

Подвергаем теперь разбиение T^* измельчению, добавляя к нему новые точки разбиения так, чтобы в результате добавления этих точек получилось разбиение T с диаметром d , меньшим δ . При этом, как мы показали, длина $|l|$ ломаной l , отвечающей этому разбиению T , удовлетворяет неравенству (10.9). Так как все вершины ломаной, отвечающей разбиению T^* , являются также вершинами ломаной, отвечающей разбиению T , то, согласно доказанной в п. 3 лемме, $0 < |l^*| \leq |l| \leq |L|$. Поэтому неравенства (10.12) дают право утверждать, что

$$0 < |L| - |l| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (10.13)$$

Итак, мы доказали, что среди множества ломаных $\{l\}$, длины которых удовлетворяют неравенству (10.9), имеются ломаные, длины которых удовлетворяют и неравенству (10.13). Из неравенств (10.9) и (10.13) получаем, что

$$||L| - l| < \varepsilon.$$

Поскольку ε — произвольное положительное число, то $|L| = l$ и теорема полностью доказана.

З а м е ч а н и е 1. Если функции $\phi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны и имеют на сегменте $[\alpha, \beta]$, ограниченные первые производные, то кривая L , определяемая уравнениями $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, спрямляется.

Действительно, в ходе доказательства теоремы 10.1 мы установили, что если функции $\phi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны на $[\alpha, \beta]$, то при условии ограниченности на сегменте $[\alpha, \beta]$ первых производных функций $\phi(t)$ и $\psi(t)$ длины $|l|$ ломаных, вписанных в кривую L и отвечающих всевозможным разбиениям T сегмента $[\alpha, \beta]$, ограничены.

З а м е ч а н и е 2. Формула (10.7) для вычисления длины дуги справедлива, если функции $\phi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны, а производные $\phi'(t)$ и $\psi'(t)$ только интегрируемы на сегменте $[\alpha, \beta]$.

В самом деле, из интегрируемости этих производных следует их ограниченность, а поэтому, в силу замечания 1, и спрямляемость кривой L . Для вывода неравенств (10.10), (10.11), а следовательно, и неравенства (10.9) достаточно лишь непрерывности $\phi(t)$ и $\psi(t)$ и интегрируемости $\phi'(t)$ и $\psi'(t)$ на сегменте $[\alpha, \beta]$, так как отсюда, согласно теореме 9.4 (см. гл. 9), вытекает

интегрируемость на сегменте $[\alpha, \beta]$ функции $\sqrt{\phi'^2(t) + \psi'^2(t)}$. Все остальные рассуждения такие же, как и при доказательстве теоремы (10.1).

З а м е ч а н и е 3. Если кривая L является графиком функции $y = f(x)$, непрерывной и имеющей на сегменте $[a, b]$ непрерывную

производную $f'(x)$, то кривая L спрямляема и ее длина $|L|$ может быть найдена по формуле

$$|L| = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx. \quad (10.14)$$

Действительно, график рассматриваемой функции представляет собой кривую, определяемую параметрическими уравнениями $x=t$, $y=f(t)$, $a < t < b$. При этом все условия теоремы 10.1 выполнены. Полагая в формуле (10.7) $\varphi(t)=t$, $\psi(t)=f(t)$ и заменяя переменную интегрирования t на x , получим формулу (10.14).

Замечание 4. Если кривая L определяется так называемым полярным уравнением $r=r(\theta)$, $\theta_1 < \theta < \theta_2$ и функция $r(\theta)$ непрерывна и имеет на сегменте $[\theta_1, \theta_2]$ непрерывную производную, то кривая L спрямляема и ее длина определяется равенством

$$|L| = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta. \quad (10.15)$$

Для доказательства надо воспользоваться формулами перехода от полярных координат к декартовым $x=r(\theta)\cos\theta$, $y=r(\theta)\sin\theta$. Таким образом, кривая L определяется параметрическими уравнениями $\varphi=r(\theta)\cos\theta$, $\psi=r(\theta)\sin\theta$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, причем выполнены все условия теоремы 10.1. Простые вычисления приводят к формуле (10.15).

Замечание 5. Если рассматривается пространственная параметризованная кривая L , заданная уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\chi(t)$, и функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ непрерывны и имеют непрерывные первые производные на $[a, \beta]$, то кривая спрямляема и длина $|L|$ ее дуги может быть найдена по формуле

$$|L| = \int_a^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)} dt. \quad (10.16)$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 10.1.

Замечание 6. Если функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ непрерывны и имеют ограниченные на сегменте $[a, \beta]$ первые производные, то кривая L , определяемая уравнениями (10.3), спрямляема. Если при этом производные указанных функций интегрируемы на сегменте $[a, \beta]$, то длина $|L|$ дуги кривой L может быть также вычислена по формуле (10.16) (см. замечания 1 и 2).

5. Дифференциал дуги. Пусть функции $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ непрерывны и имеют на сегменте $[a, \beta]$ непрерывные первые производные. В этом случае переменная длина дуги $L(t)$, отвечающая значениям параметра из сегмента $[a, t]$, как это следует

из теоремы 10.1, представляется в виде

$$L(t) = \int_{\alpha}^t \sqrt{\varphi'^2(\tau) + \psi'^2(\tau)} d\tau. \quad (10.17)$$

Подынтегральная функция в правой части формулы (10.17) непрерывна, поэтому функция $L(t)$ дифференцируема и справедливо равенство

$$L'(t) = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}.$$

Возводя полученное равенство в квадрат и умножая на $(dt)^2$, будем иметь

$$[L'(t) dt]^2 = [\varphi'(t) dt]^2 + [\psi'(t) dt]^2. \quad (10.18)$$

Поскольку $L'(t) dt = dL$, $\varphi'(t) dt = dx$, $\psi'(t) dt = dy$, из формулы (10.18) получаем

$$(dL)^2 = (dx)^2 + (dy)^2. \quad (10.19)$$

Если рассматривается пространственная кривая, определяемая уравнениями (10.3), то при условии непрерывности функций $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и $\chi(t)$ и их производных первого порядка на сегменте $[\alpha, t]$ для дифференциала dL пути пространственной кривой справедлива формула

$$(dL)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2. \quad (10.20)$$

6. Примеры. 1) Найдем длину $|L|$ части дуги астроиды $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, лежащей в первой четверти. Этой части, как нетрудно видеть, соответствует изменение параметра t от 0 до $\pi/2$. В рассматриваемом случае $\varphi'(t) = -3a \cos^2 t \sin t$, $\psi'(t) = -3a \sin^2 t \cos t$. Поэтому по формуле (10.7) получим

$$|L| = \int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt = \frac{3a}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2t dt = \frac{3a}{2}.$$

2) Вычислим длину $|L|$ дуги параболы $y = ax^2$, $0 < x < 1$. Поскольку $y' = 2ax$, по формуле (10.14) получим

$$|L| = \int_0^1 \sqrt{1 + 4a^2 x^2} dx.$$

Неопределенный интеграл $I = \int \sqrt{1 + 4a^2 x^2} dx$ вычислим следующим образом. Сначала проинтегрируем его по частям, затем к числителю дроби, получившейся под знаком интеграла, прибавим и вычтем единицу, произведем деление и проинтегрируем одну из получившихся дробей. Получим

$$\begin{aligned}
 I &= \int V \sqrt{1+4a^2x^2} dx = x V \sqrt{1+4a^2x^2} - \int \frac{4a^2x^2 dx}{\sqrt{1+4a^2x^2}} = \\
 &= x V \sqrt{1+4a^2x^2} - \int V \sqrt{1+4a^2x^2} dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1+4a^2x^2}} = \\
 &= x V \sqrt{1+4a^2x^2} - I + \frac{1}{2a} \ln |2ax + V \sqrt{1+4a^2x^2}|.
 \end{aligned}$$

Нами получено уравнение относительно величины I . Решив его, находим, что

$$I = \frac{1}{2} x V \sqrt{1+4a^2x^2} + \frac{1}{4a} \ln |2ax + V \sqrt{1+4a^2x^2}| + C.$$

Таким образом,

$$|L| = \int_0^\Phi V \sqrt{1+4a^2x^2} dx = \frac{1}{2} V \sqrt{1+4a^2} + \frac{1}{4a} \ln |2a + V \sqrt{1+4a^2}|.$$

3) Найдем длину дуги логарифмической спирали $r = ae^{b\varphi}$ от точки (φ_0, r_0) до точки (φ, r) . По формуле (10.15) имеем, что

$$\begin{aligned}
 |L| &= \int_{\varphi_0}^{\varphi} V \sqrt{a^2 e^{2b\varphi} + a^2 b^2 e^{2b\varphi}} d\varphi = a V \sqrt{1+b^2} \int_{\varphi_0}^{\varphi} e^{b\varphi} d\varphi = \\
 &= \frac{a}{b} V \sqrt{1+b^2} (e^{b\varphi} - e^{b\varphi_0}) = \frac{V \sqrt{1+b^2}}{b} (r - r_0).
 \end{aligned}$$

4) Найдем переменную длину дуги эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$, отсчитываемую от точки $M_0(0, b)$. Рассмотрим параметрическое уравнение эллипса $x = a \cdot \sin t$, $y = b \cos t$, $t \in [0, 2\pi]$. По формуле (10.17) получим

$$L(t) = \int_0^t V \sqrt{a^2 \cos^2 \tau + b^2 \sin^2 \tau} d\tau = a \int_0^t V \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \tau} d\tau = aE(\varepsilon, t). \quad (10.21)$$

Число $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ называется эксцентриситетом эллипса.

Первообразная функции $V \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t}$, обращающаяся в нуль при $t = 0$, называется эллиптическим интегралом 2-го рода (см. § 4 гл. 8). Этот интеграл обозначается символом $E(\varepsilon, t)$ и не выражается через элементарные функции.

§ 2. ПЛОЩАДЬ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

В этом параграфе мы изучим вопрос об определении и о существовании площади так называемой плоской фигуры, под которой мы фактически будем понимать произвольное ограниченное множество точек плоскости.

Мы начнем наше рассмотрение с уточнения понятия такой фигуры и ее границы.

1. Понятия границы множества и плоской фигуры. Рассмотрим множество всех точек плоскости и фиксируем одну из этих точек A .

Договоримся называть ε -окрестностью точки A множество тех точек плоскости, которые расположены внутри круга радиуса ε с центром в точке A .

Пусть теперь $\{M\}$ — какое угодно множество точек плоскости.

Точку M множества $\{M\}$ назовем в *внутренней точкой* этого множества, если найдется $\varepsilon > 0$ такое, что ε -окрестность точки M также принадлежит множеству $\{M\}$.

Точку M , не принадлежащую множеству $\{M\}$, назовем в *нешней точкой* множества $\{M\}$, если найдется $\varepsilon > 0$ такое, что ε -окрестность точки M также не принадлежит множеству $\{M\}$ *.

Точку M назовем *границей* точкой множества $\{M\}$, если эта точка не является ни внутренней, ни внешней точкой этого множества**.

Совокупность всех граничных точек множества $\{M\}$ назовем *границей* этого множества.

З а м е ч а н и е. Для простейших типов множеств $\{M\}$, представляющих собой часть плоскости, ограниченную простым замкнутым контуром или несколькими такими контурами, введенное нами понятие границы множества укладывается в наглядное интуитивное представление о границе. Для множеств произвольной природы граница в определенном нами смысле может иметь весьма причудливый вид и не укладываться в интуитивное представление о граничном многообразии. Так, для множества $\{M\}$ тех точек круга, абсцисса и ордината которых являются рациональными числами, границей в определенном нами смысле является весь указанный круг.

* Внешняя точка множества $\{M\}$ является, очевидно, внутренней точкой дополнения этого множества.

** Заметим, что точка M является граничной точкой множества $\{M\}$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ в ε -окрестности точки M содержатся как точки, принадлежащие множеству $\{M\}$, так и точки, ему не принадлежащие.

В самом деле, если бы в некоторой ε -окрестности точки M не нашлось либо точек, принадлежащих множеству $\{M\}$, либо точек, ему не принадлежащих, то точка M оказалась бы либо внешней, либо внутренней точкой множества $\{M\}$ и не являлась бы граничной точкой этого множества.

Множество $\{M\}$ точек плоскости будем называть о г р а н и ч е н ы м, если существует круг, содержащий все точки этого множества.

В дальнейшем мы будем рассматривать произвольное ограниченное множество F точек плоскости и будем называть это множество п л о с к о й ф и г у р о й.

Границу плоской фигуры F будем обозначать символом ∂F .

2. Площадь плоской фигуры. Для введения понятия площади плоской фигуры будем отпраивляться от специального частного вида плоских фигур, так называемых м н о г о у г о л ь н ы х ф и г у р.

М н о г о у г о л ь н о й ф и г у р о й на плоскости мы назовем множество, составленное из конечного числа лежащих на этой плоскости ограниченных многоугольников.

Из курса средней школы известно понятие площади многоугольной фигуры.

В дальнейшем мы будем обозначать символом $\mu(P)$ площадь многоугольной фигуры P .

Напомним, что площадь многоугольной фигуры является неотрицательным числом, обладающим следующими тремя свойствами:

1° (А д д и т и в н о с т ь). Если P_1 и P_2 — две многоугольные фигуры без общих внутренних точек и символ $P_1 \cup P_2$ означает объединение этих фигур, то

$$\mu(P_1 \cup P_2) = \mu(P_1) + \mu(P_2). \quad (10.22)$$

2° (И н в а р и а н т н о с т ь). Если многоугольные фигуры P_1 и P_2 равны между собой*, то

$$\mu(P_1) = \mu(P_2). \quad (10.23)$$

3° (М о н о т о н н о с т ь). Если многоугольная фигура P_1 содержится в многоугольной фигуре P_2 , то $\mu(P_1) < \mu(P_2)$.

Заметим, что свойство монотонности является логическим следствием свойства аддитивности и свойства неотрицательности площади. В самом деле, если P_1 содержится в P_2 то $P_2 = P_1 \cup (P_2 \setminus P_1)**$, а потому в силу того, что P_1 и $P_2 \setminus P_1$ не содержат общих внутренних точек, и в силу свойства аддитивности $\mu(P_2) = \mu(P_1) + \mu(P_2 \setminus P_1)$. Остается заметить, что $\mu(P_2 \setminus P_1) \geq 0$.

З а м е ч а н и е. Полезно подчеркнуть, что площадь многоугольной фигуры естественно считать равной одному и тому же числу независимо от того, с границей или без границы рассматривается эта многоугольная фигура. При рассмотрении разности двух многоугольных фигур $P_2 \setminus P_1$ можно договориться считать

* Напомним, что две фигуры F_1 и F_2 называются р а в н ы м и, если существует взаимно однозначное соответствие с сохранением расстояния между точками, при котором фигура F_1 отображается на F_2 .

** Причем разность $P_2 \setminus P_1$ двух многоугольных фигур представляет собой также многоугольную фигуру.

фигуру P_2 взятой с границей, а фигуру P_1 взятой без границы. При такой договоренности разность $P_2 \setminus P_1$ будет представлять собой некоторую многоугольную фигуру, взятую с границей.

Перейдем теперь к определению площади некоторой произвольной плоской фигуры F (т. е. некоторого произвольного ограниченного множества точек плоскости).

Рассмотрим всевозможные многоугольные фигуры P , целиком содержащиеся в F , и многоугольные фигуры Q , целиком содержащие F . Фигуры P будем называть в писанными, а фигуры Q — описанными. Числовое множество $\{\mu(P)\}$ площадей всех вписанных многоугольных фигур P ограничено сверху (например, площадью любой описанной многоугольной фигуры Q). Числовое множество $\{\mu(Q)\}$ площадей всех описанных вокруг фигуры Q многоугольных фигур Q ограничено снизу (например, нулем). Поэтому существуют точная верхняя грань.

$$\mu_* = \mu_*(F) = \sup_{P \subset F} \mu(P) \quad (10.24)$$

площадей всех многоугольных фигур, вписанных в фигуру F , и точная нижняя грань

$$\mu^* = \mu^*(F) = \inf_{Q \supset F} \mu(Q) \quad (10.25)$$

площадей всех многоугольных фигур, описанных вокруг F .

Заметим, что если в фигуру F нельзя вписать ни одного многоугольника, то по определению полагается $\mu_*=0$.

Величину μ_* называют нижней площадью фигуры F , а μ^* — верхней площадью этой фигуры. Из того, что площадь любой вписанной фигуры не больше, чем площадь любой описанной фигуры, следует, что

$$\mu_*(F) \leq \mu^*(F).$$

Определение 1. Плоская фигура F называется квадрируемой (или имеющей площадь), если верхняя площадь μ^* этой фигуры совпадает с ее нижней площадью μ_* . При этом число $\mu = \mu(F) = \mu^* = \mu_*$ называется площа́дью фигуры F .

Ясно, что всякая многоугольная фигура F является квадрируемой в смысле данного нами определения и для нее площадь $\mu(F) = \mu^*(F) = \mu_*(F)$, являющаяся точной нижней гранью площадей описанных многоугольных фигур и точной верхней гранью площадей вписанных фигур, совпадает с исходной величиной площади, заимствованной из элементарного курса.

Таким образом, мы распространili понятие площади многоугольников на некоторый более широкий класс фигур.

Сохранение свойств аддитивности, инвариантности и монотонности будет доказано ниже.

Начнем с доказательства следующего критерия квадрируемости плоской фигуры.

Теорема 10.2. Для квадрируемости плоской фигуры F необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлись такая описанная вокруг F многоугольника фигура Q и такая вписанная в F многоугольная фигура P , для которых

$$\mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon. \quad (10.26)$$

Доказательства. *Необходимость.* Пусть фигура F квадрируема, т. е. $\mu^* = \mu_*$. По определению точных граней (10.24) и (10.25) для любого фиксированного нами $\varepsilon > 0$ найдутся вписанная многоугольная фигура P и описанная многоугольная фигура Q такие, что

$$\mu_* - \frac{\varepsilon}{2} < \mu(P) \leq \mu_*, \quad \mu^* \leq \mu(Q) \leq \mu^* + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из этих неравенств и из равенств $\mu^* = \mu_*$ заключаем, что $\mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть для любого $\varepsilon > 0$ существуют многоугольные фигуры Q и P , указанные в формулировке теоремы. Тогда из неравенства (10.26) и из соотношений

$$\mu(P) \leq \mu_* \leq \mu^* \leq \mu(Q)$$

получаем, что

$$0 \leq \mu^* - \mu_* \leq \mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon.$$

Поскольку ε — произвольное положительное число, то из условия $0 \leq \mu^* - \mu_* < \varepsilon$ вытекает, что $\mu^* = \mu_*$, т. е. доказано, что фигура F квадрируема. Теорема доказана.

Теорема 10.2 допускает простое, но важное обобщение: в ее формулировке вместо описанной и вписанной многоугольных фигур Q и P можно взять произвольные описанную и вписанную квадрируемые плоские фигуры Q и P . Именно справедлива теорема.

Теорема 10.2'. Для квадрируемости плоской фигуры F необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлись такие содержащая F квадрируемая плоская фигура Q и такая содержащаяся в F квадрируемая плоская фигура P , для которых

$$\mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon.$$

Необходимость доказательства не требует, ибо многоугольные фигуры Q и P являются квадрируемыми.

Докажем достаточность.

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и построим по нему квадрируемые плоские фигуры Q и P , первая из которых содержит F , а вторая содержится в F , такие, что

$$\mu(Q) - \mu(P) < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (10.26')$$

Так как Q и P — квадрируемые плоские фигуры, то найдется многоугольная фигура \bar{Q} , содержащая Q , и многоугольная фигура \bar{P} , содержащаяся в P , такие, что

$$\mu(\bar{Q}) - \mu(Q) < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \mu(P) - \mu(\bar{P}) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Из двух последних неравенств и из (10.26') вытекает, что $\mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon$. Но тогда, поскольку многоугольная фигура \bar{Q} содержит F , а многоугольная фигура \bar{P} содержится в F , фигура F квадрируема в силу теоремы 10.2.

Установим теперь еще одну эквивалентную формулировку теоремы 10.2.

Пусть F — произвольная плоская фигура, Q — многоугольная фигура, взятая вместе с границей и содержащая фигуру F , а P — многоугольная фигура, содержащаяся в фигуре F и взятая без границы. Тогда разность $Q \setminus P$ представляет собой многоугольную фигуру, взятую вместе с границей и содержащую все точки ∂F фигуры F^* .

В силу свойства аддитивности площади многоугольной фигуры справедливо равенство $\mu(Q \setminus P) = \mu(Q) - \mu(P)$, из которого следует, что неравенство (10.26) в формулировке теоремы 10.2 может быть переписано в виде

$$\mu(Q \setminus P) < \varepsilon. \quad (10.26'')$$

Договоримся о следующей терминологии.

Определение 2. Множество точек плоскости назовем множеством площасти нуль, если оно содержится в многоугольной фигуре сколь угодно малой площади.

Неравенство (10.26'') и тот факт, что многоугольная фигура $Q \setminus P$ содержит все точки границы ∂F плоской фигуры F , дают нам право следующим образом переформулировать теорему 10.2.

Теорема 10.2''. Плоская фигура F квадрируема тогда и только тогда, когда ее граница ∂F имеет площадь нуль.

Необходимость условия теоремы очевидна.

Остановимся на доказательстве достаточности.

Впишем плоскую фигуру F в квадрат E со сторонами, параллельными координатным осям, и прямыми, параллельными этим осям, разобьем квадрат E на элементарные квадраты со стороной h . Это разбиение квадрата E договоримся называть сеткой с шагом h .

Докажем сначала, что если граница ∂F фигуры F содержится в многоугольной фигуре площасти, меньшей ε , то при доста-

* Это следует из того, что любая внутренняя точка многоугольной фигуры P является внутренней точкой F , а любая внешняя точка многоугольной фигуры Q является внешней точкой F . Достаточно учесть, что разность $Q \setminus P$ содержит все точки плоскости, кроме внешних точек Q и внутренних точек P .

точно малом шаге h сетки граница ∂F фигуры F содержится в объединении элементарных квадратов сетки, общая площадь которых меньше 32ε .

В самом деле, достаточно заметить, что любая многоугольная фигура, площади меньшей ε , представляет собой сумму конечного числа треугольников, не имеющих общих внутренних точек; каждый треугольник равен объединению двух прямоугольных треугольников (без общих внутренних точек); каждый прямоугольный треугольник содержится во вдвое большем по площади прямоугольнике; каждый прямоугольник содержится в объединении не более чем вдвое большей по площади сумме конечного числа квадратов; каждый квадрат содержится во вдвое большем по площади квадрате со сторонами, параллельными осям координат.

Итак, любая многоугольная фигура площади, меньшей ε , содержится в объединении конечного числа квадратов со сторонами, параллельными координатным осям общей площади, меньшей 8ε .

Из указанного конечного числа квадратов выберем квадрат с наименьшей стороной (если таких квадратов несколько, то выберем один из них) и возьмем шаг h сетки равным половине длины стороны этого квадрата.

При таком выборе h каждый указанный квадрат (со сторонами, параллельными координатным осям) будет содержаться в объединении элементарных квадратов сетки, общая площадь которых не больше учетверенной площади квадрата.

Поэтому вся многоугольная фигура, площади меньшей ε , содержится в объединении элементарных квадратов сетки, общая площадь которых меньше 32ε .

Значит, если граница ∂F плоской фигуры F имеет площадь нуль, то для любого $\varepsilon > 0$ при указанном выше выборе шага сетки h вся эта граница ∂F будет содержаться в объединении элементарных квадратов сетки, общая площадь которых меньше 32ε .

Для завершения доказательства достаточности заметим, что объединение всех элементарных квадратов, состоящих только из внутренних точек фигуры F , представляет собой многоугольную фигуру P , содержащуюся в F , а объединение этой фигуры P со всеми элементарными квадратами сетки, содержащими точки границы ∂F фигуры F , представляет собой многоугольную фигуру Q , содержащую фигуру F , причем $\mu(Q) - \mu(P) < 32 \varepsilon$.

Пользуясь этой теоремой, установим квадрируемость широкого класса плоских фигур.

Докажем следующую лемму.

Лемма. *Всякая спрямляемая кривая имеет площадь нуль.*

Доказательство. Пусть L — спрямляемая кривая, а $|L|$ ее длина. Разобьем эту кривую с помощью $n+1$ точек на части, длина каждой из которых равна $|L|/n$. (Возможность такого разбиения не вызывает сомнений.) Примем каждую из этих $n+1$ точек за центр квадрата со стороной $2|L|/n$. Сумма этих квадратов представляет собой многоугольную фигуру, описанную вокруг кривой L , а площадь этой многоугольной фигуры не превосходит суммы площадей составляющих ее квадратов, т. е. числа $\frac{4|L|^2}{n^2}(n+1)$. Так как $|L|$ фиксировано, а n можно выбирать произвольно большим, то число $\frac{4|L|^2}{n^2}(n+1)$ может быть сделано меньшим любого наперед заданного числа $\epsilon > 0$. Следовательно, кривую L действительно можно заключить внутрь многоугольной фигуры сколь угодно малой площади.

Лемма доказана.

Из этой леммы и теоремы 10.2'' вытекает следующая теорема.

Теорема 10.3. *Всякая плоская фигура, граница которой состоит из одной или нескольких спрямляемых кривых, квадрируема.*

Покажем теперь, что введенное нами понятие площади плоской фигуры обладает свойствами аддитивности (см. (10.22)), инвариантности (см. (10.23)) и монотонности. Убедимся сначала в аддитивности площади.

Пусть F_1 и F_2 — квадрируемые фигуры без общих внутренних точек и F — их объединение. Тогда F квадрируема и

$$\mu(F) = \mu(F_1) + \mu(F_2). \quad (10.27)$$

Квадрируемость фигуры F следует из теоремы 10.2'' и из того, что ее граница ∂F составлена из множества площади нуль, поскольку ∂F является частью объединения границ ∂F_1 и ∂F_2 фигур F_1 и F_2 . (Очевидно, что всякая часть множества площади нуль сама является множеством площади нуль.)

Докажем справедливость равенства (10.27). Рассмотрим многоугольные фигуры P_1 и P_2 , вписанные в F_1 и F_2 соответственно, и многоугольные фигуры Q_1 и Q_2 , описанные соответственно вокруг F_1 и F_2 . Фигуры P_1 и P_2 составляют фигуру P и не имеют общих внутренних точек. Поэтому, согласно (10.22),

$$\mu(P) = \mu(P_1 \cup P_2) = \mu(P_1) + \mu(P_2).$$

Многоугольные фигуры Q_1 и Q_2 , возможно, пересекающиеся, в сумме составляют многоугольную фигуру Q , площадь которой не превосходит $\mu(Q_1) + \mu(Q_2)$. Поэтому

$$\mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2) \leq \mu(F) \leq \mu(Q) \leq \mu(Q_1) + \mu(Q_2).$$

С другой стороны, в силу определения квадрируемости, для фигур F_1 и F_2 справедливы неравенства $\mu(P_1) \leq \mu(F_1) \leq \mu(Q_1)$ и $\mu(P_2) \leq \mu(F_2) \leq \mu(Q_2)$, из которых следует, что

$$\mu(P_1) + \mu(P_2) \leq \mu(F_1) + \mu(F_2) \leq \mu(Q_1) + \mu(Q_2).$$

Таким образом, обе величины $\mu(F)$ и $\mu(F_1) + \mu(F_2)$ заключены между двумя числами $[\mu(Q_1) + \mu(Q_2)]$ и $[\mu(P_1) + \mu(P_2)]$, разность между которыми

$$[\mu(Q_1) + \mu(Q_2)] - [\mu(P_1) + \mu(P_2)] = \\ = [\mu(Q_1) - \mu(P_1)] + [\mu(Q_2) - \mu(P_2)]$$

может быть сделана как угодно малой.

Следовательно, указанные две величины равны, т. е. справедливо равенство (10.27).

Свойство инвариантности площади произвольной плоской фигуры непосредственно вытекает из инвариантности площади для многоугольных фигур (см. (10.23)) и из самого способа определения площади квадрируемой фигуры через площади многоугольных фигур.

Наконец, свойство монотонности площади непосредственно вытекает из определения квадрируемости плоской фигуры.

Замечание. Пересечение двух квадрируемых фигур есть квадрируемая фигура.

Действительно, пусть $F = F_1 \cap F_2$, и F_1 и F_2 квадрируемы. Каждая точка, граничная для F , является граничной либо для F_1 , либо для F_2 . Поэтому наше утверждение следует из теоремы 10.2'' и того факта, что объединение двух множеств площади нуль само имеет площадь нуль.

Введенное в этом пункте понятие площади называют понятием площади по Жордану* или мерой Жордана.

Выше мы убедились, что площадь по Жордану обладает свойством аддитивности, т. е. если $F = F_1 \cup F_2$, а F_1 и F_2 — квадрируемые фигуры без общих точек, то F квадрируема и $\mu(F) = \mu(F_1) + \mu(F_2)$. Указанное свойство, очевидно, справедливо и для объединения любого конечного числа F_1, F_2, \dots, F_n квадрируемых фигур без общих внутренних точек. Если

$$F = \bigcup_{i=1}^n F_i,$$

* Камилл Жордан — французский математик (1838—1922).

то F квадрируема и $\mu(F) = \sum_{i=1}^n \mu(F_i)$ (свойство конечной аддитивности).

Однако площадь по Жордану (мера Жордана) не обладает свойством счетной аддитивности, т. е. объединение счетной совокупности квадрируемых фигур F_1, F_2, \dots без общих внутренних точек не обязано быть квадрируемой фи-
гурой.

Проиллюстрируем этот факт примером. Рассмотрим на плоскости квадрат D : $0 < x < 1, 0 < y < 1$. Отметим в квадрате D точки, у которых обе координаты рациональны. Нетрудно показать, что таких точек счетное множество. Расположим их в виде последовательности

$$z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2), \dots z_n = (x_n, y_n), \dots$$

Фиксируем число $\varepsilon > 0$ и построим круг O_1 с центром в точке z_1 радиуса $r_1 < \varepsilon/2$, целиком содержащийся в квадрате D .

Первую из точек z_2, z_3, \dots , не попавшую в круг O_1 , обозначим через Z_{n_1} и построим круг O_2 с центром в точке Z_{n_1} радиуса $r_2 < \varepsilon/2^2$, не пересекающийся с кругом O_1 и целиком лежащий в квадрате D .

Продолжая эти рассуждения далее, мы построим последовательность содержащихся в квадрате D непересекающихся кругов $O_1, O_2, \dots, O_n, \dots$ радиусов $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$

Каждый из этих кругов квадрируем и имеет площадь (меру Жордана), равную πr_n^2 ($n = 1, 2, \dots$).

Убедимся в том, что объединение F счетного числа указанных кругов $F = O_1 \cup O_2 \cup \dots$ представляет собой фигуру, не квадрируемую по Жордану. Пусть Q — любая многоугольная фигура, содержащая фигуру F . Заметим, что в любой ε -окрестности каждой точки квадрата D есть точки последовательности $\{z_n\}$, т. е. есть точки фигуры F . Но это означает, что любая точка квадрата D является внутренней либо граничной точкой фигуры F , т. е. многоугольная фигура Q содержит весь квадрат D и, значит,

$$\mu(Q) \geq \mu(D) = 1.$$

Пусть, далее, P — любая многоугольная фигура, содержащаяся в F . Тогда площадь $\mu(P)$ не превосходит сумму площадей всех кругов Q_1, Q_2, \dots , т. е.

$$\mu(P) \leq \pi(r_1^2 + r_2^2 + \dots) < \pi\varepsilon^2 \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \dots \right) = \frac{\pi \cdot \varepsilon^2}{3}.$$

Итак, $\mu(Q) > 1$ и $\mu(P) \leq \frac{\pi\varepsilon^2}{3}$ для любой многоугольной фигуры Q , содержащей F , и любой многоугольной фигуры P ,

содержащейся в F . Но это и означает, что при малом ε разность $\mu(Q) - \mu(P)$ больше $1 - \frac{\pi\varepsilon^2}{3}$ и не может быть сделана как угодно малой, т. е. фигура F не квадрируема по Жордану.

Отметим, что можно ввести другое обобщение понятия площади, так называемую меру Лебега*, которая уже будет обладать и свойством счетной аддитивности. Такое обобщение понятия площади выходит за рамки приложений интеграла Римана и его естественно рассматривать при изучении так называемого интеграла Лебега.

3. Площадь криволинейной трапеции и криволинейного сектора. Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная графиком заданной на сегменте $[a, b]$ непрерывной и неотрицательной функции $f(x)$, перпендикулярными к оси Ox прямыми $x=a$ и $x=b$ и отрезком оси Ox между точками a и b (рис. 10.1).

Справедливо следующее

Утверждение. Криволинейная трапеция представляет собой квадрируемую фигуру F , площадь которой $\mu(F)$ вычисляется по формуле

$$\mu(F) = \int_a^b f(x) dx. \quad (10.28)$$

Доказательство. Непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция $f(x)$ интегрируема, поэтому для любого положительного числа ε можно указать такое разбиение сегмента $[a, b]$, для которого разность между верхней суммой S и нижней суммой s будет меньше ε . Но S и s равны соответственно $\mu(Q)$ и $\mu(P)$, где $\mu(Q)$ и $\mu(P)$ — площади многоугольных фигур, первая из которых содержит криволинейную трапецию, а вторая содержится в криволинейной трапеции (на рис. 10.1 изображены также и ука-

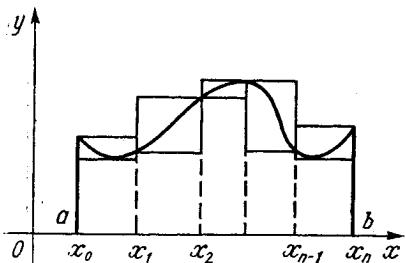


Рис. 10.1

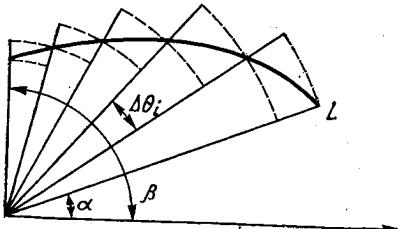


Рис. 10.2

* Анри Лебег — французский математик (1875—1941).

занные многоугольные фигуры). Таким образом, $\mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon$, и в силу теоремы 10.2 криволинейная трапеция квадрируема. Поскольку для любой интегрируемой функции предел при стремлении диаметра разбиения к нулю как верхних S , так и нижних сумм s равен $\int_a^b f(x) dx$ и $s \leq \mu(F) \leq S$, то площадь $\mu(F)$ криволинейной трапеции находится по формуле (10.28).

З а м е ч а н и е. Если функция $f(x)$ непрерывна и неподложительна на сегменте $[a, b]$, то значение интеграла $\int_a^b f(x) dx$ равно взятой с отрицательным знаком площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $|f(x)|$, ординатами в точках a и b и отрезком оси Ox между точками a и b . Поэтому если $f(x)$ меняет знак, то $\int_a^b f(x) dx$ равен сумме взятых с определенным знаком площадей криволинейных трапеций, расположенных выше и ниже оси Ox , причем площади первых берутся со знаком $+$, а вторых — со знаком $-$.

Перейдем теперь к рассмотрению площади так называемого криволинейного сектора. Пусть кривая L задана в полярной системе координат уравнением $r = r(\theta)$, $\alpha < \theta < \beta$ (рис. 10.2), причем функция $r(\theta)$ непрерывна и неотрицательна на сегменте $[\alpha, \beta]$.

Назовем криволинейным сектором плоскую фигуру, ограниченную кривой L и двумя лучами, составляющими с полярной осью углы α и β .

Докажем следующее

Утверждение. Криволинейный сектор представляет собой квадрируемую фигуру F , площадь $\mu(F)$ которой может быть вычислена по формуле

$$\mu(F) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta) d\theta. \quad (10.29)$$

Доказательство. Рассмотрим разбиение сегмента $[\alpha, \beta]$ точками $\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_n = \beta$ и для каждого частичного сегмента $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ построим круговые секторы, радиусы которых равны минимальному r_i и максимальному R_i значениям функции $r(\theta)$ на сегменте $[\theta_{i-1}, \theta_i]$. В результате получатся две квадрируемые фигуры, первая фигура A содержится в криволинейном секторе, а вторая B содержит этот сектор (см. рис. 10.2).

Площади $\mu(A)$ и $\mu(B)$ указанных квадрируемых фигур A и B соответственно равны $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r_i^2 (\theta_i - \theta_{i-1})$ и $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n R_i^2 (\theta_i - \theta_{i-1})$.

Обратим внимание на то, что первая из этих сумм является нижней суммой s , а вторая — верхней суммой S функции $\frac{1}{2}r^2(\theta)$ на сегменте $[\alpha, \beta]$ для указанного разбиения этого сегмента. Так как непрерывная на $[\alpha, \beta]$ функция $\frac{1}{2}r^2(\theta)$ интегрируема на этом сегменте, то для любого $\epsilon > 0$ найдется разбиение, для которого разность $S - s = \mu(B) - \mu(A)$ меньше ϵ .

Так как A и B — две квадрируемые фигуры, первая из которых содержится в криволинейном секторе F , а вторая содержит F , то в силу теоремы 10.2' криволинейный сектор квадрируем.

Справедливость для его площади формулы (10.29) вытекает из того, что эта площадь $\mu(F)$ заключена между $s = \mu(A)$ и $S = \mu(B)$, а обе суммы s и S стремятся к интегралу, стоящему в правой части (10.29), при стремлении диаметра разбиения к нулю.

4. Примеры вычисления площадей. 1.° Найти площадь $\mu(F)$ фигуры F , ограниченной графиками функции $y = x^\alpha$ и $x = y^\alpha$, $\alpha > 1$ (рис. 10.3). Поскольку фигура F симметрична относительно биссектрисы первого координатного угла, то ее площадь может быть получена посредством вычитания из единицы (площади квадрата) удвоенной площади криволинейной трапеции, задаваемой графиком функции $y = x^\alpha$, $\alpha > 1$, на сегменте $[0, 1]$.

Таким образом, по формуле (10.28) мы получим, что

$$\mu(F) = 1 - 2 \int_0^1 x^\alpha dx = 1 - 2 \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_0^1 = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}.$$

2°. Через три точки с координатами $(-h, y_0)$, $(0, y_1)$, (h, y_2) проходит только одна парабола $y = Ax^2 + Bx + D$ (или прямая, если эти точки лежат на одной прямой).

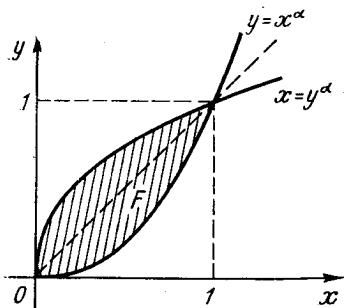


Рис. 10.3

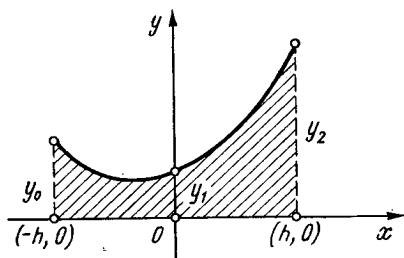


Рис. 10.4

В самом деле, условия расположения точек $(-h, y_0)$, $(0, y_1)$, (h, y_2) на параболе приводят к системе уравнений относительно A, B, D

$$\begin{cases} Ah^2 - Bh + D = y_0, \\ D = y_1, \\ Ah^2 + Bh + D = y_2. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение

$$A = \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{2h^2}, \quad B = \frac{y_2 - y_0}{2h}, \quad D = y_1.$$

Найдем площадь $\mu(F)$ криволинейной трапеции F , определяемой указанной параболой, оординатами в точках $(-h, 0)$ и $(h, 0)$ отрезком оси Ox между этими точками (рис. 10.4).

По формуле (10.28)

$$\begin{aligned} \mu(F) &= \int_{-h}^h (Ax^2 + Bx + D) dx = \\ &= \left[\frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Dx \right]_{-h}^h = \frac{2Ah^3}{3} + 2Dh. \end{aligned}$$

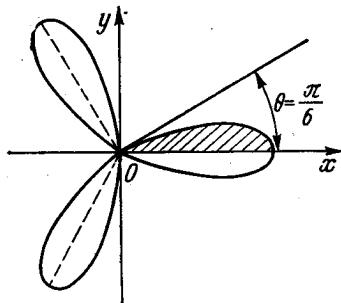


Рис. 10.5

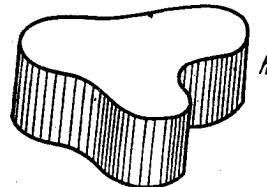


Рис. 10.6

Подставляя найденные значения A и D через оординаты y_0 , y_1 и y_2 и величину h , получим $\mu(F) = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$.

3°. Найти площадь $\mu(F)$ трилистника $r = a \cos 3\theta$ (рис. 10.5). Из рисунка можно заключить, что достаточно вычислить площадь части трилистника, отвечающей изменению θ от 0 до $\pi/6$, и полученный результат умножить на шесть. Поэтому по формуле (10.29) получаем, что

$$\begin{aligned} \mu(F) &= 6 \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi/6} \cos^2 3\theta d\theta = \\ &= 3a^2 \int_0^{\pi/6} \frac{1 + \cos 6\theta}{2} d\theta = 3a^2 \left[\frac{\pi}{12} + \frac{\sin 6\theta}{12} \right]_0^{\pi/6} = \frac{\pi a^2}{4}. \end{aligned}$$

§ 3. ОБЪЕМ ТЕЛА В ПРОСТРАНСТВЕ

Основные определения и утверждения настоящего параграфа аналогичны соответствующим определениям и утверждениям § 2. Это позволяет нам ограничиться основными формулировками.

1. Объем тела. Рассмотрим множество всех точек пространства и фиксируем одну из этих точек A .

ε -окрестностью точки A будем называть множество всех тех точек пространства, которые расположены внутри шара радиуса ε с центром в точке A .

Точку A будем называть *внутренней* [внешней] точкой произвольного множества точек пространства $\{M\}$, если найдется $\varepsilon > 0$ такое, что ε -окрестность точки A целиком принадлежит [целиком не принадлежит] множеству $\{M\}$.

Точки множества $\{M\}$, не являющиеся ни внутренними, ни внешними, назовем *границыми* точками множества $\{M\}$, а совокупность всех границных точек назовем *границей* множества $\{M\}$.

Множество $\{M\}$ точек пространства назовем *ограниченным* множеством или *телом*, если найдется шар, содержащий все точки этого множества.

Среди всех тел выделим так называемые *многогранные тела*, представляющие собой объединение конечного числа ограниченных многогранников. Объем многогранного тела заимствуем из курса средней школы. Подчеркнем, что этот объем (как и площадь многоугольной фигуры) обладает свойствами аддитивности, инвариантности и монотонности.

Рассмотрим произвольное тело F , а также всевозможные многогранные тела P , содержащиеся в F , и всевозможные многогранные тела Q , содержащие F .

Назовем верхним объемом тела F точную нижнюю грань числового множества $\{\mu(Q)\}$ объемов всех многограных тел Q , содержащих F т. е. число

$$\mu^* = \mu^*(F) = \inf_{Q \subset F} \mu(Q).$$

Аналогично назовем нижним объемом тела F точную верхнюю грань числового множества $\{\mu(P)\}$ объемов всех многограных тел P , содержащихся в F , т. е. число

$$\mu_* = \mu_*(F) = \sup_{P \subset F} \mu(P).$$

Из этих определений очевидно, что $\mu_* \leq \mu^*$.

Определение 1. Тело F называется *кубируемым* (или *имеющим объем*), если $\mu^* = \mu_*$.

При этом число $\mu = \mu(F) = \mu^* = \mu_*$ называется *объемом тела* F .

В полной аналогии с теоремой 10.2 доказывается следующее утверждение.

Теорема 10.4. Для кубируемости тела F необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлись такое содержащееся в F многогранное тело P и такое содержащее F многогранное тело Q , для которых $\mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon$.

Замечание. В формулировке теоремы 10.4 вместо многограных тел P и Q могут быть взяты произвольные кубируемые тела P и Q , удовлетворяющие всем другим условиям этой теоремы.

Определение 2. Множество точек пространства назовем множеством объема нуль, если это множество содержится в многогранном теле сколь угодно малого объема.

Теорема 10.4 может быть переформулирована.

Теорема 10.4'. Тело F кубируемо тогда и только тогда, когда его граница имеет объем нуль.

Введенное нами понятие объема тела обладает свойствами аддитивности, инвариантности и монотонности.

2. Некоторые классы кубируемых тел. Цилиндрическим телом будем называть тело, ограниченное цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными некоторой оси, и двумя плоскостями, перпендикулярными этой оси.

Эти плоскости в пересечении с цилиндрической поверхностью образуют плоские фигуры, называемые основаниями цилиндрического тела, а расстояние h между основаниями цилиндрического тела называется его высотой (рис. 10.6).

Справедливо следующее

Утверждение. Если основанием цилиндрического тела F является плоская квадрируемая фигура G , то тело F кубируемо, причем объем $\mu(F)$ этого тела равен $\mu(G)h$, где $\mu(G)$ — площадь основания G , а h — высота этого цилиндрического тела.

Доказательство. Поскольку плоская фигура G квадрируема, то для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такие описанную и вписанную в эту фигуру многоугольные фигуры Q и P , что $\mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon/h$.

Объемы цилиндрических многогранных тел F_Q и F_P , основанием которых служат многоугольные фигуры Q и P , а высота которых равна h , равны соответственно $\mu(Q)h$ и $\mu(P)h$. Поэтому

$$\mu(Q)h - \mu(P)h = [\mu(Q) - \mu(P)]h < \frac{\varepsilon}{h}h = \varepsilon.$$

Так как многогранное тело F_Q содержит F , а многогранное тело F_P содержит в F , то в силу теоремы 10.4 тело F кубируемо. Поскольку $\mu(P)h < \mu(G)h < \mu(Q)h$, то объем цилиндрического тела F равен $\mu(G)h$.

Из свойства аддитивности объема и из доказанного утверждения вытекает кубируемость ступенчатых тел (ступенчатым телом называется объединение конечного числа цилиндрических тел, расположенных так, что верхнее основание каждого

предыдущего из этих тел находится в одной плоскости с нижним основанием последующего; см. рис. 10.7).

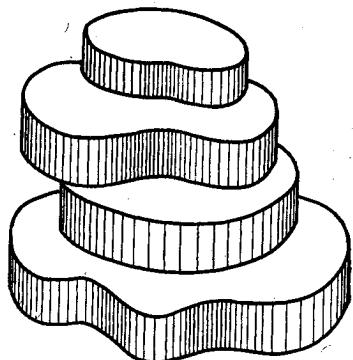


Рис. 10.7

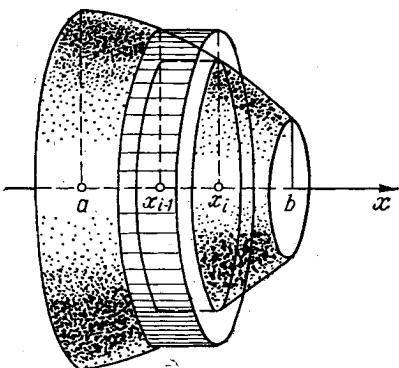


Рис. 10.8

Из предыдущих рассуждений непосредственно вытекает утверждение. Если для любого положительного числа ε можно указать такое содержащее F ступенчатое тело F_1 и такое содержащееся в F ступенчатое тело F_2 , что $\mu(F_1) - \mu(F_2) < \varepsilon$, то тело F кубируемо.

Пользуясь этим, докажем кубируемость тела вращения.

Утверждение. Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$. Тогда тело F , образованное вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $|f(x)|$ ординатами в точках a и b и отрезком оси Ox от a до b , кубируемо и его объем $\mu(F)$ может быть найден по формуле

$$\mu(F) = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (10.30)$$

Доказательство. Разобьем сегмент $[a, b]$ на частичные сегменты точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Пусть m_i и M_i — точные грани $f(x)$ на частичном сегменте $[x_{i-1}, x_i]$. На каждом таком сегменте построим два прямоугольника с высотами m_i и M_i (на рис. 10.8 эти прямоугольники изображены только на одном сегменте $[x_{i-1}, x_i]$). В результате получатся две ступенчатые фигуры, одна из которых содержитя в криволинейной трапеции, а другая содержит ее. При вращении криволинейной трапеции и этих ступенчатых фигур мы получим тело F и два ступенчатых тела, одно из которых Q содержит F , а другое P содержитя в Q . Объемы этих тел Q и P равны соответственно

$$\mu(Q) = \pi \sum_{i=1}^n M_i^2 \Delta x_i, \quad \mu(P) = \pi \sum_{i=1}^n m_i^2 \Delta x_i.$$

Легко видеть, что эти выражения представляют собой верхнюю и нижнюю суммы для функции $\pi f^2(x)$. Поскольку эта функция интегрируема, то разность указанных сумм для некоторого разбиения сегмента $[a, b]$ будет меньше наперед взятого положительного числа ε . Следовательно, тело кубириуемо. Поскольку предел указанных сумм при стремлении диаметра разбиения сегмента $[a, b]$ к нулю равен $\pi \int_a^b f^2(x) dx$, то объем $\mu(F)$ тела F вычисляется по формуле (10.30).

3. Примеры. 1) Найти объем $\mu(F)$ шара F радиуса r . Рассмотрим этот шар как результат вращения полуокружности $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $-r \leq x \leq r$, вокруг оси Ox (рис. 10.9). По формуле (10.30) получим

$$\mu(F) = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \pi r^2 x \left[-\frac{\pi x^3}{3} \right]_{-r}^r = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

2) Найдем объем $\mu(F)$ прямого кругового конуса с высотой, равной h , и радиусом основания r . Рассматривая указанный конус как тело, полученное вращением треугольника с вершинами в точках $(0, 0)$, $(h, 0)$ и (h, r) вокруг оси Ox (рис. 10.10), получим, согласно формуле (10.30),

$$\mu(F) = \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{\pi r^2 x^3}{3h^2} \Big|_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

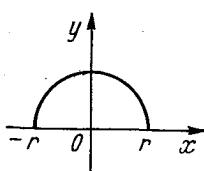


Рис. 10.9

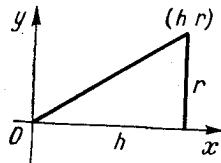


Рис. 10.10

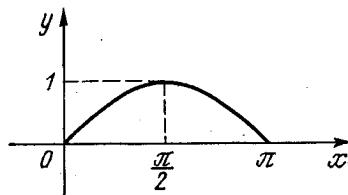


Рис. 10.11

3) Найдем объем тела F , полученного вращением вокруг оси Ox синусоиды $y = \sin x$ на сегменте $[0, \pi]$. Имеем (рис. 10.11):

$$\mu(F) = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx = \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi^2}{2}.$$

Глава 11

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЙ И ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

В этой главе рассматриваются приближенные методы нахождения корней алгебраических и трансцендентных уравнений и вычисления определенных интегралов.

§ 1. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЙ

В этом параграфе мы займемся приближенным вычислением одного из корней уравнения $f(x) = 0$, где $y = f(x)$ — некоторая, во всяком случае, непрерывная функция. Мы будем считать, что интересующий нас корень этого уравнения *изолирован на некотором сегменте* $[a, b]$, т. е. будем считать, что этот корень является *внутренней точкой* сегмента $[a, b]$, не содержащего других корней рассматриваемого уравнения.

На практике обычно путем грубой прикидки определяют размеры указанного сегмента $[a, b]$ *.

1. Метод «вилки». Мы начнем наше знакомство с метода, который часто используется для приближенного вычисления корней на современных быстродействующих математических машинах. Основой этого метода служит новое доказательство теоремы 4.12 о прохождении непрерывной функции через нуль при смене знака. Изложим это доказательство.

Требуется доказать следующее

Утверждение. Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и если значения этой функции $f(a)$ и $f(b)$ на концах сегмента $[a, b]$ суть числа разных знаков, то внутри сегмента $[a, b]$ найдется такая точка c , в которой значение функции $f(c)$ равно нулю, т. е. c является корнем уравнения $f(x) = 0$.

Договоримся называть «вилкой» любой сегмент, на концах которого функция $f(x)$ имеет значения разных знаков. По условию сегмент $[a, b]$ является «вилкой». Пусть ради определенности $f(a) < 0, f(b) > 0$. Разделим сегмент $[a, b]$ пополам. При этом может представиться два случая: 1) значение функции в середине сегмента $[a, b]$ равно нулю (в этом случае теорема доказана), 2) указанное значение не равно нулю. В этом случае одна

* При этом может быть использована вытекающая из физического содержания задачи дополнительная информация о расположении корня.

из половин сегмента $[a, b]$ является «вилкой». Этую половину мы обозначим $[a_1, b_1]$. Очевидно, что $f(a_1) < 0, f(b_1) > 0$. С сегментом $[a_1, b_1]$ поступим точно так же, как с сегментом $[a, b]$, т. е. разделим сегмент $[a_1, b_1]$ пополам.

Продолжая аналогичные рассуждения далее, мы будем иметь две возможности: 1) либо описанный выше процесс оборвется вследствие того, что значение функции в середине некоторого из сегментов окажется равным нулю (в этом случае теорема доказана), 2) либо описанный процесс можно продолжать неограниченно, и мы получим стягивающуюся систему сегментов — «вилок» $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$, причем для любого номера n $f(a_n) < 0, f(b_n) > 0$. Согласно следствию из теоремы 3.15 указанная стягивающаяся система сегментов имеет одну общую точку c , к которой сходятся каждая из последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$. Докажем, что $f(c) = 0$. Поскольку функция $f(x)$ непрерывна в точке c , то каждая из последовательностей $f(a_n)$ и $f(b_n)$ сходится к $f(c)$. Но тогда из условий $f(a_n) < 0$ и $f(b_n) > 0$ в силу теоремы 3.13 получим, что одновременно справедливы неравенства $f(c) \leq 0$ и $f(c) \geq 0$, т. е. $f(c) = 0$. Утверждение доказано.

Предположим теперь, что в условиях доказанного выше утверждения сегмент $[a, b]$ содержит только один корень c уравнения $f(x) = 0$ ^{*}. Тогда за приближенное значение этого корня можно взять точку $\frac{a_n + b_n}{2}$, т. е. середину сегмента $[a_n, b_n]$.

Поскольку длина сегмента $[a_n, b_n]$ равна $\frac{b - a}{2^n}$, то число $\frac{a_n + b_n}{2}$ отличается от точного значения корня не более чем на $\frac{b - a}{2^n}$. Таким образом, описанный выше процесс последовательного деления сегментов — «вилок» пополам позволяет вычислить искомый корень c с любой наперед заданной степенью точности. Так как описанный процесс приводит к многократному повторению однотипных вычислительных операций, он особенно удобен для проведения вычислений на быстродействующих математических машинах.

2. Метод итераций **. Излагаемый в этом пункте метод лежит в основе многих других приближенных методов. Этот метод применяется для решения уравнения

$$x = F(x). \quad (11.1)$$

* Т. е. предположим, что корень c является изолированным на сегменте $[a, b]$.

** Этот метод называют методом последовательных приближений.

Введем понятие итерационной последовательности.

Последовательность $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ будем называть итерационной, если для любого $n \geq 1$ элемент x_n выражается через элемент x_{n-1} по рекуррентной формуле $x_n = F(x_{n-1})$, а в качестве x_0 взято любое число из области задания функции $F(x)$.

Мы докажем, что при определенных условиях итерационная последовательность сходится к корню уравнения (11.1) и, значит, ее элементы могут быть взяты за приближенные значения этого корня.

Справедливо следующее.

Утверждение 1. *Пусть функция $F(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, и пусть все элементы итерационной последовательности $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ лежат на этом сегменте. Тогда, если эта последовательность сходится к некоторому числу c , то указанное число с является корнем уравнения (11.1).*

Доказательство. Так как последовательность $\{x_n\}$ сходится к c и все ее элементы принадлежат сегменту $[a, b]$, то и предел c принадлежит сегменту $[a, b]$ (см. следствие 2 из теоремы 3.13). По условию функция $F(x)$ непрерывна в точке c , и поэтому последовательность $\{F(x_{n-1})\}$ сходится к $F(c)$. Таким образом, равенство $x_n = F(x_{n-1})$ в пределе при $n \rightarrow \infty$ переходит в равенство $c = F(c)$, т. е. c является корнем уравнения (11.1). Доказанное утверждение будет существенно использовано нами в п. 3 для обоснования метода хорд и касательных.

Докажем еще одно утверждение, часто используемое для приближенного вычисления корня уравнения (11.1) с помощью итерационной последовательности.

Утверждение 2. *Пусть c — корень уравнения (11.1), и пусть в некотором симметричном относительно точки c сегменте $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ производная функции $F(x)$ удовлетворяет условию $|F'(x)| \leq a < 1$. Тогда итерационная последовательность $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$, у которой в качестве x_0 взято любое число из сегмента $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$, сходится к указанному корню c .*

Доказательство. Прежде всего докажем, что все элементы итерационной последовательности $\{x_n\}$ принадлежат указанному сегменту $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$. В самом деле, x_0 принадлежит этому сегменту по условию. Поэтому достаточно, предположив, что x_{n-1} принадлежит этому сегменту, доказать, что ему принадлежит и x_n . Для этого применим формулу Лагранжа к разности $F(x_{n-1}) - F(c)$ и учтем, что $F(c) = c$, $x_n = F(x_{n-1})$. Получим

$$x_n - c = F(x_{n-1}) - F(c) = F'(\xi)(x_{n-1} - c), \quad (11.2)$$

где ξ — некоторая точка, лежащая между x_{n-1} и c и, значит, принадлежащая сегменту $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$. Так как $|F'(\xi)| \leq a < 1$, то из равенства (11.2) получим

$$|x_n - c| \leq a |x_{n-1} - c|. \quad (11.3)$$

Из (11.3), поскольку $0 < \alpha < 1$, в свою очередь, получим

$$|x_n - c| < |x_{n-1} - c|. \quad (11.4)$$

Неравенство (11.4) устанавливает, что *каждый последующий элемент x_n расположен к с ближе, чем предыдущий элемент x_{n-1}* , и, значит, так как x_{n-1} принадлежит сегменту $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ и так как этот сегмент симметричен относительно точки c , то и x_n принадлежит этому сегменту. Остается доказать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к c . Поскольку неравенство (11.3) справедливо для всех номеров n , то с помощью этого неравенства получим

$$|x_n - c| \leq \alpha^n |x_0 - c|. \quad (11.5)$$

Из последнего неравенства очевидно, что $x_n \rightarrow c$, ибо $\alpha^n \rightarrow 0$. Утверждение 2 доказано.

Сделаем практические замечания относительно только что доказанного утверждения. Предположим, что путем предварительной прикидки мы установили, что интересующий нас корень уравнения (11.1) изолирован на некотором сегменте $[a, b]$, на котором производная функции $F(x)$ удовлетворяет условию $|F'(x)| \leq \alpha < 1$. Так как сегмент $[a, b]$, вообще говоря, не является симметричным относительно искомого корня, то, естественно, возникает вопрос о том, как выбрать нулевое приближение x_0 , с тем, чтобы можно было применить доказанное выше утверждение 2.

Заметим, что где бы внутри сегмента $[a, b]$ ни находился искомый корень c , хотя бы один из двух симметричных относительно c сегментов $[a, 2c-a]$, $[2c-b, b]$ (рис. 11.1) целиком принадлежит сегменту $[a, b]$. Поэтому хотя бы одна из точек a или b принадлежит симметричному относительно корня c сегменту, всюду на котором $|F'(x)| \leq \alpha < 1$.

Значит, по крайней мере одну из точек a или b можно, согласно доказанному выше утверждению 2 выбрать за x_0 . Конкретно за x_0 следует выбрать ту из двух точек a или b , для которой приближение $x_1 = F(x_0)$ не выходит за пределы сегмента $[a, b]$.

На практике чаще всего встречается случай, когда производная $F'(x)$ имеет на сегменте $[a, b]$ определенный знак. Если этот знак положителен, то из формулы (11.2) следует, что последовательность $\{x_n\}$ монотонна. Этот случай приводит к так называемой *ступенчатой диаграмме*, изображенной на рис. 11.2. Если же производная $F'(x)$ отрицательна на сегменте $[a, b]$, то из той же формулы (11.2) видно, что любые два последовательных элемента x_{n-1} и x_n лежат по разные стороны от корня c .

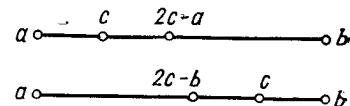


Рис. 11.1

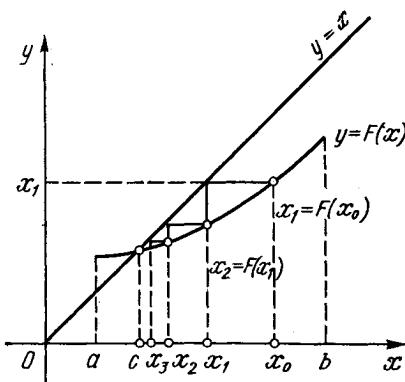


Рис. 11.2

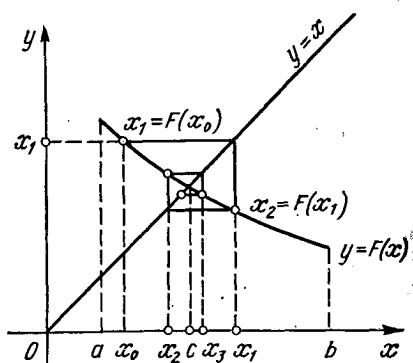


Рис. 11.3

Этот случай приводит к так называемой *спиралеобразной диаграмме*, изображенной на рис. 11.3.

Замечание. Возникает вопрос об оценке погрешности метода итераций, т. е. об оценке отклонения n -го приближения x_n от точного значения корня c . Из формулы (11.5) непосредственно вытекает следующая оценка:

$$|x_n - c| \leq a^n (b - a),$$

где a — точная верхняя грань функции $|F'(x)|$ на сегменте $[a, b]$, на котором изолирован рассматриваемый корень.

Если производная $F'(x)$ отрицательна на сегменте $[a, b]$, то, как указано выше, x_{n-1} и x_n лежат по разные стороны от корня c , и поэтому справедлива следующая оценка:

$$|x_n - c| \leq |x_n - x_{n-1}|.$$

Если же в рассматриваемом случае взять за приближенное значение корня полусумму двух последовательных приближений

$$x_n^* = \frac{x_n + x_{n-1}}{2},$$

то получим следующую оценку погрешности:

$$|x_n^* - c| \leq \frac{|x_n - x_{n-1}|}{2}.$$

3. Методы хорд и касательных. К числу широко распространенных приближенных методов решения уравнения $f(x) = 0$ относятся *метод хорд* и *метод касательных*, каждый из которых является одним из конкретных вариантов метода итераций.

Прежде всего рассмотрим метод хорд. Пусть искомый корень уравнения

$$f(x) = 0 \quad (11.6)$$

изолирован на некотором сегменте $[a, b]$. Предположим, что функция $y=f(x)$ имеет на сегменте $[a, b]$ монотонную и непрерывную производную, сохраняющую определенный знак.

При этом возможны четыре случая: 1°. $f'(x)$ не убывает и положительна на $[a, b]$; 2°. $f'(x)$ не возрастает и отрицательна на $[a, b]$; 3°. $f'(x)$ не возрастает и положительна на $[a, b]$; 4°. $f'(x)$ не убывает и отрицательна на $[a, b]$.

Ради определенности подробно рассмотрим случай 1°.

Рассмотрим вместо уравнения (11.6) уравнение вида

$$x = F(x), \quad F(x) = x - \frac{(b-x)f(x)^*}{f(b)-(x)}. \quad (11.7)$$

Легко видеть, что изолированные на сегменте $[a, b]$ корни уравнений (11.6) и (11.7) совпадают, и поэтому на сегменте $[a, b]$ эти уравнения эквивалентны. Для решения уравнения (11.7) применим к этому уравнению метод итераций, выбрав за нулевое приближение x_0 точку a . Как обычно, определим последовательность $\{x_n\}$ по рекуррентной формуле $x_n = F(x_{n-1})$, $n=1, 2, \dots$. Докажем, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к исковому корню c . Для этого, в силу утверждения 1 из п. 2, достаточно доказать, что все x_n лежат на сегменте $[a, b]$ и что последовательность $\{x_n\}$ сходится.

Применяя метод индукции, докажем, что все x_n лежат на сегменте $[a, b]$, точнее, на сегменте $[a, c]$, где c — исковый корень. Так как x_0 лежит на сегменте $[a, c]$, то для проведения индукции достаточно, предположив, что x_n лежит на указанном сегменте, доказать, что x_{n+1} также лежит на этом сегменте. Поскольку

$$x_{n+1} = F(x_n) = x_n - \frac{(b-x_n)f(x_n)}{f(b)-f(x_n)}, \quad (11.8)$$

то, учитывая, что $f(c)=0$, будем иметь **

$$x_{n+1} - x_n = - \frac{(b-x_n)f(x_n)}{f(b)-f(x_n)} = \frac{(b-x_n)[f(c)-f(x_n)]}{[f(b)-f(c)]+[f(c)-f(x_n)]}.$$

Применяя к выражениям в квадратных скобках формулу Лагранжа, получим

* При этом мы считаем, что $F(b) = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$. Тогда функция $F(x)$ будет непрерывна на всем сегменте $[a, b]$.

** В дальнейшем мы предполагаем, что $x_n < c$, ибо если $x_n = c$, то $f(x_n) = f(c) = 0$ и, значит, $x_{n+1} = x_n = c$, т. е. принадлежность x_{n+1} сегменту $[a, c]$ установлена.

$$x_{n+1} - x_n = \frac{(b - x_n) f'(\xi_n)(c - x_n)}{(b - c) f'(\xi_n^*) + (c - x_n) f'(\xi_n)}, \quad (11.9)$$

где $x_n < \xi_n < c$, $c < \xi_n^* < b$, т. е. $\xi_n < \xi_n^*$.

В силу неубывания и положительности производной $f'(x)$ можем записать $0 < f'(\xi_n) \leq f'(\xi_n^*)$. Отсюда, так как $b - c > 0$ и $c - x_n > 0$, получим

$$(b - c) f'(\xi_n^*) + (c - x_n) f'(\xi_n) \geq [(b - c) + (c - x_n)] f'(\xi_n) = \\ = (b - x_n) f'(\xi_n).$$

Таким образом, из равенства (11.9) найдем $x_{n+1} - x_n < c - x_n$, или $x_{n+1} < c$, т. е. индукция проведена.

Докажем теперь, что последовательность $\{x_n\}$ является неубывающей. Для этого достаточно доказать, что дробь, стоящая в правой части равенства (11.8), является неположительной. Так как производная $f'(x)$ положительна на сегменте $[a, b]$, то функция $f(x)$ возрастает на этом сегменте, и поэтому из неравенств $x_n < c < b$ следует, что $f(x_n) < f(c) = 0$, $f(b) - f(x_n) > 0$. Отсюда и вытекает неположительность указанной дроби.

Итак, последовательность $\{x_n\}$ не убывает и ограничена сверху числом c . По теореме 3.15 эта последовательность сходится. В силу утверждения 1 п. 2 пределом ее является искомый корень.

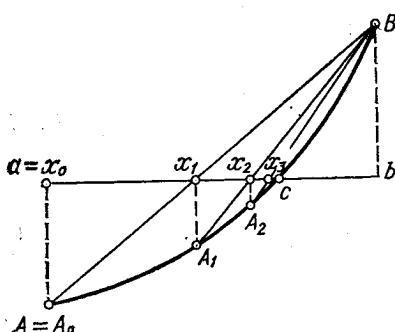


Рис. 11.4

Дадим геометрическую иллюстрацию рассмотренного выше случая 1°. Из формулы (11.8) вытекает, что x_{n+1} является абсциссой точки пересечения хорды, соединяющей точки $A_n(x_n, f(x_n))$ и $B(b, f(b))$ графика функции $y=f(x)$ с осью Ox (на рис. 11.4 изображены точки A_1 и A_2).

Как уже указано выше, кроме рассмотренного выше случая 1° возможны еще следующие три случая: 2° производная $f'(x)$ не возрастает и отрицательна на сегменте $[a, b]$, 3° производная $f'(x)$ не возрастает и положительна на сегменте $[a, b]$, 4° производная не убывает и отрицательна на сегменте $[a, b]$. Эти случаи изображены соответственно на рис. 11.5, 11.6, 11.7.

В случае 2° уравнение (11.6), так же как и выше, заменяется уравнением (11.7) и в качестве нулевого приближения берется точка $x_0=a$ (при этом последовательность $\{x_n\}$ также оказывается неубывающей). В случаях 3° и 4° уравнение (11.6) заменяется не уравнением (11.7), а следующим уравнением

$$x = F(x), \quad F(x) = x - \frac{(a-x)f(x)}{f(a)-f(x)}$$

и в качестве нулевого приближения берется точка $x_0=b$ (при этом последовательность $\{x_n\}$ оказывается невозрастающей).



Рис. 11.5



Рис. 11.6

Приведенная выше геометрическая иллюстрация является источником наименования метода хорд.

Перейдем теперь к изложению метода касательных или метода Ньютона.

Пусть, как и выше, искомый корень с уравнения (11.6) изолирован на сегменте $[a, b]$, на котором $f(x)$ имеет непрерывную и монотонную первую производную, сохраняющую определенный знак. При этом возможны те же самые четыре случая, которые отмечены при изложении метода хорд.

Ради определенности рассмотрим подробно случай 1°, т. е. предположим, что производная $f'(x)$ не убывает и положительна на сегменте $[a, b]$.

Заменим уравнение (11.6) эквивалентным ему на сегменте $[a, b]$ уравнением

$$x = F(x), \quad \text{где } F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad (11.10)$$

и будем решать последнее уравнение методом итераций, приняв за нулевое приближение x_0 точку b и определив последовательность $\{x_n\}$ рекуррентной формулой

$$x_{n+1} = F(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (11.11)$$

Чтобы доказать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к искомому корню c , достаточно в силу утверждения 1 п. 2, доказать, что все x_n лежат на сегменте $[a, b]$ и что последовательность $\{x_n\}$ сходится.

Применяя метод индукции, докажем, что все x_n лежат на сегменте $[a, b]$, точнее, на сегменте $[c, b]$, где c — искомый корень. Так как $x_0=b$ лежит на сегменте $[c, b]$, то для проведения ин-

дукции достаточно, предположив, что x_n лежит на сегменте $[c, b]$, доказать, что и x_{n+1} также лежит на этом сегменте. Если $x_n = c$, то $f(x_n) = f(c) = 0$, и из формулы (11.11) следует, что $x_{n+1} = x_n = c$, т. е. индукция проведена. Пусть теперь $x_n > c$. Тогда из формулы (11.11), учитывая, что $f(c) = 0$, получим

$$x_n - x_{n+1} = \frac{f(x_n) - f(c)}{f'(x_n)}.$$

Применяя к выражению, стоящему в числителе последней дроби, формулу Лагранжа, найдем

$$x_n - x_{n+1} = (x_n - c) \frac{f'(\xi_n)}{f'(x_n)},$$

где $c < \xi_n < x_n$. В силу неубывания и положительности производной дробь $\frac{f'(\xi_n)}{f'(x_n)}$ положительна и не превосходит единицы, т. е.

$x_n - x_{n+1} \leq x_n - c$ или $x_{n+1} \geq c$.

Таким образом, индукция проведена. Из положительности производной $f'(x)$ следует возрастание функции $f(x)$, а поэтому из неравенства $c \leq x_n$ следует, что $0 = f(c) \leq f(x_n)$. Таким образом, $f(x_n)/f'(x_n) \geq 0$. Отсюда в силу формулы (11.11) $x_{n+1} \leq x_n$, т. е. последовательность $\{x_n\}$ не возрастает. Так как эта последовательность, кроме того, ограничена снизу числом c , то по теореме 3.15 она сходится. В силу утверждения 1 из п. 2 пределом ее является искомый корень c .

Дадим геометрическую иллюстрацию рассмотренного нами случая 1°. Из формулы (11.11) вытекает, что x_{n+1} является абсциссой точки пересечения с осью Ox касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $B_n(x_n, f(x_n))$ (на рис. 11.8 изображены точки B_0, B_1 и B_2). Приведенная геометрическая иллюстрация является источником наименования метода касательных. Предлагаем читателю самостоятельно разобрать метод касательных для случаев 2°, 3°, 4°, указанных при изложении метода хорд.

Замечание 1. Возникает вопрос об оценке погрешности метода хорд и касательных, т. е. об оценке отклонения n -го приближения от точного значения корня c . Применяя к выражению $f(x_n) = f(x_n) - f(c)$ формулу Лагранжа, будем иметь $f(x_n) = (x_n - c)f'(\xi_n)$. Отсюда получим следующую оценку:

$$|x_n - c| \leq \frac{|f(x_n)|}{m}, \quad (11.12)$$

где m — минимальное значение $|f'(x)|$ на сегменте $[a, b]$. Формула (11.12) позволяет оценить отклонение x_n от точного значения корня c через значение модуля заданной функции $y = f(x)$ в точке x_n .

Замечание 2. На практике часто используют комбинированный метод, заключающийся в поочередном применении метода хорд и метода касательных. Ради определенности остановимся на подробно рассмотренном выше случае 1°, т. е. предположим, что $f'(x)$ не убывает и положительна на сегменте $[a, b]$ (рис. 11.9). Определим x_1 по методу касательных, взяв за нулевое приближение точку b : После этого определим x_2 , применяя

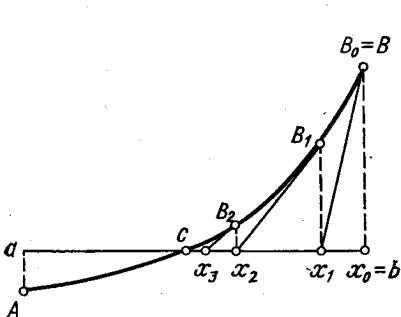


Рис. 11.8

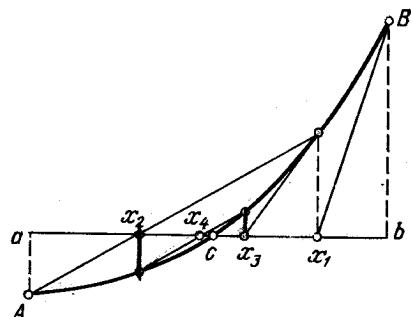


Рис. 11.9

метод хорд, но не к сегменту $[a, b]$, а к сегменту $[a, x_1]$. Далее, определим x_3 по методу касательных, исходя из уже найденного x_1 ; а x_4 по методу хорд, применяя его к сегменту $[x_2, x_3]$. Указанный процесс иллюстрируется на рис. 11.9.

Преимущества комбинированного метода состоят в следующем: во-первых, он дает более быструю сходимость, чем метод хорд, и, во-вторых, поскольку последовательные приближения x_n и x_{n+1} комбинированного метода с разных сторон приближаются к корню, то разность $|x_{n+1} - x_n|$ дает оценку погрешности этого метода. Если за приближенное значение корня взять $x_n^* = (x_n + x_{n+1})/2$, то для погрешности получим оценку $|x_n^* - c| < |x_{n+1} - x_n|/2$.

§ 2. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1. Вводные замечания. При решении ряда актуальных физических и технических задач встречаются определенные интегралы от функций, первообразные которых не выражаются через элементарные функции. Кроме того, в приложениях приходится иметь дело с определенными интегралами, сами подынтегральные функции которых не являются элементарными. Это приводит к

необходимости разработки приближенных методов вычисления определенных интегралов*.

В этом параграфе мы познакомимся с тремя наиболее употребительными приближенными методами вычисления определенных интегралов: методом прямоугольников, методом трапеций и методом парабол.

Основная идея этих методов заключается в замене подынтегральной функции $f(x)$ функцией более простой природы — многочленом, совпадающим с $f(x)$ в некоторых точках. Для уяснения этой идеи рассмотрим при малых c интеграл $\int_{-c}^c f(x)dx$, представляющий собой площадь узкой криволинейной трапеции, лежащей под графиком функции $y=f(x)$ на сегменте $[-c, c]$ (рис. 11.10).

Заменим функцию $f(x)$ многочленом нулевого порядка, а именно константой $f(0)$. При этом интеграл $\int_{-c}^c f(x)dx$, приближенно заменится *площадью прямоугольника*, заштрихованного на рис. 11.11. Ниже мы покажем, что при определенных требованиях на $f(x)$ ошибка, совершаемая при такой замене имеет порядок c^3 .

Заменим, далее, функцию $f(x)$ многочленом первого порядка, а именно линейной функцией $y=kx+b$, совпадающей с $f(x)$ в точках $-c$ и c . При этом интеграл $\int_{-c}^c f(x)dx$ приближенно за-

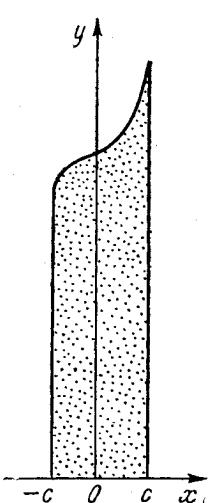


Рис. 11.10

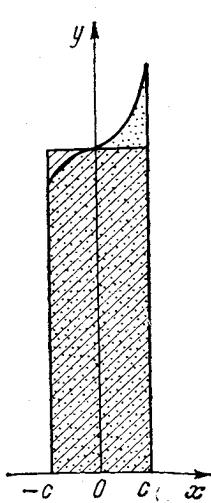


Рис. 11.11

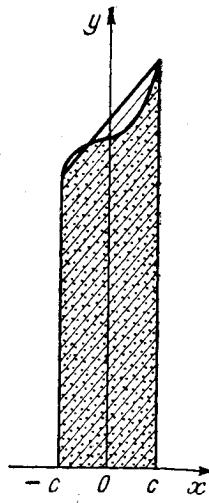


Рис. 11.12

* Заметим, что приближенными методами часто пользуются и для вычисления интегралов, выражющихся через элементарные функции.

менится площадью прямоугольной трапеции, заштрихованной на рис. 11.12. Ниже мы покажем, что ошибка, совершаемая при такой замене, также имеет порядок c^3 .

Заменим, наконец, функцию $f(x)$ многочленом второго порядка, т. е. параболой $y = Ax^2 + Bx + C$, совпадающей с $f(x)$ в точках $-c$, 0 и c . При этом интеграл $\int_{-c}^c f(x) dx$ приближенно заменится площадью, лежащей под параболой фигуры, заштрихованной на рис. 11.13. Ниже мы покажем, что при определенных требованиях на функцию $f(x)$ ошибка, совершаемая при такой замене, имеет порядок c^5 .

Если потребуется вычислить интеграл $\int_a^b f(x) dx$ по любому сегменту $[a, b]$, естественно разбить этот сегмент на достаточно большое число малых сегментов и к каждому из этих сегментов применить изложенные выше рассуждения. При этом мы и придем к методам прямоугольников, трапеций и парабол в их общем виде. Для того чтобы оценить ошибку, возникающую при применении методов прямоугольников, трапеций и парабол, мы подойдем к изложению этих методов с другой точки зрения.

Прежде всего введем понятие усреднения n чисел.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — какие угодно положительные числа. Любое число с вида

$$c = \frac{\lambda_1 \cdot f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n)}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n} \quad (11.13)$$

назовем усреднением n чисел $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$.

Очевидно, что если все числа $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ заключены между числами m и M ($m < M$), то и любое усреднение с этих чисел удовлетворяет неравенствам $m < c < M$.

Предположим далее, что функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и все значения x_1, x_2, \dots, x_n лежат на этом сегменте. Тогда, какое бы усреднение n чисел $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ мы ни взяли, на сегменте $[a, b]$ найдется точка ξ такая, что это усреднение равно значению $f(\xi)$ в точке ξ . В самом деле, так как функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то все значения этой функции на указанном сегменте заключены между ее наибольшим значением M и наименьшим значением m . Значит, и любое усреднение с чисел $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ заключено между m и M . Но, каково бы ни было это промежуточное значение c , согласно теореме 4.12 на сегменте $[a, b]$ найдется точка ξ такая, что $c = f(\xi)$.

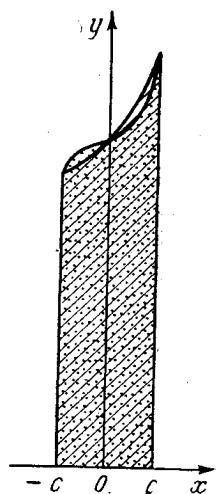


Рис. 11.13

Таким образом, для непрерывной на сегменте $[a, b]$ функции формулу (11.13) можно переписать в виде

$$\frac{\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n)}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n} = f(\xi) \quad (11.14)$$

или в виде

$$\frac{\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n)}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n} (b-a) = f(\xi) (b-a). \quad (11.15)$$

С другой стороны, для непрерывной на сегменте $[a, b]$ функции, согласно п. 2 § 4 гл. 9, найдется точка ξ' из сегмента $[a, b]$ такая, что справедлива формула среднего значения

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi') (b-a). \quad (11.16)$$

Сопоставление формул (11.15) и (11.16) позволяет сделать предположение о том, что при некотором разумном выборе чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ и точек x_1, x_2, \dots, x_n вычисление интеграла

$$\int_a^b f(x) dx$$

можно с большой точностью заменить вычислением суммы, стоящей в левой части формулы (11.15). Именно на этой идее разумного выбора чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ и точек x_1, x_2, \dots, x_n и основаны приближенные методы вычисления интеграла. Переходим к изложению этих методов.

2. Метод прямоугольников. Будем считать, что функция $f(x)$, интеграл от которой нам требуется приближенно вычислить, имеет на рассматриваемом сегменте *непрерывную вторую производную*.

Начнем с рассмотрения интеграла в симметричных пределах $\int_{-c}^c f(x) dx$. Для вычисления этого интеграла будем исходить из формул (11.15) и (11.16), в которых положим $n=1$, $a=-c$, $b=c$, $x_1=0$, $\lambda_1=1$. Тогда, очевидно, $\xi=0$ и правая часть (11.15) равна $f(0) \cdot 2c$. Таким образом,

$$\int_{-c}^c f(x) dx = f(0) \cdot 2c + R, \quad (11.17)$$

где символом R обозначен остаточный член (т. е. отклонение числа $f(0) \cdot 2c$ от точного значения интеграла). Для того чтобы оценить величину остаточного члена R , обозначим через $F(x)$ первообразную функции $f(x)$. Поскольку в силу формулы Ньютона—

Лейбница $\int_{-c}^c f(x) dx = F(c) - F(-c)$, то

$$R = F(c) - F(-c) - f(0) \cdot 2c. \quad (11.18)$$

Разложим по формуле Маклорена функцию $\psi(x) = F(x) - F(-x)$. Беря остаточный член в форме Лагранжа и обозначая через ξ' возникающее при этом промежуточное значение аргумента из интервала $(0, c)$, будем иметь

$$\psi(c) = F(c) - F(-c) = \psi(0) + \frac{\psi'(0)}{1!} c + \frac{\psi''(0)}{2!} c^2 + \frac{\psi'''(\xi')}{3!} c^3. \quad (11.19)$$

Подсчитаем входящие в эту формулу значения $\psi(0)$, $\psi'(0)$, $\psi''(0)$, $\psi'''(\xi')$. Имеем

$$\psi(x) = F(x) - F(-x); \quad \psi(0) = F(0) - F(0) = 0;$$

$$\psi'(x) = F'(x) + F'(-x) = f(x) + f(-x); \quad \psi'(0) = f(0) + f(0) = 2f(0);$$

$$\psi''(x) = f'(x) - f'(-x); \quad \psi''(0) = f'(0) - f'(0) = 0;$$

$$\psi'''(x) = f''(x) + f''(-x); \quad \psi'''(\xi') = \frac{2[f''(\xi') + f''(-\xi')]}{2} = 2f''(\xi).$$

(В последнем равенстве мы воспользовались формулой (11.14) при $n=2$, $\lambda_1=\lambda_2=1$, $x_1=\xi$, $x_2=-\xi$ и обозначили через ξ некоторую точку из интервала $(-c, c)$ на котором по предположению непрерывна функция $f''(x)$.)

Вставляя вычисленные значения в формулу (11.19), будем иметь

$$\psi(c) = F(c) - F(-c) = 2f(0)c + 2 \frac{f''(\xi)}{3!} c^3. \quad (11.20)$$

Сопоставляя последнюю формулу с формулой (11.18), окончательно получим

$$R = 2 \frac{f''(\xi)}{3!} c^3 = \frac{f''(\xi)}{24} (2c)^3, \quad -c < \xi < c. \quad (11.21)$$

Из полученной оценки остаточного члена видно, что формула (11.17) тем точнее, чем меньше величина $2c$. Поэтому для вычисления интеграла $\int_a^b f(x) dx$ удобно разбить сегмент $[a, b]$ на

достаточно большое число n частей и к каждой из этих частей применить формулу приближенного интегрирования (11.17). Считая, что функция $f(x)$ имеет на сегменте $[a, b]$ непрерывную вторую производную, разобьем этот сегмент на $2n$ равных частей при помощи точек $a = x_0 < x_2 < \dots < x_{2n} = b$. Обозначим через x_{2k+1} среднюю точку сегмента $[x_{2k}, x_{2k+2}]$. Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} [f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{2n-1})] + R, \quad (11.22)$$

где

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n = \frac{(b-a)^3}{24n^3} [f''(\xi_1) + f''(\xi_2) + \dots + f''(\xi_n)] =$$

$$= \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\xi), \quad a < \xi < b. \quad (11.23)$$

(Здесь мы воспользовались для $f''(x)$ формулой усреднения (11.14) при $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 1$ и обозначили через ξ некоторое промежуточное значение аргумента из интервала (a, b) .)

Формула (11.22) называется формулой прямоугольников. Ее геометрический смысл ясен из рис. 11.14: площадь кри-

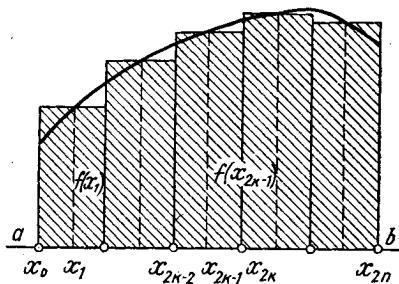


Рис. 11.14

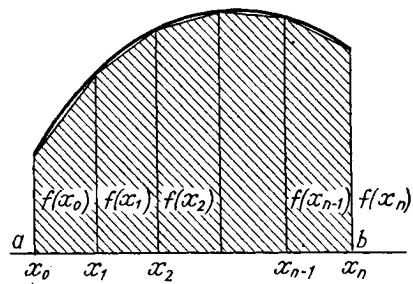


Рис. 11.15

тволнейной трапеции, лежащей под графиком $f(x)$ на сегменте $[a, b]$, приближено заменяется суммой площадей, указанных на этом чертеже прямоугольников.

3. Метод трапеций. Пусть, как и выше, функция $f(x)$ имеет на рассматриваемом сегменте непрерывную вторую производную.

Снова начнем с вычисления интеграла $\int_a^c f(x) dx$, но на этот раз будем исходить из формул (11.15) и (11.16), считая, что $n=2, a=-c, b=c, x_1=-c, x_2=c, \lambda_1=\lambda_2=1$. Тогда

$$\int_{-c}^c f(x) dx = \frac{1}{2} [f(-c) + f(c)] \cdot 2c + R, \quad (11.24)$$

где R — остаточный член, подлежащий оценке.

Обозначая, как и в п. 2, через $F(x)$ первообразную функции $f(x)$ и учитывая, что $\int_{-c}^c f(x) dx = F(c) - F(-c)$, будем иметь

$$R = F(c) - F(-c) - \frac{1}{2} [f(c) + f(-c)] \cdot 2c. \quad (11.25)$$

Пусть, как и в методе прямоугольников, $\psi(x) = F(x) - F(-x)$. Разлагая функции $\psi(x)$ и $\psi'(x)$ по формуле Маклорена с остаточным членом в интегральной форме (см. п. 4 § 5 гл. 9) и полагая $x=c$, будем иметь

$$\begin{aligned}\psi(c) &= F(c) - F(-c) = \\ &= \psi(0) + \frac{\psi'(0)}{1!} c + \frac{\psi''(0)}{2!} c^2 + \frac{1}{2} \int_0^c \psi'''(x) (c-x)^2 dx, \\ \psi'(c) &= f(c) + f(-c) = \psi'(0) + \frac{\psi''(0)}{1!} c + \frac{1}{1!} \int_0^c \psi'''(x) (c-x) dx.\end{aligned}$$

Подставляя в эти формулы значения $\psi(0)$, $\psi'(0)$, $\psi''(0)$, вычисленные в п. 2, получим

$$\begin{aligned}F(c) - F(-c) &= 2f(0)c + \frac{1}{2} \int_0^c \psi'''(x) (c-x)^2 dx, \\ f(c) + f(-c) &= 2f(0) + \int_0^c \psi'''(x) (c-x) dx.\end{aligned}$$

Подставляя последние два выражения в (11.25), получим

$$R = \int_0^c \psi'''(x) \left[\frac{1}{2}(c-x)^2 - c(c-x) \right] dx = -\frac{1}{2} \int_0^c \psi'''(x)(c^2 - x^2) dx.$$

Имея в виду, что функция $c^2 - x^2$ неотрицательна на сегменте $[0, c]$, применим к последнему интегралу первую формулу среднего значения (см. п. 2 § 4 гл. 9). Учитывая, что $\psi'''(x) = f''(x) + f''(-x)$, и обозначая через ξ' некоторое значение аргумента из сегмента $[0, c]$, получим

$$R = -\frac{f''(\xi') + f''(-\xi')}{2} \int_0^c (c^2 - x^2) dx = -\left[\frac{f''(\xi') + f''(-\xi')}{2} \right] \frac{2c^3}{3}.$$

Применяя к выражению в квадратных скобках формулу усреднения (11.14) при $n=2$, $\lambda_1=\lambda_2=1$ и обозначая через ξ некоторое значение аргумента из сегмента $[-c, c]$, окончательно получим

$$R = -f''(\xi) \cdot \frac{2c^3}{3} = -\frac{f''(\xi)}{12} (2c)^3.$$

Для вычисления интеграла $\int_a^b f(x) dx$, как и в методе прямоугольников, разобьем сегмент $[a, b]$ на n равных частей при помощи точек $a=x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ и применим формулу (11.24) к каждому из частичных сегментов. Получим

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x) dx &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx = \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \frac{x_{k+1} - x_k}{2} [f(x_k) + f(x_{k+1})] + R_k \right\} = \\
 &= \frac{b-a}{2n} \{ [f(x_0) + f(x_1)] + [f(x_1) + f(x_2)] + \dots \\
 &\quad \dots + [f(x_{n-1}) + f(x_n)] \} + R = \\
 &= \frac{b-a}{2n} \left\{ f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \right\} + R, \tag{11.26}
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 R &= R_0 + R_1 + \dots + R_{n-1} = -\frac{f''(\xi_0) + f''(\xi_1) + \dots + f''(\xi_{n-1})}{12n^3} (b-a)^3 = \\
 &= -\frac{f''(\xi)}{12n^2} (b-a)^3, \quad a \ll \xi \ll b. \tag{11.27}
 \end{aligned}$$

(Мы воспользовались формулой усреднения (11.11).)

Формула (11.26) называется формулой трапеций. Геометрический смысл этой формулы ясен из рис. 11.15: площадь криволинейной трапеции, лежащей под графиком функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ приближенно заменяется суммой площадей, указанных на этом чертеже прямолинейных трапеций. Сравнение остаточного члена (11.27) с остаточным членом (11.23) показывает, что метод трапеций не дает увеличения точности по сравнению с методом прямоугольников.

4. Метод парабол. На этот раз предположим, что функция имеет на рассматриваемом сегменте непрерывную четвертую производную, и снова начнем с вычисления интеграла $\int_{-c}^c f(x) dx$.

Как и выше, будем исходить из формул (11.15) и (11.16), но при этом положим в этих формулах $n=3$, $a=-c$, $b=c$, $\lambda_1=\lambda_3=1$, $\lambda_2=\lambda$ (числом λ распорядимся в дальнейшем!), $x_1=-c$, $x_2=0$, $x_3=c$. Тогда

$$\int_{-c}^c f(x) dx = \frac{f(-c) + \lambda f(0) + f(c)}{2+\lambda} 2c + R,$$

где R — подлежащий определению остаточный член. Для оценки остаточного члена обозначим, как и выше, через $F(x)$ первооб-

разную функции $f(x)$ и учтем, что $\int_{-c}^c f(x) dx = F(c) - F(-c)$. Получим, что

$$R = F(c) - F(-c) - \frac{f(-c) + \lambda f(0) + f(c)}{2 + \lambda} 2c. \quad (11.28)$$

Пусть, как и выше, $\psi(x) = F(x) - F(-x)$. Разложим функции $\psi(x)$ и $\psi'(x)$ по формуле Маклорена с остаточным членом в интегральной форме. Подставляя в эти разложения значения $\psi(0)$, $\psi'(0)$, $\psi''(0)$, вычисленные в п. 2, и учитывая, что $\psi^{(4)}(0) = 0$, будем иметь

$$\psi(c) = F(c) - F(-c) =$$

$$= 2f(0)c + \frac{2f''(0)}{3!} c^3 + \frac{1}{4!} \int_0^c \psi^5(x) (c-x)^4 dx, \quad (11.29)$$

$$\psi'(c) = f(c) + f(-c) = 2f(0) + \frac{2f''(0)}{2!} c^2 + \frac{1}{3!} \int_0^c \psi^{(5)}(x) (c-x)^3 dx.$$

Из последней формулы вытекает, что

$$\begin{aligned} & \frac{f(-c) + \lambda f(0) + f(c)}{2 + \lambda} 2c = \\ & = 2f(0)c + \frac{f''(0)}{2 + \lambda} 2c^3 + \frac{2c}{2 + \lambda} \frac{1}{3!} \int_0^c \psi^{(5)}(x) (c-x)^3 dx. \end{aligned} \quad (11.30)$$

Из формулы (11.28) видно, что остаточный член R равен разности выражений (11.29) и (11.30). Чтобы сделать этот остаточный член более высоким по порядку малости, выберем значение λ так, чтобы вторые члены в правых частях формул (11.29) и (11.30) совпадали, т. е. положим $\frac{2}{3!} = \frac{2}{2+\lambda}$, т. е. $\lambda = 4$. При таком значении разность формул (11.29) и (11.30) дает

$$\begin{aligned} R &= \int_0^c \psi^{(5)}(x) \left[\frac{1}{24} (c-x)^4 - \frac{c}{18} (c-x)^3 \right] dx = \\ &= -\frac{1}{24} \int_0^c \psi^{(5)}(x) \left[(c-x)^3 \left(\frac{c}{3} + x \right) \right] dx. \end{aligned}$$

Имея в виду, что функция $\left[(c-x)^3 \left(\frac{c}{3} + x \right) \right]$ неотрицательна

на сегменте $[0, c]$, применим к последнему интегралу первую формулу среднего значения. Учитывая, что $\psi^{(5)}(x) = f^{(4)}(x) + f^{(4)}(-x)$, и обозначая через ξ' некоторое значение аргумента из сегмента $[0, c]$, получим

$$\begin{aligned} R &= -\frac{f^{(4)}(\xi') + f^{(4)}(-\xi')}{24} \int_0^c (c-x)^3 \left(\frac{c}{3} + x \right) dx = \\ &= -\left[\frac{f^{(4)}(\xi') + f^{(4)}(-\xi')}{2} \right] \frac{(2c)^5}{2880}. \end{aligned}$$

Применяя к выражению в квадратных скобках формулу усреднения (11.14) при $n=2$, $\lambda_1=\lambda_2=1$ и обозначая через ξ некоторое значение аргумента из сегмента $[-c, c]$, окончательно получим

$$R = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{2880} (2c)^5.$$

Для вычисления интеграла $\int_a^b f(x) dx$ разделим сегмент $[a, b]$ на n равных частей точками $a = x_0 < x_2 < x_4 < \dots < x_{2n} = b$ и положим $x_{2k+1} = \frac{x_{2k} + x_{2k+2}}{2}$. Получим

$$\begin{aligned} \int_0^b f(x) dx &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x) dx = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ (x_{2k+2} - x_{2k}) \frac{f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2})}{6} + R_k \right\} = \\ &= \frac{b-a}{6n} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) + 4 \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{2k+1}) \right] + R, \quad (11.31) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} R &= -\frac{f^{(4)}(\xi_0) + f^{(4)}(\xi_1) + \dots + f^{(4)}(\xi_{n-1})}{2880n^5} (b-a)^5 = \\ &= -\frac{f^{(4)}(\xi)}{2880n^4} (b-a)^5, \\ a < \xi < b. \end{aligned} \quad (11.32)$$

(Здесь мы применим формулу усреднения (11.14).)

Формула (11.31) называется формулой Симпсона или формулой парabol. Геометрический смысл этой формулы

ясен из рис. 11.16: площадь криволинейной трапеции, лежащей под графиком функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ приближенно заменяется суммой площадей, заштрихованных на этом чертеже фигур, лежащих под параболами. Для того, чтобы убедиться в этом достаточно заметить, что выражение, стоящее в фигурных скобках в формуле (11.31), численно равно площади фигуры, лежащей на сегменте $[x_{2k}, x_{2k+2}]$ под параболой $y = Ax^2 + Bx + C$, совпадающей с $f(x)$ в точках $x_{2k}, x_{2k+1}, x_{2k+2}$ (см. пример 2 п. 4 § 2 гл. 10)..

Сравнивая остаточный член (11.32) с остаточными членами (11.23) и (11.27), мы убеждаемся в том, что формула Симпсона дает большую точность, чем формулы прямоугольников и трапеций.

В качестве иллюстрации применения формулы Симпсона обратимся к вычислению интеграла $I(x_0) = \int_0^{x_0} e^{-x^2} dx^*$, ограничиваясь для простоты значениями x_0 из сегмента $0 < x_0 < 1$. Полагая $f(x) = e^{-x^2}$ и вычисляя производную $f^{(4)}(x) = 4(4x^4 - 12x^2 + 3)e^{-x^2}$ без труда убедимся в том, что для всех x из сегмента $0 < x < 1$ во всяком случае $|f^{(4)}(x)| < 20$. Исходя из оценки (11.32), можем утверждать, что $R < \frac{1}{144n^4}$. Значит, разбив сегмент $[0, x_0]$ всего на 5 равных частей и заменив рассматриваемый интеграл суммой, стоящей в правой части формулы Симпсона, мы вычислим этот интеграл с точностью до $\frac{1}{144 \cdot 5^4} < \frac{1}{90\,000}^{**}$.

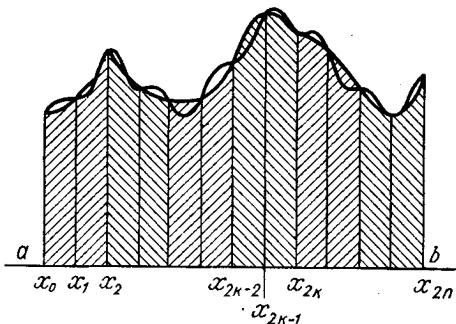


Рис. 11.16

* Рассматриваемый интеграл, как уже неоднократно отмечалось, не выражается через элементарные функции, но имеет большое значение в статистической физике, теории теплопроводности и диффузии.

** На ручном электронном калькуляторе, вычисляющем значения элементарных функций, авторы вычислили за несколько минут указанный интеграл для $x_0=1$, $n=5$ и получили результат $I(1)=0,7468251$, который, в силу сказанного выше, содержит пять верных десятичных знаков после запятой.

Глава 12

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Многие вопросы естествознания приводят к рассмотрению такой зависимости между несколькими переменными величинами, при которой значения одной из переменных величин полностью определяются значениями остальных переменных.

Так, например, при рассмотрении каких-либо физических характеристик тела (например, его плотности ρ или температуры T) нам приходится учитывать изменение этих характеристик при переходе от одной точки тела к другой. Поскольку каждая точка тела определяется тремя декартовыми координатами x , y и z , то рассматриваемые характеристики (плотность ρ или температура T) определяются значениями трех переменных x , y и z .

При рассмотрении физических процессов, меняющихся во времени, значения физических характеристик определяются значениями четырех переменных, трех координат точки x , y , z и времени t . Например, при изучении звуковых колебаний газа плотность ρ этого газа и его давление p определяются значениями четырех переменных x , y , z и t .

Для изучения такого рода зависимостей в этой главе вводится понятие функции нескольких переменных и развивается аппарат для исследования таких функций.

Первая часть настоящей главы посвящена построению дифференциального исчисления функций нескольких переменных.

На случай функций нескольких переменных будут распространены понятия и утверждения, установленные нами в гл. 3—7 для функций одной переменной.

В одном из дополнений к настоящей главе изучаются элементы дифференциального исчисления для абстрактных функций, представляющих собой результат отображения одного нормированного пространства в другое. Частным случаем такого отображения является довольно часто встречающееся отображение евклидова пространства размерности m в другое евклидово пространство размерности n .

§ 1. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ m ПЕРЕМЕННЫХ

1. Понятие m -мерного координатного и m -мерного евклидова пространств. При изложении теории функций m переменных удобно использовать геометрическую терминологию, обобщающую и

формализующую наши представления о плоскости и о реальном (трехмерном) геометрическом пространстве.

Назовем m -мерным координатным пространством множество всевозможных упорядоченных совокупностей (x_1, x_2, \dots, x_m) вещественных чисел x_1, x_2, \dots, x_m .

Будем обозначать m -мерное координатное пространство символом A^m .

Каждую упорядоченную совокупность (x_1, x_2, \dots, x_m) мы будем называть точкой m -мерного координатного пространства и обозначать одной буквой M .

При этом числа x_1, x_2, \dots, x_m мы будем называть координатами точки M .

Запись $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ означает, что точка M имеет координаты x_1, x_2, \dots, x_m .

Замечание 1. Если рассматривать координатное пространство A^m как множество всех векторов \mathbf{x} с координатами (x_1, x_2, \dots, x_m) и назвать суммой векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ вектор с координатами $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_m + y_m)$, а произведением вектора $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ на вещественное число λ — вектор с координатами $(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_m)$, то координатное пространство A^m превращается в линейное пространство *.

Из курса аналитической геометрии читатель хорошо знаком с понятиями координатной плоскости и трехмерного координатного пространства. Обобщением этих понятий является m -мерное координатное пространство A^m . Понятия координатной плоскости и трехмерного координатного пространства являются источниками удобной геометрической терминологии, употребляемой при изучении m -мерного координатного пространства A^m .

Заметим теперь, что для наших целей оказывается недостаточно понятия m -мерного координатного пространства A^m . Мы не обойдемся без измерения расстояний между точками этого пространства. Для введения понятия расстояния между точками координатного пространства A^m естественно отправляться от понятия расстояния между двумя точками координатной плоскости и двумя точками трехмерного координатного пространства (соответствую-

* Напомним, что линейным пространством называется совокупность векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \dots$ любой природы при условии, что для элементов этой совокупности определены операция сложения векторов и операция умножения вектора на вещественное число, причем эти операции удовлетворяют восьми аксиомам: 1) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$; 2) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$; 3) существует нулевой вектор $\mathbf{0}$ такой, что $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$ для любого вектора \mathbf{x} ; 4) для любого вектора \mathbf{x} существует противоположный ему вектор \mathbf{x}' такой, что $\mathbf{x} + \mathbf{x}' = \mathbf{0}$; 5) $\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$; 6) $(\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}$; 7) $\lambda(\mu\mathbf{x}) = (\lambda\mu)\mathbf{x}$; 8) $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Легко проверить, что координатное пространство A^m с определениями операции сложения векторов и операции умножения вектора на число, данными в замечании 1, удовлетворяет восьми указанным аксиомам и, значит, является линейным пространством.

щие формулы хорошо известны читателю из курса аналитической геометрии).

Определение. Координатное пространство A^m называется *m-мерным евклидовым пространством*, если между двумя любыми точками $M'(x'_1, x'_2, \dots, x'_m)$ и $M''(x''_1, x''_2, \dots, x''_m)$ пространства A^m определено расстояние, обозначаемое символом $\rho(M', M'')$ и выражющееся соотношением

$$\rho(M', M'') = \sqrt{(x'_1 - x''_1)^2 + (x'_2 - x''_2)^2 + \dots + (x'_m - x''_m)^2}. \quad (12.1)$$

Будем обозначать *m*-мерное евклидово пространство символом E^m .

Введенное нами понятие *m*-мерного евклидова пространства E^m является естественным обобщением понятий евклидовой плоскости и трехмерного евклидова пространства, изученных в курсе аналитической геометрии.

Замечание 2. В курсе линейной алгебры дается общее определение евклидова пространства как такого линейного пространства, для которого указано правило, ставящее в соответствии любым двум элементам x и y этого пространства вещественное число, называемое скалярным произведением этих элементов и обозначаемое символом (x, y) , при условии, что это правило удовлетворяет четырем аксиомам: 1) $(x, y) = (y, x)$; 2) $(x+y, z) = (x, z) + (y, z)$; 3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$; 4) $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0$ только для нулевого элемента $x=0$.

Легко проверить, что если в пространстве A^m , элементы которого рассматриваются как векторы x с координатами (x_1, x_2, \dots, x_m) , определить скалярное произведение двух элементов $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ соотношением

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_m y_m, \quad (12.2)$$

то будут выполнены четыре указанные аксиомы и пространство A^m превратится в евклидово пространство (с точки зрения общего определения евклидова пространства).

Напомним, что линейное пространство называется нормированным, если указано правило, ставящее в соответствие каждому элементу x вещественное число, называемое нормой этого элемента и обозначаемое символом $\|x\|$, причем указанное правило удовлетворяет трем аксиомам: 1) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$; 2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$; 3) $\|x\| \geq 0$, причем $\|x\| = 0$ только для нулевого элемента x .*

* В аксиоме 3) можно опустить требование $\|x\| \geq 0$. В самом деле, это требование является логическим следствием аксиом 1) и 2) и предположения о том, что $\|x\| = 0$ только для нулевого элемента x (достаточно в аксиоме 1) положить $y = -x$).

В курсе линейной алгебры доказывается, что всякое евклидово пространство является нормированным: достаточно определить норму любого элемента x соотношением $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Нормированное пространство всегда является так называемым метрическим пространством, т. е. таким пространством, в котором указано правило, ставящее в соответствие любым двум элементам x' и x'' вещественное число, называемое расстоянием между этими элементами и обозначаемое символом $\rho(x', x'')$, при условии, что это правило удовлетворяет трем аксиомам: 1) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$; 2) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$; 3) $\rho(x, y) > 0$, причем $\rho(x, y) = 0$, только когда $x = y$ **.

Достаточно определить расстояние $\rho(x', x'')$ соотношением

$$\rho(x', x'') = \|x' - x''\| = \sqrt{\langle x' - x'', x' - x'' \rangle}.$$

Если учесть, что координатное пространство A^m является евклидовым пространством со скалярным произведением, определяемым соотношением (12.2), то мы придем к следующему выражению для расстояния $\rho(x', x'')$ между двумя элементами: $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_m)$ и $x'' = (x''_1, x''_2, \dots, x''_m)$ пространства A^m :

$$\begin{aligned}\rho(x', x'') &= \sqrt{\langle x' - x'', x' - x'' \rangle} = \\ &= \sqrt{(x'_1 - x''_1)^2 + (x'_2 - x''_2)^2 + \dots + (x'_m - x''_m)^2}.\end{aligned}$$

Полученное выражение в точности совпадает с величиной, стоящей в правой части (12.1).

2. Множества точек m -мерного евклидова пространства. Если у функции $y = f(x)$ одной независимой переменной x , областью определения которой является некоторое множество $\{x\}$ точек одномерного евклидова пространства E^1 , заменить это множество $\{x\}$ некоторым множеством $\{M\}$ точек m -мерного евклидова пространства E^m , то мы естественно придем к понятию функции m независимых переменных.

Отсюда ясно, что введению функции m переменных должно предшествовать описание важнейших типов множеств точек m -мерного евклидова пространства E^m .

Перейдем к описанию таких множеств.

1°. Множество $\{M\}$ всевозможных точек M пространства E^m , координаты x_1, x_2, \dots, x_m которых удовлетворяют неравенству

$$(x_1 - \overset{\circ}{x}_1)^2 + (x_2 - \overset{\circ}{x}_2)^2 + \dots + (x_m - \overset{\circ}{x}_m)^2 < R^2,$$

называется открытым m -мерным шаром радиуса R с центром в точке $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \dots, \overset{\circ}{x}_m)$.

* См., например: В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. Линейная алгебра.

** В аксиоме 3) можно опустить требование $\rho(x, y) \geq 0$. В самом деле, это требование является логическим следствием аксиом 1) и 2) и предположения о

Иными словами, открытый m -мерный шар радиуса R с центром в точке M_0 — это множество всех точек M , для каждой из которых расстояние от фиксированной точки M_0 удовлетворяет неравенству $\rho(M, M_0) < R$.

2°. Множество $\{M\}$ всевозможных точек M пространства E^m , координаты x_1, x_2, \dots, x_m которых удовлетворяют неравенству $(x_1 - \dot{x}_1)^2 + \dots + (x_m - \dot{x}_m)^2 < R^2$, называется замкнутым m -мерным шаром радиуса R с центром в M_0 .

3°. Множество $\{M\}$ всевозможных точек M пространства E^m , координаты x_1, x_2, \dots, x_m которых удовлетворяют равенству $(x_1 - \dot{x}_1)^2 + (x_2 - \dot{x}_2)^2 + \dots + (x_m - \dot{x}_m)^2 = R^2$, называется m -мерной сферой радиуса R с центром в точке M_0 .

Замечание 1. Отметим, что если к открытому m -мерному шару радиуса R с центром в точке M_0 присоединить m -мерную сферу радиуса R с центром в точке M_0 , то получится замкнутый m -мерный шар радиуса R с центром в точке M_0 .

4°. Открытый m -мерный шар радиуса $\epsilon > 0$ с центром в точке M_0 будем называть ϵ -окрестностью точки M_0 .

5°. Множество $\{M\}$ всех точек M , координаты x_1, x_2, \dots, x_m которых удовлетворяют неравенствам

$$|x_1 - \dot{x}_1| < d_1, |x_2 - \dot{x}_2| < d_2, \dots, |x_m - \dot{x}_m| < d_m,$$

где d_1, d_2, \dots, d_m — некоторые положительные числа, называется *открытым m -мерным координатным параллелипипедом* с центром в точке $M_0(x_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_m)$ или *прямоугольной окрестностью* точки M_0 .

Справедливо следующее элементарное утверждение: любая ϵ -окрестность точки M_0 содержит некоторую прямоугольную окрестность этой точки; любая прямоугольная окрестность точки M_0 содержит некоторую ϵ -окрестность точки M_0 *.

6°. Точка M множества $\{M\}$ точек пространства E^m называется *внутренней точкой* этого множества, если существует некоторая ϵ -окрестность точки M , все точки которой принадлежат множеству $\{M\}$.

7°. Точка M пространства E^m называется *внешней точкой* множества $\{M\}$, если существует некоторая ϵ -окрестность точки M , все точки которой не принадлежат множеству $\{M\}$.

так, что $\rho(x, y) = 0$, только когда $x = y$ (достаточно в аксиоме 2) положить $y = x$.

* В самом деле, если для фиксированного $\epsilon > 0$ положить $d_1 = d_2 = \dots = d_m = \epsilon/m$, то прямоугольная окрестность точки M_0 с указанными d_1, d_2, \dots, d_m будет содержаться в ϵ -окрестности точки M_0 . Если для фиксированных $d_1 > 0, d_2 > 0, \dots, d_m > 0$ положить $\epsilon = \min\{d_1, d_2, \dots, d_m\}$, то ϵ -окрестность точки M_0 будет содержаться в прямоугольной окрестности точки M_0 с указанными d_1, d_2, \dots, d_m .

8°. Точка M пространства E^m называется граничной точкой множества $\{M\}$, если эта точка не является ни внутренней, ни внешней точкой указанного множества*.

Замечание 2. Граничная точка M множества $\{M\}$ может как принадлежать, так и не принадлежать этому множеству. Так любая точка m -мерной сферы радиуса R с центром в точке M_0 является граничной как для открытого m -мерного шара радиуса R с центром в точке M_0 , так и для замкнутого m -мерного шара радиуса R с центром в точке M_0 . Но любая точка указанной сферы не принадлежит открытому шару радиуса R с центром в M_0 и принадлежит замкнутому шару радиуса R с центром в M_0 .

9° Произвольное множество M точек пространства E^m называется открытым, если любая точка этого множества является его внутренней точкой**.

10°. Произвольное открытое множество, содержащее данную точку M_0 , принято называть окрестностью точки M_0 .

11°. Произвольное множество $\{M\}$ точек пространства E^m называется замкнутым, если это множество содержит все свои граничные точки.

Чтобы сформулировать другое эквивалентное определение замкнутого множества, введем понятие предельной точки произвольного множества M в пространстве E^m .

12°. Точку A пространства E^m назовем предельной точкой множества $\{M\}$, если в любой ε -окрестности точки A содержится хотя бы одна точка этого множества, отличная от A .

Убедимся в том, что множество M замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.

В самом деле, если множество M замкнуто, то оно содержит все точки пространства E^m , кроме своих внешних точек. Поскольку среди внешних точек множества M нет его предельных точек, то множество M содержит все свои предельные точки. Если же множество $\{M\}$ не содержит хотя бы одной своей граничной точки M_0 , то эта точка M_0 , очевидно, является предельной точкой множества $\{M\}$.

Доказанное утверждение позволяет дать другое эквивалентное определение замкнутого множества: **множество M называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки***.**

* Заметим, что точка M является граничной точкой множества $\{M\}$ тогда и только тогда, когда в любой ε -окрестности точки M найдутся как точки, принадлежащие множеству $\{M\}$, так и точки, ему не принадлежащие. В самом деле, если в некоторой ε -окрестности точки M не найдется точек, принадлежащих $\{M\}$ [не принадлежащих $\{M\}$], то точка M является внешней [внутренней] точкой M и не является граничной точкой этого множества.

** Т. е. если любая точка M множества $\{M\}$ принадлежит этому множеству вместе с некоторой своей ε -окрестностью.

*** Еще одним эквивалентным определением замкнутого множества является следующее определение: **множество M пространства E^m называется замкнутым, если его дополнение является открытым множеством.**

13°. Множество $\{M\}$ точек пространства E^m называется ограниченным, если найдется m -мерный шар, содержащий все точки этого множества.

14°. Введем понятие непрерывной кривой в m -мерном евклидовом пространстве E^m .

Непрерывной кривой L в пространстве E^m мы будем называть множество $\{M\}$ точек этого пространства, координаты x_1, x_2, \dots, x_m которых представляют собой непрерывные функции параметра t :

$$x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), \dots, x_m = \varphi_m(t), \alpha \leq t \leq \beta. \quad (12.3)$$

Мы будем говорить, что точки $M'(x_1', x_2', \dots, x_m')$ и $M''(x_1'', x_2'', \dots, x_m'')$ пространства E^m можно соединить непрерывной кривой L , если существует такая непрерывная кривая L , определяемая параметрическими уравнениями (12.3), что

$$x_1' = \varphi_1(\alpha), x_2' = \varphi_2(\alpha), \dots, x_m' = \varphi_m(\alpha),$$

$$x_1'' = \varphi_1(\beta), x_2'' = \varphi_2(\beta), \dots, x_m'' = \varphi_m(\beta).$$

Понятие непрерывной кривой в пространстве E^m позволяет нам ввести понятие связного множества.

15°. Множество $\{M\}$ точек пространства E^m называется связным, если любые две точки этого множества можно соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат этому множеству.

Убедимся в том, что всякое связное множество $\{M\}$ в пространстве E^m обладает следующим свойством: если множество $\{M\}$ связно, то не существует двух непустых непересекающихся открытых множеств G' и G'' таких, что пересечение каждого из этих множеств с $\{M\}$ не пусто и множество $\{M\}$ содержится в объединении G' и G'' .

Проведем доказательство этого свойства от противного. Предположим, что два указанных множества G' и G'' существуют. Так как пересечение каждого из этих множеств с $\{M\}$ не пусто, то найдутся две точки M' и M'' множества $\{M\}$, первая из которых принадлежит G' , вторая G'' .

Чтобы получить противоречие, завершающее наше доказательство, нам достаточно установить, что точки M' и M'' нельзя соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат множеству $\{M\}$.

Пусть L — любая непрерывная кривая в пространстве E^m , определяемая уравнениями (12.3) и соединяющая указанные точки M' и M'' . Упорядочим все точки кривой L по возрастанию параметра t , который изменяется в пределах сегмента $\alpha \leq t \leq \beta$. Обозначим через γ точную верхнюю грань тех значений параметра t , для которых отвечающие им точки кривой L принадле-

жат множеству G' , а через N точку кривой L , отвечающую значению параметра $t = \gamma$.

Достаточно доказать, что указанная точка N не принадлежит множеству $\{M\}$, а для этого достаточно убедиться, что эта точка N не принадлежит ни множеству G' , ни множеству G'' .

Если бы точка N принадлежала G' , то, поскольку множество G' является открытым, нашлась бы некоторая ϵ -окрестность точки N , также принадлежащая G' , т. е. нашлись бы точки кривой L отвечающие значениям параметра t , превосходящим γ , принадлежащие G' , а это противоречит тому, что γ является точной верхней гранью значений параметра t , для которых соответствующие точки кривой L принадлежат G' .

Аналогично если бы точка N принадлежала G'' , то она принадлежала бы этому множеству вместе с некоторой своей ϵ -окрестностью, т. е. нашлись бы точки кривой L , отвечающие значениям параметра t , меньшим γ , принадлежащие G'' и потому не принадлежащие G' , а это противоречит тому, что γ является точной верхней гранью значений параметра t , для которых соответствующие точки кривой L принадлежат множеству G'' .

Итак, точка N не принадлежит ни G' , ни G'' , и сформулированное свойство доказано.

Мы не будем останавливаться на доказательстве обратного утверждения о том, что если множество $\{M\}$ в пространстве E^m обладает указанным выше свойством, то оно является связным, а лишь отметим, что установленное нами свойство может быть положено в основу другого «топологического» определения понятия связного множества.

16°. Всякое открытое и связное множество в пространстве E^m принято называть областью.

17°. Если множество $\{M\}$ представляет собой область, то множество $\{\bar{M}\}$, полученное присоединением к множеству $\{M\}$ всех его граничных точек, называется замкнутой областью.

Открытый m -мерный шар и открытый m -мерный координатный параллелепипед являются ограниченными, связными и открытыми множествами, т. е. дают примеры ограниченных областей в пространстве E^m .

m -мерная сфера в пространстве E^m дает пример замкнутого и ограниченного множества.

Замкнутый m -мерный шар представляет собой ограниченную замкнутую область в E^m .

Дополнение к открытому m -мерному шару представляет собой неограниченное замкнутое множество.

Совокупность двух непересекающихся областей в пространстве E^m дает пример несвязного множества.

3. Понятие функции m переменных. Теперь мы подготовлены для того, чтобы ввести понятие функции m переменных.

Если каждой точке M из множества $\{M\}$ точек m -мерного евклидова пространства E^m ставится в соответствие по известному закону некоторое число u , то говорят, что на множестве $\{M\}$ задана функция $u=u(M)$ или $u=f(M)$. При этом множество $\{M\}$ называется областью задания функции $u=f(M)$.

Число u , соответствующее данной точке M из множества $\{M\}$, будем называть частным значением функции в точке M . Совокупность всех частных значений функции $u=f(M)$ называется множеством значений этой функции. Так как точка M определяется координатами x_1, x_2, \dots, x_m , то для функции $u=f(M)$ m переменных используется также обозначение $u=f(x_1, x_2, \dots, x_m)$.

Рассмотрим примеры функций m переменных.

Начнем с примеров функций двух переменных.

1°. $u = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$. Областью задания этой функции является круг радиуса 2 с центром в начале координат, а множество значений представляет собой сегмент $0 \leq u \leq 2$.

2°. $u = [\sqrt{x^2 + y^2 - 4}]^{-1}$. Областью задания этой функции является множество точек, лежащих вне круга радиуса 2 с центром в начале координат, а множество значений представляет собой открытую полупрямую $u > 0$.

3°. $u = \sqrt{\cos(x^2 + y^2)}$. Областью задания этой функции является множество $\{M\}$ точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $\cos(x^2 + y^2) \geq 0$. Это неравенство эквивалентно неравенствам $0 \leq x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{2}$, $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq x^2 + y^2 \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ при $k = 1, 2, \dots$

Таким образом, $\{M\}$ состоит из круга радиуса $\sqrt{\pi/2}$ с центром в точке $O(0, 0)$ и кольцеобразных областей (рис. 12.1).

Приведем теперь примеры функций m переменных.

4°. Пусть $u = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_m^2}$. Областью задания этой функции служит, очевидно, m -мерный шар радиуса 1 с центром в точке $O(0, 0, \dots, 0)$. Множеством значений рассматриваемой функции является сегмент $[0, 1]$.

5. Пусть $u = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \dots - \frac{x_m^2}{a_m^2}}}$. Областью задания этой функции является множество $\{M\}$ всех точек M пространства E^m , координаты x_1, x_2, \dots, x_m которых удовлетворяют неравенству

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \dots + \frac{x_m^2}{a_m^2} < 1$$

(при этом предполагается, что a_1, a_2, \dots, a_m — некоторые положительные числа).