Наряду с канонической компактной формой каждая полупростая комплексная алгебра Ли обладает канонической некомпактной формой, называемой иногда нормальной некомпактной формой. Рассмотрим снова базис Вейля в G и построим следующую инволюцию $\tau\colon G \to G$, где $\tau E_\alpha = E_\alpha$, $\tau H'_\alpha = H'_\alpha$, т. е. отображение τ тождественно на вещественной части плоскостей V^+ и V^-, а также на вещественной части T_0 картановской подалгебры T. Но эта инволюция отнюдь не является тождественной на всей алгебре, так как $\tau(\lambda X) = \overline{\lambda}\tau X$. Следовательно, $\tau(iT_0) = -iT_0$, $\tau(iE_\alpha) = -iE_\alpha$. Множество неподвижных точек инволюции τ совпадает с плоскостью $\operatorname{Re} V^+ \oplus \operatorname{Re} V^- \oplus T_0$, т. е. с линейной оболочкой (над полем $\mathbb{R}$) векторов: $\{E_\alpha, E_{-\alpha}, H'_\alpha\}$. Из предложения 11.4 следует, что это — подалгебра.

Определение 12.4. Вещественная подалгебра $\{E_\alpha, E_{-\alpha}, H'_\alpha\}$ называется нормальной некомпактной формой алгебры G.

В нашем модельном примере эта подалгебра совпадает, очевидно, с подалгеброй вещественных матриц со следом нуль, т. е. с $sl(n, \mathbb{C})$, а инволюция τ совпадает с инволюцией $\tau A = \overline{A}$, где черта означает комплексное сопряжение. Как и компактная форма, некомпактная нормальная форма определена однозначно с точностью до автоморфизма объемлющей комплексной алгебры Ли. Мы не будем здесь доказывать этот факт, поскольку в дальнейшем он нам не потребуется. Таким образом, каждой комплексной полупростой алгебре Ли G однозначно (с точностью до автоморфизма алгебры) сопоставляются две ее подалгебры — компактная и некомпактная (нормальная) формы. Взаимное расположение компактной и некомпактной форм в объемлющей алгебре G условно показано на рис. 144. Более подробная схема показана на рис. 145. Это разложение показано над полем $\mathbb{R}$, в связи с чем отдельно изображены как «вещественные», так и «мнимые» плоскости. Отметим, что компактная вещественная форма G_u допускает еще одну инвариантную характеристику, а именно эта подалгебра является максимальной компактной подалгеброй в комплексной алгебре Ли G. Приведем теперь полный список простых алгебр Ли G над $\mathbb{C}$ и их компактных вещест-

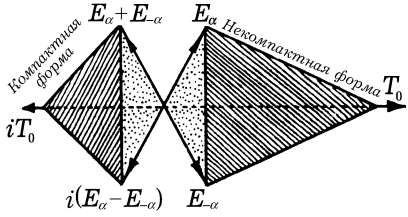

Рис. 144

венных форм G_u:

Серия	G	G_u	$\dim G_u$
A_n, $n \geqslant 1$	$sl(n+1, \mathbb{C})$	su_{n+1}	$n(n+2)$
B_n, $n \geqslant 2$	$so(2n+1, \mathbb{C})$	so_{2n+1}	$n(2n+1)$
C_n, $n \geqslant 3$	$sp(n, \mathbb{C})$	sp_n	$n(2n+1)$
D_n, $n \geqslant 4$	$so(2n, \mathbb{C})$	so_{2n}	$n(2n-1)$
G_2	$g_2(\mathbb{C})$	g_2	14
F_4	$f_4(\mathbb{C})$	f_4	52
E_6	$e_6(\mathbb{C})$	e_6	78
E_7	$e_7(\mathbb{C})$	e_7	133
E_8	$e_8(\mathbb{C})$	e_8	248

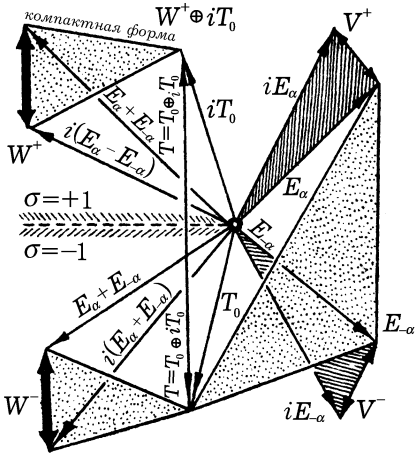

Рис. 145

Укажем здесь еще одну часто появляющуюся в конкретных задачах компактную подалгебру в комплексной полупростой алгебре G. Для этого рассмотрим две введенные нами выше инволюции: σ (определяющую компактную форму) и τ (определяющую некомпактную нормальную форму). Рассмотрим множество G_n точек, неподвижных относительно обеих инволюций. Так как $\sigma = 1$ на $W^+ \oplus iT_0$, а $\tau = 1$ на $\{E_\alpha\} \oplus \oplus \{E_{-\alpha}\} \oplus T_0$, то G_n натянуто на векторы $\{E_\alpha + E_{-\alpha}\}$, так как они и только они остаются на месте при действии обеих инволюций одновременно. Следовательно, G_n является компактной подалгеброй. Она совпадает с пересечением в алгебре G двух ее вещественных форм: компактной G_u и некомпактной нормальной. Отметим, что подалгебра G_n отнюдь не является вещественной формой алгебры G (!), так как ее комплексификация отнюдь не совпадает с G. Подалгебра G_n иногда называется нормальной компактной подалгеброй (но не формой!). В нашем модельном примере $sl(n, \mathbb{C})$ получаем $G_n = G_u \cap$ (нормальная некомпактная форма) =

$= G_n = su_n \cap sl(n, \mathbb{R}) = so_n$, так как косоэрмитовы вещественные матрицы являются кососимметрическими.

§ 13. Орбиты присоединенного представления

1. Орбиты общего положения и сингулярные орбиты

Оказывается, с каждой полупростой алгеброй Ли естественно связан набор некоторых гладких многообразий, являющихся однородными пространствами и играющими, как выяснилось особенно в последние годы, значительную роль в различных задачах классической механики и их современных обобщениях и аналогах. Эти многообразия называются орбитами, они естественным образом вложены в алгебру Ли G и «расслаивают» ее в том смысле, что алгебра Ли является объединением этих непересекающихся орбит. Кроме того, орбиты тесно связаны с алгебраической структурой в G и несут на себе прочный отпечаток тех соотношений, которые выделяют данную алгебру из множества всех алгебр Ли. В предыдущем параграфе, изучая картановскую подалгебру T, мы были вынуждены представить ее в виде прямой суммы подалгебр $T = T_0 \oplus iT_0$, где iT_0 — «мнимая часть» алгебры T — является картановской подалгеброй в компактной форме $G_u \subset G$. В настоящем параграфе мы будем иметь дело именно с подалгеброй iT_0, поэтому для упрощения обозначений переобозначим ее через H. Итак, $H = iT_0$ в G_u. Алгебру G_u будем обозначать через G. В этом параграфе мы будем рассматривать в основном только компактные алгебры Ли и соответствующие им группы Ли. Если раньше мы иллюстрировали все основные понятия, связанные с комплексными полупростыми алгебрами Ли на модельном примере алгебры $sl(n, \mathbb{C})$, то теперь будем моделировать все наши построения на примере компактной формы этой алгебры Ли, т. е. на примере алгебры Ли специальной унитарной группы SU_n. Пусть G — компактная алгебра и $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{G}} : G \to G$ — присоединенное представление группы $\mathfrak{G}$ в виде линейных преобразований ее алгебры Ли. Пусть $X \in G$. Так как мы рассматриваем матричные алгебры Ли, то действие Ad_g записывается так: $\mathrm{Ad}_g X = gXg^{-1}$. Множество элементов вида gXg^{-1}, где g пробегает всю группу $\mathfrak{G}$, называется орбитой $O(X)$ элемента X (при присоединенном представлении группы). Ясно, что орбита является однородным пространством, т. е. представима в виде $\mathfrak{G}/C(X)$, где $C(X)$ — централизатор элемента X, т. е. множество

всех тех элементов g группы $\mathfrak{G}$, для которых $gX = Xg$. Централизатор является подгруппой, и поэтому орбита $O(X)$ отождествляется с множеством классов смежности по подгруппе $C(X)$.

Лемма 13.1. *Элемент $X \in G$ является регулярным элементом компактной полупростой алгебры Ли G тогда и только тогда, когда $\dim C(X) = \dim H$, где H — картановская подалгебра в G. В этом случае связная компонента единицы в группе $C(X)$ совпадает со связной подгруппой $\widetilde{T}$, соответствующей подалгебре H и являющейся максимальной связной коммутативной подгруппой в группе $C(X)$.*

Доказательство.

В компактной алгебре Ли G любой элемент может быть включен в некоторую картановскую подалгебру. В случае su_n это утверждение сразу следует из представления элемента X в виде $g^{-1}hg$, где h — диагональная матрица. Тогда в качестве картановской подалгебры, содержащей X, можно взять подалгебру $g^{-1}Hg$, где H — подалгебра диагональных матриц. Следовательно, $C(X)$ является группой Ли, соответствующей аннулятору регулярного элемента X. Но этот аннулятор совпадает с картановской подалгеброй $g^{-1}Hg$, что и завершает доказательство. ■

Следствие 13.1. *Пусть H — фиксированная картановская подалгебра в компактной алгебре Ли G. Тогда каждая орбита $O(X)$ обязательно пересекается с подалгеброй H. Это означает, что алгебра G представляется в виде объединения орбит, «вырастающих» из точек подалгебры H* (рис. 146).

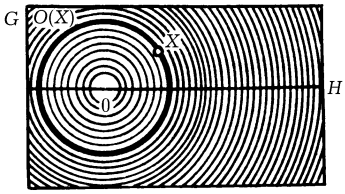

Рис. 146

Доказательство (для случая su_n) немедленно следует из того, что любой элемент X приводится к диагональному виду.

Отметим, что если X — регулярный элемент, то и вся его орбита состоит из регулярных элементов. Следовательно, сингулярные орбиты состоят, только из сингулярных элементов. Будем называть орбиты, состоящие из регулярных элементов алгебры, орбитами общего положения («типичными орбитами»). Ясно, что объединение всех орбит общего положения является открытым всюду плотным

множеством в G. Напротив, сингулярные орбиты образуют множество нулевой меры.

Определение 13.1. Размерность r картановской подалгебры H в полупростой алгебре G называется рангом G.

Из леммы 13.1 следует, что размерность орбиты общего положения в G равна $N - r$, где N — размерность G. Другими словами, $\operatorname{codim} O(X) = r$. Если орбита сингулярна, то ее размерность строго меньше, чем размерность орбиты общего положения.

Лемма 13.2. *Пусть X — произвольная точка на орбите $O(X)$ (орбита может быть и сингулярной). Пусть $T_X O(X)$ — касательное пространство к многообразию $O(X)$ в точке X. Тогда плоскость $T_X O(X)$ состоит из векторов вида $[X, Y]$, где элемент Y пробегает всю алгебру Ли G.*

Доказательство.

Так как $O(X) \subset G$, то и плоскость $T_X O(X)$ содержится в G. По определению орбиты она составлена из точек вида gXg^{-1}, где g пробегает группу $\mathfrak{G}$. Следовательно, любой касательный вектор a к орбите $O(X)$ допускает представление в виде $a = \dot{X}(t)|_{t=0}$, где $X(t) \in O(X)$, $X(t) = g(t)Xg^{-1}(t)$, $g(t)$ — гладкая кривая в группе $\mathfrak{G}$, проходящая через ее единицу, т. е. $g(0) = E$ (рис. 147). Следовательно, касательное пространство $T_X O(X)$ получается из вектора X применением к нему всех преобразований вида ad_Y, так как ad_Y является дифференциалом преобразования Ad_g в единице группы $E \in \mathfrak{G}$. Так как $\operatorname{ad}_Y X = [Y, X]$, то лемма доказана. ■

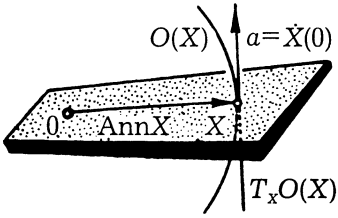

Рис. 147

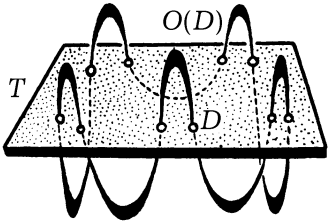

Рис. 148

Следствие 13.2. *Пусть $\operatorname{Ann} X$ — аннулятор элемента X в компактной алгебре G (X может быть сингулярным элементом). Тогда орби-*

та $O(X)$ этого элемента ортогональна плоскости $\operatorname{Ann} X$ *в точке X. В частности, плоскости* $\operatorname{Ann} X$ *и $T_X O(X)$ (касательная плоскость к орбите) порождают в сумме всю алгебру Ли G* (рис. 148).

Доказательство.

Последнее утверждение вытекает из леммы 13.2. Осталось доказать ортогональность плоскостей $\operatorname{Ann} X$ и $T_X O(X)$. В силу леммы 11.1 операторы ad_Y являются кососимметричными относительно формы Киллинга, следовательно, преобразования $\operatorname{Ad}_g\colon G \to G$ являются ортогональными относительно этой же формы. Таким образом, вся орбита $O(X)$ целиком содержится в сфере S^{N-1}, радиус которой равен длине вектора X, где $N = \dim G$. Пусть $\operatorname{Ann} X \neq 0$ и $X \in \operatorname{Ann} X$. Тогда алгебра G распадается в прямую сумму своих двух подпространств $G = \operatorname{Ann} X \oplus V$, где V — плоскость, ортогональная $\operatorname{Ann} X$ относительно формы Киллинга. В силу леммы 13.2 плоскость $T_X O(X)$ состоит из векторов вида $[X, Y]$, где $Y \in G$ (рис. 149). Ясно, что достаточно брать векторы Y из плоскости V, поскольку векторы Y, взятые из $\operatorname{Ann} X$, переходят в нуль при коммутировании с X и не дают, следовательно, никакого вклада в построение плоскости $T_X O(X)$. Таким образом, $T_X O(X) = [X, V] = \{[X, Y], Y \in V\}$. Каждый вектор вида $[X, Y] = v$, $Y \in V$ записывается так: $v = \operatorname{ad}_X Y$. Поскольку оператор ad_X кососимметричен относительно формы Киллинга (см. лемму 11.1), то он переводит в себя ортогональное дополнение к $\operatorname{Ann} X$, следовательно, плоскость V инвариантна относительно оператора ad_X. Но это означает, что вектор $\operatorname{ad}_X Y = [X, Y]$ ортогонален к $\operatorname{Ann} X$, если $Y \in V$. Утверждение доказано. ■

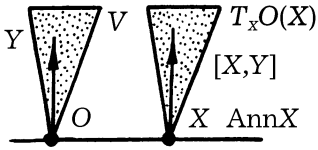

Рис. 149

Доказанные утверждения позволяют построить простую геометрическую картину поведения орбит в компактной алгебре G. Фиксируем картановскую подалгебру H и выпустим из каждой ее точки орбиту O присоединенного действия группы $\mathfrak{G}$. Эта орбита, являясь гладким многообразием, «вырастает» из точки h ортогонально к H. Для любой орбиты общего положения размерность касательной плоскости к O в точке h равна $\dim G - \dim H$. Если орбита сингулярна, то $\dim T_h O < \dim G - \dim H$. Не следует думать, что орбита $O(h)$, начавшись в точке $h \in H$, никогда больше не вернется на H. Дело в том,

что пересечение орбиты $O(h)$ с картановской подалгеброй H состоит в общем случае из нескольких точек (см. рис. 148).

В группе $\mathfrak{G}$ могут быть элементы $g_0 \notin \widetilde{T}$ (где через $\widetilde{T}$ обозначена связная коммутативная подгруппа, касательная плоскость к которой совпадает с H) такие, что $g_0 h g_0^{-1} \in H$ и $g_0 h g_0^{-1} \neq h$. Это и означает, что орбита $O(h)$, «вырастая» из элемента h, через некоторое время снова возвращается на плоскость H, пересекая ее в точке $g_0 h g_0^{-1}$ отличной от точки h.

Проиллюстрируем этот эффект на простейшем примере. Возьмем в качестве группы $\mathfrak{G}$ компактную группу SO_3, тогда алгебра Ли so_3 состоит из кососимметрических вещественных матриц, ясно, что $\dim so_3 = 3$. Присоединенное действие $X \to gXg^{-1}$ совпадает в этом случае со стандартным действием ортогональной группы SO_3 на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. При этом форма Киллинга совпадает здесь с обычным евклидовым скалярным произведением (проверьте!). Следовательно, орбиты присоединенного действия группы SO_3 являются двумерными сферами, имеющими центр в точке 0 (если орбита общего положения), и точка 0 является единственной сингулярной орбитой (неподвижной точкой в данном примере). Картановская подалгебра H здесь одномерна и может быть отождествлена с прямой, проходящей через точку 0. Следовательно, каждая орбита общего положения пересекается с картановской подалгеброй ровно в двух точках (рис. 150). Орбиты общего положения в компактной алгебре G диффеоморфны однородному пространству — гладкому многообразию $\mathfrak{G}/T$, в частности все они диффеоморфны между собой. Это сразу следует из леммы 13.1.

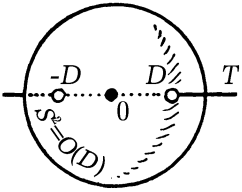

Рис. 150

2. Орбиты в группах Ли

До сих пор мы изучали структуру орбит в компактной алгебре Ли. Однако для приложений часто полезно знать поведение орбит в соответствующей этой алгебре связной компактной группе Ли. Присоединенное действие $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{G}}$ группы $\mathfrak{G}$ на алгебре G порождено присоединенным действием группы $\mathfrak{G}$ на себе $g \to g_0 g g_0^{-1}$, $g, g_0 \in \mathfrak{G}$. Таким образом, каждому элементу g группы $\mathfrak{G}$ соответствует диффеоморфизм группы на себя. Как и в случае алгебры Ли, это гладкое действие группы $\mathfrak{G}$ определяет разбиение группы в объединение непересекающихся

орбит, т. е. гладких подмногообразий $O(g_0) = \{gg_0g^{-1}, g \in \mathfrak{G}\}$. Ясно, что $O(g_0) = \mathfrak{G}/C(g_0)$, где $C(g_0)$ — замкнутая (и, следовательно, компактная) подгруппа в группе $\mathfrak{G}$, состоящая из элементов, оставляющих точку g_0 на месте. Подгруппа $C(g_0)$ называется иногда стационарной подгруппой точки $g_0 \in \mathfrak{G}$.

Лемма 13.3. *Пусть g_0 и g_0' — пара точек, принадлежащих одной орбите $O \subset \mathfrak{G}$. Тогда стационарные подгруппы $C(g_0)$ и $C(g_0')$ этих точек сопряжены друг другу в группе $\mathfrak{G}$, т. е. существует такой элемент $s \in \mathfrak{G}$, что $sC(g_0)s^{-1} = C(g_0')$.*

Доказательство сразу вытекает из определения орбиты. Пусть $\widetilde{T}$ — подгруппа в группе $\mathfrak{G}$, соответствующая картановской подалгебре H, т. е. (напомним, что мы рассматриваем только матричные группы и алгебры Ли) $\widetilde{T} = \exp H$, где отображение $\exp\colon G \to \mathfrak{G}$ является операцией взятия экспоненты от матрицы, т. е. $\exp X = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n$ (подробности см. в [1]). Наша ближайшая цель — изучить геометрические свойства разбиения компактной группы Ли в объединение орбит.

Лемма 13.4. *Подгруппа $\widetilde{T} = \exp H$, где H — картановская подалгебра в компактной алгебре G, диффеоморфна тору T^r, где r — ранг G, и $\widetilde{T}$ является максимальной связной коммутативной подгруппой в $\mathfrak{G}$.*

Доказательство.

Рассмотрим подгруппу R, являющуюся замыканием подгруппы $\exp H$ в группе $\mathfrak{G}$. Ясно, что R — замкнутая связная коммутативная подгруппа в $\mathfrak{G}$, поэтому ее алгебра Ли $T_E R$ содержит в себе подалгебру H. Если $R \neq \exp H$, то $\dim T_E R > \dim H$, что противоречит свойству максимальности подалгебры H среди всех коммутативных подалгебр в алгебре G. Поэтому $R = \exp H = \widetilde{T}$. Лемма доказана. ■

Эта подгруппа называется иногда максимальным тором в группе $\mathfrak{G}$.

Следующая теорема является одной из основных в теории компактных групп Ли. Как и раньше, мы могли бы проиллюстрировать ее справедливость только для модельного примера компактной группы SU_n — компактной формы группы $SL(n, \mathbb{C})$, однако ввиду важности теоремы мы (в следующем п. 3) докажем ее для произвольной компактной группы.

Теорема 13.1. *Пусть $\widetilde{T}$ — максимальный тор связной компактной*

группы Ли $\mathfrak{G}$. Тогда для любого элемента $g \in \mathfrak{G}$ найдется такой элемент $g_0 \in \mathfrak{G}$, что $g_0 g g_0^{-1} \in \widetilde{T}$, т. е. каждая орбита O группы $\mathfrak{G}$ обязательно пересекается по крайней мере в одной точке с максимальным тором $\widetilde{T}$.

Следствие 13.3. *Всякий элемент g связной компактной группы Ли $\mathfrak{G}$ принадлежит некоторой однопараметрической подгруппе, в частности, имеет вид $\exp X$ для некоторого элемента $X \in G$.*

Доказательство.

В силу теоремы 13.1 существует элемент $g_0 \in \mathfrak{G}$ такой, что $g_0 g g_0^{-1} \in \widetilde{T}$. Для элементов максимального тора утверждение очевидно, т. е. $g_0 g g_0^{-1} = \exp Y$, $Y \in H$ т. е. $g = \exp(g_0^{-1} Y g_0)$, что и требовалось доказать. ■

Следствие 13.4. *Всякая связная коммутативная подгруппа K в компактной группе Ли $\mathfrak{G}$ содержится в максимальном торе, сопряженном тору $\widetilde{T}$.*

Доказательство.

Рассмотрим замыкание $\overline{K}$ подгруппы K в $\mathfrak{G}$. Так как K коммутативна, то $\overline{K}$ также коммутативна, т. е. является тором некоторой размерности. Из алгебры известно, что во всяком торе существует элемент, степени которого образуют всюду плотное подмножество в торе. Обозначим этот элемент через t. Но в силу теоремы 13.1 существует элемент $g \in \mathfrak{G}$ такой, что $t \in g\widetilde{T}g^{-1}$. Ясно, что тогда $t^n \in g\widetilde{T}g^{-1}$ при всяком целом n, откуда и следует, что $\overline{K} = \overline{\{t^n\}} \subset g\widetilde{T}g^{-1}$, что и требовалось доказать. ■

Следствие 13.5. *Любые два максимальных тора (т. е. две связные максимальные коммутативные подгруппы) в компактной группе сопряжены.*

Доказательство.

Пусть $K = \overline{K}$ — максимальный тор. В силу следствия 13.4 существует элемент $g \in \mathfrak{G}$ такой, что $K = g\widetilde{T}g^{-1}$, что и требовалось. Обратно, из следствия 13.5 вытекает теорема 13.1. ■

3. Доказательство теоремы сопряженности максимальных торов в компактной группе Ли

Пусть $f\colon M^n \to M^n$ — гладкое отображение компактного замкнутого гладкого многообразия M в себя. Тогда этому отображе-

нию можно сопоставить некоторое целое число, называемое числом Лефшеца $l(f)$. Одно из его возможных определений связано с гомологиями многообразия M. Отображение f индуцирует гомоморфизмы $f_q\colon H_q(M, A) \to H_q(M, A)$, где A — группа коэффициентов. Для простоты рассмотрим в качестве A поле вещественных чисел. Тогда гомоморфизм f_q задается матрицей размера $(\beta_q \times \beta_q)$ с вещественными коэффициентами, где $\beta_q = \dim_{\mathbb{R}} H_q(M^n, \mathbb{R})$. Напомним, что β_q называется числом Бетти, и оно совпадает с рангом группы $H_q(M, \mathbb{Z})$. Рассмотрим след $\operatorname{Sp} f_q$ матрицы f_q и построим следующее вещественное число $l(f) = \sum\limits_{q=0}^{n} (-1)^q \operatorname{Sp} f_q$. Это число и называется числом Лефшеца данного отображения f. Число $l(f)$ обладает следующими свойствами (их доказательства мы предоставляем читателю в качестве полезного упражнения; см., например, [4]):

1) $l(f)$ — целое число; 2) если отображения f и g гомотопны, то $l(f) = l(g)$, 3) если $l(f) \neq 0$, то отображение $f\colon M \to M$ имеет по крайней мере одну неподвижную точку; 4) если все неподвижные точки отображения f изолированы, то каждой неподвижной точке x_i можно сопоставить число λ_i, называемое ее индексом, таким образом, что имеет место равенство $l(f) = \sum\limits_i \lambda_i$, где сумма берется по всем неподвижным точкам; 5) если x_0 — изолированная неподвижная точка, и дифференциал df отображения f в этой точке не имеет собственных значений, равных единице, то индекс $\lambda(x_0)$ неподвижной точки x_0 равен знаку числа $\det(df - E)$, где E — тождественное отображение. При этом df рассматривается как линейное отображение касательного пространства $T_{x_0}M$ в себя, задаваемое матрицей $\left(\dfrac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$, где $y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)$, $\{x_i\}$ — локальные регулярные координаты в окрестности неподвижной точки.

Пусть многообразие M, для простоты, ориентируемо. Число Лефшеца допускает еще одну более геометрическую интерпретацию. Для этого рассмотрим прямое произведение многообразия M на себя и изобразим гладкое отображение $f\colon M \to M$ в виде «графика» в этом прямом произведении, т. е. рассмотрим в $M \times M$ подмножество точек вида $(x, f(x))$, где $x \in M$ (рис. 151). Это подмножество и называется графиком отображения f. Например, если f — тождественное отображение, то его график совпадает с диагональю Δ прямого произведения,

т. е. с подмножеством точек вида (x, x). Таким образом, мы получаем в прямом произведении $M \times M$ размерности $2n$ два компактных гладких ориентируемых замкнутых подмногообразия: Γ и Δ, каждое из которых имеет размерность n. Так как сумма их размерностей равна размерности объемлющего многообразия, то в случае «общего положения» определен индекс пересечения этих подмногообразий, который мы уже рассматривали выше в § 6. Для этого нужно фиксировать в каждой точке пересечения два n-репера, касательных к Γ и Δ, и сравнить ориентацию $2n$-репера, определяемого ими, с ориентацией объемлющего многообразия $M \times M$ (при этом предполагается, что n-реперы задают положительные ориентации на двух подмногообразиях). В зависимости от того, совпадают ли эти ориентации или нет, ставим $+1$ или -1 в точке пересечения. Сумма этих чисел по всем точкам пересечения и есть индекс пересечения Γ и Δ в $M \times M$. Оказывается, этот индекс равен числу Лефшеца.

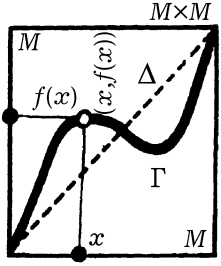

Рис. 151

Предложение 13.1. *Пусть Γ — график гладкого отображения f: $M \to M$, а Δ — диагональ (т. е. график тождественного отображения $M \to M$). Тогда в случае «общего положения» (т. е. когда Γ и Δ пересекаются трансверсально в $M \times M$) число Лефшеца $l(f)$ равно индексу пересечения Γ и Δ.*

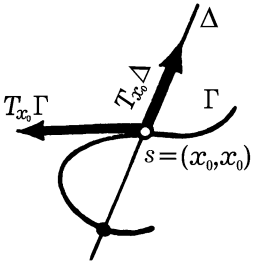

Рис. 152

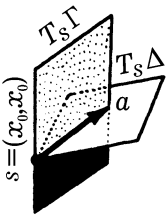

Рис. 153

Доказательство.

Мы воспользуемся свойствами числа $l(f)$, перечисленными выше. Поскольку мы предположили трансверсальность пересечения подмно-

гообразий Γ и Δ в многообразии $M \times M$, то число точек пересечения конечно, и все они изолированы (в силу компактности многообразия). В каждой точке пересечения $s = (x_0, x_0)$ касательные плоскости $T_{x_0}\Gamma$ и $T_{x_0}\Delta$ пересекаются только в одной точке, и их сумма дает всю касательную плоскость $T_s(M \times M)$ (рис. 152). Мы утверждаем, что условие трансверсальности пересечения Γ и Δ в точке $s = (x_0, x_0)$ в точности эквивалентно тому, что дифференциал df в точке x_0 не имеет собственных значений, равных единице. В самом деле, если $a \in T_{x_0}M$ — собственный вектор линейного отображения df с собственным числом единица, то этот вектор a определяет неподвижное направление в $T_{x_0}M$ и, следовательно, при рассмотрении графика Γ в $M \times M$ определяет вектор (a, a), лежащий в пересечении касательных плоскостей $T_s\Gamma$ и $T_s\Delta$, т. е. подмногообразия Γ и Δ не удовлетворяют условию трансверсальности в точке s (рис. 153). Полученное противоречие доказывает отсутствие собственных чисел 1 у преобразования df. Осталось доказать, что знак определителя $\det(df - E)$ совпадает со знаком, определяемым в точке пересечения Γ и Δ двумя n-реперами, объединенными в один $2n$-репер (см. выше). Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — локальные регулярные координаты в малой окрестности неподвижной точки x_0. Тогда они определяют линейные невырожденные координаты (которые мы обозначим для простоты теми же буквами) $x_1, \ldots, x_n$ на касательной плоскости $T_{x_0}M$. В касательной плоскости $T_s(M \times M)$, распадающейся в прямую сумму двух плоскостей $T_s\Gamma \oplus T_s\Delta$, возникают, следовательно, невырожденные координаты $x_1, \ldots, x_n$ в плоскости $T_s\Delta$ и $y_1, \ldots, y_n$ в плоскости $T_s\Gamma$ (изоморфной плоскости $T_s\Delta$). Таким образом, отображение f, будучи разложено в ряд Тейлора в окрестности неподвижной точки x_0, определяет линейное отображение $df\colon T_s\Delta \to T_s\Gamma$, являющееся линеаризацией отображения f. Действие этого отображения показано на рис. 154.

При этом для удобства мы установили каноническое соответствие между координатами $x_1, \ldots, x_n$ на $T_s\Delta$ с координатами $y_1, \ldots, y_n$ на плоскости $T_s\Gamma$ с помощью тождественного отображения E, являющегося, очевидно, дифференциалом тождественного отображения $M \to M$, задающего диагональ Δ. Таким образом, вектор $df(b) - b$ является разностью между $df(b)$ и $E(b)$ в плокости $T_s\Gamma$, т. е. он показывает отклонение линейного отображения df от тождественного отображения. Тем самым мы добились того, что изобразили отображение $df\colon T_s\Delta \to T_s\Gamma$ при помощи эндоморфизма плоскости $T_s\Gamma$, отождествив ее по отображению E с исходной плоскостью $T_s\Delta$. Теперь очевидно, что ориента-

ция $2n$-репера определяется знаком определителя $\det(df - E)$. Мы получили определение индекса неподвижной точки, сформулированное нами выше в свойстве 5. Утверждение доказано. ■

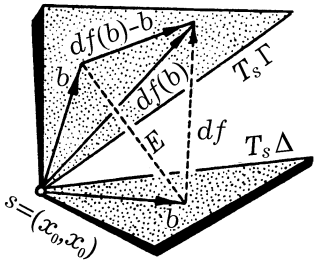

Рис. 154

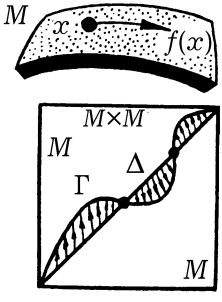

Рис. 155

Отметим интересный частный случай. Пусть гладкое отображение f близко к тождественному отображению $M \to M$, т. е. определяет гладкое векторное поле на M (рис. 155). Тогда график этого отображения (векторного поля) задается поверхностью, близкой к диагонали Δ. Неподвижные точки отображения f, т. е. точки пересечения графика с диагональю, это, очевидно, нули векторного поля. Следовательно, индекс особой точки в смысле свойства 5 совпадает с индексом особой точки векторного поля. Трансверсальность пересечения графика с диагональю в этом случае означает, что особая точка векторного поля невырождена (проверьте!). Таким образом, из предложения 13.1 следует, что число Лефшеца такого отображения равно индексу векторного поля, т. е. эйлеровой характеристике исходного многообразия M. Если же отображение f не является «малым сдвигом», то, конечно, эта интерпретация числа Лефшеца разрушается, хотя сохраняется факт, обнаруженный нами ранее при изучении индекса векторного поля: если этот индекс (соответственно число Лефшеца) не нуль, то отображение f имеет неподвижную точку.

Возвращаемся теперь к изучению орбит в компактной группе (алгебре) Ли. Переходим непосредственно к доказательству теоремы о сопряженности максимальных торов в компактной группе.

В качестве многообразия M, фигурировавшего выше, возьмем однородное пространство $\mathfrak{G}/\widetilde{T}$, диффеоморфное орбите общего положения

в группе $\mathfrak{G}$ (см. выше), так как стационарная подгруппа регулярного элемента совпадает с максимальным тором. Элементом пространства M являются классы смежности $\overline{a} = a\widetilde{T}$ по подгруппе $\widetilde{T}$. В качестве отображения $M \to M$ возьмем отображение f_g, порождаемое левым сдвигом на элементы $g \in \mathfrak{G}$, т. е. $f_g(\overline{a}) = \overline{ga} = ga\widetilde{T}$ (здесь черту не следует путать со знаком сопряжения). Таким образом, для каждого элемента $g \in \mathfrak{G}$ мы получаем свое отображение f_g. Пусть $\overline{a_0} \in M$ — неподвижная точка отображения f_g. Это означает, что выполняется равенство $f_g(\overline{a_0}) = \overline{a_0}$, т. е. $ga\widetilde{T} = a_0\widetilde{T}$, т. е. $g \in a_0\widetilde{T}a_0^{-1}$. Поэтому для доказательства теоремы 13.1 нам достаточно доказать, что каждое отображение f_g (т. е. при каждом $g \in \mathfrak{G}$) имеет по крайней мере одну неподвижную точку на многообразии $\mathfrak{G}/\widetilde{T}$. Как мы уже знаем, этот факт можно извлечь, например, из того, что число Лефшеца $l(f_g)$ отображения f_g отлично от нуля (см. свойство 3 числа $l(f_g)$. Поскольку группа $\mathfrak{G}$ предполагается линейно связной, то любые две ее точки g_1 и g_2 соединяются непрерывным путем по группе, и, следовательно, любые два отображения f_{g_1} и f_{g_2} гомотопны как отображения $M \to M$. Следовательно, в силу свойства 2 их числа Лефшеца совпадают. Поэтому достаточно подсчитать число Лефшеца для какого-то одного элемента $y \in \mathfrak{G}$, который мы, конечно, выберем теперь наиболее подходящим для нас образом. Удобнее всего взять в качестве такого элемента точку на торе $\widetilde{T}$, которая порождает этот тор своими степенями, т. е. является в этом смысле «образующей тора $\widetilde{T}$». При доказательстве следствия 13.4 мы уже использовали существование такого элемента $y \in \widetilde{T}$, что элементы y^n, $n = 1, 2, \ldots$, образуют всюду плотное подмножество в торе $\widetilde{T}$.

Изучим теперь неподвижные точки отображения f_g. Если $\overline{a_0}$ — неподвижная точка, т. е. $f_y(\overline{a_0}) = \overline{a_0}$, то $y \in a_0\widetilde{T}a_0{}^{-1}$, и, следовательно, $\widetilde{T} = a_0\widetilde{T}a_0{}^{-1}$, т. е. точка a_0 содержится в нормализаторе N тора $\widetilde{T}$ в группе $\mathfrak{G}$. Нормализатором подгруппы называется множество элементов q объемлющей группы, переводящих эту подгруппу в себя при сопряжении $x \to qxq^{-1}$. Элементы нормализатора N представляются, очевидно, автоморфизмами группы $\widetilde{T}$, т. е. мы можем сопоставить каждому элементу $n \in N$ автоморфизм $\varphi(n)$ тора $\widetilde{T}$ в себя: $\varphi(n)h = nhn^{-1}$. Таким образом, мы получаем гомоморфизм φ группы N в группу автоморфизмов тора $\widetilde{T}$. Хорошо известно что группа автоморфизмов тора изоморфна группе обратимых целочисленных матриц и, следовательно,

является дискретной группой. Отсюда вытекает, что построенный нами гомоморфизм φ группы N в группу автоморфизмов тора постоянен на связной компоненте N_0 единицы в группе N. Так как нормализатор является замкнутой подгруппой в компактной группе Ли, то N — группа Ли. Здесь нам потребуется следующая простая

Лемма 13.5. *Пусть K_0 — связная компонента единицы в группе Ли K. Тогда K_0 — нормальный делитель в K.*

Доказательство.

Пусть $g \in K$ — произвольный элемент. Надо доказать, что $gsg^{-1} \in K_0$ для любого $s \in K_0$. Соединим точку s с единицей $E \in K_0$ непрерывным путем $\gamma(t)$, где $\gamma(0) = E$, $\gamma(1) = s$. Тогда $g\gamma(0)g^{-1} = gEg^{-1} = E$. Рассмотрим образ пути γ при непрерывном отображении $x \to gxg^{-1}$, где g фиксирован. Тогда γ переходит в новый путь $g\gamma g^{-1} \subset K_0$, по-прежнему начинающийся в единице группы и идущий в точку $g\gamma(1)g^{-1}$, совпадающую, очевидно, с точкой gsg^{-1}. Следовательно, $gsg^{-1} \in K_0$, что и требовалось. ■

Итак, N_0 — нормальный делитель в нормализаторе N.

Лемма 13.6. *Группа N_0 совпадает с максимальным тором $\widetilde{T}$.*

Доказательство.

Ясно, что все элементы группы N_0 действуют на торе $\widetilde{T}$ как тождественное преобразование. Но это означает, что $nhn^{-1} \equiv h$, т. е. все элементы подгруппы N_0 коммутируют со всеми элементами максимального тора и наоборот. Далее, $\widetilde{T}$ содержится в N_0 (что очевидно). Если бы тор $\widetilde{T}$ не совпадал с N_0, то алгебра Ли группы N_0 была бы больше алгебры Ли тора $\widetilde{T}$, а потому можно было бы найти по крайней мере одну однопараметрическую подгруппу в $\widetilde{T}$, порождающую вместе с тором $\widetilde{T}$ новую коммутативную подгруппу, большую, чем тор $\widetilde{T}$. Но это невозможно в силу максимальности тора $\widetilde{T}$. Следовательно, имеет место равенство $N_0 = \widetilde{T}$, что и требовалось. ■

Лемма 13.7. *Фактор-группа $N/\widetilde{T}$ конечна.*

Доказательство сразу вытекает из двух предыдущих лемм, так как группа N компактна, а $\widetilde{T}$ — нормальный делитель в N.

Лемма 13.8. *Имеется взаимно-однозначное соответствие между неподвижными точками отображения $f_y\colon \mathfrak{G}/\widetilde{T} \to \mathfrak{G}/\widetilde{T}$, где y — образующая тора $\widetilde{T}$, и элементами группы $N/\widetilde{T}$. В частности, все неподвижные точки отображения f_y изолированы, и их имеется конечное число.*

Доказательство.

Выше мы видели, что если $f_y(\overline{a_0}) = \overline{a_0}$, то $a_0 \in N$. Обратно, каждый элемент $n \in N$ определяет некоторую неподвижную точку отображения f_y, причем ясно, что изменение элемента n в его компоненте связности не меняет соответствующую неподвижную точку. Лемма доказана. ■

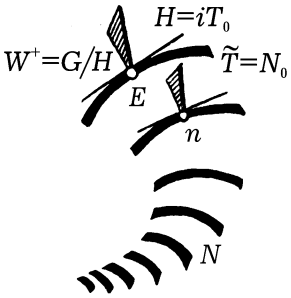

Рис. 156

Для подсчета числа Лефшеца осталось найти индексы неподвижных точек отображения f_y. Если $n \in N$, то для того, чтобы $\overline{n}$ была неподвижной точкой отображения f_y, т. е. чтобы $f_y(\overline{n}) = \overline{n}$, необходимо и достаточно, чтобы $n\widetilde{T}n^{-1} = \widetilde{T}$. Это означает, что $\widetilde{T}$ — стационарная подгруппа точки $\overline{n}$ в однородном пространстве $\mathfrak{G}/\widetilde{T}$. Касательное пространство к орбите $\mathfrak{G}/\widetilde{T}$, проходящей через точку n (т. е. касательное пространство к многообразию $\mathfrak{G}/\widetilde{T}$ в точке $\overline{n}$), естественно отождествляется с фактор-пространством G/H, где H — картановская подалгебра в G, т. е. касательная плоскость к тору $\widetilde{T}$ (рис. 156). Ранее при анализе вложения компактной формы в комплексную алгебру Ли мы установили, что компактная алгебра Ли распадается в сумму подпространств $W^+ \oplus iT_0$, где $iT_0 = H$ (в наших новых обозначениях). Следовательно, касательная плоскость к группе G в точке $n \in N$ также распадается в сумму плоскостей, получающихся из W^+ и H при левом сдвиге единицы в точку n (см. рис. 156). Поэтому картину действия преобразования df_y на касательной плоскости к однородному пространству $G/\widetilde{T}$ в точке n можно изучать по действию преобразования, индуцированного преобразованием df_y на плоскости W^+ в точке E.

Осталось выяснить, какое именно линейное преобразование индуцирует преобразование df_y на плоскости W^+, ортогональной к картановской подалгебре H в точке E. Выше мы установили, что $\widetilde{T}$ реализуется как стационарная подгруппа точки $\overline{n}$ в многообразии $\mathfrak{G}/\widetilde{T}$. Следовательно, образующая у тора $\widetilde{T}$ представлена на касательной плоскости к $\mathfrak{G}/\widetilde{T}$ в точке $\overline{n}$ преобразованием df_y, а с другой стороны, представлена на алгебре Ли G посредством линейного преобразования $\mathrm{Ad}_y\colon X \to yXy^{-1}$, где $X \in G$, $y \in \widetilde{T}$. Это преобразование Ad_y сохраняет форму Киллинга и оставляет на месте подалгебру H, так

как $y \in \widetilde{T}$. Следовательно, Ad_y переводит в себя ортогональное дополнение W^+ к подалгебре H в G.

Осталось изучить действие Ad_y на плоскости W^+. Представим элемент y в виде $\exp(h)$, где h — некоторый элемент картановской подалгебры. Тогда дифференциал преобразования Ad_y совпадает с преобразованием ad_h. Действие же преобразования ad_h нами изучено в § 12. В частности, ad_h представляется кососимметрической матрицей, приводящейся к блочно-диагональному виду, причем блоки имеют размер (2×2). Плоскость W^+ распадается в прямую сумму двумерных плоскостей W_α, каждая из которых натянута на векторы $E_\alpha + E_{-\alpha}$, $i(E_\alpha - E_{-\alpha})$ (см. § 12). В каждой плоскости W_α преобразование Ad_y, следовательно, является ортогональным преобразованием (поворотом двумерной плоскости). Мы утверждаем, что это преобразование не является тождественным ни на какой плоскости W_α. В самом деле, если бы существовал элемент $X \in W^+$ такой, что $\mathrm{Ad}_y X = X$, то поскольку элемент y порождает весь максимальный тор, то для любого элемента $q \in \widetilde{T}$ мы имели бы равенство $\mathrm{Ad}_q X = X$, т. е. элемент X коммутировал бы со всеми элементами тора и, следовательно, со всеми элементами картановской подалгебры H, что противоречит максимальности картановской подалгебры в алгебре G. Следовательно, оператор Ad_y имеет на плоскости W^+ только следующие собственные числа: -1 (с некоторой кратностью) и пары сопряженных (комплексных) собственных значений φ_α, $i\varphi_\alpha$, где φ_α вещественно. В терминах ортогонального поворота плоскости W_α это означает, что могут реализовываться только повороты на π и на углы, отличные от 0 и 2π (рис. 157). Если преобразование Ad_y записать в виде матрицы, то она имеет вид

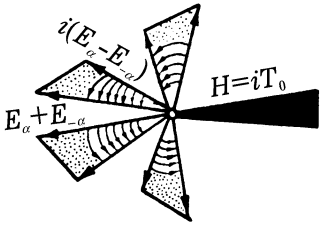

Рис. 157

$$\begin{vmatrix} \begin{matrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{matrix} & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \begin{matrix} \cos\varphi_s & \sin\varphi_s \\ -\sin\varphi_s & \cos\varphi_s \end{matrix} & & & \\ & & & \begin{matrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{matrix} & & \\ & 0 & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{vmatrix}.$$

Переходя к подсчету определителя $\det(df_y - E)$, получаем $\det(df_y - E) = (-1)^m$, где m — некоторое целое число. При этом поскольку y — образующая максимального тора, то число m не зависит от неподвижной точки $\overline{n}$, в которой производится подсчет определителя. Следовательно, число Лефшеца отображения f_y отлично от нуля и равно $(-1)^m \cdot d$, где d — число неподвижных точек отображения f_y. Отсюда вытекает, что число Лефшеца равно (по модулю) порядку группы $N/\widetilde{T}$ (см. лемму 13.8) и, в частности, всегда отлично от нуля. Теорема доказана.

4. Группа Вейля и ее связь с орбитами

Пусть $\widetilde{T}$ — максимальный тор в компактной группе Ли $\mathfrak{G}$, а N — его нормализатор. Тогда, как было доказано в предыдущем пункте, определена конечная группа $\Phi = N/\widetilde{T}$. Если $\mathfrak{G}$ — компактная полупростая группа Ли, то группа Φ называется группой Вейля. Число элементов в группе Вейля равно числу точек пересечения орбиты общего положения с максимальным тором (см. рис. 148). Это вытекает из следующего утверждения.

Утверждение 13.1. *Пусть $t \in \widetilde{T}$ — регулярный элемент группы $\mathfrak{G}$. Тогда его орбита $O(t)$ пересекается с максимальным тором $\widetilde{T}$ в конечном числе точек, и это множество точек пересечения является в свою очередь орбитой элемента t при действии группы Вейля Φ на торе $\widetilde{T}$. Число точек в орбите $\Phi(t)$ равно порядку группы Φ.*

Доказательство.

Ясно, что орбита элемента t при действии группы Вейля лежит в пересечении орбиты $O(t)$ с тором $\widetilde{T}$. Нужно доказать обратное включение: $O(t) \cap \widetilde{T} \subset \{\varphi(t), \text{где}\, \varphi \in \Phi\}$. Это вытекает из следующей леммы.

Лемма 13.9. *Если два элемента максимального тора сопряжены, то они преобразуются друг в друга преобразованиями из группы Вейля.*

Доказательство.

В действительности мы докажем несколько более общее утверждение, имеющее и другие полезные следствия, кроме указанного выше. Пусть $\mathfrak{G}$ — связная компактная группа и P — некоторое подмножество в максимальном торе $\widetilde{T}$ такое, что для некоторого элемента $g \in \mathfrak{G}$ выполняется соотношение $gPg^{-1} \subset \widetilde{T}$ (рис. 158). Тогда существует элемент нормализатора $n \in N$ такой, что $npn^{-1} = gpg^{-1}$ для всякого $p \in P$. Это означает, что сопряжение, переводящее часть тора снова

в тор, может быть реализовано за счет нормализатора (и в конечном итоге за счет группы Вейля). Пусть R — подгруппа в $\mathfrak{G}$, составленная из всех элементов, коммутирующих с элементами из подмножества P. Через R_0 обозначим связную компоненту единицы в группе R. Ясно, что R_0 является связной компактной группой Ли, содержащей максимальный тор. Рассмотрим сопряжение этого тора при помощи элемента $g \in \mathfrak{G}$, упомянутого в формулировке нашего утверждения. Поскольку множество gPg^{-1} остается в торе $\widetilde{T}$, то все элементы из gPg^{-1} коммутируют с тором $\widetilde{T}$. Это эквивалентно тому, что все точки множества коммутируют со всеми точками «повернутого тора», т. е. с точками из $g^{-1}\widetilde{T}g$ (см. рис. 158). В самом деле, если $p \in P$, то $(gpg^{-1})t = t(gpg^{-1})$, $t \in \widetilde{T}$, откуда $p(g^{-1}tg) = (g^{-1}tg)p$, что и требовалось доказать. Следовательно, «повернутый тор» $g^{-1}\widetilde{T}g$ коммутирует со всеми элементами множества P, т. е. он содержится в подгруппе R_0. Итак, группа R_0 содержит две коммутативные подгруппы: исходный тор $\widetilde{T}$ и «повернутый тор» $g^{-1}\widetilde{T}g$. Но обе эти подгруппы являются максимальными торами в объемлющей группе $\mathfrak{G}$ и тем более являются максимальными коммутативными подгруппами в меньшей группе R_0. Следовательно, в силу теоремы 13.1 они сопряжены в группе R_0, т. е. существует такой элемент $r \in R_0$, что $rg^{-1}\widetilde{T}gr^{-1} = \widetilde{T}$, т. е. $n = gr^{-1} \in N$. Отсюда следует, что $npn^{-1} = gmg^{-1}$, так как $npn^{-1} = gr^{-1}prg^{-1} = gpg^{-1}$, поскольку $r \in R_0$, т. е. $rp = pr$. Лемма доказана, что и завершает доказательство утверждения 13.1. ■

Предоставляем читателю в качестве упражнения доказать следующие полезные факты.

1) Пусть S — какая-нибудь связная замкнутая коммутативная подгруппа (т. е. тор) в связной компактной группе Ли $\mathfrak{G}$ и пусть $g \in \mathfrak{G}$ — элемент, коммутирующий со всеми элементами тора S. Тогда в группе $\mathfrak{G}$ существует максимальный тор, содержащий как подгруппу S, так и точку g.

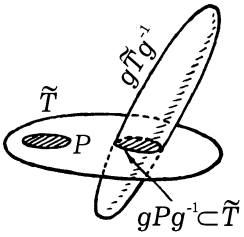

Рис. 158

2) Всякий элемент компактной связной группы, коммутирующий со всеми элементами максимального тора, принадлежит этому тору.

3) Центр компактной связной группы содержится в каждом максимальном торе группы, т. е. лежит в пересечении всех максимальных

торов. Отметим, что центр компактной связной полупростой группы дискретен (даже конечен).

4) Группа Вейля действует на максимальном торе эффективно, т. е. если какой-то ее элемент оставляет на месте все точки тора, то этот элемент является единицей в группе Вейля.

5) Всякий максимальный тор в связной компактной группе является в то же время максимальной коммутативной подгруппой. Это вытекает из утверждения 2).

6) Пусть $\mathfrak{G}$ — односвязная компактная связная простая группа Ли, т. е. одна из групп, перечисленных нами выше (см. классификацию простых алгебр и групп Ли и их компактных форм). Тогда центр $Z(\mathfrak{G})$ является абелевой группой, причем

$$Z(A_n) = \mathbb{Z}_{n+1},\ Z(B_n) = \mathbb{Z}_2,\ Z(C_n) = \mathbb{Z}_2,\ Z(D_{2n}) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2,$$
$$Z(D_{2n+1}) = \mathbb{Z}_4,\ Z(G_2) = 0,\ Z(F_4) = 0,\ Z(E_6) = 0,$$
$$Z(E_7) = \mathbb{Z}_2,\ Z_(E_8) = 0.$$

Отметим, что если $D \subset Z(\mathfrak{G})$ — какая-либо подгруппа центра, то фактор-группа $\mathfrak{G}/D$ также является группой Ли, причем алгебры Ли групп $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}/D$, очевидно, изоморфны, так как перечисленные выше центры являются дискретными (даже конечными) подгруппами в $\mathfrak{G}$. Такие группы Ли называются локально-изоморфными. Если D — нетривиальная подгруппа, то группы $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}/D$ не гомеоморфны (как группы Ли), но имеют одинаковые алгебры Ли. Компактные простые группы Ли серий G_2, F_4, E_8 вообще не имеют других локально-изоморфных групп, отличных от односвязной, так как их центры равны нулю. В серии локально-изоморфных компактных групп Ли естественно выделены две группы: односвязная группа $\mathfrak{G}$ — «максимально развернутая» группа и фактор-группа $\mathfrak{G}/Z(\mathfrak{G})$ — «максимально свернутая» группа. Как известно [1, с. 551–554], фундаментальная группа базы регулярного накрытия изоморфна группе монодромии, т. е. слою накрытия. В нашем случае отображение естественной проекции $\pi\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}/Z(\mathfrak{G})$ является регулярным накрытием, слоем которого является центр $Z(\mathfrak{G})$. Следовательно, фундаментальная группа базы, т. е. группы Ли $\mathfrak{G}/Z(\mathfrak{G})$ изоморфна центру $Z(\mathfrak{G})$.

В заключение рассмотрим пример: группа Вейля унитарной группы U_n, т. е. группы унитарных матриц размера $(n \times n)$. Как мы выяснили ранее, максимальной коммутативной подгруппой (максималь-

ным тором) $\widetilde{T}$ в группе U_n является подгруппа диагональных матриц $\begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\varphi_n} \end{pmatrix}$. Пусть N — нормализатор этого максимального тора в U_n. Каждая матрица $t \in \widetilde{T}$ изображается унитарным линейным преобразованием в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$, снабженном эрмитовым базисом $e_1, \ldots, e_n$, инвариантным относительно преобразования t. Каждый вектор e_s является собственным, отвечающим собственному значению $e^{i\varphi_s}$. Всякая матрица q из нормализатора N переводит любую прямую l, инвариантную относительно $\widetilde{T}$, в прямую $l' = q(l)$, обладающую тем же свойством. В самом деле, $t(l') = q(q^{-1}tq)(l) = q(l) = l'$ при $t \in \widetilde{T}$, поскольку $q^{-1}tq \in \widetilde{T}$. Единственными прямыми, инвариантными относительно всех преобразований из тора, являются координатные оси, порожденные $\{e_i\}$. Таким образом, всякое преобразование q из нормализатора N задается так: $e_i \to \lambda_i e_{\sigma(i)}$, где λ_i — некоторые числа, а σ — перестановка n элементов $(1, 2, \ldots, n)$. Тем самым мы в явном виде находим группу Вейля, поскольку, факторизуя N по тору $\widetilde{T}$, мы получаем группу перестановок $e_i \to e_{\sigma(i)}$.

Глава 5
Симплектическая геометрия

§ 14. Симплектические многообразия

1. Симплектическая структура и ее каноническое представление. Кососимметрический градиент

Начиная с этого параграфа, мы переходим к изучению важного класса гладких многообразий — так называемых симплектических многообразий. Они появляются во многих прикладных вопросах, например в задачах классической механики, и поэтому их изучение совершенно необходимо для решения многих конкретных проблем. Мы уже подробно ознакомились с римановыми многообразиями [2], т. е. с многообразиями, снабженными симметричным скалярным невырожденным произведением в касательных плоскостях (обычно мы рассматривали положительно определенные римановы метрики). Другим способом введения на гладком многообразии дополнительной содержательной структуры является задание кососимметрического скалярного произведения, гладко зависящего от точки. Это и приводит нас к симплектическим многообразиям, геометрия которых существенно отличается от геометрии римановых пространств. Поскольку кососимметричное скалярное произведение (в касательных плоскостях) определяется кососимметрическим тензором второго ранга, то для его задания достаточно задать внешнюю дифференциальную форму второй степени.

Определение 14.1. Гладкое четномерное многообразие M^{2n} называется *симплектическим*, если на нем задана внешняя дифференциальная форма $\omega = \sum\limits_{i<j} \omega_{ij}\, dx_i \wedge dx_j$ степени два такая, что: 1) эта форма невырождена, т. е. матрица ее коэффициентов $(\omega_{ij}(x))$ невырождена в каждой точке, 2) эта форма замкнута, т. е. $d\omega = 0$, где d — операция внешнего дифференцирования [2, гл. 6]. Такая форма ω иногда называется симплектической структурой на многообразии.

Ясно, что форма ω определяет в касательном пространстве T_xM^{2n} невырожденное кососимметричное скалярное произведение

$$\omega(a,b) = \sum_{i,j} \omega_{ij} a_i b_j, \quad \text{где} \quad a = (a_i),\ b = (b_j),\ a, b \in T_xM.$$

Если точка x_0 фиксирована, то, как известно из курса алгебры, существует такая замена координат в касательном пространстве T_xM, порожденная локальной регулярной заменой координат $x_1, \ldots, x_{2n}$ в окрестности точки x_0, что матрица $(\omega_{ij}(x_0))$ приведется к каноническому виду:

$$\begin{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \end{vmatrix}.$$

Это скалярное произведение определяет, очевидно, каноническое отождествление касательного пространства T_xM и кокасательного T_x^*M (об этой операции см. подробнее в [2, гл. 5]). Напомним, что дуальное пространство T_x^*M состоит из ковекторов — линейных форм на касательном пространстве. Наличие канонического отождествления касательного и кокасательного пространств, порожденного формой ω, позволяет определить важную операцию, являющуюся аналогом операции построения градиента $\operatorname{grad} f$ — векторного поля на многообразии, если на M задано симметричное скалярное произведение (риманова метрика).

Определение 14.2. Пусть f — гладкая функция на M, и ω — симплектическая структура. *Кососимметрическим градиентом* $\operatorname{sgrad} f$ функции f («косым градиентом») называется гладкое векторное поле на M, однозначно определяемое соотношением $\omega(v, \operatorname{sgrad} f) = v(f)$, где v пробегает множество всех гладких векторных полей на M, а $v(f)$ — значение дифференциального оператора v (векторного поля) на функции f.

Другими словами, следует сначала рассмотреть ковектор $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots \right.$ $\left. \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right) \in T_x^*M$, а затем, опираясь на каноническое отождествле-

ние T_x^* и T_x при помощи формы ω (см. выше), построить соответствующее этому ковекторному полю векторное поле, которое и является кососимметрическим градиентом. Если бы мы использовали для такого отождествления риманову метрику, то получили бы векторное поле $\operatorname{grad} f$. Однозначность построения $\operatorname{sgrad} f$ вытекает из невырожденности ω. Обычно локальные координаты на симплектическом многообразии обозначают $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$, причем эти координаты могут быть выбраны таким образом, что в фиксированной точке x_0 матрица $(\omega_{ij}(x_0))$ записывается так: $\left(\begin{smallmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{smallmatrix}\right)$, где E — единичная матрица размера $n \times n$. Если же координаты занумеровать в порядке: $p_1, q_1, p_2, q_2, \dots, p_n, q_n$, то матрица $(\omega_{ij}(x_0))$ может быть записана в блочно-диагональном виде, указанном выше. При таком специальном выборе локальных координат $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$ векторное поле $\operatorname{sgrad} f$ в точке x_0 записывается особенно просто. В самом деле, так как

$$\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial q_n}\right) \in T_{x_0}M,$$

то

$$\operatorname{sgrad} f = \left(-\frac{\partial f}{\partial q_1}, \dots, -\frac{\partial f}{\partial q_n}, \frac{\partial f}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial p_n}\right).$$

В координатах $p_1, q_1, \dots, p_n, q_n$ имеем

$$\operatorname{sgrad} f(x_0) = \left(-\frac{\partial f}{\partial q_1}, \frac{\partial f}{\partial p_1}, \dots, -\frac{\partial f}{\partial q_n}, \frac{\partial f}{\partial p_n}\right).$$

Как мы знаем, риманова метрика также может быть приведена в одной точке к каноническому (диагональному) виду выбором подходящих локальных координат. В этом смысле обе структуры — риманова и симплектическая — похожи. Однако между ними есть и серьезное различие, проявляющееся в тот момент, когда мы переходим к рассмотрению целой окрестности точки x_0. Как мы знаем [2], риманова метрика в общем случае не может быть путем замены координат приведена к единичному, евклидову виду в целой окрестности, поскольку этому может воспрепятствовать ненулевой тензор римановой кривизны. Симплектическая структура, напротив, всегда приводится к каноническому виду путем замены координат сразу в достаточно малой окрестности точки (размеры окрестности определяются свойствами формы).

Предложение 14.1. *Пусть ω — симплектическая структура на M^{2n}. Тогда для любой точки $x_0 \in M$ существует открытая окрестность с локальными координатами $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ такими, что в этих координатах форма ω записывается простейшим каноническим образом: $\omega = \sum\limits_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i$.*

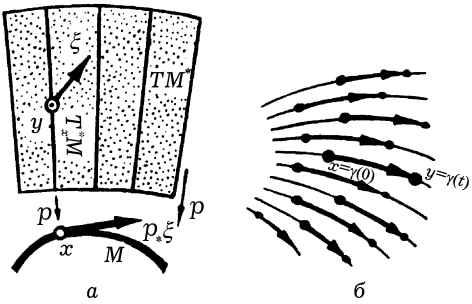

Рис. 159

Доказательство см., например, в [8]. Это предложение оказывается полезным во многих вычислениях, связанных с симплектическими структурами. Локальные координаты, существование которых утверждается в теореме и приводящие форму ω к каноническому виду, называются иногда симплектическими координатами. Ясно, что покрывая многообразие M открытыми окрестностями указанного в предложении 14.1 вида, мы получим атлас (см. определение атласа в [2, гл. 3]), который также иногда называется симплектическим. Простейший пример симплектического многообразия — евклидово пространство $\mathbb{R}^{2n}(p_1, \ldots, q_1)$, снабженное формой $\omega = \sum\limits_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i$. Второй пример — гладкие двумерные ориентируемые замкнутые римановы многообразия, т. е. сферы с ручками. Здесь в качестве симплектической структуры можно взять стандартную форму двумерного риманова объема, являющуюся замкнутой невырожденной внешней 2-формой [2]. Как мы уже знаем, в окрестности любой точки можно выбрать такие локальные координаты p, q, в которых эта форма запишется в виде $\sqrt{g}\,dp \wedge dq$, где $g = \det(g_{ij})$, g_{ij} — метрический тензор. Приведем важный пример симплектического многообразия. Пусть M^n — гладкое многообразие и T^*M — его кокасательное расслоение,

т. е. точкой T^*M является пара (x, ξ), где $x \in M$, $\xi \in T_x^*M$, т. е. ξ — ковектор в точке x. Легко проверить, что T^*M является гладким $2n$-мерным многообразием. Естественная проекция $p\colon T^*M \to M$ определяется так: $p(x, \xi) = x$. Ясно, что T^*M превращается в расслоенное пространство, где базой является исходное многообразие M, а слоем $p^{-1}(x)$ над точкой x — кокасательное пространство T_x^*M. Определим на многообразии T^*M симплектическую структуру. Для этого сначала построим на T^*M гладкую 1-форму $\omega^{(1)}$. Пусть $a \in T_y(T^*M)$ — вектор, касательный к кокасательному расслоению T^*M в точке $y \in \in T_x^*M \subset T^*M$ (рис. 159, а). Дифференциал отображения $p\colon T^*M \to M$ переводит этот вектор a в вектор p_*a, касательный к многообразию M в точке $x = p(y) = p(x, \xi)$ Определим теперь дифференциальную 1-форму $\omega^{(1)}$ на пространстве T^*M следующим образом: $\omega^{(1)}(a) = \langle \xi, p_*a \rangle$, т. е. значение формы равно значению ковектора ξ на векторе p_*a. Окончательно в качестве искомой 2-формы ω мы возьмем внешний дифференциал от формы $\omega^{(1)}$, т. е. $\omega = d\omega^{(1)}$. Читателю предоставляется в качестве полезного упражнения проверить, что эта 2-форма замкнута и невырождена, т. е. T^*M превращается в симплектическое многообразие.

2. Гамильтоновы векторные поля

Определение 14.3. Гладкое векторное поле v на симплектическом многообразии M^{2n} с формой ω называется *гамильтоновым*, если оно имеет вид $v = \operatorname{sgrad} F$, где F — некоторая гладкая функция на M, называемая гамильтонианом.

В специальных симплектических координатах p_i, q_i гамильтоново векторное поле записывается так: $\left(-\dfrac{\partial F}{\partial q_i}, \dfrac{\partial F}{\partial p_i}\right)$ (см. п. 1). Гамильтоновы векторные поля (иногда их называют гамильтоновыми потоками) допускают другое важное описание на языке порожденных ими однопараметрических групп диффеоморфизмов многообразия M. Пусть v — гамильтоново поле и $\mathfrak{G}^v$ — одномерная группа диффеоморфизмов M, представленная сдвигами вдоль интегральных траекторий поля v. Это означает, что группа $\mathfrak{G}^v$ состоит из преобразований g_t, действующих на M так: $g_t(x) = y$, где $x = \gamma(0)$, $y = \gamma(t)$, γ — интегральная траектория поля v, проходящая через точку x в момент времени $t = 0$ (см. рис. 159, б). Другими словами, диффеоморфизм g_t сдвигает каж-

дую точку x на время t вдоль траектории γ. Поскольку форма ω определена на M, то диффеоморфизм g_t переводит эту форму в новую форму: $(g_t^*\omega)(x) = \omega(g_t(x))$. Следовательно, определена производная формы ω вдоль векторного поля v, т. е. $\frac{d}{dt}(g_t^*\omega)$.

Определение 14.4. Векторное поле v на симплектическом многообразии M называется *локально-гамильтоновым*, если это поле сохраняет симплектическую структуру ω на M, т. е. производная формы ω по направлению векторного поля равна нулю: $\frac{d}{dt}(g_t^*\omega) = 0$.

Другими словами, форма ω инвариантна относительно всех преобразований вида g_t, порожденных полем v, т. е. инвариантна относительно действия однопараметрической группы $\mathfrak{S}^v$. Термин «локально-гамильтоново поле» обязан своим происхождением следующему обстоятельству.

Предложение 14.2. *Гладкое векторное поле v на симплектическом многообразии M является локально-гамильтоновым тогда и только тогда, когда для любой точки $x \in M$ существует такая окрестность $U(x)$ этой точки и такая гладкая функция H_U, определенная на этой окрестности, что $v = \operatorname{sgrad} H_U$, т. е. поле v является гамильтоновым в окрестности U с гамильтонианом H_U.*

Доказательство см., например, в [2, с. 432–433]. Ясно, что любое гамильтоново поле на M является локально-гамильтоновым. Обратное неверно, т. е. поле, допускающее представление в виде $\operatorname{sgrad} H_U$ на каждой окрестности U, может не допускать глобального представления в виде $\operatorname{sgrad} F$, где F — некоторая гладкая функция, определенная уже на всем многообразии. Другими словами, локальные гамильтонианы H_U, определенные на отдельных окрестностях U, могут не «сшиваться» в одну гладкую функцию F, определенную на всем M. Впрочем, в дальнейшем мы будем в основном изучать гамильтоновы поля, определенные на всем многообразии и имеющие вид $\operatorname{sgrad} F$, где F — гамильтониан, определенный на всем M.

Задача. Докажите, что векторное поле на двумерном римановом многообразии является локально-гамильтоновым тогда и только тогда, когда дивергенция этого поля равна нулю, т. е. это поле изображает поток несжимаемой жидкости на двумерной поверхности.

3. Скобка Пуассона и интегралы гамильтоновых полей

Определение 14.5. *Скобкой Пуассона* двух гладких функций f и g на симплектическом многообразии M называется гладкая функция $\{f, g\}$, определяемая формулой

$$\{f, g\} = \omega(\operatorname{sgrad} f, \operatorname{sgrad} g) = \sum_{i,j} \omega_{ij} (\operatorname{sgrad} f)_i (\operatorname{sgrad} g)_j.$$

Другими словами, нужно вычислить кососимметрическое скалярное произведение «косых градиентов» функций f и g. В явном виде через частные производные функций f и g скобка Пуассона записывается так:

$$\{f, g\} = \sum_{i,j} \omega^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j},$$

где x_i — локальные координаты, а ω^{ij} — коэффициенты матрицы, обратной к матрице (ω_{ij}). Здесь мы использовали то обстоятельство, что $(\operatorname{sgrad} f)_i = \sum\limits_j \omega^{ij} \dfrac{\partial f}{\partial x_j}$. Исходя из определения, легко доказывается следующее утверждение (см., например, [8, 2]).

Предложение 14.3. *Операция взятия скобки Пуассона f, $g \to \{f, g\}$ удовлетворяет соотношениям*: 1) *операция $\{f, g\}$ билинейна,* 2) *операция $\{f, g\}$ кососимметрична, т. е. $\{f, g\} = -\{g, f\}$,* 3) *имеет место тождество Якоби*: $\{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{f, \{g, h\}\} = 0$ *для любых f, g, h.*

Итак, линейное бесконечномерное пространство $F(M)$ гладких функций F на гладком симплектическом многообразии M естественным образом превращается в бесконечномерную алгебру Ли над полем $\mathbb{R}$. Отметим, что появление этой алгебры целиком обязано наличию операции «косого градиента», поскольку операция взятия обычного градиента алгебры Ли не порождает. В этом еще одно отличие кососимметрических скалярных произведений (симплектических структур) от симметрических (римановых метрик). В дальнейшем нас часто будут интересовать различные конечномерные подалгебры в алгебре Ли $F(M)$. Построим естественное отображение α алгебры Ли $F(M)$ в алгебру Ли $V(M)$ всех гладких векторных полей на многообразии M. Это отображение определим так: $\alpha(f) = \operatorname{sgrad} f$.

Лемма 14.1. *Отображение $\alpha\colon F(M) \to V(M)$ является гомоморфизмом алгебр Ли, т. е. $\alpha\{f,g\} = [\alpha(f), \alpha(g)]$. Это означает, что операция взятия скобки Пуассона переходит при отображении α в операцию взятия обычного коммутатора двух векторных полей $\alpha(f)$, $\alpha(g)$.*

Доказательство следует из предложения 14.3 и определения операции sgrad (проверьте!).

Образом алгебры Ли $F(M)$ в алгебре Ли $V(M)$ является подалгебра, которую мы обозначим через $H(M)$. Элементами ее являются векторные поля на M, представимые в виде $\operatorname{sgrad} f$, т. е. (в нашей предыдущей терминологии) гамильтоновы поля. Таким образом, $H(M)$ — подалгебра, состоящая из гамильтоновых полей на M. Это означает, в частности, что обычный коммутатор двух гамильтоновых полей снова является гамильтоновым полем. При этом гамильтониан получается как скобка Пуассона двух исходных гамильтонианов коммутируемых полей. Отметим, что отображение $\alpha\colon F(M) \to H(M)$ является эпиморфизмом, но не мономорфизмом, поскольку α имеет ненулевое ядро. Если многообразие связно, то это ядро состоит из функций, постоянных на многообразии. Следовательно, $\operatorname{Ker}(\alpha)$ одномерно и $H(M) = F(M)/\operatorname{Ker}(\alpha) = F(M)/\mathbb{R}^1$. Конечно, подалгебра $H(M)$ в алгебре $V(M)$ зависит от выбора симплектической структуры на M. Так, если мы изменим форму ω, то изменится и подалгебра $H(M)$, поэтому для строгости нужно было бы написать $H_\omega(M)$, но мы будем опускать индекс ω, подразумевая его. Скобка Пуассона функций f и g имеет следующую простую интерпретацию: $\{f,g\} = (\operatorname{sgrad} f)g$, т. е. совпадает с производной функции g вдоль векторного поля $\operatorname{sgrad} f$. Это вытекает из определения:

$$\omega(v, \operatorname{sgrad} g) = v(g) = \sum_i v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Это простое наблюдение чрезвычайно полезно при изучении интегралов гамильтоновых полей.

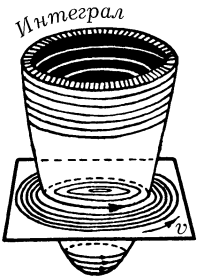

Рис. 160

Определение 14.6. Гладкая функция f на многообразии M называется *интегралом векторного поля v*, если эта функция постоянна вдоль всех интегральных траекторий поля v. Другими словами, производная функции f по направлению поля v должна быть равна нулю (рис. 160).

Предложение 14.4. *Пусть $v = \operatorname{sgrad} F$ — гамильтоново поле на M и f — гладкая функция, коммутирующая (в смысле скобки Пуассона) с гамильтонианом этого поля, т. е. $\{f, H\} \equiv 0$. Тогда функция f является интегралом поля v.*

Доказательство.

Вычисляя производную от f вдоль поля v, имеем $v(f) = \omega(v, \operatorname{sgrad} f) = \omega(\operatorname{sgrad} F, \operatorname{sgrad} f) = \{F, f\} = 0$. Предложение доказано. ■

В частности, функция F — гамильтониан — всегда интеграл поля v, так как $\{F, F\} \equiv 0$ в силу косой симметрии скобки Пуассона. Итак, у любого гамильтонова поля всегда есть по крайней мере один интеграл — это гамильтониан. Отсюда мы получаем следующее свойство гамильтоновых полей: интегральная траектория поля не может быть всюду плотна на многообразии, поскольку она всегда остается на гиперповерхности, определяемой уравнением $F = \mathrm{const}$. Поэтому если у поля есть интегральная траектория, всюду плотная в некоторой открытой области, то это поле не может быть гамильтоновым. Таким образом, гамильтоново поле сохраняет слоение многообразия на гиперповерхности $F = \mathrm{const}$.

Предложение 14.5. *Если f и g — два интеграла гамильтонова векторного поля $v = \operatorname{sgrad} F$, то их скобка Пуассона $\{f, g\}$ также является интегралом этого поля.*

Доказательство.

Из тождества Якоби получаем $\{F, \{f, g\}\} = -\{g, \{F, f\}\} - \{f, \{g, F\}\} = 0$. ■

Это предложение позволяет в принципе конструировать новые интегралы гамильтонова поля, если известны два таких интеграла. Впрочем, этот путь построения интегралов далеко не всегда приводит к успеху, так как функция $\{f, g\}$ может оказаться функционально зависимой от исходных функций f и g (т. е. ничего нового мы не получим). Здесь мы вплотную подошли к задаче нахождения как можно большего числа интегралов гамильтонова поля. Дело в том, что каждое такое поле определяет систему обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $2n$ на многообразии M, так как в локальных координатах $x_1, \ldots, x_{2n}$ поле v записывается так: $\dot{x}_i = v_i(x_1, \ldots, x_{2n})$, где v_i — компоненты поля v, а $\dot{x}_i$ — производные по времени t. Интегральные траектории поля v — это решения соответствующей системы.

Итак, если поле v имеет интеграл f, то мы понижаем порядок системы на единицу, ограничивая поле на гиперповерхности $f = \mathrm{const}$, по которым и «течет поток» v. Предположим теперь, что поле v имеет два интеграла f и g, причем f и g функционально независимы на многообразии. Условие независимости удобно формулировать на языке градиентов этих функций. В самом деле, имеет место простое утверждение: если два поля $\operatorname{grad} f$ и $\operatorname{grad} g$ линейно независимы в каждой точке открытого всюду плотного подмножества $U \subset M$, то f и g функционально независимы на многообразии. При этом в дальнейшем мы будем иметь дело с полиномиальными функциями на алгебраических многообразиях, поэтому мы и потребовали, чтобы множество U было открыто и плотно в M. При работе с гладкими функциями следует иметь в виду, что в этом случае пара функций может быть функционально независима на одной области в M и, напротив, зависима на другой области в M (рис. 161). Для полиномов такие ситуации, конечно, невозможны.

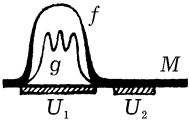

Рис. 161

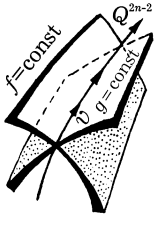

Рис. 162

Если f и g — два функционально независимых интеграла, то они определяют два различных слоения многообразия M на гиперповерхности: $f = \mathrm{const}$ и $g = \mathrm{const}$, причем в случае «общего положения» эти гиперповерхности пересекаются трансверсально по подмногообразиям Q размерности $2n - 2$. Так как поле v сохраняет f и g, то поле v касается поверхностей Q^{2n-2} (рис. 162). Следовательно, поле v может быть ограничено на семейство инвариантных поверхностей размерности $2n - 2$, и мы понизили порядок системы на две единицы. В общем случае, если мы обнаружили r функционально независимых интегралов поля, то мы понижаем порядок исходной системы на r единиц и редуцируем задачу нахождения решений системы к задаче на инвариантных (относительно поля) поверхностях размерности $2n - r$. В «идеальном случае» для нахождения решений системы следовало бы найти $2n - 1$

функционально независимых интегралов. В этом случае совместные поверхности уровня набора функций $f_1, \ldots, f_{2n-1}$ являлись бы одномерными траекториями, совпадающими с интегральными траекториями исходной системы. Формально нужен еще один параметр, чтобы задать движение точек по этим траекториям. Другими словами, мы полностью проинтегрировали бы систему в том смысле, что представили бы все ее решения в виде совместных линий уровня известных нам функций $f_1, \ldots, f_{2n-1}$. Однако такая ситуация для реальных механических систем встречается настолько редко, что рассчитывать на существование такого набора независимых функций на практике не приходится.

В связи с этим иногда приходится удовлетворяться «частичной интегрируемостью», которая в разных задачах может принимать разные формы. Понятно, что нужно требовать от такой «частичной интегрируемости» системы. Желательно найти такой набор независимых функций $f_1, \ldots, f_r$ на многообразии, чтобы их совместные поверхности уровня (по которым «течет» поток v) были бы устроены достаточно просто, например чтобы все они (или почти все) были бы диффеоморфны какому-нибудь одному хорошо изученному многообразию. При этом задача описания решений системы разбивается на два шага: 1) сначала мы предъявляем r интегралов, что позволяет описать их совместную поверхность уровня Q^{2n-r}, 2) затем мы пытаемся описать движение системы (т. е. движение точек вдоль интегральных траекторий) на этих поверхностях уровня. Замечательным обстоятельством является существование для многих конкретных систем таких наборов интегралов, которые позволяют реализовать описанную выше теоретическую программу. Один из самых известных результатов такого рода — теорема Лиувилля.

4. Теорема Лиувилля (коммутативное интегрирование гамильтоновых систем)

Определение 14.7. Говорят, что две гладкие функции f и g на симплектическом многообразии находятся в *инволюции*, если их скобка Пуассона равна нулю.

Как мы видели, для полного интегрирования системы нужно знать $2n-1$ интегралов системы. Оказывается, что для гамильтоновых систем достаточно знать лишь n функционально независимых интегралов ($2n$ — размерность M), находящихся в инволюции. В этом случае каждый интеграл «засчитывается за два интеграла», т. е. это позволя-

ет понижать порядок системы каждый раз не на одну, а сразу на две единицы. Более того, в этом случае исходная система интегрируется «в квадратурах».

Теорема 14.1. *Пусть на симплектическом многообразии M^{2n} задан набор из n гладких функций $f_1, \dots, f_n$, находящихся в инволюции, т. е. $\{f_i, f_j\} \equiv 0$ при $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Пусть M_ξ — совместная поверхность уровня функций (f_i), т. е. $M_\xi = \{x \in M\colon f_i(x) = \xi_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Предположим, что на этой поверхности уровня все n функций $f_1, \dots, f_n$ функционально независимы (т. е. градиенты $\operatorname{grad} f_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, линейно независимы во всех точках поверхности M_ξ). Тогда выполняются следующие утверждения:*

1) *поверхность M_ξ является гладким n-мерным подмногообразием, инвариантным относительно каждого векторного поля $v_i = \operatorname{grad} f_i$, гамильтониан которого — функция f_i;*

2) *если многообразие M_ξ связно и компактно, то оно диффеоморфно n-мерному тору T^n. В общем случае, если поля v_i — полные векторные поля, то связное неособое многообразие M_ξ (уже не обязательно компактное) является фактор-группой евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, по некоторой решетке ранга не превосходящего n;*

3) *если поверхность уровня M_ξ компактна и связна (т. е. является тором), то в некоторой ее открытой окрестности можно ввести такие регулярные криволинейные координаты (называемые «действие-угол») $s_1, \dots, s_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n$, где $0 \leqslant \varphi_i \leqslant 2\pi$, что:*

а) симплектическая структура ω в этих координатах записывается простейшим образом, т. е. $\omega = \sum\limits_{i=1}^{n} ds_i \wedge d\varphi_i$, что эквивалентно тому, что функции $s_1, \dots, s_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ удовлетворяют следующим соотношениям: $\{s_i, s_j\} = \{\varphi_i, \varphi_j\} = 0$, $\{s_i, \varphi_j\} = \delta_{ij}$;

б) функции $s_1, \dots, s_n$ являются координатами в направлении, трансверсальном тору T^n, и функционально выражаются через интегралы $f_1, \dots, f_n$, т. е. $s_i = s_i(f_1, \dots, f_n)$, $1 \leqslant i \leqslant n$;

в) функции $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ являются координатами на торе $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$, где φ_i — угловая координата окружности S^1 с номером i, $0 \leqslant \varphi_i \leqslant 2\pi$;

г) каждое векторное поле $v = \operatorname{grad} F$, где F — любая из функций $f_1, \dots, f_n$, будучи записано в координатах $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ на торе T^n, приобретает вид $\dot{\varphi}_i = q_i(\xi_1, \dots, \xi_n)$, т. е. компоненты этого поля постоянны на торе, и интегральные траектории поля определя-

ют условно-периодическое движение системы v, т. е. задают «прямолинейную обмотку» тора T^n. Здесь функции q_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, определены в некоторой окрестности тора, и на близких поверхностях уровня мы также имеем $\dot\varphi_i = q_i(s_1, \dots, s_n)$. Таким образом, исходная система $v = \operatorname{sgrad} F$ записывается в окрестности тора T^n в координатах $s_1, \dots, \varphi_n$ в виде $\dot s_i = 0$, $\dot\varphi_i = q_i(s_1, \dots, s_n)$, $1 \leqslant i \leqslant n$ (рис. 163).

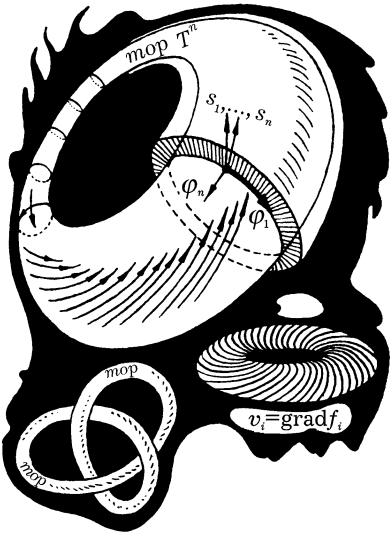

Рис. 163

Мы видим, что если функции $f_1, \dots, f_n$ независимы на M, то все неособые поверхности уровня M_ξ (т. е. такие, на которых градиенты функций независимы, в частности, отличны от нуля) диффеоморфны одному и тому же простому многообразию — n-мерному тору. Конечно, вложение этого тора в объемлющее многообразие может быть достаточно сложным (см. рис. 163), однако эта «сложность» может быть изучена исходя из информации о функциях $f_1, \dots, f_n$, которые нам известны. Далее, на самом торе векторное поле $\operatorname{sgrad} F$ устроено максимально простым образом, поскольку относительно угловых координат $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ это поле становится полем с постоянными компонентами, т. е. оно полностью определяется заданием вектора скорости в одной точке тора. В случае «общего положения» каждая траектория поля определяет всюду плотную обмотку тора.

Важность этой теоремы обосновывается тем фактом, что, как будет показано ниже, многие интересные механические системы и их аналоги допускают такое «интегрирование по Лиувиллю». Если нам задана конкретная система $v = \operatorname{sgrad} F$, где F — некоторая функция на M, то мы будем говорить, что эта система «вполне интегрируема (по Лиувиллю) в коммутативном смысле», или «допускает полное коммутативное интегрирование», если существует набор функций $f_1 = F, f_2, \dots, f_n$, удовлетворяющих условиям теоремы 14.1. В этом случае система v определяет условно-периодическое движение по торам половинной раз-

мерности. Ниже мы познакомимся и с так называемым «некоммутативным интегрированием». Таким образом, если фиксирован гамильтониан F, то первой задачей является нахождение еще $n-1$ функций, образующих совместно с F функционально независимый набор, коммутативный относительно скобки Пуассона. Это эквивалентно включению функции F, рассматриваемой здесь как элемент алгебры Ли $F(M)$ (см. выше), в коммутативную подалгебру размерности n, аддитивный базис которой состоял бы из функционально независимых функций.

С похожей задачей мы уже столкнулись ранее при изучении конечномерных алгебр Ли и коммутативных подалгебр в них. Однако сейчас ситуация значительно сложнее, поскольку здесь мы имеем дело с бесконечномерной алгеброй Ли, и какие-либо аналоги «конечномерных теорем» о поведении аналогов подалгебр Картана отсутствуют. Поэтому нахождение полного коммутативного набора функций, интегрирующих систему в каждом конкретном случае, является нетривиальной задачей, определяемой спецификой рассматриваемой системы.

Доказательство теоремы 14.1.

Пусть $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ — набор фиксированных значений функций $f_1, \dots, f_n$. Так как набор $\operatorname{grad} f_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$ независим в каждой точке на поверхности уровня M_ξ, то в силу теоремы о неявных функциях эта поверхность является гладким n-мерным подмногообразием в M. Рассмотрим гладкие векторные поля $\alpha(f_i) = \operatorname{sgrad} f_i$. Каждое из них касается поверхности уровня (см. выше), поэтому мы получаем набор n касательных полей на M_ξ. Мы утверждаем, что эти поля попарно коммутируют и линейно независимы в каждой точке. В самом деле, симплектическая структура ω определяет каноническое отождествление ε касательного и кокасательного пространств, в результате которого $\operatorname{grad} f_i$ переходит в $\operatorname{sgrad} f_i$ (см. п. 3). Поскольку ε — изоморфизм T_x и T_x^*, то линейная независимость ковекторов $(\operatorname{grad} f_i)$ эквивалентна линейной независимости векторов $(\operatorname{sgrad} f_i)$. Далее из леммы 14.1 следует, что $\alpha\{f_i, f_j\} = [\alpha f_i, \alpha f_j] \equiv 0$, так как функции f_i, f_j находятся в инволюции. Следовательно, поля $(\operatorname{sgrad} f_i)$ попарно коммутируют, что и требовалось доказать.

Таким образом, поля $(\operatorname{sgrad} f_i)$ образуют базис в каждой плоскости касательной к M_ξ. Отсюда, в частности, следует, что ограничение формы ω на касательные плоскости $T_x M_\xi$ равно нулю. Рассмотрим абелеву группу $\mathbb{R}^n$, образующие которой обозначим через $e_1, \dots, e_n$. Каждая образующая e_i порождает одномерную подгруппу $\mathbb{R}^1_i$, которую мы пред-

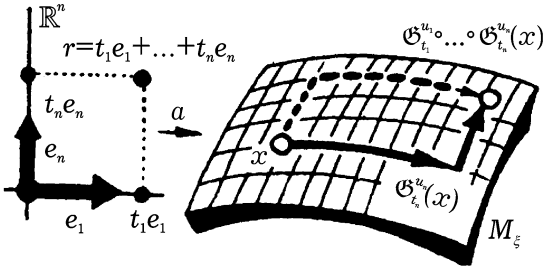

Рис. 164

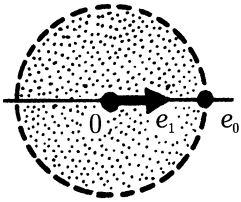

Рис. 165

ставим в виде однопараметрической группы $\mathfrak{G}_t^{v_i}$ диффеоморфизмов, порожденной векторным полем $v_i = \operatorname{sgrad} f_i$ на M_ξ. Тем самым мы представили все образующие $e_1, \ldots, e_n$ группы $\mathbb{R}^n$ при помощи диффеоморфизмов, сохраняющих симплектическую структуру в окрестности M_ξ. Теперь мы определим гладкое действие всей группы $\mathbb{R}^n$ на M_ξ и в окрестности M_ξ. Для этого фиксируем на M_ξ точку x и сопоставим элементу $r = t_1e_1+\ldots+t_ne_n$ гладкое преобразование $a(r)\colon M_\xi \to M_\xi$, являющееся композицией: $a(r)(x) = \mathfrak{G}_{t_1}^{v_1} \circ \ldots \circ \mathfrak{G}_{t_n}^{v_n}(x)$ (рис. 164). Поскольку векторные поля v_i коммутируют на M_ξ, то это определение корректно определяет гладкое действие коммутативной группы на поверхности M_ξ в случае полноты поверхности. Ясно также, что эта же конструкция позволяет определить это действие и в некоторой окрестности неособой поверхности M_ξ. Поскольку поля $v_i = \operatorname{sgrad} f_i$ независимы в каждой точке на поверхности M_ξ, то группа $\mathbb{R}^n$ действует локально транзитивно на M_ξ, следовательно, отображение $a\colon \mathbb{R}^N \to M_\xi$ является отображением «на». Из определения a следует также, что M_ξ является орбитой группы $\mathbb{R}^n$, «вырастающей» из точки $x_0 \in M_\xi$. Таким образом, на M_ξ задано n независимых коммутирующих векторных полей.

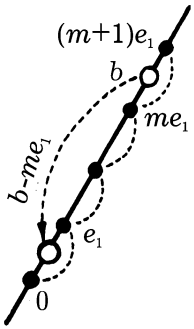

Рис. 166

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ стационарную подгруппу Γ точки x_0, т. е. множество всех элементов $r \in \mathbb{R}^n$ таких, что они оставляют эту точку на месте. Из предыдущего следует, что Γ — дискретная подгруппа. Докажем, что существуют k (где $0 \leqslant k \leqslant n$) независимых векторов $e_1, \ldots, e_k \in \mathbb{R}^n$ таких, что Γ совпадает с множеством всех их целочисленных линейных ком-

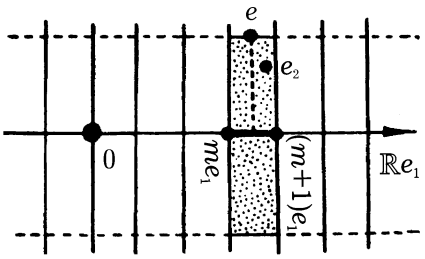

Рис. 167

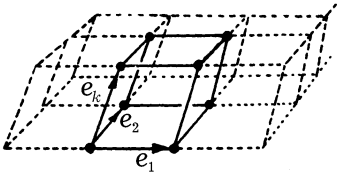

Рис. 168

бинаций, т. е. $\Gamma = \mathbb{Z}(e_1, \ldots, e_k) = \mathbb{Z}^k$. Будем считать, что $a(0) = x_0$, где $0 \in \mathbb{R}^n$. Если подгруппа Γ нетривиальна, то можно рассмотреть прямую $\mathbb{R}e_0$, где $e_0 \in \Gamma$, $e_0 \neq 0$. Через $e_1 \neq 0$ обозначим элемент группы Γ, лежащий на прямой $\mathbb{R}e_0$ и ближайший к точке 0, т. е. $|e_1| \leqslant |e_0|$, где $|e_1|$ — длина вектора в $\mathbb{R}^n$ (рис. 165). Такой элемент e_1 существует, поскольку в шаре радиуса $|e_0|$ с центром в точке 0 содержится лишь конечное число элементов группы Γ. При этом e_1 может совпасть с e_0. Все элементы группы Γ, лежащие на прямой $\mathbb{R}e_0$, обязательно имеют вид me_1, где $m \in \mathbb{Z}$, т. е. являются целыми кратными вектора e_1. В самом деле, если бы внутри какого-либо интервала $(me_1, (m+1)e_1)$ оказалась бы еще какая-нибудь точка b из подгруппы Γ, то, сдвигая ее на элемент $-me_1$, принадлежащий Γ, мы получили бы на прямой $\mathbb{R}e_0$ новую точку $b - me_1$, расположенную ближе к точке 0, чем точка e_1 (рис. 166). Полученное противоречие доказывает утверждение. Далее, если вне прямой $\mathbb{R}e_1$ нет точек группы Γ, то утверждение доказано. Если же такие точки $e \in \Gamma$ есть, то существует точка $e_2 \in \Gamma$, ближайшая к прямой $\mathbb{R}e_1$, но сама на этой прямой не лежащая. В самом деле, ортогональная проекция точки e на прямую $\mathbb{R}e_1$ лежит в некотором отрезке $I = (me_1, (m+1)e_1)$. Рассмотрим прямой круговой цилиндр с осью I и радиусом, равным расстоянию от отрезка I до точки e (рис. 167). В этом цилиндре содержится конечное число элементов группы Γ. В качестве e_2 возьмем элемент, ближайший в этом цилиндре к оси I. Ясно, что эта точка будет ближайшей к оси $\mathbb{R}e_1$ не только среди точек Γ, попавших в цилиндр, но и среди всех точек Γ, поскольку, сдвигая цилиндр на целые кратные элемента e_1 вдоль оси $\mathbb{R}e_1$, мы можем «загнать» любой элемент группы Γ, попавший в эту цилиндрическую полосу с осью $\mathbb{R}e_1$, в цилиндр с осью I (см. рис. 167). Цело-

численные линейные комбинации вида $ae_1 + be_2$ образуют решетку в плоскости $\mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2$. Продолжая это построение, мы в конце концов получаем решетку $\mathbb{Z}^k = \mathbb{Z}(e_1, \dots, e_k)$ ранга k, где $k \leqslant n$ (рис. 168). Лемма доказана. Тем самым поверхность уровня M_ξ, являясь однородным пространством группы $\mathbb{R}^n$, диффеоморфна фактор-пространству $\mathbb{R}^n/\Gamma$. Если поверхность M_ξ компактна, то ранг Γ равен n, и тогда M_ξ является n-мерным тором. Если же поверхность уровня некомпактна, то она диффеоморфна «цилиндру» $\mathbb{R}^n/\Gamma$, где ранг Γ меньше n. Одновременно с доказательством этого утверждения мы построили на поверхности M_ξ «угловые координаты» $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, в качестве которых можно взять координаты, определяемые координатными линиями — образами прямых $\mathbb{R}e_1, \dots, \mathbb{R}e_n \in \mathbb{R}^n$ при проекции $a\colon \mathbb{R}^n \to M_\xi = \mathbb{R}_n/\Gamma$. Ясно далее, что интегральные траектории полей $v_i = \operatorname{sgrad} f_i$ задают в координатах $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ прямолинейные обмотки тора T^n. Осталось доказать существование координат $s_1, \dots, s_n$, «дополнительных» к координатам $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, т. е. параметризующих трубчатую окрестность тора в направлениях, ортогональных этому тору (рис. 169). Поскольку идеи, лежащие в основе этого доказательства, в дальнейшем не будут нами использоваться, то мы опускаем здесь это рассуждение, отсылая читателя, например, к [8].

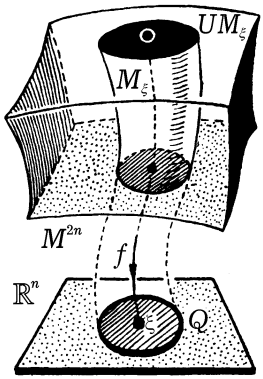

Рис. 169

§ 15. Некоммутативное интегрирование гамильтоновых систем

1. Некоммутативные алгебры Ли интегралов

В доказанной выше теореме Лиувилля основную роль играет коммутативность набора функций $f_1, \dots, f_n$. Другими словами, линейное пространство G функций, натянутое на функции $f_1, \dots, f_n$, является коммутативной алгеброй Ли размерности n. При этом гамильтониан интегрируемой системы включен в эту алгебру Ли как один из ее элементов: $F = f_1$. Однако во многих конкретных ситуациях гамильтоновы системы обладают набором интегралов $f_1, \dots, f_k$, которые не

образуют коммутативной алгебры Ли, т. е. не находятся в инволюции. Поэтому было бы весьма полезно располагать методом, позволяющим интегрировать такие системы.

Предположим, что $f_1, \ldots, f_k$ — гладкие функции на симплектическом многообразии M^{2n} с формой ω, функционально независимые на открытом всюду плотном подмножестве в M. Рассмотрим линейную оболочку G (над $\mathbb{R}$) функций (f_i), тогда $\dim_R G = k$. Предположим, что линейное пространство G замкнуто относительно скобки Пуассона, т. е. попарные скобки $\{f_i, f_j\}$ разлагаются вновь по базисным функциям $f_1, \ldots, f_k$ с постоянными (!) коэффициентами, т. е. $\{f_1, f_j\} = \sum\limits_{q=1}^{k} c_{ij}^q f_q$, где $c_{ij}^q \in \mathbb{R}$. Это означает, что линейное пространство G является конечномерной вещественной алгеброй Ли относительно скобки Пуассона. Важным частным случаем является тот, когда G — коммутативная алгебра Ли размерности n. Тогда мы попадаем в ситуацию «коммутативной» теоремы Лиувилля. Отметим, что алгебра Ли G не обязана быть компактной. Даже в теореме Лиувилля предполагается, что эта алгебра коммутативна. Тем не менее оказывается, при наложении еще одного простого условия на алгебру интегралов G система $v = \operatorname{sgrad} F$, где $F = f_1$ допускает полное интегрирование, позволяющее описывать траектории системы столь же просто, как это имеет место в случае теоремы Лиувилля. Будем называть построенную выше алгебру G алгеброй интегралов. Через $\mathfrak{G}$ обозначим односвязную группу Ли, соответствующую G. Тогда $\mathfrak{G} = \exp G$. Каждый элемент алгебры G представляется в виде гамильтонова поля на M. Для этого нужно рассмотреть отображение $\alpha\colon f \to \operatorname{sgrad} f$. Следовательно, группа $\mathfrak{G}$ представляется как группа диффеоморфизмов многообразия, сохраняющих форму ω. Такие преобразования назовем симплектическими. Итак, задание алгебры Ли интегралов G определяет гладкое симплектическое действие конечномерной группы $\mathfrak{G}$ на M.

Так как в этом параграфе мы встретимся с задачами, в которых появляются некомпактные алгебры Ли, то введем некоторые полезные определения. Пусть G^* — пространство, дуальное к алгебре G, т. е. пространство ковекторов — линейных форм на G. Пространство G^* иногда называют коалгеброй. Группа $\mathfrak{G}$ представляется как группа линейных преобразований пространства G^*, а именно, $g \to \operatorname{Ad}_g^*\colon G^* \to G^*$, где Ad_g^* — преобразование, сопряженное к преобразованию $\operatorname{Ad}_g\colon G \to G$. Если $\xi \in G^*$, $X \in G$, то через $\langle \xi, X \rangle$ будем обо-

значать значение ковектора (линейного функционала) ξ на векторе X. Тогда $\langle \mathrm{Ad}_g^* \xi, X\rangle = \langle \xi, \mathrm{Ad}_g X\rangle$. Хотя мы используем здесь символ $\langle\,,\,\rangle$, использовавшийся нами ранее для скалярного произведения, но путаницы не возникнет, так как если алгебра G компактна, то значение ковектора на векторе можно рассматривать как скалярное произведение двух векторов, один из которых изображает ковектор при отождествлении G и G^*. Определим также преобразование $\mathrm{ad}_Y^* : G^* \to G^*$, сопряженное к преобразованию $\mathrm{ad}_Y : G \to G$. Здесь $\langle \mathrm{ad}_Y^* \xi, X\rangle = \langle \xi, \mathrm{ad}_Y X\rangle = \langle \xi, [Y, X]\rangle$. Представление $g \to \mathrm{Ad}_g^*$ называется коприсоединенным представлением группы $\mathfrak{G}$; соответственно $X \to \mathrm{ad}_X^*$ — коприсоединенным представлением алгебры G. Группа $\mathfrak{G}$, действуя на G^*, расслаивает G^* на орбиты $O^* = \mathfrak{G}(\xi)$ коприсоединенного представления. Если $\xi \in O^*$, то касательная плоскость $T_\xi O^*$ к орбите O^* состоит из ковекторов вида $\mathrm{ad}_X^* \xi$, где X пробегает G. Это доказывается аналогично лемме 13.2.

Пусть $\xi \in G^*$ — некоторый ковектор. Рассмотрим в алгебре G подпространство $H_\xi = \mathrm{Ann}\,\xi$, состоящее из всех векторов X таких, что $\mathrm{ad}_X^* \xi = 0$. Подпространство H_ξ называется аннулятором ковектора ξ. Ясно, что H_ξ — подалгебра, так как

$$\langle \mathrm{ad}_{[X,Y]}^* \xi, Z\rangle = \langle \xi, [[X,Y],Z]\rangle = -\langle \xi, [[Z,X],Y]\rangle - \\ - \langle \xi, [[Y,Z],X]\rangle = \langle \mathrm{ad}_Y^* \xi, [Z,X]\rangle + \langle \mathrm{ad}_X^* \xi, [Y,Z]\rangle = 0.$$

Если G — компактная алгебра, то, отождествляя G и G^* при помощи формы Киллинга, получаем уже знакомое нам определение аннулятора вектора. Будем говорить, что $\xi \in G^*$ является ковектором общего положения, если размерность его аннулятора наименьшая. Рангом алгебры G назовем размерность аннулятора ковектора общего положения. Если G — полупростая алгебра, то это определение совпадает с введенным ранее рангом алгебры G (проверьте!).

2. Теорема о некоммутативном интегрировании

Здесь мы сформулируем теорему, естественно обобщающую теорему Лиувилля и доказанную в [10].

Теорема 15.1. *Пусть на симплектическом многообразии M^{2n} задан набор из k гладких функций $f_1, \ldots, f_k$, линейная оболочка которых является алгеброй Ли G относительно скобки Пуассона, т. е. $\{f_i, f_j\} = \sum\limits_{q=1}^{k} c_{ij}^q f_q$, где c_{ij}^q — постоянные. Пусть M_ξ — совместная поверх-*

ность уровня общего положения функций (f_i), *т. е.* $M_\xi = \{x \in M\colon f_i(x) = \xi_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$. *Предположим, что на этой поверхности уровня все* k *функций* $f_1, \ldots, f_k$ *функционально независимы. Предположим, что алгебра Ли* G *удовлетворяет условию* $\dim G + \text{ранг } G = \dim M$, *т. е.* $k + \text{ранг } G = 2n$. *Тогда поверхность* M_ξ *является гладким* r*-мерным подмногообразием (где* $r = \text{ранг}\, G$*), инвариантным относительно каждого векторного поля* $v = \operatorname{sgrad} h$, *где* $h \in H_\xi$. *Пусть далее* v *— одно из следующих гамильтоновых полей на* M: *а) либо* $v = \operatorname{sgrad} h$, *где гамильтониан* h *является элементом алгебры интегралов* G *и лежит в аннуляторе* H_ξ *ковектора* ξ, *определяющего поверхность уровня* M_ξ, *б) либо* $v = \operatorname{sgrad} F$ *— гамильтоново поле на* M, *для которого все функции алгебры* G *являются интегралами, т. е.* $\{F, f\} \equiv 0$ *для всех* $f \in G$. *Тогда, как и в случае «коммутативной теоремы» Лиувилля, если многообразие* M_ξ *связно и компактно, то оно диффеоморфно* r*-мерному тору* T^r, *и на этом торе можно ввести такие криволинейные координаты* $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$, *что векторное поле* v, *будучи записано в этих координатах, на торе приобретает вид* $\varphi_i = q_i(\xi_1, \ldots, \xi_k)$, *т. е. компоненты этого поля постоянны на торе, и интегральные траектории поля определяют условно-периодическое движение системы* v, *т. е. задают «прямолинейную обмотку» тора* T^r.

Доказательство будет дано в следующем параграфе. В частном случае, если алгебра Ли интегралов G коммутативна, то условие $\dim G + \text{ранг } G = \dim G$ превращается в условие $k + k = 2n$, поскольку здесь ранг $G = \dim G = k$. Итак, $k = n$, и мы получаем классическую «коммутативную теорему» Лиувилля, доказанную в предыдущем параграфе. Во многих конкретных примерах алгебра Ли интегралов оказывается компактной и некоммутативной. Как видно из теоремы 15.1, движение системы происходит по торам T^r, размерность которых r равна рангу алгебры G. В полупростом случае, как следует из материала гл. 4, ранг r алгебры G меньше ее размерности, причем во всех основных случаях можно считать, что $r \approx \sqrt{k}$, где k — размерность G. Так, например, в случае серии A_{n-1}, когда $G = su_n$, имеем $r = n - 1$, $k = \dim G = n^2 - 1$, т. е. ранг $G \approx \sqrt{\dim G}$. Это означает, что $r < k$, и так как $r + k = 2n$, то $r < n = 1/2 \dim M$. Другими словами, движение системы $v = \operatorname{sgrad} F$ происходит по торам, размерность которых меньше (и существенно меньше) половины размерности многообразия. Это показывает, что гамильтоновы системы с некоммутативными симметриями, т. е. обладающие некоммутативной алгеброй интегралов

в описанном выше смысле, «сильно вырождены», т. е. их интегральные траектории (в случае общего положения) всюду плотно наматываются на торы малой размерности r. Именно это отличает такие системы от тех, которые удовлетворяют условиям «коммутативной теоремы» Лиувилля и движение которых происходит по торам половинной размерности, т. е. $r = n = 1/2 \dim M$. Таким образом, «некоммутативная теорема» 15.1 позволяет интегрировать системы с сильным вырождением, которое тем сильнее, чем меньше ранг алгебры интегралов этой системы. Системы такого типа, являясь системами «с вырождением» на исходном многообразии, могут оказаться системами «типа Лиувилля» на некотором подмногообразии K в M.

Более того, существует интересная связь между коммутативным интегрированием и некоммутативным. Так, например, если гамильтонова система обладает некоммутативной алгеброй интегралов (с условием $\dim G + \operatorname{ранг} G = \dim M$), то во многих случаях она обладает и коммутативной алгеброй интегралов половинной размерности. Более того, верно следующее утверждение [12].

Теорема 15.2. *Пусть $v = \operatorname{sgrad} F$ — гамильтонова система на компактном симплектическом многообразии M, полностью интегрируемая в некоммутативном смысле, т. е. обладающая алгеброй Ли интегралов G такой, что $\dim G + \operatorname{ранг} G = \dim M$. Тогда эта же система вполне интегрируема и в обычном коммутативном смысле по Лиувиллю, т. е. она обладает и другой, уже коммутативной алгеброй Ли интегралов G', для которой $\dim G' = 1/2 \dim M$.*

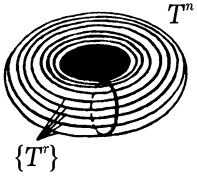

Рис. 170

При этом, конечно, предполагается, что аддитивные образующие обеих алгебр G и G' функционально независимы почти всюду на M. Ясно, что эти алгебры не изоморфны, если G некоммутативна. Таким образом, на компактном многообразии интегрируемая гамильтонова система «с вырождением» обладает и второй коммутативной алгеброй интегралов «общего типа». С геометрической точки зрения структура таких систем чрезвычайно проста. Пусть $\{T^r\}$ — семейство r-мерных торов, где $r < n$, по которым движутся траектории системы, образуя в случае общего положения всюду плотные обмотки на этих торах. Тогда (см. теорему 15.2) эти торы малой размерности r могут быть организованы в большие торы размерности n, т. е. поло-

винной размерности, по которым движутся траектории системы. Эти большие торы T^n являются поверхностями уровня второй, уже коммутативной алгебры интегралов G' (рис. 170). Отметим, что траектории такой системы не могут быть всюду плотны на большом торе T^n, так как расслоение этого тора на торы T^r малой размерности устроено локально как прямое произведение тора T^r на некоторое дополнительное подмногообразие размерности $n-r$ (см. рис. 170). Доказательство теоремы 15.2 достаточно нетривиально, поэтому здесь оно опущено. Для некомпактных многообразий аналогичный результат пока не доказан [12].

Гипотеза. *Любая гамильтонова система на любом симплектическом многообразии, полностью интегрируемая в некоммутативном смысле, является вполне интегрируемой и в коммутативном смысле по Лиувиллю.*

Распространение теоремы 15.2 на некомпактные многообразия представляет интерес в связи с тем, что многие конкретные гамильтоновы системы реализуются в виде потоков именно на некомпактных многообразиях.

3. Редукция гамильтоновых систем с некоммутативными симметриями

Мы опишем простую и красивую конструкцию, позволяющую превращать гамильтонову систему, обладающую группой симметрий, в гамильтонову систему на симплектическом многообразии меньшей размерности. Эта процедура называется редукцией гамильтоновой системы. В качестве одного из приложений мы докажем теорему 15.1.

Пусть на симплектическом многообразии (M^{2n}, ω) задана гамильтонова система $v = \operatorname{sgrad} F$ с алгеброй интегралов G, аддитивными образующими которой являются k независимых (почти всюду) гладких функций $f_1, \ldots, f_k$. Пусть $\mathfrak{G}$ — соответствующая односвязная группа, действующая на M симплектическими диффеоморфизмами (т. е. сохраняющими ω). Для дальнейшего удобно рассмотреть следующее отображение φ. Каждой точке $x \in M$ сопоставим линейный функционал (ковектор) φx на алгебре G. Положим $\varphi x(f) = f(x)$, где $f \in G$. Итак, φx — элемент дуальной алгебры G^*. Следовательно, мы определили гладкое отображение $\varphi\colon M \to G^*$.

Лемма 15.1. *Пусть $\xi \in G^*$ — произвольный ковектор. Тогда его полный прообраз $\varphi^{-1}\xi$ при отображении φ является совместной поверхностью уровня M_ξ интегралов $f_1, \ldots, f_k$ — образующих алгебры G.*

Доказательство.

По определению $\varphi^{-1}\xi = \{x \in M\colon f(x) = \xi(f)\}$, где $f \in G$. Так как (f_i) — аддитивный базис в G, то $f = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i f_i$, т. е. $f(x) = \xi(f) = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i \xi(f_i)$. Если $\xi(f_i) = \xi_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$, то $f_i(x) = \varphi x(f_i) = \xi(f_i) = \xi_i$ для $x \in M_\xi$. Итак, $M_\xi = \varphi^{-1}\xi = \{x \in M\colon f_i(x) = \xi_i\}$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$. Лемма доказана. ■

Отображение $\varphi\colon M \to G^*$ не обязательно является отображением «на». Например, если M компактно, то образ φM не покрывает всю коалгебру G^*. Введем удобное обозначение. Если $\xi \in G^*$, $f \in G$, то $\mathrm{ad}^*_f\,\xi$ обозначим через $a(\xi, f)$. Тогда $\langle \xi, [g, f]\rangle = \langle \mathrm{ad}^*_g\,\xi, f\rangle = \langle a(\xi, g), f\rangle$. Имеем $H_\xi \subset G$, $H_\xi = \{g \in G\colon a(\xi, g) = 0\}$, т. е. $H_\xi = \mathrm{Ann}\,\xi$.

Предложение 15.1. *Пусть элемент f (функция) алгебры G лежит в аннуляторе H_ξ и $x \in M_\xi$, где M_ξ — неособая поверхность. Тогда* $\mathrm{sgrad}\,f(x) \in T_x M_\xi$. *Это означает, что косые градиенты функций из аннулятора ковектора ξ лежат в касательной плоскости к поверхности уровня M_ξ, определяемой этим ковектором.*

Доказательство.

Рассмотрим аддитивные образующие $f_1, \ldots, f_k$ в G и градиенты $\mathrm{grad}\,f_1, \ldots, \mathrm{grad}\,f_k$. Так как M_ξ — неособая поверхность, то все эти градиенты независимы во всех точках поверхности, поэтому они трансверсальны M_ξ, т. е. k-мерная плоскость V, натянутая на $(\mathrm{grad}\,f_i)$, пересекается с $T_x M_\xi$ только по нулю и $V \oplus T_x M_\xi$ (рис. 171). Удобно считать, что на M задана риманова метрика, тогда векторы $(\mathrm{grad}\,f_i)$ ортогональны поверхности M_ξ. Чтобы доказать соотношение $\mathrm{sgrad}\,f(x) \in T_x M_\xi$, достаточно проверить, что $(\mathrm{sgrad}\,f)g = 0$ для любой функции $g \in G$, т. е. что производная вдоль $\mathrm{sgrad}\,f$ любой функции g из G, постоянной на M_ξ, равна нулю. В самом деле, $(\mathrm{sgrad}\,f)g = (\mathrm{sgrad}\,f, \mathrm{grad}\,g)$, где $(\ ,\ )$ — риманова метрика на M. Из равенства нулю скалярных произведений $\mathrm{sgrad}\,f$ на все векторы $(\mathrm{grad}\,f_i)$ вытекает ортогональность $\mathrm{sgrad}\,f$ к плоскости V, т. е. $\mathrm{sgrad}\,f \in T_x M_\xi$. Итак, $(\mathrm{sgrad}\,f)g = \{f, g\}$. Далее, $\{f, g\}(x) = \langle \xi, \{f, g\}\rangle = \langle a(\xi, f), g\rangle = 0$, так как $a(\xi, f) = 0$, $f \in \mathrm{Ann}\,\xi$, что и требовалось доказать. ■

Итак, все поля $\mathrm{sgrad}\,f$, порожденные элементами f из аннулятора ξ, касаются соответствующей поверхности уровня M_ξ.

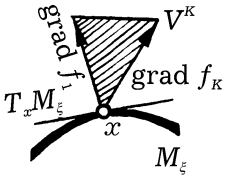

Рис. 171

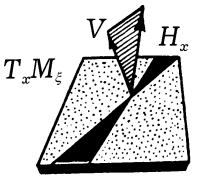

Рис. 172

Предложение 15.2. *Имеет место равенство* $(T_xM_\xi) \cap (\operatorname{sgrad} f;\ f \in G) = H_x = (\operatorname{sgrad} h;\ h \in H_\xi)$ (рис. 172).

Доказательство.

Выше мы доказали, что $(\operatorname{sgrad} h;\ h \in H_\xi) \subset T_xM_\xi \cap (\operatorname{sgrad} f;\ f \in G)$. Докажем обратное включение. Пусть $X \in T_xM_\xi$ и $X = \operatorname{sgrad} f$, где $f \in G$. Надо доказать, что $f \in H_\xi$. В силу того, что $\forall g \in G$ $\{f, g\}(x) = 0$, имеем $\langle a(\xi, f), g\rangle = \langle \xi, \{f, g\}\rangle \equiv 0$ для каждого $g \in G$. Последнее равенство вытекает из того, что $\{f, g\}(x) = (\operatorname{sgrad} f)g|_x = X(g) = 0$, так как $X \in T_xM_\xi$, а все $g \in G$ постоянны на поверхности уровня M_ξ. Итак, $\langle a(\xi, f), g\rangle \equiv 0$ при любом $g \in G$. Это означает, что $a(\xi, f) = 0$, т. е. $f \in \operatorname{Ann} \xi = H_\xi$. Утверждение доказано (рис. 173). ■

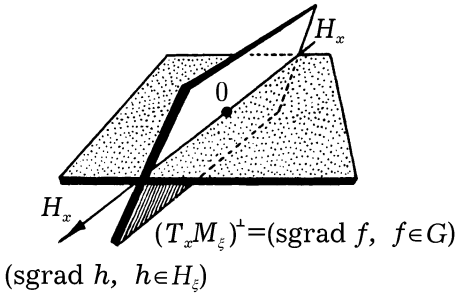

Рис. 173

Рассмотрим группу $\mathfrak{H}_\xi$ с алгеброй H_ξ, т. е. $\mathfrak{H}_\xi = \exp H_\xi \subset \mathfrak{G}$.

Следствие 15.1. *Поверхность уровня M_ξ инвариантна относительно действия группы $\mathfrak{H}_\xi$ на многообразии M.*

Рассмотрим форму ω на M, и пусть $\widetilde{\omega} = \omega|_{M_\xi}$ — ограничение ее на поверхность M_ξ. Действие подгруппы $\mathfrak{H}_\xi$ на M_ξ порождает в каждой точке $x \in M_\xi$ плоскость $H_x \subset T_xM_\xi$, образованную векторами $\operatorname{sgrad} f$,

где $f \in H_\xi$ (см. рис. 172). Другими словами, плоскость H_x порождена подалгеброй H_ξ.

Предложение 15.3. *Ядро формы $\widetilde{\omega}$ (ограничения формы ω на M_ξ) совпадает с плоскостью $H_x \subset T_x M_\xi$.*

Доказательство.

Докажем, что $\operatorname{Ker}\widetilde{\omega} \supset H_x$. Пусть $X = \operatorname{sgrad} h$, где $h \in H_\xi$, $X \in H_x \subset T_x M_\xi$. Требуется доказать, что X лежит в ядре формы ω, т. е. что $\omega(X, Y) = 0$ для любого вектора Y из плоскости $T_x M_\xi$. В самом деле, $\omega(X, Y) = \omega(\operatorname{sgrad} h, Y) = Y(h) = 0$, так как вектор Y касается поверхности уровня, а функция h, являясь элементом алгебры интегралов G, постоянна на поверхности уровня. Докажем обратное, т. е. что $\operatorname{Ker}\widetilde{\omega} \subset H_x$. Пусть $\omega(X, Y) = 0$ для любого вектора $Y \in T_x M_\xi$. Требуется представить вектор X в виде $X = \operatorname{sgrad} h$ для некоторой функции $h \in H_\xi$. Рассмотрим форму ω как кососимметричное скалярное произведение на касательной плоскости $T_x M$ и обозначим через $(T_x M_\xi)^\perp$ ортогональное дополнение относительно формы ω к плоскости $T_x M_\xi$ в $T_x M$. Так как форма ω невырождена, то имеет место равенство $\dim (T_x M_\xi)^\perp = \dim M - \dim T_x M_\xi = \dim V = k$. Напомним, что в случае кососимметричного скалярного произведения пространство $T_x M$ не обязано разлагаться в прямую сумму $T_x M_\xi$ и $(T_x M_\xi)^\perp$, так как эти плоскости могут иметь ненулевое пересечение. Ясно, что $\operatorname{Ker}\widetilde{\omega} = T_x M_\xi \cap (T_x M_\xi)^\perp$. Докажем, что $(\operatorname{sgrad} f;\ f \in G) = (T_x M_\xi)^\perp$. В самом деле, пусть $Y \in T_x M_\xi$, тогда $\omega(\operatorname{sgrad} f, Y) = Y(f) = 0$, так как $f = \text{const}$ на M_ξ. Итак, $(\operatorname{sgrad} f;\ f \in G) \subset (T_x M_\xi)^\perp$. Далее, $\dim(\operatorname{sgrad} f;\ f \in G) = k = \dim G$. Это равенство вытекает из того, что линейная оболочка градиентов $(\operatorname{grad} f;\ f \in G)$ имеет размерность k (см. определение G), а кососимметрическое скалярное произведение невырождено, и линейная оболочка косых градиентов также имеет размерность k. Наконец, было доказано, что $\dim (T_x M_\xi)^\perp = k$, поэтому $(\operatorname{sgrad} f;\ f \in G) = (T_x M_\xi)^\perp$ (см. рис. 173). Утверждение доказано. ■

Соберем вместе все эти факты и изучим геометрическую картину взаимодействия описанных подмногообразий. Основными объектами являются: а) поверхность уровня M_ξ, $\dim M_\xi = 2n - k$; б) орбита $\mathfrak{G}(x)$ точки x, $\dim \mathfrak{G}(x) = k$, в) орбита $\mathfrak{H}_\xi(x)$ точки x при действии подгруппы $\mathfrak{H}_\xi = \exp H_\xi$. Ясно, что $T_x \mathfrak{G}(x) = (\operatorname{sgrad} f;\ f \in G)$, $T_x \mathfrak{H}_\xi(x) = H_x = (\operatorname{sgrad} h;\ h \in H_\xi)$. Отсюда следует, что $\mathfrak{G}(x) \cap M_\xi = \mathfrak{H}_\xi(x)$ (рис. 174).

Отметим, что размерность орбиты $\mathfrak{H}_\xi(x)$ равна размерности $\mathfrak{H}_\xi$ и равна r.

Рассмотрим действие группы $\mathfrak{G}$ на M и предположим, что в малой окрестности поверхности M_ξ это действие имеет один тип стационарных подгрупп, т. е. что все орбиты группы $\mathfrak{G}$, близкие к орбите $\mathfrak{G}(x)$, ей диффеоморфны. Рассмотрим проекцию $p\colon M \to M/\mathfrak{G}$ многообразия M на пространство орбит $M/\mathfrak{G} = N$. Это пространство может не быть гладким многообразием и иметь особенности. Для нас важно то, что в малой окрестности точки $p\mathfrak{G}(x) \in M/\mathfrak{G}$ пространство $M/\mathfrak{G}$ — гладкое многообразие размерности $2n - k$. В действительности, если $\mathfrak{G}$, например, компактная группа, гладко действующая на M, то объединение множества орбит общего положения, диффеоморфных друг другу, является открытым всюду плотным подмножеством в M, поэтому пространство N является $(2n - k)$-мерным многообразием всюду, за исключением подмножества меры нуль. Отметим, что пространство (многообразие) N не обязано быть симплектическим, так как, например, оно может быть нечетномерно. Проекция p, будучи ограничена на поверхность M_ξ, проектирует ее на пространство $Q_\xi = M_\xi/\mathfrak{H}_\xi$. Поэтому пространство N расслоено на поверхности Q_ξ (рис. 175). Здесь мы опираемся на предложение 15.2.

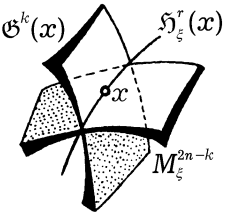

Рис. 174

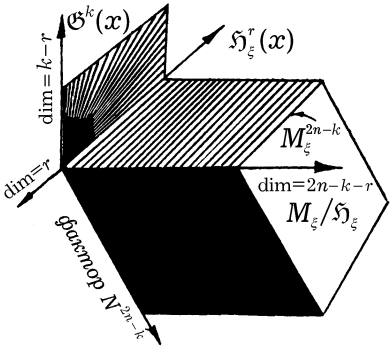

Рис. 175

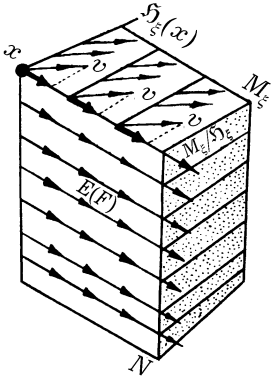

Рис. 176

Предложение 15.4. *Многообразия Q_ξ, т. е. фактор-многообразия поверхностей уровня M_ξ по действию подгруппы $\mathfrak{H}_\xi$, являются симплектическими многообразиями с невырожденной замкнутой формой ρ, являющейся проекцией формы $\widetilde{\omega}$ на M_ξ при отображении $p\colon M_\xi \to Q_\xi$. При этом $p^*\rho = \widetilde{\omega} = \omega|_{M_\xi}$.*

Доказательство вытекает из предложения 15.3, так как ядро формы $\widetilde{\omega}$ на T_xM_ξ совпадает с плоскостью $H_x \subset T_xM_\xi$. Вернемся теперь к изучению гамильтоновых систем на M. Пусть $v = \operatorname{sgrad} F$ — система с алгеброй интегралов G, т. е. $\{F, G\} = 0$. Так как гамильтониан F коммутирует (в смысле скобки Пуассона) со всеми элементами из G, то F инвариантна относительно группы $\mathfrak{G}$. В самом деле, $(\operatorname{sgrad} f)F = \{f, F\} = 0$, $f \in G$. В частности, подгруппа $\mathfrak{H}_\xi$, действуя на M, также переводит функцию F в себя. Итак, определена естественная проекция векторного поля $\operatorname{sgrad} F$ на пространство $N = M/\mathfrak{G}$. При этом векторное поле $\operatorname{sgrad} F$ касается поверхности M_ξ и также проектируется в некоторое поле $E(F)$ на факторе Q_ξ, так как поле $\operatorname{sgrad} F$ инвариантно относительно $\mathfrak{H}_\xi$. Итак, пространство N расслоено на симплектические многообразия Q_ξ и на N определено векторное поле $E(F)$, касающееся всех поверхностей Q_ξ (рис. 176). Окончательно мы сопоставили тройке $(M^{2n}, \operatorname{sgrad} F, \omega)$ новую тройку $(Q_\xi, E(F), \rho)$.

Предложение 15.5. *Векторное поле $E(F)$ является гамильтоновым относительно симплектической формы ρ на многообразии Q_ξ для функции Гамильтона $\widetilde{F}$, равной проекции функции $F|_{M_\xi}$ на многообразие Q_ξ, т. е. $E(F) = \operatorname{sgrad}_\rho(p_* F|_{M_\xi})$.*

Доказательство следует из предложения 15.4 и инвариантности гамильтониана F при действии группы. Построенное выше соответствие $(M, \operatorname{sgrad} F, \omega) \to (Q_\xi, E(F), \rho)$ и называется редукцией исходной гамильтоновой системы $\operatorname{sgrad} F$. При этой редукции мы получили новую гамильтонову систему на многообразии Q_ξ, размерность которого равна $2n - k - r$, что меньше размерности исходного многообразия, равной $2n$, причем $\dim Q_\xi < \dim M_\xi = 2n - k$. Может оказаться, что редуцированная система на Q_ξ оказывается более простой, чем исходная система на M. Предположим, что редуцированную систему удалось проинтегрировать. Тогда это позволяет увеличить число интегралов у исходной системы $\operatorname{sgrad} F$ на M, «подняв» эти интегралы с многообразия N обратно на многообразие M.

Предложение 15.6. *Пусть G — конечномерная алгебра интегралов* $\operatorname{sgrad} F$ *на M, удовлетворяющая всем перечисленным условиям, и пусть $E(F)$ — редуцированная система на многообразии $N = \bigcup_{\xi} Q_\xi$, являющаяся гамильтоновой на каждом подмногообразии Q_ξ. Пусть G' — линейное пространство функций на многообразии N таких, что их ограничения на подмногообразия Q_ξ образуют конечномерную алгебру интегралов потока $E(F)$. Тогда пространство функций $G \oplus G''$, где $G'' = p^*G'$, т. е. $G'' = \{gp,\ g \in G'\}$, $p\colon M \to N$, является алгеброй Ли интегралов системы* $\operatorname{sgrad} F$, *причем* $[G, G''] = 0$.

Доказательство.

Пусть g — некоторая функция на пространстве N, тогда ее прообраз gp при отображении $p\colon M \to N$ является функцией на M, очевидно, инвариантной относительно действия $\mathfrak{G}$ на M. Но это означает, что функция gp находится в инволюции со всей исходной алгеброй функций (интегралов) G. Итак, всякая новая функция g, являющаяся интегралом для редуцированного потока $E(F)$ на N, дает дополнительный интеграл gp исходного гамильтонова потока $\operatorname{sgrad} F$ на M. То, что эти дополнительные интегралы независимы от функций алгебры G, следует из того, что их градиенты отличны от нуля по направлению подмногообразий Q_ξ, лежащих (локально) в поверхности уровня M_ξ, в то время как градиенты функций из G ортогональны M_ξ. Предложение доказано. ■

Доказательство теоремы 15.1.

Пусть v — одна из систем, указанных в формулировке теоремы, т. е. либо $v = \operatorname{sgrad} F$, $\{F, G\} = 0$, либо $v = \operatorname{sgrad} h$, где $h \in \operatorname{Ann} \xi = H_\xi$. Рассмотрим описанную выше редукцию. Поскольку теперь выполнено дополнительное условие: $\dim G + \text{ранг}\, G = \dim M$, т. е. $k + r = 2n$, то размерность поверхности M_ξ равна r. Размерность орбиты $\mathfrak{H}_\xi(x)$, содержащейся в M_ξ, также равна r (по определению) (см. рис. 175). Отсюда сразу следует, что $M_\xi = \mathfrak{H}_\xi(x)$, т. е. в условиях теоремы 15.1 поверхность уровня M_ξ является орбитой точки x при действии $\mathfrak{H}_\xi$, алгебра Ли которой является аннулятором ковектора ξ, определяющего данную поверхность уровня. В частности, $\dim Q_\xi = 2n - k - r = 0$. Поэтому в данном случае структура редуцированной системы особенно проста. Так как Q_ξ является точкой, то поток $E(F)$ — нулевой (рис. 177). Здесь пространство N имеет размерность n. Так как M_ξ — поверхность уровня

интегралов G для потока v, то этот поток касается M_ξ в обоих случаях а) и б) (см. формулировку теоремы), т. е. M_ξ — r-мерное подмногообразие, инвариантное относительно всех полей вида $\operatorname{sgrad} h$, $h \in \operatorname{Ann}\xi$ и $\operatorname{sgrad} F$, $\{F, G\} \equiv 0$. Осталось доказать, что поверхность уровня является r-мерным тором в том случае, когда M_ξ компактна и связна. Для этого нам потребуется вспомогательное

Предложение 15.7. *Пусть $\xi \in G^*$ — ковектор общего положения. Тогда его аннулятор $\operatorname{Ann}\xi$ коммутативен, в частности, подгруппа $\mathfrak{H}_\xi$ коммутативна.*

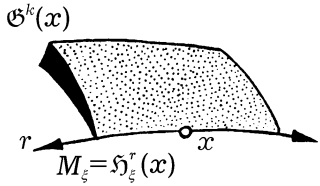

Рис. 177

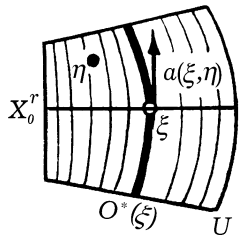

Рис. 178

Доказательство.

Рассмотрим коприсоединенное действие группы $\mathfrak{G} = \exp G$ на коалгебре G^*. Через $O^*(\xi)$ обозначим орбиту, проходящую через точку $\xi \in G^*$. Так как $\dim H_\xi = r$ и $\dim G^* = k$, то $\dim O^*(\xi) = k - r$. Так как ковектор ξ общего положения, то орбиты, близкие к $O^*(\xi)$, ей диффеоморфны, и можно считать, что достаточно малая окрестность U точки ξ расслоена на гомеоморфные слои (рис. 178). Через X_0 обозначим локальное сечение расслоения U на орбиты действия $\mathfrak{G}$. Мы пользуемся тем, что U представимо в виде прямого произведения базы X_0 на слой — часть орбиты (см. рис. 178). Пусть $h(\eta)$ — гладкая функция на U, постоянная на орбитах. Мы утверждаем, что $a(\xi, dh(\xi)) = 0$, где dh (дифференциал h) интерпретируется как элемент дуального пространства $(G^*)^*$, т. е. $dh(\xi) \in G$. Другими словами, мы утверждаем, что $dh(\xi) \in \operatorname{Ann}\xi$. Мы должны убедиться в том, что $a(\xi, dh(\xi))(g) = 0$ для любого $g \in G$. Имеем

$$a(\xi, dh(\xi))(g) = \langle a(\xi, dh(\xi)), g\rangle = \langle \xi, [dh(\xi), g]\rangle = -\langle a(\xi, g), dh(\xi)\rangle = 0,$$