовало два обстоятельства: 1) тот факт, что промежуток $[a, b]$, по которому требуется произвести интегрирование, является конечным; 2) тот факт, что подынтегральная функция $f(x)$ является на рассматриваемом промежутке ограниченной.

В настоящем дополнении будет дано обобщение понятия определенного интеграла Римана на два случая: 1) на случай, когда промежуток, по которому требуется произвести интегрирование, является бесконечным*; 2) на случай, когда подынтегральная функция $f(x)$ является неограниченной в окрестности некоторых точек области интегрирования.

Возникающее при таком обобщении понятие интеграла принято называть несобственным интегралом соответственно первого или второго рода.

* Т. е. представляет собой полупрямую или всю бесконечную прямую.

§ 1. Несобственные интегралы первого рода

1. Понятие несобственного интеграла первого рода. Перенесем понятие определенного интеграла на случай, когда область, по которой производится интегрирование, является бесконечной. На прямой $-\infty<x<+\infty$ существует три типа бесконечных связных замкнутых множеств: 1) полупрямая $a\leqslant x<+\infty$; 2) полупрямая $-\infty<x\leqslant b$; 3) вся бесконечная прямая $-\infty<x<+\infty$.

Ради определенности рассмотрим подробно первое из указанных множеств, т. е. полупрямую $a\leqslant x<+\infty$.

Предположим, что функция $f(x)$ определена на полупрямой $a\leqslant x<+\infty$ и что для любого числа A, удовлетворяющего неравенству $A\geqslant a$, существует определенный интеграл Римана $\int\limits_a^A f(x)\,dx$.

Этот определенный интеграл мы обозначим символом

$$F(A)=\int\limits_a^A f(x)\,dx. \tag{9.1.1}$$

Естественно, возникает вопрос о существовании предела функции $F(A)$ при $A\to+\infty$

$$\lim_{A\to+\infty} F(A)=\lim_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)\,dx. \tag{9.1.2}$$

Определение. *Предел* (9.1.2) *в случае, если он существует, называется* **несобственным интегралом первого рода** *от функции* $f(x)$ *по полупрямой* $[a, +\infty)$ *и обозначается символом*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{9.1.3}$$

При этом говорят, что несобственный интеграл (9.1.3) *сходится, и пишут равенство*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)\,dx.$$

Впрочем, *символ* (9.1.3) *употребляют и в случае, если указанного выше предела* (9.1.2) *не существует, но в этом случае говорят, что несобственный интеграл* (9.1.3) *расходится.*

Совершенно аналогично определяются несобственные интегралы по полупрямой $-\infty<x\leqslant b$ и по всей бесконечной прямой $-\infty<x<+\infty$.

Первый из этих интегралов определяется как предел $\lim\limits_{A\to-\infty}\int\limits_A^b f(x)\,dx$ и обозначается символом $\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,dx$.

Что же касается интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$, то он определяется как предел

$$\lim_{\substack{A'\to-\infty\\ A''\to+\infty}}\int\limits_{A'}^{A''} f(x)\,dx$$

при независимом друг от друга стремлении A' к $-\infty$ и A'' к $+\infty$.

Из этих определений следует, что если для некоторого вещественного числа a сходится каждый из несобственных интегралов $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ и $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$, то сходится и несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, причем справедливо равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx+\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Заметим еще, что если сходится несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ и b — любое число, превосходящее a, то сходится и несобственный интеграл $\int\limits_{b}^{+\infty} f(x)\,dx$, причем $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx=\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx+\int\limits_{b}^{+\infty} f(x)\,dx$. Это утверждение непосредственно вытекает из определения сходимости несобственного интеграла.

Примеры. 1) Изучим вопрос о сходимости несобственного интеграла

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}.$$

Поскольку функция $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ при любом $A>0$ интегрируема на сегменте $[0, A]$, причем для нее

$$F(A)=\int\limits_{0}^{A}\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x\,\Big|_0^A=\operatorname{arctg}A,$$

то

$$\lim_{A\to+\infty} F(A) = \lim_{A\to+\infty} \operatorname{arctg} A = \pi/2.$$

Поэтому несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ сходится и для него справедливо равенство $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$.

2) Изучим вопрос о сходимости несобственного интеграла $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$, где a и λ — произвольные вещественные числа, первое из которых положительно $(a>0)$.

Так как функция $f(x)=1/x^\lambda$ при любом $A>0$ интегрируема на сегменте $[a, A]$, причем

$$F(A) = \int\limits_a^A \frac{dx}{x^\lambda} = \left\{ \frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda} \right|_a^A = \frac{A^{1-\lambda} - a^{1-\lambda}}{1-\lambda} \text{ при } \lambda \neq 1,$$

то при $\lambda>1$ предел $F(A)$ при $A\to+\infty$ существует и равен $\frac{a^{1-\lambda}}{\lambda-1}$, а при $\lambda\leqslant 1$ указанный предел не существует.

Таким образом, при $\lambda>1$ несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$ сходится и равен $\frac{a^{1-\lambda}}{\lambda-1}$, а при $\lambda\leqslant 1$ несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$ расходится.

2. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла первого рода. Достаточные признаки сходимости. Вопрос о сходимости несобственного интеграла 1-го рода эквивалентен вопросу о существовании предельного значения функции $F(A) = \int\limits_0^A f(x)\,dx$ при $A\to+\infty$. Как известно*, для существования предельного значения функции $F(A)$ при $A\to+\infty$ необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла следующему условию Коши: для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое $B>a$, что для любых A_1 и A_2, превосходящих B, выполняется неравенство

* Гл. 3, § 4, п. 3.

$$|F(A_2)-F(A_1)| = \left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1 (критерий Коши сходимости несобственного интеграла). *Для сходимости несобственного интеграла* (9.1.3) *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon>0$ *можно было указать такое* $B>a$, *что для любых* A_1 *и* A_2, *превосходящих* B,

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Замечание. Отметим, что из сходимости несобственного интеграла не вытекает даже ограниченность подынтегральной функции. Например, интеграл $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$, где функция $f(x)$ равна нулю для всех нецелых x и равна n при $x=n$, где n — целое число, очевидно, сходится, хотя подынтегральная функция не ограничена.

Поскольку критерий Коши мало удобен для практических применений, целесообразно указать различные достаточные признаки сходимости несобственных интегралов.

В дальнейшем *мы все время будем считать, что функция* $f(x)$ *задана на полупрямой* $a\leqslant x<+\infty$ *и для любого* $A\geqslant a$ *существует обычный интеграл* $\int_a^A f(x)\,dx$.

Докажем следующее утверждение.

Утверждение 2 (общий признак сравнения). *Пусть на полупрямой* $a\leqslant x<+\infty$

$$|f(x)|\leqslant g(x). \tag{9.1.4}$$

Тогда из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *вытекает сходимость интеграла* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Доказательство. Пусть $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится. Тогда, согласно критерию Коши, для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $B>a$, что для любых $A_1>B$ и $A_2>B$ выполняется неравенство

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} g(x)\,dx\right| < \varepsilon. \tag{9.1.5}$$

Согласно известным неравенствам для интегралов и неравенству (9.1.4) получим $\left|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_{A_1}^{A_2} |f(x)|\,dx \leqslant \int\limits_{A_1}^{A_2} g(x)\,dx$. Отсюда и из неравенства (9.1.5) вытекает, что для любых $A_1>B$ и $A_2>B$ справедливо неравенство $\left|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$. Следовательно, интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится.

Утверждение 3 (частный признак сравнения). *Пусть на полупрямой $0<a\leqslant x<+\infty$ функция $f(x)$ удовлетворяет соотношению $|f(x)|\leqslant c/x^\lambda$, где c и λ — постоянные, $\lambda>1$. Тогда интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится. Если же существует такая постоянная $c>0$, что на полупрямой $0<a\leqslant x<+\infty$ справедливо соотношение $f(x)\geqslant c/x^\lambda$, в котором $\lambda\leqslant 1$, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится.*

Утверждение этой теоремы вытекает из утверждения 2 и примера, рассмотренного в предыдущем пункте (достаточно положить $g(x)=c/x^\lambda$).

Следствие (частный признак сравнения в предельной форме). *Если при $\lambda>1$ существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty}|f(x)|x^\lambda=c$, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится. Если же при $\lambda\leqslant 1$ существует положительный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\,x^\lambda=c>0$, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится.*

Убедимся в справедливости первой части следствия. Для этого заметим, что из существования предела при $x\to+\infty$ вытекает ограниченность функции $|f(x)|x^\lambda$, т. е. с некоторой постоянной $c_0>0$ выполняется неравенство $|f(x)|\leqslant c_0/x^\lambda$.

После этого применяется первая часть утверждения 3. Справедливость второй части следствия вытекает из следующих рассуждений. Так как $c>0$, то можно указать столь малое $\varepsilon>0$, что $c-\varepsilon>0$. Этому ε отвечает такое $B>0$, что при $x\geqslant B$ выполняется неравенство $c-\varepsilon<f(x)x^\lambda$ (это неравенство следует из определения предела). Поэтому $f(x)>(c-\varepsilon)/x^\lambda$, и в этом случае действует вторая часть утверждения 3.

3. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов. Введем понятия абсолютной и условной сходимо-

сти интегралов. Пусть $f(x)$ интегрируема по любому сегменту $[a, A]$ *.

Определение 1. *Несобственный интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *называется абсолютно сходящимся, если сходится* $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$.

Определение 2. *Несобственный интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *называется условно сходящимся, если он сходится, а интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ *расходится.*

Замечание. Положив в утверждении 2 $g(x)=|f(x)|$, мы получим, что из абсолютной сходимости несобственного интеграла вытекает его сходимость.

Отметим, что утверждения 2 и 3 позволяют установить лишь абсолютную сходимость исследуемых несобственных интегралов.

Приведем еще один признак сходимости несобственного интеграла первого рода, пригодный для установления и условной сходимости этого интеграла.

Утверждение 4 (признак Дирихле—Абеля). *Пусть выполнены следующие три условия:*

1) *функция $f(x)$ непрерывна на полупрямой $a \leqslant x < +\infty$ и имеет на этой полупрямой ограниченную первообразную $F(x)$* **;

2) *функция $g(x)$ определена и монотонно не возрастает на полупрямой $a \leqslant x < +\infty$ и имеет равный нулю предел при $x \to +\infty$;*

3) *производная $g'(x)$ функции $g(x)$ существует и непрерывна в каждой точке полупрямой $a \leqslant x < +\infty$. При выполнении этих трех условий несобственный интеграл*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx \tag{9.1.6}$$

сходится.

Доказательство. Воспользуемся критерием Коши сходимости несобственных интегралов. Предварительно проведем

---

* Тогда и функция $|f(x)|$ интегрируема по любому сегменту $[a, A]$.

** Это означает, что первообразная $F(x)$, которую можно определить как $\int\limits_a^x f(t)\,dt$, удовлетворяет для всех $x \geqslant a$ неравенству $|F(x)| \leqslant K$, где K — постоянная.

интегрирование по частям интеграла $\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx$ на произвольном сегменте $[A_1, A_2]$, $A_2>A_1$ полупрямой $a\leqslant x<+\infty$. Получим

$$\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,g(x)\,dx = F(x)\,g(x)\Big|_{A_1}^{A_2} - \int_{A_1}^{A_2} F(x)\,g'(x)\,dx. \qquad (9.1.7)$$

По условию теоремы $F(x)$ ограничена: $|F(x)|\leqslant K$. Так как $g(x)$ не возрастает и стремится к нулю при $x\to+\infty$, то $g(x)\geqslant 0$, а $g'(x)\leqslant 0$. Таким образом, оценивая (9.1.7), получим

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,g(x)\,dx\right| \leqslant K[g(A_1)+g(A_2)] + K\int_{A_1}^{A_2}(-g'(x))\,dx.$$

Так как интеграл в правой части этого неравенства равен $g(A_1)-g(A_2)$, то, очевидно,

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,g(x)\,dx\right| \leqslant 2Kg(A_1). \qquad (9.1.8)$$

Используя это неравенство, нетрудно завершить доказательство теоремы. Пусть ε — произвольное положительное число. Так как $g(x)\to 0$ при $x\to+\infty$, то по данному ε можно выбрать B так, что при $A_1\geqslant B$ выполняется неравенство $g(A_1)<\varepsilon/(2K)$. Отсюда и из неравенства (9.1.8) следует, что для любых A_1 и A_2, бóльших B, выполняется неравенство $\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,g(x)\,dx\right|<\varepsilon$, которое, согласно критерию Коши, гарантирует сходимость интеграла (9.1.6). Утверждение доказано.

Замечание. Требование 3) в утверждении 4 является лишним и обусловлено лишь методом доказательства (желанием применить формулу интегрирования по частям). Для того чтобы доказать утверждение 4 без требования 3), достаточно применить для оценки интеграла $\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,g(x)\,dx$ вторую формулу среднего значения (см. свойство п. 2 § 4 гл. 9). Убедитесь в этом сами.

Пример 1. Рассмотрим интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx, \quad \alpha>0. \qquad (9.1.9)$$

Полагая $f(x)=\sin x$, $g(x)=1/x^{\alpha}$, легко убедиться что для этого интеграла выполнены все условия утверждения 4. Поэтому интеграл (9.1.9) сходится *.

Пример 2. Рассмотрим интеграл Френеля $\int\limits_0^{+\infty}\sin x^2dx$. Согласно п. 1 этого дополнения его сходимость вытекает из сходимости интеграла $\int\limits_1^{+\infty}\sin x^2dx=\int\limits_1^{+\infty}x\sin x^2\frac{1}{x}\,dx$. Полагая $f(x)=$ $=x\sin x^2$, $g(x)=1/x$, легко убедимся, что выполнены все условия утверждения 4. Поэтому интеграл Френеля сходится.

4. Замена переменных под знаком несобственного интеграла и формула интегрирования по частям. В этом пункте мы сформулируем условия, при которых действуют формулы замены переменных и интегрирования по частям для несобственных интегралов первого рода. Рассмотрим сначала вопрос о замене переменной под знаком несобственного интеграла.

Мы будем предполагать выполненными следующие условия:

1) *функция $f(x)$ непрерывна на полуоси $a\leqslant x<+\infty$;*

2) *полуось $a\leqslant x<+\infty$ является множеством значений некоторой строго монотонной функции $x=g(t)$, заданной на полуоси $\alpha\leqslant t<+\infty$ (или $-\infty<t\leqslant\alpha$) и имеющей на этой полуоси непрерывную производную;*

3) $g(\alpha)=a$.

При этих условиях из сходимости одного из следующих несобственных интегралов

$$\int\limits_a^{+\infty}f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_{\alpha}^{+\infty}f(g(t))\,g'(t)\,dt\left(\text{или } -\int\limits_{-\infty}^{\alpha}f(g(t))\,g'(t)\,dt\right) \tag{9.1.10}$$

вытекает сходимость другого и равенство этих интегралов.

Сформулированное утверждение устанавливается с помощью следующих рассуждений.

Рассмотрим произвольный сегмент $[a, A]$. Этому сегменту отвечает, согласно строгой монотонности функции $g(t)$, сегмент $[\alpha, \rho]$ (или $[\rho, \alpha]$) оси t такой, что при изменении на сегменте $[\alpha, \rho]$ значения функции $x=g(t)$ заполняют сегмент $[a, A]$, причем $g(\rho)=A$. Таким образом, для указанных сегментов выполне-

---

* Так как $|\sin x|\geqslant\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$ и интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{2x^{\alpha}}$ при $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ расходится (см. пример 2 из п. 1 § 1), а интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x^{\alpha}}\,dx$ сходится (в силу утверждения 4 при $f(x)=\cos 2x$, $g(x)=1/(2x^{\alpha})$), то при $0<\alpha\leqslant 1$ интеграл (9.1.9) сходится условно.

ны все условия п. 3 § 5 гл. 9, при которых действует формула замены переменной под знаком определенного интеграла. Поэтому имеет место равенство

$$\int_a^A f(x)\,dx = \int_\alpha^\rho f(g(t))\,g'(t)\,dt \left(\text{или } = -\int_\rho^\alpha f(g(t))\,g'(t)\,dt\right). \quad (9.1.11)$$

В силу строгой монотонности функции $x=g(t)$, $A\to+\infty$ при $\rho\to+\infty$ и, обратно, $\rho\to+\infty$ при $A\to+\infty$ (или $A\to+\infty$ при $\rho\to-\infty$ и $\rho\to-\infty$ при $A\to+\infty$). Поэтому из формулы (9.1.11) вытекает справедливость сформулированного выше утверждения.

Перейдем теперь к вопросу об интегрировании по частям несобственных интегралов первого рода.

Докажем следующее

Утверждение. *Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на полупрямой $a\leqslant x<+\infty$ и, кроме того, существует предельное значение $\lim\limits_{x\to+\infty}[u(x)\,v(x)]=L$. При этих условиях из сходимости одного из интегралов*

$$\int_a^{+\infty} u(x)\,v'(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_a^{+\infty} v(x)\,u'(x)\,dx \quad (9.1.12)$$

вытекает сходимость другого из этих интегралов и справедливость формулы

$$\int_a^{+\infty} u(x)\,v'(x)\,dx = L - u(a)\,v(a) - \int_a^{+\infty} v(x)\,u'(x)\,dx. \quad (9.1.13)$$

Для доказательства сформулированного утверждения рассмотрим произвольный сегмент $[a, A]$. На этом сегменте действует обычная формула интегрирования по частям. Поэтому

$$\int_a^A u(x)\,v'(x)\,dx = [u(x)\,v(x)]_a^A - \int_a^A v(x)\,u'(x)\,dx.$$

Так как при $A\to+\infty$ выражение $[u(x)\,v(x)]_a^A$ стремится к $L-u(a)\,v(a)$, то из последнего равенства следует одновременная сходимость или расходимость интегралов (9.1.12) и справедливость формулы (9.1.13) в случае сходимости одного из интегралов (9.1.12).

§ 2. Несобственные интегралы второго рода

В этом параграфе будет дано обобщение понятия определенного интеграла на случай неограниченных функций.

Пусть на полусегменте $[a, b)$ задана функция $f(x)$. Точку b мы будем называть **особой**, если функция не ограничена на полусегменте $[a, b)$, но ограничена на любом сегменте $[a, b-\alpha]$ $\alpha>0$, заключенном в полусегменте $[a, b)$. Будем также предполагать, что на любом таком сегменте функция $f(x)$ интегрируема. При наших предположениях на полусегменте $(0, b-a)$ задана функция аргумента α

$$F(\alpha)=\int_a^{b-\alpha} f(x)\,dx.$$

Исследуем вопрос о правом пределе функции $F(\alpha)$ в точке $\alpha=0$:

$$\lim_{\alpha\to+0}\int_a^{b-\alpha} f(x)\,dx. \tag{9.1.14}$$

Определение. *Правый предел (9.1.14) в случае, если он существует, называется* ***несобственным интегралом второго рода*** *от функции $f(x)$ по сегменту $[a, b]$ и обозначается символом*

$$\int_a^b f(x)\,dx. \tag{9.1.15}$$

При этом говорят, что несобственный интеграл (9.1.15) сходится и пишут равенство $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\alpha\to+0}\int_a^{b-\alpha} f(x)\,dx.$

Символ (9.1.15) употребляют и в случае, если указанного выше предела (9.1.14) не существует, но в этом случае говорят, что несобственный интеграл (9.1.15) *расходится.*

Замечание. Понятие несобственного интеграла второго рода легко переносится на случай, когда функция $f(x)$ имеет конечное число особых точек.

Пример. Рассмотрим на полусегменте $[a, b)$ функцию $f(x)=1/(b-x)^\lambda$, $\lambda>0$. Ясно, что точка b является особой точкой для этой функции. Кроме того, очевидно, что функция интегрируема на любом сегменте $[a, b-\alpha]$, $\alpha>0$, причем

$$\int_a^{b-\alpha}\frac{dx}{(b-x)^\lambda}=\begin{cases}-\dfrac{(b-x)^{1-\lambda}}{1-\lambda}\Bigg|_a^{b-\alpha}=\dfrac{(b-a)^{1-\lambda}-\alpha^{1-\lambda}}{1-\lambda} & \text{при } \lambda\neq 1,\\ -\ln(b-x)\Big|_a^{b-\alpha}=\ln(b-a)-\ln\alpha & \text{при } \lambda=1.\end{cases}$$

Очевидно, предел $\lim\limits_{\alpha\to+0}\int_a^{b-\alpha}\dfrac{dx}{(b-x)^\lambda}$ существует и равен $\dfrac{(b-a)^{1-\lambda}}{1-\lambda}$ при $\lambda<1$ и не существует при $\lambda\geqslant 1$. Следовательно, рассматриваемый несобственный интеграл сходится при $\pi<1$ и расходится при $\lambda\geqslant 1$.

Сформулируем *критерий Коши* сходимости несобственного интеграла второго рода. При этом мы будем предполагать, что функция $f(x)$ задана на полусегменте $[a, b)$ и b — особая точка этой функции.

Утверждение 5 (критерий Коши). *Для сходимости несобственного интеграла второго рода* (9.1.15) *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon>0$ *можно было указать такое* $\delta>0$, *что для любых* α' *и* α'', *удовлетворяющих условию* $0<\alpha''<\alpha'<\delta$, *справедливо неравенство*

$$\left|\int_{b-\alpha'}^{b-\alpha''} f(x)\,dx\right|<\varepsilon.$$

Справедливость этой теоремы вытекает из того, что понятие сходимости интеграла по определению эквивалентно понятию существования предельного значения функции $F(\alpha)$, введенной в начале этого пункта. Мы не будем подробно развивать теорию несобственных интегралов второго рода. Это объясняется тем, что основные выводы и теоремы предыдущего параграфа без труда могут быть перенесены на случай интегралов второго рода. Поэтому мы ограничимся некоторыми замечаниями.

1°. При некоторых ограничениях на подынтегральные функции интегралы второго рода сводятся к интегралам первого рода. Именно: пусть функция $f(x)$ непрерывна на полусегменте $[a, b)$ и b — особая точка этой функции. При этих условиях в интеграле $\int_a^{b-\alpha} f(x)\,dx$, $\alpha>0$, мы можем произвести следующую замену переменных:

$$x=b-\frac{1}{t},\quad dx=\frac{dt}{t^2},\quad \frac{1}{b-a}\leqslant t\leqslant\frac{1}{\alpha}.$$

В результате этой замены переменных мы получим равенство

$$\int_a^{b-\alpha} f(x)\,dx=\int_{1/(b-a)}^{1/\alpha} f\left(b-\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\,dt. \qquad (9.1.16)$$

Пусть интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится. Это означает, что существует предел $\lim\limits_{\alpha\to+0}\int_a^{b-\alpha} f(x)\,dx$. Обращаясь к равенству (9.1.16), мы видим, что существует также и предел при $1/\alpha\to+\infty$ выражения в правой части (9.1.16). Тем самым доказана сходимость несобственного интеграла первого рода

$$\int_{1/(b-a)}^{+\infty} f\left(b-\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\,dt$$

и равенство этого интеграла интегралу $\int_a^b f(x)\,dx$. Очевидно, сходимость только что указанного несобственного интеграла первого рода влечет сходимость интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ и равенство этих интегралов. Итак, *из сходимости одного из интегралов*

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_{1/(b-a)}^{+\infty} f\left(b-\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\,dt$$

следует сходимость другого и равенство этих интегралов.

2°. Для несобственных интегралов второго рода легко доказываются утверждения, аналогичные утверждениям п. 2 предыдущего параграфа, которые можно объединить общим наименованием «признаки сравнения». Отметим, что во всех формулировках функция $f(x)$ рассматривается на полусегменте $[a, b)$, где b — особая точка функции.

Частный признак сравнения будет иметь следующий вид.

Если $|f(x)|\leqslant c(b-x)^{-\lambda}$, где $\lambda<1$, то несобственный интеграл (9.1.15) сходится. Если же $f(x)\geqslant c(b-x)^{-\lambda}$, где $c>0$ и $\lambda\geqslant 1$, то несобственный интеграл (9.1.15) расходится. Доказательство вытекает из общего признака сравнения и примера, рассмотренного выше.

В полной аналогии с п. 4 предыдущего параграфа для несобственных интегралов второго рода формулируются правила интегрирования путем замены переменной и интегрирования по частям.

§ 3. Главное значение несобственного интеграла

Определение. *Пусть функция $f(x)$ определена на прямой $-\infty<x<+\infty$ и интегрируема на каждом сегменте, принадлежащем этой прямой. Будем говорить, что функция $f(x)$ интегрируема по Коши, если существует предел* $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)\,dx$.

Этот предел мы будем называть главным значением несобственного интеграла от функции $f(x)$ (в смысле Коши) и обозначать символом *

* V. p. — начальные буквы французских слов «Valeur principal», обозначающих «главное значение». Подчеркнем, что, в отличие от понятия несобственного

$$\text{V. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} f(x)\,dx.$$

Пример 1. Найдем главное значение интеграла от функции x. Поскольку в силу нечетности x,

$$\int_{-A}^{A} x\,dx = 0, \text{ то V. p. } \int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx = 0.$$

Точно так же заключаем, что $\text{V. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x\,dx = 0.$

Справедливо следующее

Утверждение. *Пусть функция $f(x)$ интегрируема на каждом сегменте прямой $-\infty<x<+\infty$. Если эта функция $f(x)$ нечетна, то она интегрируема по Коши и главное значение интеграла от нее равняется нулю.*

Если функция $f(x)$ четна, то она интегрируема по Коши тогда и только тогда, когда сходится несобственный интеграл

$$\int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{9.1.17}$$

Первая часть этого утверждения является очевидной. Для доказательства второй части достаточно воспользоваться равенством $\int_{A}^{A} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{A} f(x)\,dx$, справедливым для любой четной функции, и определением сходимости несобственного интеграла (9.1.17).

Понятие интегрируемости по Коши можно ввести и для несобственных интегралов второго рода в случае, когда особая точка является внутренней точкой сегмента, по которому производится интегрирование.

Определение. *Пусть функция $f(x)$ определена на сегменте $[a, b]$, кроме, быть может, точки c, $a<c<b$, и интегрируема на любом сегменте, принадлежащем либо $[a, c)$, либо $(c, b]$. Будем говорить, что функция $f(x)$ интегрируема по Коши, если существует предел*

интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$, определяемого как предел $\lim\limits_{A'\to-\infty,\, A''\to+\infty} \int_{A'}^{A''} f(x)dx$ при независимом стремлении A' к $-\infty$, A'' к $+\infty$, интеграл по Коши определяется как предел при $A\to+\infty$ интеграла в симметричных пределах $\int_{-A}^{A} f(x)dx$.

$$\lim_{\alpha\to+0}\left(\int_a^{c-\alpha} f(x)\,dx+\int_{c+\alpha}^{b} f(x)\,dx\right)=\text{V. p.}\int_a^b f(x)\,dx,\ \alpha>0,$$

называемый главным значением интеграла в смысле Коши.

Пример 2. Функция $1/(x-c)$ не интегрируема на сегменте $[a, b]$, $a<c<b$, в несобственном смысле, однако она интегрируема по Коши. При этом

$$\text{V. p.}\int_a^b \frac{dx}{x-c}=\lim_{\alpha\to+0}\left(\int_a^{c-\alpha}\frac{dx}{x-c}+\int_{c+\alpha}^{b}\frac{dx}{x-c}\right)=\ln\frac{b-c}{c-a}.$$

ДОПОЛНЕНИЕ 2

Интеграл Стилтьеса *

Понятие интеграла Стилтьеса является непосредственным обобщением понятия интеграла Римана, построению которого была посвящена гл. 9. В настоящем дополнении мы приведем основные сведения об интеграле Стилтьеса.

1. Определение интеграла Стилтьеса и условия его существования. Понятие интеграла Стилтьеса реализует идею интегрирования функции $f(x)$ относительно другой функции $u(x)$.

Пусть функции $f(x)$ и $u(x)$ определены и ограничены на сегменте $[a, b]$ и $\{x_k\}$ — разбиение этого сегмента **:

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_{i-1}<x_i<\ldots<x_n=b.$$

Сумму вида

$$\sigma=f(\xi_1)[u(x_1)-u(x_0)]+\ldots+f(\xi_i)[u(x_i)-u(x_{i-1})]+\ldots \\ \ldots+f(\xi_n)[u(x_n)-u(x_{n-1})], \tag{9.2.1}$$

где $x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i$, $i=1, 2, \ldots, n$, называют интегральной суммой Стилтьеса.

Число I называют пределом интегральных сумм (9.2.1) при $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i\to 0$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что при $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i<\delta$ справедливо неравенство $|\sigma-I|<\varepsilon$.

Определение. *Функция $f(x)$ называется интегрируемой по функции $u(x)$ на сегменте $[a, b]$, если существует конечный предел интегральных сумм* (9.2.1) *при* $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i\to 0$. *Указанный предел называется интегралом*

* Т. Стилтьес — голландский математик (1856—1894).

** Мы предполагаем, что $a<b$. Случай $a>b$ сводится к рассматриваемому.

Стилтьеса (или интегралом Римана—Стилтьеса) от функции $f(x)$ по функции $u(x)$ на сегменте $[a, b]$ и обозначается символом

$$I = \int_a^b f(x)\,du(x). \qquad (9.2.2)$$

Функцию $u(x)$ иногда называют интегрирующей функцией.

Т. Стилтьес пришел к идее такого интеграла, рассматривая положительное «распределение масс» на прямой, заданное возрастающей функцией $u(x)$, точки разрыва которой соответствуют массам, «сконцентрированным в одной точке».

Интеграл Римана представляет собой частный случай интеграла Стилтьеса, когда в качестве интегрирующей функции взята функция $x+c$, где $c=\text{const}$.

Укажем *ряд условий существования интеграла Стилтьеса* (т. е. условий, когда функция $f(x)$ интегрируема по функции $u(x)$).

Предположим, что интегрирующая функция $u(x)$ является возрастающей. Отсюда следует, что, поскольку $a=x_0<x_1<\ldots<x_{i-1}<x_i<\ldots<x_n=b$, все $\Delta u(x_i)=u(x_i)-u(x_{i-1})>0$. Это позволяет, заменяя Δx_i на $\Delta u(x_i)$, повторить почти все построения, проводимые для интеграла Римана.

Аналогично суммам Дарбу для обычного интеграла Римана вводятся верхняя и нижняя суммы Дарбу—Стилтьеса

$$S=\sum_{i=1}^{n} M_i\,[u(x_i)-u(x_{i-1})], \quad s=\sum_{i=1}^{n} m_i\,[u(x_i)-u(x_{i-1})], \qquad (9.2.3)$$

где M_i и m_i — точные верхняя и нижняя грани функции $f(x)$ на сегменте $[x_{i-1}, x_i]$.

Суммы (9.2.3) *называются соответственно верхней и нижней суммами Дарбу—Стилтьеса.*

Как и в случае сумм Дарбу (т. е. в простейшем случае $u(x)=x+c$, $c=\text{const}$) при одном и том же разбиении выполнены неравенства $s\leqslant\sigma\leqslant S$, причем s и S служат точными гранями для стилтьесовых сумм σ, отвечающих всевозможным выборам промежуточных точек ξ_i на частичных сегментах.

Суммы Дарбу—Стилтьеса обладают (как и в простейшем случае) свойствами:

а) *если к имеющимся точкам разбиения добавить новые точки, то нижняя сумма Дарбу—Стилтьеса может от этого лишь возрасти, а верхняя сумма — лишь уменьшиться*;

б) *каждая нижняя сумма Дарбу—Стилтьеса не превосходит любой верхней суммы, отвечающей тому же или другому разбиению сегмента $[a, b]$.*

Аналогично тому, как это сделано при построении интеграла Римана, вводятся верхний и нижний интегралы Дарбу—Стилтьеса:

$$I^* = \inf\{S\}, \qquad I_* = \sup\{s\},$$

где нижняя и верхняя грани берутся по всевозможным разбиениям сегмента $[a, b]$.

Легко проверить, что справедливы соотношения

$$s \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S.$$

Точно так же, как и в случае обычного интеграла Римана, в случае интеграла Стилтьеса доказывается, что верхний интеграл Дарбу—Стилтьеса является пределом верхних сумм S при стремлении диаметра разбиений к нулю. Аналогично нижний интеграл Дарбу—Стилтьеса есть предел нижних сумм s (см. п. 2, § 2, основную лемму Дарбу).

Сформулируем теперь теорему, которая является обобщением основной теоремы п. 1 § 3 и справедлива в случае интеграла Римана—Стилтьеса.

Основная теорема. *Для того чтобы ограниченная на сегменте $[a, b]$ $(a<b)$ функция $f(x)$ была интегрируемой на этом сегменте по возрастающей функции $u(x)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ нашлось такое разбиение $\{x_k\}$ сегмента $[a, b]$, для которого $S-s<\varepsilon$.*

Доказательство этой теоремы (как, впрочем, и других упомянутых выше фактов и свойств) является дословным повторением рассуждений, проведенных для интеграла Римана.

Укажем теперь некоторые классы интегрируемых по Риману — Стилтьесу функций.

1. *Если функция $f(x)$ непрерывна, а $u(x)$ возрастает на сегменте $[a, b]$, то интеграл Стилтьеса $\int_a^b f(x)\,du(x)$ существует.*

Доказательство этого факта полностью аналогично доказательству теоремы 9.1 (см. п. 2 § 3).

Замечание. Указанный выше факт справедлив и в том случае, когда функция $u(x)$ является функцией ограниченной вариации*. Так называются функции $u(x)$, определенные на сегменте $[a, b]$, $a<b$ и обладающие тем свойством, что для любого разбиения

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b$$

числовое множество $V[\{x_k\}] = \sum_{i=1}^{n-1} |u(x_{i+1}) - u(x_i)|$ ограничено сверху.

* Или ограниченного изменения.

Точная верхняя грань множества $\{V[\{x_k\}]\}$ называется полным изменением или полной вариацией функции $u(x)$ на сегменте $[a, b]$ и обозначается символом $\overset{b}{\underset{a}{V}}u(x) = \sup\{V[\{x_k\}]\}$. Для функций ограниченной вариации справедлив следующий основной критерий:

Для того чтобы функция $u(x)$ имела на сегменте $[a, b]$ ограниченную вариацию, необходимо и достаточно, чтобы она представлялась на этом сегменте в виде разности двух возрастающих и ограниченных функций:

$$u(x) = g(x) - h(x).$$

Таким образом, в случае, когда $u(x)$ — функция ограниченной вариации, сумму Стилтьеса, отвечающую функции $u(x)$, можно записать в виде

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta u(x_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta g(x_i) - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta h(x_i) = \sigma_1 - \sigma_2,$$

где $\Delta u(x_i) = u(x_i) - u(x_{i-1})$, $\Delta g(x_i) = g(x_i) - g(x_{i-1})$, $\Delta h(x_i) = h(x_i) - h(x_{i-1})$.

Суммы σ_1 и σ_2 стремятся к конечным пределам при стремлении диаметра разбиений к нулю, так как $g(x)$ и $h(x)$ — возрастающие функции. Поэтому существует конечный предел и сумм σ при стремлении диаметра разбиений к нулю.

Следовательно, теорию интеграла Стилтьеса можно строить и в случае, когда интегрирующая функция $u(x)$ имеет ограниченную вариацию, вполне аналогично случаю возрастающей функции $u(x)$.

Выделим еще один класс функций, для которых существует интеграл Стилтьеса.

2. *Интеграл Стилтьеса* (9.2.2) *существует при условии, что функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$ по Риману, а функция $u(x)$ удовлетворяет на этом сегменте условию Липшица, т. е. условию*

$$|u(x') - u(x'')| \leqslant c\,|x' - x''|,$$

где $c = \text{const}$, для любых x' и x'' из $[a, b]$.

Так как функция, удовлетворяющая условию Липшица, является функцией с ограниченной вариацией, то для доказательства этого критерия, очевидно, достаточно рассмотреть лишь случай возрастающей функции $u(x)$, удовлетворяющей условию Липшица, и заметить, что

$$S - s = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\,\Delta u(x_i) \leqslant C \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\,\Delta x_i, \qquad (9.2.4)$$

где $M_i = \sup f(x)$, $m_i = \inf f(x)$, $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $\Delta u(x_i) = u(x_i) - u(x_{i-1})$, c — постоянная из условия Липшица. Выражение $\sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i$ в неравенстве (9.2.4) может быть сделано, в силу интегрируемости по Риману функции $f(x)$, сколь угодно малой величиной за счет выбора разбиения сегмента $[a, b]$. Следовательно, величина $S-s$ также может быть сделана меньше наперед заданного числа $\varepsilon > 0$, если выбрать диаметр разбиения достаточно малым.

Согласно утверждению основной теоремы функция $f(x)$ интегрируема по Стилтьесу.

В общем случае функции $u(x)$, удовлетворяющей условию Липшица, также можно рассмотреть представление

$$u(x) = cx - [cx - u(x)] = u_1(x) - u_2(x).$$

В этом представлении обе функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$ удовлетворяют условию Липшица и возрастают*. В таком случае доказательство завершается так же, как и выше.

Укажем, наконец, еще один класс интегрируемых по Стилтьесу функций.

3. *Если функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$ по Риману, а функция $u(x)$ допускает представление в виде интеграла с переменным верхним пределом*

$$u(x) = A + \int_a^x \varphi(\xi)\, d\xi,$$

где $\varphi(\xi)$ — интегрируемая на сегменте $[a, b]$ по Риману функция, то интеграл (9.2.2) *существует.*

Действительно, так как $\varphi(\xi)$ интегрируема по Риману, то она ограничена: $|\varphi(\xi)| \leqslant K = \text{const}$. Следовательно,

$$|u(x') - u(x'')| = \left| \int_{x'}^{x''} \varphi(\xi)\, d\xi \right| \leqslant K|x' - x''|.$$

Поэтому справедливость этого критерия вытекает из справедливости предыдущего.

Заметим, что в ряде случаев интеграл Стилтьеса $I = \int_a^b f(x)\, du(x)$ сводится к интегралу Римана по формуле

$$\int_a^b f(x)\, du(x) = \int_a^b f(x)\varphi(x)\, dx. \tag{9.2.5}$$

---

* Для функции $u_2(x)$ при $x' > x''$, очевидно, можно записать соотношение $u_2(x') - u_2(x'') \geqslant c(x' - x'') + [u(x') - u(x'')] \geqslant 0$.

В частности, равенство (9.2.5) имеет место в случае, если $u(x)$ имеет ограниченную и интегрируемую в смысле Римана на сегменте $[a, b]$ производную $u'(x)$. В этом случае $\varphi(x) = u'(x)$.

2. Свойства интеграла Стилтьеса. Сформулируем ряд свойств интеграла Стилтьеса, непосредственно вытекающих из его определения.

а) *Линейное свойство как относительно интегрируемой, так и относительно интегрирующей функции (при условии существования каждого из интегралов Стилтьеса в правой части)*:

$$\int_a^b (\alpha f_1 + \beta f_2)\, du = \alpha \int_a^b f_1 du + \beta \int_a^b f_2 du,$$

$$\int_a^b f d[\alpha u_1 + \beta u_2] = \alpha \int_a^b f du_1 + \beta \int_a^b f du_2,$$

здесь α, β — *произвольные числа.*

б) *Если выполнено условие* $a < c < b$, *то*

$$\int_a^b f(x)\, du(x) = \int_a^c f(x)\, du(x) + \int_a^b f(x)\, du(x),$$

в предположении, что существуют все три интеграла.

Подчеркнем, что из существования обоих интегралов $\int_a^c f(x)\, du(x)$ и $\int_c^b f(x)\, du(x)$, вообще говоря, не вытекает существование интеграла $\int_a^b f(x)\, du(x)$. Вот соответствующий пример:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ A, \text{ если } 0 < x \leqslant 1, \ A \neq 0; \end{cases}$$

$$u(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } -1 \leqslant x < 0, \\ B, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant 1, \ B \neq 0. \end{cases}$$

Интегралы $\int_{-1}^0 f(x)\, du(x)$, $\int_0^1 f(x)\, du(x)$ оба существуют и равны нулю, так как соответствующие им суммы Стилтьеса все равны нулю. Действительно, в первом интеграле $f(x) = 0$, $-1 \leqslant x \leqslant 0$, во втором $\Delta u(x_i) = u(x_i) - u(x_{i-1}) = 0$ для любого разбиения сегмента $[-1, 1]$. Однако интеграл $\int_{-1}^1 f(x)\, du(x)$

не существует. В самом деле, пусть $\{x_k\}$ — разбиение сегмента $[-1, 1]$, не содержащее в качестве точки разбиения точку 0. Тогда в сумме Стилтьеса $\sigma=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta u(x_i)$ остается лишь одно слагаемое, а именно слагаемое

$$f(\xi_k)\,[u(x_k)-u(x_{k-1})]=Bf(\xi_k), \qquad B\neq 0,$$

для которого точка нуль содержится в сегменте $[x_{k-1}, x_k]$. В зависимости от того, будет ли ξ_k удовлетворять условию $\xi_k\leqslant 0$ или $\xi_k>0$, мы получим, что $\sigma=0$ или $\sigma=A\cdot B\neq 0$, так что σ не имеет предела при стремлении диаметра разбиений к нулю.

Указанный факт связан с тем, что как у функции $f(x)$, так и у функции $u(x)$ точка 0 является точкой разрыва.

в) *Для интеграла Стилтьеса* (9.2.2) *справедлива формула среднего значения.*

Пусть функция $f(x)$ ограничена на сегменте $[a, b]$, так что $m\leqslant f(x)\leqslant M$, а функция $u(x)$ возрастает на этом сегменте. Тогда найдется такое число μ, удовлетворяющее неравенствам $m\leqslant\mu\leqslant M$, что для интеграла Стилтьеса справедлива формула среднего значения

$$\int_a^b f(x)\,du(x)=\mu\,[u(b)-u(a)].$$

В частности, если дополнительно предположить непрерывность $f(x)$ на сегменте $[a, b]$, то найдется точка $\xi\in[a, b]$ такая, что $\mu=f(\xi)$.

Доказательство этой формулы вполне аналогично доказательству формулы среднего значения для интеграла Римана (см. п. 2, § 4).

Глава 10

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

§ 1. ДЛИНА ДУГИ КРИВОЙ

1. Понятие простой кривой. Начнем наше рассмотрение с выяснения понятия кривой. Пусть на сегменте $[\alpha, \beta]$ заданы две непрерывные функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$. Аргумент этих функций будет в дальнейшем называться параметром. Рассмотрим плоскость (x, y), т. е. совокупность всевозможных упорядоченных пар (x, y) чисел x и y. Каждая такая пара называется точкой плоскости, а числа x и y называются координатами этой точки. Точка (x, y) может обозначаться также одной буквой M, при этом запись $M(x, y)$ означает, что точка M имеет координаты x и y.

Если рассматривать параметр t как время, то уравнения

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta \tag{10.1}$$

определяют закон движения точки M с координатами x и y на плоскости. Множество $\{M\}$ точек M, отвечающих всевозможным значениям параметра t из $[\alpha, \beta]$ можно рассматривать как след точки M, движущейся по закону (10.1).

В общем случае даже для непрерывных функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ этот закон движения может быть очень сложным. Например, можно так подобрать непрерывные на сегменте $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, что при изменении параметра t на этом сегменте точки $\{M(x, y)\}$ заполняют целый квадрат *.

Введем понятие простой плоской кривой.

Определение. *Множество $\{M\}$ всех точек M, координаты x и y которых определяются уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ при t из $[\alpha, \beta]$, называется простой плоской кривой L, если различным значениям параметра t из $[\alpha, \beta]$ отвечают разные точки множества $\{M\}$.*

Каждую точку множества $\{M\}$, определяющего простую плоскую кривую, называют точкой этой кривой, причем точки, отвечающие граничным значениям α и β параметра t, называются граничными точками простой кривой.

При этом говорят, что «уравнения (10.1) определяют простую плоскую кривую L» или «простая плоская кривая L параметризована при помощи уравнений (10.1)».

---

* См. Бибербах. Дифференциальное и интегральное исчисление, ч. 1, с. 156.

Примером простой кривой является график полуокружности радиуса r, лежащей в верхней полуплоскости с центром в начале координат:

$$x=r\cos t, \quad y=r\sin t, \quad \text{при} \quad 0\leqslant t\leqslant\pi.$$

Более общим примером простой кривой является график непрерывной на сегменте $[\alpha, \beta]$ функции $y=f(x)$; параметризацию этой кривой вводят по правилу

$$x=t, \quad y=f(t) \quad \text{при} \quad t\in[\alpha, \beta].$$

Заметим, что простые кривые не исчерпывают всего множества кривых, которые могут быть определены уравнениями (10.1).

В следующем пункте мы рассмотрим более общие кривые, определяемые этими уравнениями.

В заключение этого пункта сделаем два замечания.

Замечание 1. Одна и та же простая кривая L может быть параметризована различными способами. Целесообразно рассматривать только те параметризации, которые получаются из данной путем представления параметра t в виде непрерывных строго монотонных функций другого параметра s. При таких преобразованиях параметра сохраняется порядок следования точек на кривой L.

Замечание 2. *Пусть L_1 и L_2 — две простые кривые, причем граничные точки кривой L_1 совпадают с граничными точками кривой L_2, а любые не граничные точки кривых L_1 и L_2 различны. Кривая L, полученная объединением кривых L_1 и L_2, называется простой замкнутой кривой.*

2. Понятие параметризуемой кривой. В предыдущем пункте мы рассматривали простые кривые. Следует заметить, что в математическом анализе часто приходится рассматривать кривые, не являющиеся простыми, например кривые, имеющие точки самопересечения или целые участки самоналегания. В связи с этим возникает необходимость ввести в рассмотрение понятие так называемой параметризуемой кривой.

Будем считать, что множество $\{t\}$ представляет собой либо сегмент, либо полусегмент, либо интервал, либо числовую прямую, либо открытую или замкнутую полупрямую.

Введем понятие разбиения множества $\{t\}$. *Будем говорить, что конечная или бесконечная система сегментов $\{[t_{i-1}, t_i]\}$ разбивает множество $\{t\}$, если, во-первых, объединение всех этих сегментов представляет собой все множество $\{t\}$ и, во-вторых, общими точками любых двух сегментов системы могут быть лишь их концы.*

Рассмотрим примеры разбиений некоторых из указанных выше множеств $\{t\}$.

1) Система сегментов $[0, 1/2]$, $[1/2, 1]$, очевидно, разбивает сегмент $[0, 1]$.

2) Система сегментов $[n-1, n]$, где $n=1, 2, \ldots$, разбивает полупрямую $[0, \infty)$.

3) Система сегментов $[n-1, n]$, где n — любое целое число, очевидно, разбивает всю числовую прямую.

Пусть множество $\{t\}$ представляет собой одно из указанных выше множеств, а функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны на этом множестве. Введем понятие параметризуемой кривой.

Определение. *Будем говорить, что уравнения*

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t) \tag{10.2}$$

задают параметризуемую кривую L, если существует такая система сегментов $\{[t_{i-1}, t_i]\}$, разбивающих множество $\{t\}$, что для значений t из каждого сегмента этой системы уравнения (10.2) *определяют простую кривую.*

Между точками кривой L можно ввести некоторое отношение порядка. Пусть точка M_1 соответствует значению параметра t_1, а точка M_2 — значению t_2.

Мы скажем, что точка M_1 *предшествует точке* M_2 (и запишем $M_1 \prec M_2$) если $t_1 < t_2$.

Заметим, что *точки, отвечающие различным значениям параметра, всегда считаются различными.*

Таким образом, параметризуемую кривую можно рассматривать как объединение простых кривых, причем эти простые кривые последовательно пробегаются точкой M, координаты которой определяются уравнениями (10.2), когда параметр t, монотонно возрастая, пробегает множество $\{t\}$.

Замечание 1. Простую кривую можно рассматривать как частный случай параметризуемой кривой. В этом случае система сегментов, разбивающих сегмент $[\alpha, \beta]$, состоит из одного сегмента, а именно из самого сегмента $[\alpha, \beta]$.

Замечание 2. Про параметризуемую кривую, определяемую уравнениями (10.2), говорят также, что эта кривая параметризована при помощи уравнений (10.2). Заметим, что одна и та же кривая L может быть параметризована *различными* способами. Мы будем рассматривать всевозможные параметризации кривой L, получающиеся из любой данной параметризации путем представления параметра t в виде непрерывных, строго возрастающих функций другого параметра s. Только при таких преобразованиях параметра сохраняется порядок следования точек на кривой L.

Замечание 3. Понятие *пространственной* кривой вводится в полной аналогии с понятием *плоской* кривой. Так же, как и для плоской простой кривой, *пространственная простая кривая — это множество $\{M\}$ точек пространства, координаты x, y, z которых определяются уравнениями*

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \quad z=\chi(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta, \tag{10.3}$$

при условии непрерывности функций $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ *на сегменте* $[\alpha, \beta]$ *и при условии несовпадения точек множества* $\{M\}$, *отвечающих различным значениям параметра* t.

Используя понятие простой пространственной кривой и понятие разбиения множества $\{t\}$ изменения параметра, так же как и в плоском случае, дается определение параметризуемой пространственной кривой (задаваемой уравнениями (10.3)).

Приведем примеры параметризуемых кривых.

1) Пусть плоская кривая L задается уравнениями

$$x=\cos t, \quad y=\sin t, \quad 0\leqslant t\leqslant 3\pi.$$

Очевидно, сегмент $[0, 3\pi]$ можно разбить на сегменты $[0, \pi]$, $[\pi, 2\pi]$, $[2\pi, 3\pi]$ такие, что для значений t из каждого указанного сегмента выписанные уравнения определяют простую кривую, а именно *полуокружность*. В данном случае кривая L представляет собой окружность, у которой полуокружность, лежащая в верхней полуплоскости, проходится дважды.

2) Уравнения

$$x=\cos t, \quad y=\sin t, \quad z=t, \quad -\infty<t<\infty,$$

задают простую пространственную кривую, называемую *винтовой линией*.

3. Длина дуги кривой. Понятие спрямляемой кривой. В этом пункте мы введем понятие длины дуги параметризуемой кривой и рассмотрим некоторые свойства кривых, имеющих длину дуги (такие кривые принято называть спрямляемыми).

Условимся называть прямой линию, определяемую параметрическими уравнениями $x=at+b$, $y=ct+d$. Всегда можно выбрать так постоянные a, b, c и d, чтобы прямая проходила через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Участок прямой между точками M_1 и M_2 называется отрезком, соединяющим эти точки, а совокупность конечного числа примыкающих друг к другу отрезков называется ломаной.

Пусть плоская кривая L параметризуется уравнениями

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \quad t\in[\alpha, \beta].$$

Пусть, далее, T — произвольное разбиение сегмента $[\alpha, \beta]$ точками $\alpha=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_n=\beta$*. Обозначим через $M_0, M_1, \ldots, M_n$ соответствующие точки кривой L, т. е. точки с координатами

$$M_0(\varphi(t_0), \psi(t_0)), M_1(\varphi_1(t_1), \psi(t_1)), M_2(\varphi(t_2), \psi(t_2)), \ldots$$
$$\ldots, M_n(\varphi(t_n), \psi(t_n)).$$

Возникающую при этом ломаную $l(t_i)=M_0M_1M_2\ldots M_n$ будем на-

* В гл. 9 разбиение сегмента мы обозначали символом $\{t_k\}$.

зывать ломаной, вписанной в кривую L и отвечающей разбиению T сегмента $[\alpha, \beta]$. Длина $|l_i|$ звена $l_i = M_{i-1}M_i$ этой ломаной есть расстояние между точками $M_{i-1}(\varphi(t_{i-1}), \psi(t_{i-1}))$ и $M_i(\varphi(t_i), \psi(t_i))$. Поэтому $|l_i| = \sqrt{[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})]^2 + [\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})]^2}$ и длина $|l|$ всей ломаной $l = M_0M_1M_2 \ldots M_n$ будет равна

$$|l| = \sum_{i=1}^{n} |l_i| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})]^2 + [\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})]^2}.$$

Введем понятие спрямляемой кривой.

Определение. *Кривая L называется спрямляемой, если множество $\{|l|\}$ длин вписанных в кривую L ломаных $l = l(t_i)$, отвечающих всевозможным разбиениям T сегмента $[\alpha, \beta]$, ограничено. При этом точная верхняя грань множества $\{|l|\}$ называется длиной дуги кривой L и обозначается символом $|L|$.*

Из сформулированного определения нетрудно заключить, что длина $|L|$ дуги L кривой всегда положительна.

Замечание 1. *Существуют неспрямляемые кривые.* Пример неспрямляемой кривой можно найти в книге В. А. Ильина и Э. Г. Позняка «Основы математического анализа», 1 (М., 1982, с. 382—386).

Докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. *Пусть $|l_0|$ — длина ломаной, вписанной в кривую L и отвечающей разбиению T_0 сегмента $[\alpha, \beta]$, а $|l_1|$ — длина ломаной, вписанной в кривую L и отвечающей разбиению T_1, полученному из разбиения T_0 посредством добавления одной или нескольких новых точек. Тогда $|l_0| \leqslant |l_1|$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда к разбиению T_0 добавляется одна точка γ. В этом случае ломаная, отвечающая разбиению T_0, отличается от ломаной, отвечающей разбиению T_1, только тем, что одно звено M_kM_{k+1} ломаной, отвечающей разбиению T_0, заменяется двумя звеньями M_kN и NM_{k+1}* ломаной, отвечающей разбиению T_1 (все остальные звенья у ломаных, отвечающих разбиениям T_0 и T_1, являются общими). Так как длина одной стороны треугольника $M_kM_{k+1}N$ не превосходит суммы длин двух других его сторон, то $|M_kM_{k+1}| \leqslant |M_kN| + |NM_{k+1}|$, а это и означает, что $|l_0| \leqslant |l_1|$. Лемма доказана.

Приведем некоторые свойства спрямляемых кривых:

1°. *Если кривая L спрямляема, то длина $|L|$ ее дуги не зависит от параметризации этой кривой.*

Действительно, пусть имеются две параметризации кривой L, а t и s — параметры этих параметризаций, определенные соответственно на сегментах $[\alpha, \beta]$ и $[a, b]$. Так как t представляет собой строго монотонную и непрерывную функцию от s, а

* Мы обозначили через N точку, отвечающую значению параметра $t = \gamma$.

s — строго монотонную и непрерывную функцию от t, то каждому разбиению T сегмента $[\alpha, \beta]$ соответствует определенное разбиение P сегмента $[a, b]$ и наоборот. Очевидно, что вписанные в L ломаные, отвечающие соответствующим разбиениям сегментов $[\alpha, \beta]$ и $[a, b]$, тождественны, и поэтому их длины равны. Но тогда и точные верхние грани двух тождественных числовых множеств равны, т. е. равны длины кривой L при двух различных параметризациях.

2°. *Если спрямляемая кривая L разбита при помощи конечного числа точек $M_0, M_1, \ldots, M_n$ на конечное число кривых L_i, причем точки $M_0, M_1, \ldots, M_n$ соответствуют значениям $t_0, t_1, \ldots, t_n$ параметра t и $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$, то каждая из кривых L_i спрямляема и сумма длин $|L_i|$ всех кривых L_i равна длине $|L|$ кривой L.*

Очевидно, это свойство достаточно доказать для случая, когда кривая L разбита точкой C на две кривые L_1 и L_2. Обозначим через γ значение параметра t, которому отвечает точка C. Тогда точки кривой L_1 соответствуют значениям параметра t из сегмента $[\alpha, \gamma]$, а точки кривой L_2 соответствуют значениям параметра t из сегмента $[\gamma, \beta]$. Пусть T_1 и T_2 — произвольные разбиения указанных сегментов, а T — разбиение сегмента $[\alpha, \beta]$, полученное объединением разбиений T_1 и T_2. Если $|l_1|$, $|l_2|$, $|l|$ — длины ломаных, вписанных в кривые L_1, L_2 и L и отвечающих разбиениям T_1, T_2 и T указанных выше сегментов, то, очевидно,

$$|l_1| + |l_2| = |l|. \tag{10.4}$$

Поскольку числа $|l_1|$, $|l_2|$ и $|l|$ положительны, то из равенства (10.4) и спрямляемости кривой L следует, что множества длин вписанных в кривые L_1 и L_2 ломаных, отвечающих всевозможным разбиениям сегментов $[\alpha, \gamma]$ и $[\gamma, \beta]$, ограничены, т. е. кривые L_1 и L_2 спрямляемы. Отметим, что из равенства (10.4) и из определения длины дуги кривой следует, что длины $|L_1|$, $|L_2|$ и $|L|$ дуг кривых L_1, L_2 и L удовлетворяют неравенству

$$|L_1| + |L_2| \leqslant |L|. \tag{10.5}$$

Действительно, из равенства (10.4) вытекает, что для любых разбиений T_1 и T_2 сегментов $[\alpha, \gamma]$ и $[\gamma, \beta]$ справедливо неравенство $|l_1| + |l_2| \leqslant |l|$. Из этого неравенства и определения точной верхней грани получим неравенство (10.5).

Покажем, что в неравенстве (10.5) на самом деле знак неравенства можно заменить на знак равенства. Предположим противное, т. е. предположим, что $|L_1| + |L_2| < |L|$. Тогда число

$$|L| - (|L_1| + |L_2|) = \varepsilon \tag{10.6}$$

положительно. Из определения длины $|L|$ дуги кривой L вытекает, что для положительного числа ε можно указать такое разбиение T_0 сегмента $[\alpha, \beta]$, что длина $|l_0|$ ломаной l_0, вписанной в кривую L и отвечающей этому разбиению, удовлетворяет нера-

венству $|L|-|l_0|<\varepsilon$. Добавим к разбиению T_0 точку γ и обозначим полученное при этом разбиение через T. Тогда, в силу доказанной выше леммы, длина $|l|$ ломаной, отвечающей разбиению T, тем более удовлетворяет неравенству $|L|-|l|<\varepsilon$. Так как разбиение T сегмента $[\alpha, \beta]$ образовано объединением некоторых разбиений T_1 и T_2 сегментов $[\alpha, \gamma]$ и $[\gamma, \beta]$, то длины $|l_1|$ и $|l_2|$ ломаных, отвечающих этим разбиениям, удовлетворяют соотношению (10.4). Поэтому справедливо неравенство $|L|-(|l_1|+|l_2|)<\varepsilon$. Так как $|l_1|+|l_2|\leqslant|L_1|+|L_2|$, то тем более справедливо неравенство $|L|-(|L_1|+|L_2|)<\varepsilon$. Но это неравенство противоречит равенству (10.6). Полученное противоречие доказывает, что предположение о том, что $|L_1|+|L_2|<|L|$ является неверным, и, следовательно, $|L_1|+|L_2|=|L|$. Свойство 2° полностью установлено.

Замечание 2. Понятие длины дуги пространственной кривой, заданной параметрическими уравнениями (10.3), вводится точно так же, как и понятие длины дуги плоской кривой. Точно так же, как и в плоском случае, рассматриваются длины $|l|$ ломаных, вписанных в кривую L, причем

$$|l|=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[(\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})]^2+[\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})]^2+[\chi(t_i)-\chi(t_{i-1})]^2}.$$

Пространственная кривая L, определяемая уравнениями (10.3), *называется спрямляемой, если множество $\{|l|\}$ длин ломаных l, вписанных в эту кривую, ограничено. Точная верхняя грань $|L|$ этого множества называется длиной дуги L.*

Пространственные спрямляемые кривые обладают свойствами 1° и 2°, приведенными выше для плоских кривых. Доказательство этих свойств аналогично доказательствам для плоских кривых.

4. Критерий спрямляемости кривой. Вычисление длины дуги кривой. Приведем достаточное условие спрямляемости кривой и формулу для вычисления длины ее дуги.

Договоримся об употреблении следующей терминологии.

1°. *Будем говорить, что функция $f(t)$ имеет на сегменте $[\alpha, \beta]$ непрерывную первую производную, если производная $f'(t)$ существует и непрерывна в любой внутренней точке этого сегмента и если, кроме того, существуют конечные пределы* $\lim\limits_{t\to\alpha+0} f'(t)$ и $\lim\limits_{t\to\beta-0} f'(t)$.

При таком определении функция $f'(t)$ окажется непрерывной на сегменте $[\alpha, \beta]$, если значения этой функции на концах указанного сегмента положить равными пределам $\lim\limits_{t\to\alpha+0} f'(t)$ и $\lim\limits_{t\to\beta-0} f'(t)$ соответственно *.

* Если в условиях определения 1° дополнительно потребовать существования односторонних производных $f'(\alpha+0)$ и $f'(\beta-0)$, то в силу п. 3 § 4 гл. 6 $\lim\limits_{x\to\alpha+0} f'(x)=f'(\alpha+0)$, $\lim\limits_{x\to b-0} f'(x)=f'(\beta-0)$.

2°. *Будем говорить, что функция* $f(t)$ *имеет на сегменте* $[\alpha, \beta]$ *ограниченную первую производную, если* $f'(t)$ *существует и удовлетворяет соотношению* $|f'(t)| \leqslant M$, *где* M — *некоторая постоянная, для всех внутренних точек сегмента* $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$.

3°. *Будем говорить, что производная функции* $f(t)$ *интегрируема на сегменте* $[\alpha, \beta]$, *если* $f'(t)$ *существует для всех внутренних точек этого сегмента и после доопределения произвольными конечными значениями на концах этого сегмента представляет собой интегрируемую на этом сегменте функцию.*

Теорема 10.1. *Пусть функции* $x=\varphi(t)$ *и* $y=\psi(t)$ *непрерывны и имеют непрерывные первые производные на сегменте* $[\alpha, \beta]$. *Тогда кривая* L, *определяемая параметрическими уравнениями* $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ *при* t *из* $[\alpha, \beta]$, *спрямляема и длина* $|L|$ *ее дуги может быть вычислена по формуле*

$$|L| = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt. \tag{10.7}$$

Доказательство. Сначала докажем, что кривая L спрямляема. Рассмотрим формулу для длины $|l|$ ломаной l, вписанной в кривую L и отвечающей произвольному разбиению T сегмента $[\alpha, \beta]$:

$$|l| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})]^2 + [\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})]^2}\,.$$

Для каждой из функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ выполнены на каждом частичном сегменте $[t_{i-1}, t_i]$ (при $i=1, 2, \ldots, n$) все условия теоремы 6.4 Лагранжа *. В силу этой теоремы между t_{i-1} и t_i найдутся точки ξ_i и η_i, такие, что будут справедливы равенства

$$\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\xi_i)\Delta t_i, \qquad \psi(t_i) - \psi(t_{i-1}) = \psi'(\eta_i)\Delta t_i,$$

где $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$.

Следовательно,

$$|l| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\varphi'^2(\xi_i) + \psi'^2(\eta_i)}\, \Delta t_i. \tag{10.8}$$

По условию теоремы функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют на сегменте $[\alpha, \beta]$ непрерывные, а потому и ограниченные первые производные, т. е. для всех t, лежащих внутри сегмента $[\alpha, \beta]$, справедливы неравенства $|\varphi'(t)| \leqslant M$, $|\psi'(t)| \leqslant M$. Поэтому из формулы (10.8) следует, что

* Т. е. каждая из функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывна на любом частичном сегменте $[t_{i-1}, t_i]$ и дифференцируема во внутренних точках этого сегмента.

$$0<|l|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\sqrt{M^2+M^2}\,\Delta t_i=M\sqrt{2}\sum_{i=1}^{n}\Delta t_i=M\sqrt{2}\,(\beta-\alpha).$$

Таким образом, множество $\{|l|\}$ длин вписанных в кривую L ломаных, отвечающих всевозможным разбиениям T сегмента $[\alpha, \beta]$, ограничено, и по определению кривая L спрямляема.

Докажем теперь, что длина $|L|$ кривой L может быть вычислена по формуле (10.7).

Введем в рассмотрение следующую конкретную интегральную сумму интегрируемой функции $\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}$ *:

$$\sigma(t_i,\ \xi_i)=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\varphi'^2(\xi_i)+\psi'^2(\xi_i)}\ \Delta t_i,$$

отвечающую разбиению T сегмента $[\alpha, \beta]$ и выбору промежуточных точек ξ_i, определенному в формуле (10.8). Пусть d — диаметр разбиения T, т. е. $d=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta t_i$. Докажем, что для любого положительного числа ε можно указать такое $\delta>0$, что при $d<\delta$ выполняется неравенство

$$\big||l|-I\big|<\frac{\varepsilon}{2}, \tag{10.9}$$

где I — предел при $d\to 0$ интегральных сумм $\sigma(t_i, \xi_i)$, т. е. $I=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\ dt$. Другими словами, мы покажем, что можно выбрать столь малым диаметр разбиения T, что длина $|l|$ ломаной l, вписанной в кривую L и отвечающей этому разбиению T, отличается от интеграла I на величину, меньшую, чем наперед заданное число $\varepsilon/2$. Заметим, что **

---

* Интегрируемость этой функции вытекает из ее непрерывности на сегменте $[\alpha, \beta]$.

** Первое из этих неравенств вытекает из следующих оценок, справедливых для любых чисел a, b, b_1:

$$\left|\sqrt{a^2+b_1^2}-\sqrt{a^2+b^2}\right|=\frac{|b_1^2-b^2|}{\sqrt{a^2+b_1^2}+\sqrt{a^2+b^2}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{|b_1-b|\cdot|b_1+b|}{|b_1|+|b|}\leqslant|b_1-b|.$$

Второе из этих неравенств очевидно, так как разность любых значений функции не больше разности ее точных граней.

$$\left|\sqrt{\varphi'^2(\xi_i)+\psi'^2(\eta_i)}-\sqrt{\varphi'^2(\xi_i)+\psi'^2(\xi_i)}\right|\leqslant$$
$$\leqslant|\psi'(\eta_i)-\psi'(\xi_i)|\leqslant M_i-m_i,$$

где M_i и m_i — точные грани функции $\psi(t)$ на частичном сегменте $[t_{i-1}, t_i]$.

Поэтому

$$||l|-\sigma|=\left|\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{\varphi'^2(\xi_i)+\psi'^2(\eta_i)}-\sqrt{\varphi'^2(\xi_i)+\psi'^2(\xi_i)}\right)\Delta t_i\right|\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left|\sqrt{\varphi'^2(\xi_i)+\psi'^2(\eta_i)}-\sqrt{\varphi'^2(\xi_i)+\psi'^2(\xi_i)}\right|\Delta t_i\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\,\Delta t_i=S-s, \tag{10.10}$$

где S и s — соответственно верхняя и нижняя суммы функции $\psi'(t)$ для разбиения T сегмента $[\alpha, \beta]$.

Функции $\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}$ и $\psi'(t)$ непрерывны, а значит, и интегрируемы на сегменте $[\alpha, \beta]$, поскольку по условию на $[\alpha, \beta]$, непрерывны $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$.

Из определения интегрируемости и из основной теоремы § 3 гл. 9 вытекает, что для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое $\delta>0$, что при диаметре разбиения $d<\delta$ выполняются неравенства

$$|\sigma(t_i, \xi_i)-I|<\frac{\varepsilon}{4},\quad S-s<\frac{\varepsilon}{4}. \tag{10.11}$$

Поэтому при $d<\delta$ в силу (10.10) и (10.11) справедливы неравенства

$$||l|-I|=||l|-\sigma+\sigma-I|\leqslant||l|-\sigma|+|\sigma-I|<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{2},$$

и справедливость неравенства (10.9) доказана.

Докажем теперь, что среди всевозможных ломаных l, длины $|l|$ которых удовлетворяют неравенству (10.9), имеются ломаные, длины которых отличаются от длины $|L|$ дуги кривой L меньше чем на $\varepsilon/2$.

Действительно, $|L|$ — точная верхняя грань множества $\{|l|\}$ длин ломаных l, вписанных в кривую L и отвечающих всевозможным разбиениям сегмента $[\alpha, \beta]$. Поэтому найдется такое разбиение T^*, что длина $|l^*|$ соответствующей этому разбиению ломаной l^* удовлетворяет неравенству

$$0\leqslant|L|-|l^*|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{10.12}$$