

так как ковектор  $a(\xi, g) = \text{ad}_g^* \xi$  лежит в касательной плоскости  $T_\xi O^*$  к орбите  $O^*$  в точке  $\xi$ , а функция  $h$  постоянна на орбитах, в частности, постоянна и на орбите  $O^*$  (см. рис. 178). Рассмотрим на сечении  $X_0$ , являющемся гладкой поверхностью размерности  $r$ , трансверсально пересекающей орбиты, близкие к орбите  $O^*(\xi)$ , набор из  $r$  независимых функций  $h_1, \dots, h_r$  и продолжим их до гладких функций на всей окрестности  $U$ , продолжив их с сечения  $X_0$  значениями, постоянными вдоль орбит  $O^*$ . Мы получаем  $a(\xi, dh_i(\xi)) = 0, 1 \leq i \leq r$ . Таким образом,  $dh_i(\xi) \in \text{Ann } \xi, 1 \leq i \leq r$ . Так как функции  $(h_i)$  были выбраны независимыми, то все дифференциалы  $(dh_i(\xi))$  независимы в  $\text{Ann } \xi$ , и число их равно  $r$ , т. е. в точности совпадает с размерностью  $\text{Ann } \xi$ . Итак, дифференциалы  $dh_i(\xi)$  образуют базис в  $\text{Ann } \xi$ , и для доказательства коммутативности аннулятора достаточно доказать, что попарные коммутаторы этих дифференциалов равны нулю, т. е.  $[dh_i(\xi), dh_j(\xi)] = 0$ . Так как  $a(\xi, dh(\xi)) = 0$ , то выполняется равенство  $b(\xi) = a(\xi, dh_i(\xi))(dh_j(\xi)) = 0$ . Отсюда  $b(\xi) = \langle a(\xi, dh_i(\xi)), dh_j(\xi) \rangle = \langle \xi, [dh_i(\xi), dh_j(\xi)] \rangle = 0$ . Рассмотрим произвольное направление  $\tau$  в окрестности  $U$  и продифференцируем вдоль этого направления функцию  $b(\xi) \equiv 0$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\tau} b(\xi) = \frac{d}{d\tau} \langle \xi, [dh_i(\xi), dh_j(\xi)] \rangle = \\ &= \langle \tau, [dh_i(\xi), dh_j(\xi)] \rangle + \langle \xi, \left[ \frac{d}{d\tau} dh_i(\xi), dh_j(\xi) \right] \rangle + \\ &\quad + \langle \xi, \left[ dh_i(\xi), \frac{d}{d\tau} dh_j(\xi) \right] \rangle = \langle \tau, [dh_i(\xi), dh_j(\xi)] \rangle - \\ &\quad - \langle a(\xi, dh_j(\xi)), \frac{d}{d\tau} dh_i(\xi) \rangle - \langle a(\xi, dh_i(\xi)), \frac{d}{d\tau} dh_j(\xi) \rangle = \\ &= \langle \tau, [dh_i(\xi), dh_j(\xi)] \rangle = 0, \end{aligned}$$

так как  $a(\xi, dh_j(\xi)) = a(\xi, dh_i(\xi)) = 0$ . Так как  $\tau \in U \subset G^*$  произвольно, то из равенства  $\langle \tau, [dh_i(\xi), dh_j(\xi)] \rangle = 0$  вытекает, что  $[dh_i(\xi), dh_j(\xi)] = 0$ . Утверждение доказано. ■

Возвращаясь к доказательству теоремы 15.1. Мы доказали, что поверхность  $M_\xi$  — орбита группы  $\mathfrak{H}_\xi$ , и так как  $\dim M_\xi = \dim \mathfrak{H}_\xi$ , то  $M_\xi$  есть фактор-группа  $\mathfrak{H}_\xi$  по дискретной решетке  $\Gamma$ . Так как группа  $\mathfrak{H}_\xi = \exp \text{Ann } \xi$  коммутативна, то  $M_\xi$  в случае компактности и связности

является  $r$ -мерным тором. Остальные утверждения доказываются так же, как и при доказательстве теоремы Лиувилля.

Итак, один из способов применения «некоммутативной теоремы» 15.1 такой: если  $v = \text{sgrad } f$  — гамильтонова система на  $M^{2n}$ , то нужно искать такую некоммутативную алгебру  $G$ , что гамильтониан  $f$  включается в аннулятор ковектора  $\xi \in G^*$  общего положения. Если такая алгебра  $G$  нашлась, то при условии  $\dim G + \text{ранг } G = 2n$  поток  $v$  движется по  $r$ -мерному тору  $T^r$ , совпадающему с поверхностью уровня  $M_\xi$ , где  $r = \text{ранг } G$ .

#### 4. Орбиты (ко)присоединенного представления как симплектические многообразия.

Пусть  $G$  — конечномерная алгебра,  $G^*$  — коалгебра и  $\text{Ad}_G^*$ :  $G^* \rightarrow G^*$  — коприсоединенное представление  $\mathfrak{G} = \exp G$  на  $G^*$ . Тогда  $G^*$  расслаивается на орбиты  $O^*$ . Каждая из них — гладкое подмногообразие, вложенное в линейное пространство  $G^*$ . Оказывается, на каждой орбите естественно определяется симплектическая структура, замкнутая и невырожденная, что и превращает орбиты в симплектические многообразия. Эта структура (форма Кириллова) определяется так. Пусть  $x \in G^*$  — произвольная точка,  $\xi_1, \xi_2 \in T_x O^*$  — два произвольных касательных вектора к орбите. Мы должны определить значение формы  $\omega(\xi_1, \xi_2)$ . Напомним, что каждый вектор  $\xi$ , касательный к орбите, представим в виде  $\text{ad}_g^* x = a(x, g)$ , так как  $T_x O^* = \text{ad}_G^* x$ . Поэтому существуют такие элементы  $g_1, g_2 \in G$ , что  $\xi_i = a(x, g_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Это представление неоднозначно, но это не влияет на дальнейшую конструкцию. Определим значение формы  $\omega_x(\xi_1, \xi_2)$  в точке  $x \in O^*$  на касательных векторах  $\xi_1, \xi_2$  к орбите  $O^*$  так:  $\omega_x(\xi_1, \xi_2) = \langle x, [g_1, g_2] \rangle$ , где  $x \in G^*$ ;  $g_1, g_2 \in G$ .

**Предложение 15.8.** *Определенная выше форма  $\omega$  обладает свойствами: 1) форма билинейна и ее значение не зависит от произвола в выборе представителей  $g_1, g_2$ , 2) форма кососимметрична и определяет внешнюю 2-форму на орбите, 3) форма невырождена на орбите, 4) форма замкнута на орбите.*

Если алгебра  $G$  компактна, то ее можно канонически отождествить, используя форму Киллинга, с  $G^*$ , и тогда форма  $\omega$  на орбитах  $O$  присоединенного представления определяется так:  $\omega_x(\xi_1, \xi_2) = \langle x, [g_1, g_2] \rangle$ , где  $\langle , \rangle$  — форма Киллинга, и  $x, \xi_i, g_i \in G$ . Отметим, что

в общем случае форма  $\omega$  может быть записана так:

$$\omega_x(\xi_1, \xi_2) = \langle a(x, g_1), g_2 \rangle = \langle \xi_1, g_2 \rangle = -\langle \xi_2, g_1 \rangle.$$

Доказательство предложения 15.8. Применим разработанную выше технику редукции. Рассмотрим кокасательное расслоение  $M = T^*\mathfrak{G}$  к группе  $\mathfrak{G}$  в виде прямого произведения  $M = T^*\mathfrak{G} = T_E^*\mathfrak{G} \times \mathfrak{G} = G^* \times \mathfrak{G}$ . При этом зададим действие  $\mathfrak{G}$  на этом прямом произведении так, что  $\mathfrak{G}$  действует на втором сомножителе  $\mathfrak{G}$  левыми сдвигами и не меняет координаты по первому сомножителю  $G^*$ . Рассмотрим алгебру интегралов  $V$ , соответствующих левому действию группы  $\mathfrak{G}$  на фазовом пространстве  $T^*\mathfrak{G}$ . Ясно, что эта алгебра интегралов изоморфна  $G$ . Всякая функция  $f \in V$  является правоинвариантной и принимает значения по формуле  $f(\xi, g) = \langle \text{Ad}_{g^{-1}}^*(\xi), f \rangle$ ,  $f \in V = G$ ,  $\xi \in G^*$ ,  $g \in \mathfrak{G}$ . Таким образом, поверхность  $M_\xi$ , соответствующая  $\xi \in V^*$ , состоит из всех пар  $(\tau, g)$  таких, что  $f(\tau, g) = \langle \xi, f \rangle$ , т. е.  $\text{Ad}_{g^{-1}}^*(\tau) = \xi$ , или  $\tau = \text{Ad}_g^* \xi$ . Поскольку  $(\xi, E) \in M_\xi$ , то  $M_\xi = \{(\text{Ad}_g^* \xi, g); g \in \mathfrak{G}\}$ . Отсюда получаем, что поверхность  $M_\xi$  — расслоение с базой  $O^*(\xi)$  и слоем  $\mathfrak{H}_\xi$ , где  $O^*$  — орбиты  $\mathfrak{G}$  на  $G^*$ , а  $\mathfrak{H}_\xi$  — максимальный тор, соответствующий подалгебре Картана  $H_\xi$ , оставляющей ковектор  $\xi$  на месте. Мы представили орбиту общего положения коприсоединенного представления в виде фактор-многообразия  $M_\xi/\mathfrak{H}_\xi$ , где  $H_\xi$  — аннулятор  $\xi$ . Из предложения 15.4 следует, что  $O^*$  — симплектическое многообразие. Прямое вычисление показывает, что возникающая на  $O^*$  симплектическая форма совпадает с канонической формой, описанной выше.

---

---

## ГЛАВА 6

# Геометрия и механика

### § 16. Вложение гамильтоновых систем в алгебры Ли

#### 1. Постановка задачи и полные коммутативные наборы функций

Переходим к изучению некоторых конкретных механических систем, для которых удается доказать их полную интегрируемость (в смысле Лиувилля). Особый интерес представляют системы, описывающие: а) движение многомерного твердого тела с закрепленной точкой (в отсутствие силы тяжести) и движение «свободного твердого тела», б) движение многомерного твердого тела по инерции в идеальной жидкости. Под интегрированием этих (и аналогичных им) систем будем понимать полную интегрируемость по Лиувиллю, т. е. при таком подходе основной задачей является нахождение достаточного числа коммутирующих интегралов системы. Обычно механические системы указанного типа записываются как системы обыкновенных дифференциальных уравнений на каком-либо евклидовом пространстве. Например, классические уравнения, описывающие движение трехмерного твердого тела с закрепленной точкой (в отсутствие силы тяжести), записываются в трехмерном евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3(x, y, z)$  так:

$$\dot{x} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}yz, \quad \dot{y} = \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 + \lambda_1}xz, \quad \dot{z} = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 + \lambda_3}xy,$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  — вещественные числа. Оказывается, некоторые гамильтоновы системы, записанные на  $\mathbb{R}^n$ , имеют скрытую алгебраическую структуру, обнаружение которой позволяет проинтегрировать такие системы. Примеров имеется довольно много, однако мы выделим среди них структуру, связанную с алгебрами Ли. В простейшей форме это означает, что изучаемая система сохраняет орбиты (ко)присоединенного представления некоторой группы Ли, алгебра Ли которой отождествляется с евклидовым пространством, на котором задана система.

**Определение 16.1.** Мы будем говорить, что гамильтонова система  $v$  на  $\mathbb{R}^n$  допускает вложение в алгебру Ли  $G$ , если  $\mathbb{R}^n$  можно отождествить с коалгеброй Ли  $G^*$  некоторой группы Ли  $\mathfrak{G}$  таким образом, что: 1) векторное поле  $v$  касается (после этого отождествления) орбиты  $O^*$  (ко)присоединенного представления группы  $\mathfrak{G}$  на  $G^* = \mathbb{R}^n$ , т. е. все орбиты  $O^*$  инвариантны относительно  $v$ , 2) векторное поле  $v$  на  $G^* = \mathbb{R}^n$  оказывается гамильтоновым на орбитах  $O^*$  относительно канонической симплектической формы  $\omega$ , описанной в § 15, и имеет вид  $v \operatorname{sgrad} f$ , где  $f$  — функция на  $O^*$ .

Класс таких систем содержит важные механические примеры. Конечно, далеко не всякая система  $v$  допускает вложение в алгебру Ли, поскольку условия 1 и 2 (определение 16.1) накладывают довольно жесткие ограничения на структуру поля. В то же время ясно, что существование такого вложения позволяет применить для поиска интегралов системы развитый аппарат теории алгебр Ли. Если система  $v$  на  $\mathbb{R}^n$  задана, то одним из путей ее интегрирования является поиск ее вложения в подходящую алгебру Ли. Следует отметить неоднозначность в реализации этой программы. Во-первых,  $\mathbb{R}^n$  может быть отождествлено с алгебрами различных групп Ли, в связи с чем следует перебрать все алгебры Ли данной размерности  $n$ . Число таких алгебр возрастает с ростом  $n$ . Во-вторых, в некоторых случаях оказывается достаточным представить систему  $v$  как гамильтонову на какой-то одной орбите  $O^*$ , а не на всех орбитах. Поскольку в данной алгебре Ли имеются и орбиты общего положения, и сингулярные орбиты, это открывает возможности для варьирования при поиске вложения данной системы в алгебру Ли.

В приведенном выше простом примере системы  $\mathbb{R}^n$  искомое вложение системы в алгебру Ли существует и устроено просто. Для этого достаточно отождествить  $\mathbb{R}^n = G^* = G$  с трехмерной алгеброй Ли ортогональной группы  $SO_3$ , т. е. с пространством  $so_3$  кососимметрических вещественных матриц  $3 \times 3$ . При этом  $x = x_{12}$ ,  $y = x_{13}$ ,  $z = x_{23}$ ,

т. е.  $(x, y, z) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{pmatrix} \in so_3$ . Как мы уже знаем, орбитами

присоединенного представления группы  $SO_2$  на  $so_3$  являются стандартные двумерные сферы с центром в начале координат. Векторное поле  $v = (v_x, v_y, v_z)$ , описывающее движение твердого тела с закрепленной точкой, имеет следующие два интеграла:  $P_\psi = (\lambda_1 + \lambda_2)x^2 + (\lambda_1 + \lambda_3)y^2 + (\lambda_2 + \lambda_3)z^2$  и  $Q_\psi = (\lambda_1 + \lambda_2)^2x^2 + (\lambda_1 + \lambda_3)^2y^2 + (\lambda_2 + \lambda_3)^2z^2$ .

Легко проверяется, что производная этих функций по направлению поля  $v$  равна нулю. Чтобы вскрыть алгебраическую структуру как системы, так и ее интегралов, удобно сделать замену координат в  $\mathbb{R}^n : x \rightarrow \rightarrow x/(\lambda_1 + \lambda_2), y \rightarrow y/(\lambda_1 + \lambda_3), z \rightarrow z/(\lambda_2 + \lambda_3)$ . Тогда оба интеграла преобразуются в функции:  $P_\varphi = x^2/(\lambda_1 + \lambda_2) + y^2/(\lambda_1 + \lambda_3) + z^2/(\lambda_2 + \lambda_3); Q_\varphi = x^2 + y^2 + z^2$ . После этой замены поле  $v$  оказывается касательным к двумерным сферам, следовательно, система допускает вложение в трехмерную алгебру Ли, так как каноническая 2-форма на орbitах  $S^2$  в  $sos_3$  совпадает с 2-формой инвариантного риманова объема. Евклидово скалярное произведение совпадает здесь с формой Киллинга.

Конечно, одна и та же система может иметь несколько вложений в разные алгебры Ли. Чем выгодно с точки зрения поиска интегралов существование вложения  $v$  в алгебру? Рассмотрим сначала следующую общую задачу.

Как видно из предыдущего материала, естественной постановкой является следующая: как найти на симплектическом аналитическом или алгебраическом многообразии  $M^{2n}$  коммутативный набор независимых функций в количестве, равном  $n$ . Другими словами, как найти на  $M^{2n}$  коммутативную (относительно скобки Пуассона) алгебру функций размерности  $n$ , аддитивный базис которой состоял бы из аналитических или алгебраических функций, функционально независимых почти всюду на  $M$ . Такие наборы функций  $H(M)$  для сокращения назовем полными коммутативными наборами. Мы не интересуемся пока интегрированием каких-либо гамильтоновых систем. Если полный коммутативный набор на  $M$  обнаружен, то мы автоматически получаем серию вполне интегрируемых аналитических гамильтоновых систем на  $M$ : достаточно рассмотреть поля  $sgrad f$ , где  $f$  — функции из набора  $H(M)$ . Тогда  $n$ -мерное пространство функций  $H(M)$  является набором интегралов для системы с гамильтонианом  $f$ . При таком подходе к задачам гамильтоновой механики основной проблемой становится построение на симплектических многообразиях как можно большего числа разных полных коммутативных наборов. На любом гладком многообразии всегда существует полный коммутативный набор гладких функций, почти всюду независимых. Чем больше такой запас, тем больше мы получаем примеров полностью интегрируемых (в коммутативном смысле) систем.

Как мы увидим, существуют важные примеры многообразий, на которых полные аналитические коммутативные наборы можно предъ-

явить в явном виде. В то же время не ясно, на любом ли гладком симплектическом аналитическом многообразии существует полный коммутативный набор аналитических функций. Можно уточнить поставленный вопрос следующим образом: на любом ли алгебраическом симплектическом многообразии существует полный коммутативный набор, состоящий из алгебраических (рациональных) функций? Вероятно, есть топологические препятствия, не позволяющие построить такой набор на произвольном алгебраическом симплектическом многообразии. Если такие многообразия (т.е. не допускающие полного набора) действительно существуют, то никакая алгебраическая гамильтонова система на таком многообразии не является полностью интегрируемой по Лиувиллю.

Особый интерес представляет алгебраический вариант задачи, так как в конкретных примерах уже проинтегрированных систем центральную роль играют полиномиальные интегралы (или рациональные, алгебраические интегралы). Наиболее естественным классом функций, среди которых следует искать полные коммутативные наборы на алгебраических многообразиях, является класс полиномов или рациональных, алгебраических функций.

К настоящему времени обнаружены полные коммутативные наборы на симплектических многообразиях важного класса — на орбитах (ко)присоединенных представлений многих групп Ли. В [10, 12] сформулирована гипотеза  $A$ : пусть  $G$  — произвольная конечномерная алгебра Ли, тогда на коалгебре  $G^*$  существует линейное пространство гладких аналитических функций, ограничения которых на орбиты общего положения (ко)присоединенного представления группы  $\mathfrak{G} = \exp G$  на коалгебре  $G^*$  образуют полный коммутативный набор  $H(O^*)$  на этих орбитах  $O^*$ , т.е. любая пара функций  $f, g \in H(O^*)$  находится в инволюции на орбитах  $O^*$  относительно канонической формы  $\omega$ , аддитивный базис  $f_1, \dots, f_k$  в  $H(O^*)$  состоит из функций, функционально независимых почти всюду на  $O^*$ , и размерность пространства  $H(O^*)$  равна половине размерности орбиты общего положения, т.е.  $k = 1/2 \dim O^* = 1/2(\dim G - \text{ранг } G)$ .

Эта гипотеза доказана для всех полупростых и редуктивных алгебр Ли [15, 12], а также для многих классов некомпактных вещественных алгебр (см., например, [22, 21]). Оказалось, что обнаруженные при этом полные коммутативные наборы содержат гамильтонианы важных механических систем, что позволяет полностью их проинтегрировать.

Подробнее мы остановимся на этом ниже. Значение гипотезы  $A$  не ограничивается возможностью предъявлять примеры интегрируемых систем. Из ее справедливости вытекала бы справедливость теоремы 15.2 не только для компактных, но и для некомпактных симплектических многообразий, т. е. в этом случае любая аналитическая гамильтонова система, интегрируемая в некоммутативном смысле, была бы автоматически интегрируемой и в коммутативном смысле. Более точно, имеет место следующее утверждение (см. [10]). Пусть на симплектическом многообразии  $M$  задана алгебра Ли  $G$  функционально независимых функций, где  $\dim G + \text{ранг } G = \dim M$  (см. теорему 15.1); тогда если для алгебры  $G$  выполнена гипотеза  $A$ , то найдется другая, уже коммутативная алгебра независимых функций  $G'$  такая, что  $\dim G' = 1/2 \dim G$ . Возвращаемся теперь к системам  $v$ , для которых существует вложение в конечномерную алгебру Ли  $G$  (см. определение 16.1). Если для алгебры  $G$  справедлива гипотеза  $A$ , то на орбитах общего положения  $O^* \subset G^*$  есть полный коммутативный набор функций  $H(O^*)$  (см. выше). Если, кроме того, гамильтониан  $f$ , где  $v = \text{sgrad } f$ , принадлежит семейству  $H(O^*)$ , то мы получаем полный коммутативный набор интегралов для  $v$ . Знание полных коммутативных наборов на орбитах в  $G^*$  позволяет в принципе интегрировать гамильтоновы системы, вложимые в  $G^*$ .

Итак, одним из путей интегрирования систем на  $\mathbb{R}^n$  является следующий: а) пытаемся представить систему как гамильтонову на орбите в  $G^*$  при подходящем выборе алгебры  $G$ ; б) если такое вложение системы существует, пытаемся найти на  $O^* \subset G^*$  полный коммутативный набор функций, содержащий гамильтониан системы.

Имеется несколько приемов, позволяющих строить полные коммутативные наборы на орбите. Весьма эффективным оказался способ, основанный на идее сдвига инвариантов (ко)присоединенного представления на ковектор общего положения (см. описание ниже) [18, 15].

## 2. Уравнения движения многомерного твердого тела с закрепленной точкой и их аналоги на полуупростых алгебрах Ли. Комплексная полуупростая серия

Пусть  $G$  — полуупростая алгебра Ли,  $\langle , \rangle$  — форма Киллинга,  $f$  — гладкая функция на  $G$ . С каждой такой функцией связем гамильтонову систему на кокасательном расслоении  $T^*\mathfrak{G}$  к группе  $\mathfrak{G} = \exp G$ , продолжив  $f$  до левоинвариантной функции  $F$ , заданной на всем про-

странстве  $T^*\mathfrak{G}$ . Так как  $T^*\mathfrak{G}$  — симплектическое многообразие, то, взяв  $F$  в качестве гамильтониана, получаем на  $T^*\mathfrak{G}$  гамильтонову систему. Эта система левоинвариантна и распадается на две системы, одна из которых задается на кокасательном пространстве в единице группы, изоморфном алгебре Ли  $G$ , и называется обычно системой уравнений Эйлера. Эти уравнения допускают простое описание. Пусть  $\text{grad } f$  — поле на  $G$ , двойственное к дифференциальному  $df$ , т. е.  $\langle \text{grad } f, \xi \rangle = \xi(f)$ . Тогда уравнения Эйлера записываются в коммутаторном виде:  $\dot{X} = [X, \text{grad } f(X)]$ . Особый интерес представляют случаи геодезических потоков для левоинвариантных метрик на  $\mathfrak{G}$ . Здесь  $f$  является невырожденной квадратичной формой на алгебре  $G$ , а  $\text{grad } f(X)$  задается самосопряженным линейным оператором в  $G$ , т. е.  $\text{grad } f(X)$  имеет вид  $\varphi X$ , где оператор  $\varphi: G \rightarrow G$  самосопряжен. Теперь укажем уравнения, описывающие движение многомерного твердого тела с закрепленной точкой (в отсутствие сил тяжести).

Пусть  $G = so_n$  — алгебра Ли ортогональной группы,  $I$  — диагональная вещественная матрица:  $I = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ , где  $\lambda_i \neq \lambda_j$  при  $i \neq j$ . Рассмотрим на  $so_n$  оператор  $\psi X = IX + XI$ . Тогда уравнения  $\psi \dot{X} = [X, \psi X]$  называются уравнениями движения  $n$ -мерного твердого тела. Запишем их в явном виде, используя стандартные координаты в  $so_n$ . Представим  $so_n$  как алгебру кососимметрических вещественных матриц  $X = (x_{ij})$ , тогда  $\psi X = ((\lambda_i + \lambda_j)x_{ij})$ . Ясно, что  $\dot{x}_{ij} = \left( \frac{\lambda_j - \lambda_i}{\lambda_j + \lambda_i} \sum_{q=1}^n x_{iq}x_{qj} \right)$  (проверьте!). При  $n = 3$  получаем

$$\dot{x}_{12} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1} x_{13}x_{32}, \quad \dot{x}_{13} = \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 + \lambda_1} x_{12}x_{23}, \quad \dot{x}_{23} = \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{\lambda_3 + \lambda_2} x_{21}x_{13}.$$

Отождествляя  $so_3$  с  $\mathbb{R}^3$ , получаем, что эти уравнения совпадают с классическими уравнениями динамики трехмерного тела (см. выше). На этом основании уравнения  $\psi \dot{X} = [X, \psi X]$  для произвольного  $n$  и называются уравнениями движения многомерного твердого тела. Пусть  $I$  выбрана так, что  $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$  при всех  $i, j$ . Тогда оператор  $\psi$  обратим на  $so_n$ , и обратный оператор  $\psi^{-1}$  имеет вид  $(\varphi X)_{ij} = \frac{1}{\lambda_i + \lambda_j} x_{ij}$ .

Выполним в  $so_n$  замену координат  $Y = \psi X$ , тогда уравнение движения твердого тела преобразуется к форме:  $\dot{Y} = [\psi^{-1}Y, Y]$ . Умно-

жая его на  $-1$  и переобозначая  $Y$  через  $X$ , получаем уравнение Эйлера  $\dot{X} = [X, \varphi X]$ , где  $\varphi: so_n \rightarrow so_n$  — линейный самосопряженный оператор. В дальнейшем будем изучать именно эту форму уравнений. В координатной записи имеем

$$\begin{aligned}\dot{x}_{ij} &= (\lambda_i - \lambda_j) \sum_{q=1}^n \frac{x_{iq}x_{qj}}{(\lambda_j + \lambda_q)(\lambda_q + \lambda_i)} = \\ &= \sum_{q=1}^n x_{iq}x_{qj} \left( \frac{1}{\lambda_j + \lambda_q} - \frac{1}{\lambda_i + \lambda_q} \right).\end{aligned}$$

При  $n = 3$  получаем

$$\begin{aligned}\dot{x}_{12} &= \left( \frac{1}{\lambda_2 + \lambda_3} - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_3} \right) x_{13}x_{32}, \\ \dot{x}_{13} &= \left( \frac{1}{\lambda_3 + \lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right) x_{12}x_{23}, \\ \dot{x}_{23} &= \left( \frac{1}{\lambda_3 + \lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2 + \lambda_1} \right) x_{21}x_{13},\end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{-\lambda_1 + \lambda_2}{(\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_1 + \lambda_3)} yz, \quad \dot{y} = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{(\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_1 + \lambda_2)} xz, \\ \dot{z} &= \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{(\lambda_3 + \lambda_1)(\lambda_1 + \lambda_2)} xy,\end{aligned}$$

Прямое вычисление показывает, что следующие два полинома являются функционально независимыми интегралами этой системы в  $\mathbb{R}^3$ :

$$x^2 + y^2 + z^2, \quad \frac{x^2}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{y^2}{\lambda_1 + \lambda_3} + \frac{z^2}{\lambda_2 + \lambda_3}.$$

Очевидно, что эти функции совпадают с полиномами  $Q_\varphi$  и  $P_\varphi$ , полученными нами выше из двух интегралов  $Q_\psi$ , и  $P_\psi$  потока  $\psi \dot{X} = [X, \psi X]$  при замене  $Y = \psi X$ , которая переводит  $P_\psi \rightarrow P_\varphi$ ,  $Q_\psi \rightarrow Q_\varphi$ , а поток преобразуется к виду  $\dot{X} = [X, \varphi X]$ . Интегралы определены неоднозначно. Для дальнейшего полезно отметить, что их можно выбрать

так:  $x^2 + y^2 + z^2$  и  $x^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + y^2(\lambda_1^2 + \lambda_3^2) + z^2(\lambda_2^2 + \lambda_3^2)$ . Проверьте, что эти функции — интегралы потока  $\dot{X} = [X, \varphi X]$ .

Итак, при  $n = 3$  мы указали вложение этой системы в алгебру  $so_3$ . Оказывается, аналогичное вложение существует при любом  $n$ .

**Предложение 16.1.** *Векторное поле  $\dot{X} = [X, \varphi X]$ , где  $\varphi = \psi^{-1}$ ,  $\varphi X = IX + XI$ , касается всех орбит присоединенного представления группы  $SO_n$  на ее алгебре Ли  $so_n$ . Это поле гамильтоново на орбитах.*

*Доказательство.*

Пусть  $O$  — орбита, проходящая через точку  $X \in so_n = so_n^*$ . Тогда  $T_X O = \{[X, Y], Y \in so_n\}$ , поэтому  $[X, \varphi X] \in T_X O$ . Далее,  $\dot{X} = \text{sgrad } F$ , где  $F(X) = \langle X, \varphi X \rangle$ , что и требовалось. ■

Определим аналоги уравнений движения твердого тела на произвольной полупростой алгебре Ли. Мы предъявим многопараметрические семейства операторов  $\varphi: G \rightarrow G$  не только для комплексных полуправильных алгебр, но и для их вещественных компактных и нормальных форм. Оказывается, все системы  $\dot{X} = [X, \varphi X]$  являются вполне интегрируемыми на орбитах общего положения, и, следовательно, их интегралы задают полные коммутативные наборы функций на полупростых алгебрах Ли и некоторых их вещественных формах.

Пусть  $G$  — комплексная полупростая алгебра и  $G = T \oplus V^+ \oplus V^-$  — ее корневое разложение. Пусть  $a, b \in T$ ,  $a \neq b$  — два произвольных регулярных элемента картановской подалгебры. Рассмотрим оператор  $\text{ad}_a: G \rightarrow G$ . Ясно, что  $\text{ad}_a|_T \equiv 0$ ,  $\text{ad}_a: V^+ \rightarrow V^+$ ,  $\text{ad}_a: V^- \rightarrow V^-$ , т. е. оператор  $\text{ad}_a$  сохраняет корневое разложение  $G$  над  $\mathbb{C}$ . В самом деле,  $\text{ad}_a E_\alpha = \alpha(a)E_\alpha$  для любого  $\alpha \in \Delta$ ; считаем, что  $a$  и  $b$  «в общем положении», т. е.  $\alpha(a) \neq 0$ ,  $\alpha(b) \neq 0$ . Тогда операторы  $\text{ad}_a$  и  $\text{ad}_b$  обратимы на  $V^+ \oplus V^- = V$ ; а именно  $\text{ad}_a^{-1} E_\alpha = E_\alpha / \alpha(a)$ . Линейный оператор  $\varphi_{a, b, D}: G \rightarrow G$  определим так:  $\varphi_{a, b, D} X = \varphi_{a, b} X' + D(t) = \text{ad}_a^{-1} \text{ad}_b^{-1} X' + D(t)$ , где  $X = X' + t$  — однозначное разложение  $X$  по  $V$  и  $T$ , а  $D: T \rightarrow T$  — произвольный линейный оператор, симметричный на  $T$  относительно формы Киллинга. Оператор  $\varphi_{a, b, D}$  параметризован  $a, b, D$ . Ясно, что  $\varphi_{a, b, D} E_\alpha = \frac{\alpha(b)}{\alpha(a)} E_\alpha$ . В базисе Вей-

ля  $(E_\alpha, E_{-\alpha}, H'_\alpha)$  оператор  $\varphi$  задается матрицей:

$$\left| \begin{array}{cc|c} E_\alpha & \begin{matrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_q \end{matrix} & 0 \\ \hline E_{-\alpha} & 0 & \begin{matrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_q \end{matrix} \\ H'_\alpha & & D \end{array} \right| = \varphi_{a,b,D}$$

и  $\varphi_{a,b}: V \rightarrow V$ , где  $\lambda_\alpha = \alpha(b)/\alpha(a)$ ,  $q = \dim V^\pm$  = (число корней  $\alpha > 0$ ).

**Предложение 16.2.** *Оператор  $\varphi_{a,b,D}$  симметричен относительно формы Киллинга при любых  $a, b, D$ , удовлетворяющих указанным ограничениям.*

*Доказательство.*

Обозначим базис Вейля в  $V$  через  $(e_i)$ . Достаточно проверить, что  $\langle \varphi e_i, e_j \rangle = \langle e_i, \varphi e_j \rangle$  для любых  $i, j$ . Можно считать, что  $i \neq j$ . Напомним, что плоскость  $T$  ортогональна плоскости  $V = V^+ \oplus V^-$ . Так как  $\varphi$  переводит в себя  $V$  и  $T$ , и  $D$  симметричен на  $T$ , то достаточно проверить симметрию  $\varphi_{a,b}$  на  $V$ . Поскольку  $E_\alpha$  (где  $\alpha \neq 0$ ) — собственные векторы  $\varphi$ , то  $\langle \frac{\alpha(b)}{\alpha(a)} E_\alpha, E_\beta \rangle = \langle E_\alpha, \frac{\beta(b)}{\beta(a)} E_\beta \rangle = 0$  при  $\alpha + \beta \neq 0$ , так как  $\langle E_\alpha, E_\beta \rangle$ . Если  $\alpha + \beta = 0$ , то  $\frac{\alpha(b)}{\alpha(a)} = \frac{(-\alpha)(b)}{(-\alpha)(a)}$ . Предложение доказано. ■

Оператор  $\varphi$  на  $V$  имеет в случае «общего положения»  $q$  различных собственных чисел кратности два. Оператор  $\varphi: V \rightarrow V$  является изоморфизмом  $V$  на себя. Напомним, что  $V^+$  — нильпотентная подалгебра, например, в нашем модельном примере это — подалгебра верхнетреугольных матриц с нулями по главной диагонали. Так как  $V^+$  порождено векторами  $E_\alpha$ ,  $\alpha > 0$ , то  $\varphi|_{V^+}$  симметричен относительно формы Киллинга. Собственные числа этого оператора в случае общего положения различны:  $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ . Эту серию назовем нормальной нильпотентной серией. По построению, каждой комплексной серии отвечает одна нормальная нильпотентная серия. Оператор  $\varphi: G \rightarrow G$  переводит также в себя подалгебру  $V^+ \oplus T$ , причем  $\varphi|_{V^+ \oplus T}$  — изоморфизм пространства  $V^+ \oplus T$  на себя. В нашем модельном примере  $V^+ \oplus T$  — подалгебра верхнетреугольных матриц. Как и выше, все собственные числа

оператора  $\varphi|_{V^+ \oplus T}$  различны, и оператор симметричен. Итак, каждой комплексной серии отвечает нормальная разрешимая серия. В базисе Вейля операторы  $\varphi|_{V^+}$  и  $\varphi|_{V^+ \oplus T}$  изображаются матрицами:

$$\varphi_{V^+} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_q \end{pmatrix}, \quad \varphi_{V^+ \oplus T} = \left( \begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \lambda_q \\ 0 & & & 0 \\ \hline & & & D \end{array} \right).$$

Итак, на каждой полупростой алгебре мы построили гамильтоновы системы  $\dot{X} = [X, \varphi_{a, b, D} X]$ , которые являются аналогами уравнений движения твердого тела и допускают полное интегрирование (см. ниже). В частном случае мы получаем уравнения на алгебре  $so_n$ .

### 3. Гамильтоновы системы компактной и нормальной серий

Здесь мы построим аналогичное семейство гамильтоновых систем на произвольной простой компактной вещественной алгебре Ли, используя для этого компактные вещественные формы комплексных простых алгебр (см. § 12 и теорему 12.1). Каждая полупростая комплексная алгебра Ли  $G$  обладает компактной формой  $G_u$ . Мы построили каноническое вложение этой компактной подалгебры в комплексную алгебру  $G$ . Напомним, что  $G_u = \{E_\alpha + E_{-\alpha}, i(E_\alpha - E_{-\alpha}), iH'_\alpha\} = W^+ \oplus iT_0$ . Как и в предыдущем пункте, мы зададим симметричный оператор  $\varphi: G_u \rightarrow G_u$ , определяющий гамильтонову систему  $\dot{X} = [X, \varphi X]$  на  $G_u$ , сохраняющую слоение  $G_u$  на орбиты присоединенного представления. Пусть  $a, b \in iT_0$  — элементы общего положения. Так как  $\text{ad}_a E_\alpha = [a, E_\alpha] = i[a', E_\alpha]$ , где  $\alpha = ia'$ ,  $a' \in T_0$ , то  $\text{ad}_a E_\alpha = i\alpha(a')E_\alpha$ , где  $\alpha(a')$  вещественно. Следовательно,

$$\begin{aligned} \text{ad}_a(E_\alpha + E_{-\alpha}) &= \alpha(a')(i(E_\alpha - E_{-\alpha})), \\ \text{ad}_a(i(E_\alpha - E_{-\alpha})) &= -\alpha(a')(E_\alpha + E_{-\alpha}). \end{aligned}$$

Итак, оператор  $\text{ad}_a: W^+ \rightarrow W^+$  поворачивает вектор  $E_\alpha + E_{-\alpha}$  в вектор, пропорциональный  $i(E_\alpha - E_{-\alpha})$ , и наоборот. Аналогично действует и  $\text{ad}_b$ , причем в силу выбора  $a \in iT_0$  оператор  $\text{ad}_a$  обратим на  $W^+$ . Тогда оператор  $\varphi_{ab} = \text{ad}_a^{-1} \text{ad}_b: W^+ \rightarrow W^+$  имеет все векторы  $E_\alpha + E_{-\alpha}, i(E_\alpha - E_{-\alpha})$  своими собственными векторами с собственными числами  $\alpha(b)/\alpha(a) = \alpha(b')/\alpha(a')$ , где  $a = ia'$ ,  $b = ib'$ ,  $a', b' \in T_0$ . Аналогичные события происходят и на подпространстве  $W^-$ . Оператор  $\varphi_{a, b, D}: G_u \rightarrow G_u$  определим так:  $\varphi X = \varphi(X' + t) = \varphi_{ab}X' + D(t) =$

$= \text{ad}_a^{-1} \text{ad}_b X' + D(t)$ , где  $X = X' + t$  — однозначное разложение  $X$  в  $G_u = W^+ \oplus iT_0$ ,  $X' \in W^+$ ,  $t \in iT_0$ ,  $D: iT_0 \rightarrow iT_0$  — произвольный линейный оператор, симметричный на  $iT_0$ . В базисе  $(E_\alpha + E_{-\alpha}, i(E_\alpha - E_{-\alpha}), iH'_\alpha)$  оператор  $\varphi$  задается матрицей:

$$\begin{array}{c|cc|c} E_\alpha + E_{-\alpha} & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hline & 0 & \ddots & \lambda_q \\ & 0 & & 0 \\ \hline i(E_\alpha - E_{-\alpha}) & 0 & \lambda_1 & 0 \\ & & 0 & \ddots & \lambda_q \\ \hline & & & & D \end{array} = \varphi_{a,b,D},$$

где числа  $\lambda_\alpha = \alpha(b)/\alpha(a)$  вещественны,  $q = \dim W^+$ .

**Предложение 16.3.** *Оператор  $\varphi: G_u \rightarrow G_u$  симметричен при любых  $a, b, D$ , удовлетворяющих указанным ограничениям.*

*Доказательство.*

Рассуждения аналогичны доказательству предложения 16.2. Единственное, что следует проверить, — это ортогональность выбранного нами базиса в  $W^+$ . Напомним, что  $iT_0$  ортогонально  $W^+$ . Далее,  $\langle E_\alpha + E_{-\alpha}, i(E_\alpha - E_{-\alpha}) \rangle = 0$ , ортогональность остальных векторов доказана выше. ■

Оператор  $\varphi_{ab}: W^+ \rightarrow W^+$  имеет в случае общего положения  $q$  различных собственных чисел кратности два.

Теперь построим аналогичное семейство гамильтоновых систем на некоторых простых компактных вещественных алгебрах Ли, отвечающих классическим нормальным компактным подалгебрам. В § 12 мы предъявили в каждой компактной форме  $G_u$  подалгебру  $G_n$ , натянутую на векторы  $E_\alpha + E_{-\alpha}$ ,  $\alpha \in \Delta$ . Так как все эти векторы — собственные для операторов  $\varphi$  компактной серии, то при ограничении их на подалгебру  $G_n$  получаем нормальную серию. Эти операторы просто совпадают с  $\varphi_{ab}: G_n \rightarrow G_n$ ,  $\varphi X = \text{ad}_a^{-1} \text{ad}_b X$ ,  $X \in G_n$ ;  $a, b \in iT_0$ ,  $\alpha(a) \neq 0$ ,  $\alpha(b) \neq 0$ . В базисе  $(E_\alpha + E_{-\alpha})$  операторы  $\varphi$  задаются матрицами:

$$\varphi_{ab} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \ddots & \lambda_q \end{pmatrix}, q = \dim W^+.$$

Отметим, что здесь  $a, b \notin G_n$ , т. е. операторы нормальной серии требуют для своего определения элементов некоторой большей алгебры.

Это отличает нормальную серию от комплексной и компактной серий, для которых элементы  $a$  и  $b$  принадлежали самой изучаемой алгебре. Не любую компактную полупростую алгебру можно представить в виде  $G_n$  в некоторой компактной вещественной форме  $G_u \subset G$ . Ниже приводится полный список всех таких простых алгебр Ли. Как было показано, алгебра  $G_n$  совпадает с неподвижными точками автоморфизма  $\tau: G \rightarrow G$ ,  $\tau X = \bar{X}$  после его ограничения на  $G_u$ . Пусть  $P \subset G_u$  — подпространство, ортогональное к  $G_n$  в  $G_u$ , на котором  $\tau = -1$ . Тогда очевидны коммутационные соотношения:  $[G_n, G_n] \subset G_n$ ,  $[P, P] \subset G_n$ ,  $[G_n, P] \subset P$ . Как мы знаем, это определяет симметрическое пространство  $\mathfrak{G}_n/\mathfrak{G}_u$ . Тогда плоскость  $P$  отождествляется с касательной плоскостью к пространству  $\mathfrak{G}_u/\mathfrak{G}_n$ , которое канонически вкладывается в  $\mathfrak{G}_u$  как картановская модель. Перечислим все нормальные формы, сохранив стандартные обозначения для соответствующих симметрических пространств.

**Тип AI.**  $G = sl(n, \mathbb{C})$ ,  $G_u = su_n$ ,  $G_n = so_n$ ,  $\sigma X = \bar{X}$ ,  $n > 1$ . Алгебра  $G_n$  реализована в  $G_u$  как подалгебра вещественных кососимметрических матриц.

**Тип BDI.**  $G = so(p+q, \mathbb{C})$ ,  $so(p, q)$  — алгебра Ли компоненты единицы группы  $SO(p, q)$ . Алгебра  $so(p, q)$  реализована в  $sl(p+q, \mathbb{R})$  матрицами  $\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2^T & X_3 \end{pmatrix}$ , где все  $X_i$  вещественны,  $X_1, X_3$  — кососимметрические порядков  $p$  и  $q$ ,  $X_2$  — произвольна. Далее,  $G_u = so_{p+q} \supset \supset so_p \oplus so_q$ ,  $p > 1$ ,  $q > 1$ ,  $p + q \neq 4$ . Нормальным формам соответствуют следующие значения:  $p = q$  и  $p = q + 1$ , т.е.  $G_n = so_p \oplus so_p$  и  $G_n = so_q \oplus so_{q+1}$ .

**Тип CI.**  $G = sp(n, \mathbb{C})$ ,  $n \geq 1$ , через  $sp(n, \mathbb{R})$  обозначена алгебра  $\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & -X_1^T \end{pmatrix}$ ,  $X_i$  — вещественны порядка  $n$ ,  $X_2$  и  $X_3$  симметричны. Далее,  $G_u = sp_n$ ,  $G_n = u_n$ , вложение  $G_n \rightarrow G_u$  и задается так:  $A + iB \rightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$ , где  $A + iB \in u_n$ ,  $A$  и  $B$  вещественны.

Приведенным списком исчерпываются все нормальные формы  $G_n \subset G_u$ , для которых  $G_u$  — классическая простая алгебра Ли, т.е. типа  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$ ,  $D_n$ . Кроме этих форм существует несколько нормальных форм, порожденных особыми алгебрами Ли, описание которых мы здесь опускаем.

В заключение мы покажем, что среди гамильтоновых систем нор-

мальной серии содержатся классические уравнения движения многомерного твердого тела с неподвижной точкой (см. п. 2). Рассмотрим алгебру  $so_n$  и представим ее в виде нормальной формы в алгебре  $su_n$  (см. выше). Вложим  $su_n$  стандартным образом в  $u_n$  и рассмотрим два регулярных элемента  $a, b$  из картановской подалгебры  $iT_0$  в  $u_n$  (а не в  $su_n$ !). Пусть  $a = \begin{pmatrix} ia_1 & 0 \\ \ddots & \ddots \\ 0 & ia_n \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} ib_1 & 0 \\ \ddots & \ddots \\ 0 & ib_n \end{pmatrix}$ , где  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$  и  $a_i \neq \pm a_j, b_i \neq \pm b_j$ , при  $i \neq j$ . Тогда оператор  $\varphi_{ab}: G_n \rightarrow G_n$  действует так:  $\varphi_{ab}(E_\alpha + E_{-\alpha}) = \frac{\alpha(b)}{\alpha(a)}(E_\alpha + E_{-\alpha})$ . Так как каждый корень  $\alpha$  задается парой индексов  $(i, j)$ , т. е.  $\alpha = \alpha_{ij}$  (см. выше), то каждый собственный вектор  $E_\alpha + E_{-\alpha}$ , отвечающий паре  $(i, j)$ , умножается на собственное число  $\lambda_{ij} = \frac{b_i - b_j}{a_i - a_j}$ . Итак, базисные кососимметрические матрицы  $E_{ij} = T_{ij} - T_{ji} = \begin{pmatrix} \ddots & 1 \\ \ddots & \ddots \\ -1 & \ddots \end{pmatrix}$  умножаются при действии  $\varphi$  на числа  $\lambda_{ij}$ . Поэтому гамильтонова система  $\dot{X} = [X, \varphi X]$  имеет вид

$$\dot{x}_{ij} = \sum_{q=1}^n x_{iq}x_{qj}(\lambda_{qj} - \lambda_{iq}) = \sum_{q=1}^n x_{iq}x_{qj} \left( \frac{b_q - b_j}{a_q - a_j} - \frac{b_i - b_q}{a_i - a_q} \right).$$

Пусть теперь  $a = -ib^2$ , т. е.  $a_p = b_p^2$ . Отсюда

$$\dot{x}_{ij} = \sum_{q=1}^n x_{iq}x_{qj} \left( \frac{1}{a_j + a_q} - \frac{1}{a_i + a_q} \right).$$

Итак, при  $a = -ib^2$  мы получаем уже знакомую нам систему (см. п. 2) уравнений динамики твердого тела с неподвижной точкой. Более того, среди операторов  $\varphi_{ab}$  нормальной серии содержится классический оператор  $\psi X = IX + XI$ , где  $I$  — вещественная диагональная матрица. В самом деле, положим  $b = -ia^2$ , тогда

$$\varphi_{ab}E_{ij} = \frac{b_i - b_j}{a_i - a_j}E_{ij} = (a_i + a_j)E_{ij},$$

т. е.

$$\psi = \varphi_{a, -ia^2}; \quad \varphi_{ab}X = IX + XI,$$

где  $I = -ia$ . Таким образом, мы включили классическую гамильтонову систему уравнений движения твердого тела с неподвижной точкой (без потенциала) в многопараметрическое семейство аналогичных гамильтоновых систем, естественно определенных на простых компактных алгебрах Ли.

#### 4. Секционные операторы и соответствующие им динамические системы на орбитах

Предыдущие примеры систем были связаны с компактными и полупростыми группами. Однако некоторые гамильтоновы системы, заданные на  $\mathbb{R}^n$ , в принципе не допускают вложения в компактные алгебры, поэтому для полного интегрирования таких систем необходимо рассматривать некомпактные алгебры Ли. Такая ситуация возникает, например, при изучении уравнений движения твердого тела по инерции в идеальной жидкости. Итак, мы приходим к необходимости найти «некомпактные аналоги» описанных выше гамильтоновых систем вида  $\dot{X} = [X, \varphi_{abD} X]$ . Поскольку эти системы полностью определяются заданием оператора  $\varphi_{abD}$ , т. е. заданием гамильтониана  $F = \langle X, \varphi_{abD} X \rangle$ , где  $\dot{X} = \text{sgrad } F$ , то для обнаружения аналогов этих систем в некомпактном случае следует предъявить «некомпактные гамильтонианы», задаваемые «некомпактными операторами»  $\varphi$ . Задача эта требует нового, более широкого подхода, так как уже описанные нами операторы  $\varphi$  существенно использовали структуру полупростых алгебр, в частности, важнейшей компонентой этих операторов было отображение  $\text{ad}_a^{-1} \text{ad}_b$ , корректно определенное только в полупростом случае, когда имеется корневое разложение и когда оператор  $\text{ad}_a$  обратим на плоскости  $V^+ \oplus V^-$ . Если алгебра Ли некомпактна, то какие-либо естественные аналоги корневого разложения отсутствуют, а потому нужны новые соображения, позволяющие охватить случай некомпактных алгебр. Оказывается, аналоги «твердотельных операторов»  $\varphi_{abD}$  существуют и в некомпактном случае (см. [9, 14]). Перейдем к их описанию.

Пусть  $H$  — алгебра Ли,  $\mathfrak{H}$  — соответствующая группа,  $\rho: H \rightarrow \text{End } V$  — представление  $H$  в линейном пространстве  $V$ ,  $\alpha: \mathfrak{H} \rightarrow \text{Aut } V$  — соответствующее представление группы;  $O(X)$  — орбиты действия группы  $\mathfrak{H}$  на  $V$ ,  $X \in V$ . Если задать линейный оператор, который назовем секционным,  $Q: V \rightarrow H$ , то на орбитах возникает естественное векторное поле  $\dot{X}_Q = \rho(QX)X$ . Задание такого оператора позволяет также иногда определить симплектическую структуру на орби-

так. Для приложений важную роль играет специальный класс секционных операторов, образующих многопараметрическое семейство, основными параметрами которого являются два элемента:  $a \in V$ ,  $b \in \text{Ker } \Phi_a$ , где  $\Phi_a h = (\rho b)h$ . Например, в частном случае  $H = so_n$ ,  $\rho = ad$  поле  $\dot{X}_Q$  совпадает с уравнениями движения многомерного твердого тела с неподвижной точкой (в отсутствие силы тяжести).

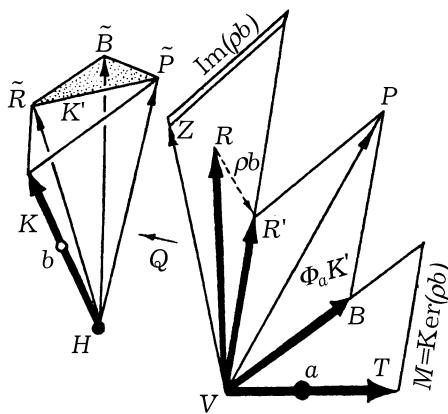


Рис. 179

Итак, пусть  $a$  — произвольная точка общего положения, т. е. проходящая через нее орбита имеет максимальную размерность. Пусть  $K \subset H$  — аннулятор элемента  $a$ ,  $K = \text{Ker } \Phi_a$ , где  $\Phi_a$  определено выше. Если  $a$  — общего положения, то размерность  $K$  наименьшая. Пусть  $b \in K$  — произвольный элемент. Рассмотрим действие  $\rho b$  на  $V$ ; через  $M$  обозначим  $\text{Ker}(\rho b) \subset V$ . Пусть  $K'$  — произвольное алгебраическое дополнение к  $K$  в  $H$ , т. е.  $H = K + K'$ ,  $K \cap K' = 0$ . Выбор  $K'$  неоднозначен, возможность варьирования этого дополнения и вызывает появление семейства параметров в конструкции. Ясно, что  $a \in M$ . В силу определения  $K'$  отображение  $\Phi_a: H \rightarrow V$  мономорфно переводит  $K'$  в некоторую плоскость  $\Phi_a K' \subset V$ . Так как  $\Phi_a K' = \Phi_a H$ , то плоскость  $\Phi_a K'$  не зависит от выбора  $K'$  и однозначно определяется выбором элемента  $a$  и представлением  $\rho$ . Предположим, что существует элемент  $b$  такой, что  $V$  разлагается в сумму двух подпространств:  $M$  и  $\text{Im}(\rho b)$ , т. е.  $V = M \oplus \text{Im}(\rho b)$ . Например, в качестве  $b$  можно брать полупростые элементы  $K$ . Плоскость  $\Phi_a K'$  пересекается с  $M$  и  $\text{Im}(\rho b)$  по

плоскостям, которые обозначим соответственно  $B$  и  $R'$ . Получаем разложение  $\Phi_a K'$  в прямую сумму трех плоскостей  $B + R' + P$ , где  $B$  и  $R'$  определены однозначно, а дополнительная плоскость  $P$  выбирается неоднозначно и вносит свой набор параметров. Рассмотрим действие  $\rho b$  на  $\text{Im}(\rho b)$ , тогда  $\rho b$  изоморфно отображает  $\text{Im}(\rho b)$  на себя (рис. 179), в частности,  $\rho b$  обратим на  $\text{Im}(\rho b)$ . Пусть  $(\rho b)^{-1}$  — оператор, обратный к  $\rho b$  на  $\text{Im}(\rho b)$ . Положим  $R = (\rho b)^{-1} R'$ , тогда  $\rho b: R \rightarrow R'$ . Плоскость  $R$  определена однозначно. Рассмотрим в  $\text{Im}(\rho b)$  плоскость  $Z$  — алгебраическое дополнение к  $R$  в  $\text{Im}(\rho b)$ , тогда  $\text{Im}(\rho b) = Z + R'$ ,  $R \sim R'$ . Пусть  $T$  — дополнение к  $B$  в  $M$ . Мы построили разложение пространства в  $V$  в прямую сумму четырех плоскостей  $V = T + B + R + Z$ . При этом  $R, B, M, \text{Im}(\rho b)$  определены однозначно, а  $Z, T$  — неоднозначно и вносят свой набор параметров. Если в  $V$  задано скалярное произведение, то  $Z, T$  однозначно определяются как ортогональные дополнения. Так как  $K'$  изоморфно  $\Phi_a K'$ , то  $K' = \tilde{B} + \tilde{R} + \tilde{P}$ , где  $\tilde{B} = \Phi_a^{-1} B$ ,  $\tilde{R} = \Phi_a^{-1} R$ ,  $\tilde{P} = \Phi_a^{-1} P$ . Итак, определено многопараметрическое разложение алгебры  $H$  в прямую сумму четырех подпространств:  $K + \tilde{B} + \tilde{R} + \tilde{P}$ .

Определив секционный оператор  $Q: V \rightarrow H$ ,  $Q: T + B + R + Z \rightarrow K + \tilde{B} + \tilde{R} + \tilde{P}$ , положив

$$Q = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_a^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_a^{-1} \rho b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D' \end{pmatrix},$$

где  $D: T \rightarrow K$  — произвольный линейный оператор,  $\Phi_a^{-1}: B \rightarrow \tilde{B}$  — оператор, обратный к  $\Phi_a$  на плоскости  $B$ ,

$$\Phi_a^{-1} \rho b: R \rightarrow \tilde{R}, \quad \rho b: R \rightarrow R', \quad \Phi_a^{-1}: R' \rightarrow \tilde{R}, \quad D': Z \rightarrow \tilde{P}$$

(см. рис. 179).

Итак, оператор  $Q$  имеет вид  $Q(a, b, D, D')$ . Теперь строим динамическую систему  $\dot{X}_Q = \rho(QX)X$ ,  $X \in V$ . Выбор в качестве  $a$  точки общего положения в  $V$  обусловлен тем, что в этом случае размерность  $K'$  максимальна, т. е. операторы  $\Phi_a^{-1} \rho b$  и  $\Phi_a^{-1}$  имеют наибольшую область определения. Отметим важные частные случаи описанной конструкции.

Если  $V = H^*$ ,  $\rho = \text{ad}^*: H \rightarrow \text{End } H^*$ , то  $\Phi_a^{-1} \rho b = \Phi_a^{-1} \text{ad}_b^*$ . Взяв, например, в качестве  $H$  некомпактную алгебру Ли  $so_n \oplus \mathbb{R}^n$ , т. е. алгебру

Ли группы движений евклидова пространства, мы получим (см. ниже), что система  $\dot{X}_Q = \text{ad}_{Q(X)}^* X$  превращается в уравнения движения твердого тела по инерции в идеальной жидкости. Здесь мы имеем  $K = K^*$  при естественном отождествлении  $H$  и  $H^*$ ,  $Z = \tilde{Z} = 0$ ,  $R = \tilde{R}$ .

Пусть  $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$  — компактное симметрическое пространство, тогда алгебра Ли  $G$  разлагается в сумму плоскостей  $H + V$ , где  $H$  — стационарная подалгебра,  $V$  — касательное пространство, подалгебра  $H$  присоединенным образом действует на  $V$ . Тогда разложение  $V = T + +B + R + Z$ , определяющее секционный оператор, имеет вид:  $T$  — максимальное коммутативное подпространство в  $V$ ,  $a \in T$ ,  $R = R'$ ,  $Z = 0$ ,  $b \in K$ ,  $\Phi_a K' + T = V = T + B + R$ . Если  $C: V \rightarrow H$  — секционный оператор, то на орбитах  $O(X) \subset V$  возникает внешняя 2-форма  $F_c(X, \xi, \eta) = \langle CX, [\xi, \eta] \rangle$ , где  $\xi, \eta \in T_X O$ .

Существуют богатые серии симметрических пространств и секционных операторов, для которых эта форма определяет (почти всюду на орбите) симплектическую структуру, неинвариантную при действии группы. Снова вернемся к общему случаю.

Пусть  $\xi, \eta \in T_X O$  — касательные векторы, тогда существуют и однозначно определены векторы  $\xi', \eta' \in K'(X)$  такие, что  $\rho\xi' = \xi$ ,  $\rho\eta' = \eta$ . Пусть задан секционный оператор  $C: V \rightarrow H$ . Определим билинейную форму  $\tilde{F}_c = \langle CX, [\xi', \eta'] \rangle$ , где  $[\xi', \eta'] \in H$ ,  $CX \in H$ . Эта форма определена на орbitах и кососимметрична. Наряду с ней на орбитах определен поток  $\dot{X}_Q$ .

Вопрос А: при каких операторах  $C$  форма  $\tilde{F}_c$  замкнута на орбитах и невырождена?

Вопрос В: при каких  $C$  и  $Q$  поток  $\dot{X}_Q$  гамильтонов относительно формы  $\tilde{F}_c$ ?

Оказывается, для симметрических пространств на эти вопросы могут быть даны достаточно полные ответы. Например, рассмотрим симметрическое пространство  $SU_3/SO_3$ , тогда уравнения  $\dot{X}_Q$  на плоскости  $B$  совпадают с уравнениями Эйлера движения трехмерного твердого тела с закрепленной точкой и с произвольным тензором инерции. Отметим, что среди построенных нами систем  $\dot{X}_Q = \text{ad}_{Q(X)}^* X$  содержатся гамильтоновы уравнения движения твердого тела с неподвижной точкой (для любого  $n$ , а не только при  $n = 3$ ). Чтобы убедиться в этом, достаточно взять в качестве симметрического пространства полупростую группу  $\mathfrak{H}$ , тогда она представляется в виде  $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}/\mathfrak{H}$ , где инволюция  $\sigma: \mathfrak{H} \times \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$  задается так:  $\sigma(x, y) = (y, x)$ . Соответствующее

разложение в алгебре Ли  $G = H + H$  имеет вид  $V = (X, -X)$ ,  $X \in H$ ,  $H = (X, X)$ ,  $X \in H$  (здесь одной буквой обозначена  $H$  и ее реализация в  $G$ ),  $\sigma V = -V$ ,  $\sigma H = H$ . Легко проверяется, что построенная выше форма  $F_c$  превращается здесь в каноническую симплектическую структуру на орbitах присоединенного представления, а поле  $\dot{X}_Q$  при  $D' = 0$  превращается в искомые «твердотельные уравнения». Таким образом, мы обнаружили «многомерную» серию динамических систем, содержащую изученные нами ранее уравнения и интересные тем, что они определены также и на некомпактных алгебрах Ли, являясь в то же время естественными аналогами систем типа «твердого тела».

## 5. Уравнения движения многомерного твердого тела по инерции в идеальной жидкости

Здесь мы в явном виде предъявим вложение указанной в заголовке системы уравнений в некомпактную алгебру Ли группы движений евклидова пространства. При этом система окажется гамильтоновой на орбитах общего положения и в некоторых случаях полностью интегрируемой [11].

Пусть  $E(n)$  — группа Ли собственных движений  $\mathbb{R}^n$ . Известно, что  $E(n)$  — полупрямое произведение группы  $SO_n$  и коммутативной подгруппы  $R$  параллельных переносов, являющейся нормальным делителем в группе  $E(n)$ , изоморфным евклидову пространству размерности  $n$ . Матричная реализация группы  $E(n)$  имеет

вид 
$$\left( \begin{array}{cc|c} SO_n & & \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_1 \end{matrix} \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right)$$
, где  $(x_1, \dots, x_n) \in R$ . Действие группы  $SO_n$

на нормальном делителе  $R$  совпадает со стандартным представлением  $SO_n$  в  $\mathbb{R}^n$ . Следовательно, алгебра Ли  $e(n)$  группы  $E(n)$  является полупрямой суммой  $so_n \oplus_{\varphi} \mathbb{R}^n$ , где  $\varphi: so_n \rightarrow \text{End } \mathbb{R}^n$  — дифференциал стандартного представления  $SO_n$  в  $\mathbb{R}^n$ , причем  $\mathbb{R}^n$  рассматривается как коммутативная алгебра. Матричное представление  $e(n)$  име-

ет вид 
$$\left( \begin{array}{cc|c} so_n & & \begin{matrix} y_1 \\ \vdots \\ y_1 \end{matrix} \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right)$$
. Операция коммутирования в алгебре  $e(n)$

устроена так:  $[x + \xi, y + \eta] = [x, y] + x(\eta) - y(\xi)$ , где  $x(\eta)$  и  $y(\xi)$  — результат действия матриц  $x$  и  $y$  на векторы  $\eta$  и  $\xi$  соответственно

но при стандартном действии  $so_n$  на  $\mathbb{R}^n$ . Пространство  $e(n)^*$ , дуальное к  $e(n)$ , мы канонически отождествим с  $e(n)$ , для этого определим невырожденное скалярное произведение в  $e(n)$  (неинвариантное). Имеем  $e(n) = so_n + \mathbb{R}^n$  как линейные пространства, пусть  $\langle , \rangle$  — форма Киллинга,  $\langle , \rangle_e$  — евклидово произведение на  $\mathbb{R}^n$ ; тогда положим  $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \langle x_1, x_2 \rangle + \langle y_1, y_2 \rangle_e$ ;  $x_1, x_2 \in so_n$ ;  $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$ . Теперь все подпространства в  $e(n)^*$  будем изображать как плоскости в  $e(n)$ , используя каноническое отождествление, указанное выше.

Вычислим в явном виде, во что переходит операция  $ad^*$  при изоморфизме  $e(n)^* = e(n)$ . Напомним, что мы обозначаем  $ad_\xi^* X$ ,  $\xi \in G$ ,  $x \in G^*$  через  $a(x, \xi)$ .

**Предложение 16.4.** Пусть  $\xi \in so_n$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $S \in so_n^* = so_n$ ,  $M \in (\mathbb{R}^n)^* = \mathbb{R}^n$ ,  $\xi + x \in so_n \oplus_\varphi \mathbb{R}^n = e(n)$ ,  $S + M \in e(n)^* = (so_n \oplus \mathbb{R}^n)^* = so_n \oplus \mathbb{R}^n$ . Тогда

$$\begin{aligned} a(S + M, \xi + x)|_{so_n} &= [S, \xi] + 1/2(Mx^T - xM^T), \\ a(S + M, \xi + x)|_{\mathbb{R}^n} &= -\xi M \end{aligned}$$

(здесь  $M, a \in \mathbb{R}^n$  записаны как столбцы координат,  $T$  — транспонирование).

Доказательство вытекает из определения операции  $a( , )$ . Пусть  $G$  — произвольная алгебра Ли. Уравнениями Эйлера на  $G^*$  назовем систему дифференциальных уравнений  $\dot{x} = a(x, C(x))$  на  $G^*$ , где  $C: G^* \rightarrow G$  — самосопряженный линейный оператор, а  $a(x, \xi)$  — описанный выше линейный функционал. Тогда (см. выше) поток  $\dot{x} = a(x, C(x))$  течет по орбитам коприсоединенного представления  $Ad^*$  группы  $\mathfrak{G}$ . На этих орбитах уравнения Эйлера являются гамильтоновыми относительно канонической симплектической структуры [15].

Применим конструкцию п. 4 для построения секционного оператора для коприсоединенного представления алгебры  $e(n)$ . Получим многопараметрическое семейство секционных операторов  $Q: e(n)^* \rightarrow e(n)$ , для которых уравнения Эйлера оказываются вполне интегрируемыми гамильтоновыми системами на орbitах коприсоединенного представления группы Ли  $E(n)$ . Рассмотрим в  $e(n)^*$ , а следовательно, и в  $e(n)$  следующее подпространство

$$K = \bigoplus_{k=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]-2} \mathbb{R}(E_{2k+1, 2k+2}) \oplus \mathbb{R}e_n \subset e(n),$$

где  $E_{ij}$  — элементарные кососимметрические матрицы, а  $e_i$  — стандартный ортобазис в  $\mathbb{R}^n$ . Соответствующее подпространство в  $e(n)^*$  обозначим  $K^*$ .

**Предложение 16.5.** *Подпространства  $K$  и  $K'$  допускают инвариантное описание:  $K = \text{Ann}(x_1) = \{\xi \in G, a(x_1, \xi) = 0\}$ , где  $G = e(n)$  и  $K^* = \{\xi' \in G^*, a(\xi', x_2) = 0\}$ , где  $x_1 \in G^*$  — элемент общего положения и  $x_2 \in K \subset G$  — также элемент общего положения.*

Доказательство вытекает из предложения 16.4.

Ортогональное дополнение к подпространству  $W$  в  $e(n)$  или в  $e(n)^*$  относительно скалярного произведения  $\langle \cdot, \cdot \rangle + (\cdot, \cdot)_e$  обозначим  $W^\perp$ .

**Лемма 16.1.** *Пусть  $a \in K^*$ , рассмотрим отображение  $\Phi_a: e(n) \rightarrow e(n)^*, x \rightarrow a(a, x) \in e(n)^*$ . Тогда  $\Phi_a K^\perp \subset K^{*\perp}$ , где  $K^\perp$  — ортогональное дополнение к  $K$ , в  $K^{*\perp}$  — дополнение к  $K^*$ .*

Доказательство очевидно. Если  $a$  — общего положения, то  $K = \text{Ker } \Phi_a$  и  $\Phi_a: K^\perp \rightarrow K^{*\perp}$  — изоморфизм, поэтому определено обратное отображение  $\Phi_a^{-1}: K^{*\perp} \rightarrow K^\perp$ . Имеем разложение в прямую сумму линейных пространств  $e(n) = K^\perp \oplus K$  и  $e(n)^* = K^{*\perp} \oplus K^*$ . По общей методике, описанной в п. 4, пусть  $a \in K^*$ ,  $b \in K$ , причем  $a$  — общего положения, тогда если  $z = x + y \in e(n)^*$ ,  $x \in K^{*\perp}$ ,  $y \in K^*$ , то  $Q(a, b, D)z = \Phi_a^{-1} \text{ad}_b^* x + D(y)$ , где  $D: K^* \rightarrow K$  произволен.

Теперь мы можем записать основные уравнения  $\dot{X}_Q = \text{ad}_{QX}^* X$  на  $G^* = (so_n \oplus \mathbb{R}^n)^* \cong so_n \oplus \mathbb{R}^n$ , где  $Q(a, b, D)$  — секционный оператор, построенный нами в п. 4 и являющийся некомпактным аналогом операторов  $\varphi_{abD}$ , описывающих движение твердого тела. В нашем случае  $Q(a, b, D): e(n)^* \rightarrow e(n)$ , поэтому  $\dot{X}_Q$  определен на пространстве  $G^*$ . Уравнения  $\dot{X}_Q = \text{ad}_{QX}^* X$  записываются в явном виде так:

$$\begin{aligned}\dot{S} &= [S, \xi] + 1/2(Mx^T - xM^T), \\ \dot{M} &= -\xi M,\end{aligned}\tag{\Gamma}$$

где  $\xi \in so_n$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  являются функциями от элементов  $S, M$ , причем зависимость эта определяется оператором  $Q(a, b, D)$ , т. е.  $\xi + x = Q(a, b, D)(S + M)$ . Здесь  $S + M \in e(n)^*$ ,  $\xi + x \in e(n)$ . Поскольку оператор  $Q(a, b, D)$  задан нами явно, то не составляет труда вычислить и явную зависимость  $\xi$  и  $x$  от  $S, M, a, b, D$ .

**Предложение 16.6.** *Система дифференциальных уравнений  $\dot{X} = \text{ad}_{Q(a,b,D)X}^* X$  на коалгебре  $e(n)^*$  (записывающаяся в явном виде как*

система ( $\Gamma$ ) является гамильтоновой на орбитах общего положения. Кроме того, при  $n = 3$  эта система является аналогом уравнений движений твердого тела по инерции в идеальной жидкости. Тем самым эта система допускает вложение в некомпактную алгебру Ли  $e(n)$  в смысле определения 16.1.

На этом основании мы и будем говорить, что уравнения ( $\Gamma$ ) для произвольного  $n$  описывают движение многомерного аналога твердого тела по инерции в идеальной жидкости. Прежде чем доказывать предложение 16.6, напомним классические уравнения движения трехмерного твердого тела по инерции в идеальной жидкости (подробности см., например, в [16]). Связем систему координат с движущимся телом, пусть  $u_i$  — компоненты скорости поступательного движения начала координат, а  $\omega_i$  — компоненты угловой скорости вращения твердого тела. Тогда кинетическая энергия системы жидкость — твердое тело имеет вид  $T = 1/2(A_{ij}\omega_i\omega_j + B_{ij}u_iu_j) + C_{ij}\omega_iu_j$ , где  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ ,  $C_{ij}$  — постоянные, зависящие от формы тела и от плотностей тела и жидкости; по дважды повторяющемуся индексу производится суммирование от 1 до 3. Пусть  $N = (y_1, y_2, y_3)$ , где  $y_i = \partial T / \partial \omega_i$ ,  $K = (x_1, x_2, x_3)$ , где  $x_i = \partial T / \partial u_i$ , тогда движение твердого тела по инерции в идеальной жидкости описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} dN/dt &= N \times \omega + K \times U, \\ dK/dt &= K \times \omega, \end{aligned} \tag{*}$$

где  $U = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ .

Кинетическая энергия твердого тела является произвольной положительно определенной однородной квадратичной формой от шести переменных  $u_i$ ,  $\omega_i$ ; она определяется, следовательно, 21 коэффициентом  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ ,  $C_{ij}$ . Уравнения (\*) в общем случае имеют три классических интеграла Кирхгофа, поэтому для полной интегрируемости уравнений (\*) нужно иметь еще один дополнительный функционально независимый от них интеграл. Так как орбиты общего положения имеют размерность 4, то четырех независимых интегралов, два из которых определяют орбиту, а два уже не являются постоянными на орбитеах, достаточно для полной интегрируемости системы. Напомним три классических случая, когда имеется этот четвертый дополнительный интеграл (полный обзор см., например, в [17]).

Первое общее решение уравнений движения твердого тела в жидкости было дано Кирхгофом для тела вращения. В 1871 г. Клебш указ-

зал два новых вида функции  $T$  (кинетической энергии), при которых можно найти к трем интегралам Кирхгофа четвертый и привести, следовательно, задачу к квадратурам. Решение задачи для первого случая Клебша, когда четвертый интеграл есть, вообще говоря, линейная однородная функция от переменных  $x_i, y_j$ , предложено Хальфеном. В 1878 г. Вебер исследовал второй случай Клебша, когда четвертый интеграл выражается однородной квадратичной функцией от  $x_i, y_j$ , при некотором частном предположении относительно произвольных постоянных. Общее решение последней задачи было дано Кёттером. Третий вид кинетической энергии, для которого уравнения (\*) интегрируются в явном виде, был открыт В. А. Стекловым.

1. *Первый случай Клебша.* Кинетическая энергия в переменных  $x_i, y_i$  имеет вид

$$\begin{aligned} T = & 1/2b_{11}(x_1^2 + x_2^2) + 1/2b_{33}x_3^2 + b_{14}(x_1y_1 + x_2y_2) + \\ & + b_{36}x_3y_3 + 1/2b_{44}(y_1^2 + y_2^2) + 1/2b_{66}y_3^2, \end{aligned}$$

и уравнения движения (\*) в этом случае допускают четвертый линейный интеграл от переменных  $x_i, y_j$ . Тело с указанной энергией обладает свойством не менять своего вида при повороте вокруг оси  $z$  на угол  $\pi/2$ . При  $b_{14} = b_{36} = 0$  получается тело вращения.

2. *Второй случай Клебша.* Уравнения движения с кинетической энергией

$$T = b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 + b_{44}y_1^2 + b_{55}y_2^2 + b_{66}y_3^2,$$

между коэффициентами которой существуют соотношения вида  $(b_{22} - b_{33})/b_{44} + (b_{33} - b_{11})/b_{55} + (b_{11} - b_{22})/b_{66} = 0$ , допускают четвертый интеграл — однородную квадратичную форму. Рассматриваемое твердое тело симметрично относительно трех взаимно перпендикулярных плоскостей.

3. *Случай Стеклова.* Уравнения (\*) задаются кинетической энергией вида  $2T = \sum b_{11}x_1^2 + 2\sigma \sum b_{55}b_{66}x_1y_1 + \sum b_{44}y_1^2$ , где  $b_{ii}$  определяются соотношениями:  $b_{11} = \sigma^2 b_{44}(b_{55}^2 + b_{66}^2)$ ,  $b_{22} = \sigma^2 b_{55}(b_{66}^2 + b_{44}^2)$ ,  $b_{33} = \sigma^2 b_{66}(b_{44}^2 + b_{55}^2)$ . Уравнения допускают кроме трех классических интегралов целый однородный второй степени относительно  $x_i, y_j$ , четвертый интеграл. Здесь  $\sigma$  — произвольная постоянная, знак  $\sum$  обозначает суммирование трех выражений, получающихся из написанного под этим знаком круговой перестановкой групп индексов 1, 2, 3; 4, 5, 6.

Теперь мы докажем предложение 16.6.

**Лемма 16.2.** *Рассмотрим отображение  $\psi: so_3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , которое элемент  $X = xE_{12} + yE_{13} + zE_{23}$  переводит в точку  $(z, -y, x)$ , тогда  $\psi[X, Y] = -\psi X \times \psi Y$ , где  $\psi X \times \psi Y$  — векторное произведение в  $\mathbb{R}^3$ . Далее,  $\psi(Mx^T - xM^T) = M \times x$ ,  $M, x \in \mathbb{R}^3$  и  $\xi M = -\psi(\xi) \times M$ , где  $\xi \in so_3$ .*

*Доказательство.*

Если  $z = \xi + x \in e(3)$ ,  $Z = S + M \in e(3)^*$ , то, как показано в предложении 16.4,  $a(Z, z) = (y, X)$ , где  $y = [S, \xi] + 1/2(Mx^T - xM^T) \in so_3$ ;  $X = -\xi M$ , векторы  $M$  и  $x$  записаны в виде столбцов, алгебра Ли  $so_3$  реализована кососимметрическими матрицами. Утверждение доказано. ■

Выпишем операторы  $Q(a, b, D)$ , построенные нами выше, в простейшем трехмерном случае для  $e(3) = so_3 \oplus \mathbb{R}^3$ , когда некоторые многочленные эффекты пропадают, что облегчает явную запись. В этом случае

$$K = K^* = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 \\ -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_2 \end{pmatrix},$$

$$K^\perp = K^{*\perp} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 \\ -x_2 & -x_3 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & f_2 \\ 0 & 0 & f_3 \\ -f_2 & -f_3 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in K^{*\perp},$$

тогда

$$\text{ad}_a^* f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_1 f_3 + \frac{1}{2} u_1 a_2 \\ 0 & 0 & a_1 f_2 + \frac{1}{2} u_2 a_2 \\ a_1 f_3 - \frac{1}{2} u_1 a_2 & -f_2 a_1 - \frac{1}{2} u_2 a_2 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -a_1 u_2 \\ a_1 u_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$b = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 \\ -b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 \\ -x_2 & -x_3 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

тогда

$$\Phi_b(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_1 x_3 - \frac{1}{2} b_2 y_1 \\ 0 & 0 & -b_1 x_2 - \frac{1}{2} b_2 y_2 \\ x_3 b_1 - \frac{1}{2} b_2 y_1 & -x_2 b_1 - \frac{1}{2} b_2 y_2 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -b_2 x_2 \\ -b_2 x_3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

поэтому

$$\begin{aligned} \Phi_b^{-1} \operatorname{ad}_a^* \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & f_2 \\ 0 & 0 & f_3 \\ -f_2 & -f_3 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) &= \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{a_1}{b_2} u_2 \\ 0 & 0 & \frac{-a_1}{b_2} u_1 \\ \frac{-a_1}{b_2} u_2 & \frac{a_1}{b_2} u_1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ z_1 &= 2 \frac{a_1}{b_2} f_3 + u_1 \frac{-b_2 a_2 - 2b_1 a_1}{b_2^2}, \\ z_2 &= -2 \frac{a_1}{b_2} f_2 + u_2 \frac{b_2 a_2 + 2b_1 a_1}{b_2^2}. \end{aligned}$$

Окончательно

$$\begin{aligned} Q(a, b, D) &= \left( \begin{pmatrix} 0 & f_1 & f f_2 \\ -f_1 & 0 & f_3 \\ -f_2 & -f_3 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \alpha f_1 + \beta u_3 & \frac{a_1}{b_2} u_2 \\ -\alpha f_1 - \beta u_3 & 0 & \frac{-a_1}{b_2} u_1 \\ \frac{-a_1}{b_2} u_2 & \frac{a_1}{b_2} u_2 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2 \frac{a_1}{b_2} f_3 - u_1 \frac{b_2 a_2 + 2b_1 a_1}{b_2^2} \\ -2 \frac{a_1}{b_2} f_2 - u_2 \frac{b_2 a_2 + 2b_1 a_1}{b_2^2} \\ \gamma f_1 + \delta u_3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  — постоянные, определяющие оператор  $D: K^* \rightarrow K$ .

Кинетическая энергия имеет вид  $\langle X, Q(A, b, D)X \rangle$ . Матрица этой квадратичной формы выглядит так:

$$A = \begin{pmatrix} -2\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma}{2} - \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2a_1}{b_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a_1}{b_2} & \frac{a_1}{b_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a_1}{b_2} & b_2^{-2}(-b_2a_2 + 2b_1a_1) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2a_1}{b_2} & \frac{a_1}{b_2} & 0 & b_2^{-2}(-b_2a_2 + 2b_1a_1) & 0 \\ \frac{\gamma}{2} - \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}.$$

Ясно, что

$$\det A = -a_1^4 b_2^{-2} \left( \left( \frac{\gamma}{2} - \beta \right)^2 + 2\delta\alpha \right),$$

т. е. знак  $\det A$  можно сделать произвольным, варьируя, например, оператор  $D$ . Обозначая  $\lambda = b_2^{-2}(b_2a_2 + 2b_1a_1)$ , получаем, что форма  $T$  приводится к следующему диагональному виду:

$$\begin{aligned} T = & -2\alpha \left( f_1 - \frac{\gamma - 2\beta}{4\alpha} u_3 \right)^2 + \left[ \frac{(\gamma - 2\beta)^2}{8\alpha} + \delta \right] u_3^2 - \\ & - \lambda \left( u_1 - \frac{a_1}{b_2\lambda} f_3 \right)^2 - \lambda \left( u_2 + \frac{2a_1}{b_2\lambda} f_2 - \frac{a_1}{b_2\lambda} f_3 \right)^2 + \\ & + \frac{(2a_1)^2}{b_2\lambda} \left( f_2 - \frac{f_3}{2b_2} \right)^2 + \frac{2a_1(b_2 - 1)}{b_2^3\lambda} f_3^2, \end{aligned}$$

откуда видно, что форма законопределенная.

В размерностях, больших, чем три, явные формулы резко усложняются, и поэтому мы не будем здесь их далее анализировать.

## § 17. Полная интегрируемость некоторых гамильтоновых систем на алгебрах Ли

### 1. Метод сдвига аргумента и построение коммутативных алгебр интегралов на орбитах в алгебрах Ли

Перечисленные выше гамильтоновы системы не только допускают вложение в алгебры Ли, но и являются вполне интегрируемыми по Ли-

увиллю (в коммутативном смысле) [11, 12, 15]. В частности, мы получаем в этих случаях положительное решение гипотезы  $A$  (см. § 16), поскольку предъявляем полные коммутативные наборы алгебраических функций на орбитах общего положения в полупростых и компактных алгебрах Ли. Интегралы этих гамильтоновых систем устроены чрезвычайно просто, для их построения достаточно знать инварианты алгебры Ли, т. е. множество функций, постоянных на орбитах общего положения. В грубых чертах процесс построения интегралов заключается в следующем. Пусть  $f$  — какой-либо инвариант алгебры, являющийся функцией на  $G^*$  (или на  $G$  в компактном и полупростом случае). Пусть  $a \in G^*$  — (ко)вектор общего положения. Сдвигем аргумент функции  $f(X)$ , т. е. рассмотрим функцию  $f(X + \lambda a)$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  или  $\mathbb{R}$ . Так как во всех интересующих нас случаях функции  $f$  являются полиномами, то мы можем разложить функцию  $f(X + \lambda a)$  по степеням формальной переменной  $\lambda$ , что дает нам разложение вида  $f(X + \lambda a) = \sum_k P_k(X, a) \lambda^k$ ; замечательным фактом является то, что получающиеся при этом полиномы  $P_k(X, a)$  (или, что то же самое, функции  $f(X + \lambda a)$ ) и образуют полные коммутативные наборы функций (интегралов) во всех перечисленных выше случаях [11, 12, 15]. Этот прием построения интегралов мы назовем методом сдвига аргумента. Эта схема является развитием идеи, предложенной в [18] для случая алгебры  $so_n$ .

Метод сдвига аргумента дает положительные результаты и для многих некомпактных алгебр Ли. Полные коммутативные наборы функций на орбитах общего положения можно получать, применяя метод сдвига аргумента не только к инвариантам алгебры (которых иногда не хватает для получения таких наборов интегралов), но и к так называемым полуинвариантам, т. е. к функциям, умножающимся при (ко)присоединенном действии группы на орбите на характеристы этого представления. Инварианты являются, конечно, частными случаями полуинвариантов, так как при (ко)присоединенном действии инварианты являются неподвижными точками этого действия в пространстве функций. Существуют и другие общие методы построения полных коммутативных наборов интегралов, останавливающиеся на которых мы здесь не имеем возможности (см., например, [22, 21]).

Перейдем теперь к построению коммутативных наборов интегралов на орбитах общего положения. Доказательство полноты этих наборов будет дано в следующих пунктах. Мы ограничимся в основном

рассмотрением комплексной полупростой алгебры Ли и уравнений Эйлера вида  $\dot{X} = [X, \varphi X]$ , где операторы  $\varphi_{abD}$  определяют гамильтонианы комплексной серии (см. § 16, п. 2). Рассмотрим присоединенное действие комплексной полупростой группы  $\mathfrak{G}$  на ее алгебре Ли  $G$  (здесь можно считать, что  $G = G^*$ ). Группа  $\mathfrak{G}$  расслаивает алгебру  $G$  на орбиты. Будем считать, что  $\text{Ad}_g X = gXg^{-1}$ ,  $g \in \mathfrak{G}$ .

**Лемма 17.1.** *Любая гладкая функция  $f(X)$ ,  $X \in G$ , инвариантная относительно присоединенного действия группы, т. е. постоянная на орбитах, является интегралом уравнения Эйлера  $\dot{X} = [X, \varphi X]$ , где  $\varphi: G \rightarrow G$  — произвольный самосопряженный оператор.*

Доказательство, очевидно, вытекает из того, что  $T_X O = \{[X, y]\}$ , где вектор  $y$  пробегает всю алгебру.

Отметим, что в комплексном случае существуют элементы, не лежащие ни в какой орбите, порождаемой каким-либо элементом из фиксированной картановской подалгебры  $H$ .

Рассмотрим множество всех комплексных векторов  $\text{grad } f(X)$ , где  $f \in IG$ , где через  $IG$  мы обозначаем кольцо инвариантных полиномов на алгебре  $G$ . Пусть  $H(X)$  — подпространство в  $G$ , состоящее из всех элементов, коммутирующих с  $X$ . Если  $X \in \text{Reg } G$ , то  $H(X)$  является некоторой картановской подалгеброй, причем в полупростой алгебре любые две картановские подалгебры сопряжены. В частности, если  $X \in \text{Reg } G$ , то  $H(X) = g_0 H(a, b) g_0^{-1}$  для некоторого  $g_0 \in \mathfrak{G}$ ,  $H(a, b)$  — картановская подалгебра, содержащая  $a, b$ . Ясно, что  $H(X)$  содержится в подпространстве, порожденном  $\text{grad } f(X)$ ,  $f \in IG$ , и, если  $X \in \text{Reg } G$ , то  $H(X) = \{\text{grad } f(X), f \in IG\}$ . Это следует из того, что форма Киллинга невырождена, и плоскость  $H(X)$  ортогональна касательной плоскости к орбите.

**Лемма 17.2.** *Гладкая функция  $f$  постоянна на орбитах алгебры тогда и только тогда, когда выполнено тождество  $[X, \text{grad } f(X)] = 0$  для любого  $X \in G$  (через  $\text{grad } f(X)$  мы обозначаем значение поля  $\text{grad } f$  в точке  $X$ ).*

*Доказательство.*

Напомним, что  $T_X O = \{[X, \xi]\}$ , где  $\xi$  пробегает алгебру  $G$ . Отсюда  $\langle \text{grad } f(X), [X, \xi] \rangle = 0$  для любого  $\xi$ , так как  $[X, \xi]f(X) = 0$ . Так как оператор  $\text{ad}_X$  кососимметричен, то  $\langle [\text{grad } f(X), X], \xi \rangle = 0$ , что в силу невырожденности формы Киллинга означает, что  $[\text{grad } f(X), X] = 0$ . Аналогично проверяется обратное утверждение. ■

**Предложение 17.1.** Пусть  $f \in IG$ , т. е. функция является инвариантом, постоянна на орбитах алгебры. Тогда комплексные функции  $h_\lambda(X) = f(X + \lambda a)$  являются (при любом  $\lambda$ ) интегралами уравнения  $\dot{X} = [X, \varphi_{abD} X]$ , где  $\varphi$  — оператор комплексной серии (см. выше). Интегралом является и функция  $F(X) = \langle X, \varphi X \rangle$ .

*Доказательство.*

Проверим тождество  $0 = \frac{d}{d\tau} h_\lambda(X)$ , где  $\tau$  — параметр вдоль траекторий потока  $\dot{X}$ . Это эквивалентно проверке равенства  $\langle \text{grad } h_\lambda(X), \dot{X} \rangle = 0$ . Имеем

$$\begin{aligned} \langle \text{grad } h_\lambda(X), \dot{X} \rangle &= \langle \text{grad } f(X + \lambda a), [X, \varphi X] \rangle = \\ &= \langle \text{grad } f(X + \lambda a), [X + \lambda a, \varphi X] \rangle - \lambda \langle \text{grad } f(X + \lambda a), [\lambda a, \varphi X] \rangle = \\ &= \langle [\text{grad } f(X + \lambda a), X + \lambda a], \varphi X \rangle - \lambda \langle \text{grad } f(X + \lambda a), [\lambda a, \text{ad}_a^{-1} \text{ad}_b X' + D(t)] \rangle = \langle [\text{grad } f(X + \lambda a), X + \lambda a], \varphi X \rangle - \lambda \langle \text{grad } f(X + \lambda a), [b, X'] \rangle - \\ &\quad - \lambda \langle \text{grad } f(X + \lambda a), [a, D(t)] \rangle. \end{aligned}$$

Мы использовали определение  $\varphi$  из § 16, здесь  $t \in H(a, b)$ ,  $X' \in V$ . Первое слагаемое в полученной сумме равно нулю в силу леммы 17.2, примененной в точке  $X + \lambda a$ . Третье слагаемое равно нулю, поскольку  $D(t) \in (a, b)$ . Второе слагаемое преобразуем так:

$$\begin{aligned} \lambda \langle \text{grad } f(X + \lambda a), [b, X'] \rangle &= \lambda \langle \text{grad } f(X + \lambda a), [b, X' + t + \lambda a] \rangle = \\ &= \lambda \langle \text{grad } f(X + \lambda a), [b, X + \lambda a] \rangle = -\lambda \langle \text{grad } f(X + \lambda a), X + \lambda a \rangle, b \rangle = 0 \end{aligned}$$

в силу леммы 17.2 и ввиду тождества  $[b, t + \lambda a] = 0$ . Итак,  $\frac{d}{d\tau} h_\lambda(X) = 0$  вдоль  $\dot{X}$ . Далее,  $\frac{d}{dt} F(X) = \langle \dot{X}, \varphi X \rangle + \langle X, \varphi \dot{X} \rangle = 2 \langle [X, \varphi X], \varphi X \rangle = 0$  в силу симметричности  $\varphi$  и в силу косой симметрии оператора  $\text{ad}$ .

Рассмотрим модельный пример  $sl(n, \mathbb{C})$ . Ясно, что стандартные симметрические полиномы от собственных чисел матрицы  $X$  являются интегралами, постоянными на орбитах алгебры. Преобразуем уравнение, записав его в виде  $(X + \lambda a) \cdot = [X + \lambda a, \varphi X + \lambda b]$ . Действительно, раскрывая коммутатор и выполняя очевидные преобразования, получаем исходное уравнение  $\dot{X} = [X, \varphi X]$ . Мы использовали то, что  $[a, b] = 0$  и  $[X, b] + [a, \varphi X] = 0$  в силу определения  $\varphi_{abD}$ . Итак, уравнение не

изменилось, но мы усматриваем новую серию интегралов: симметрические полиномы от собственных чисел матрицы  $X + \lambda a$ . Эти интегралы можно изобразить двумя способами: 1) рассмотреть разложение полинома  $\det(X + a\lambda - \mu E) = \sum_{\alpha, \beta} P_{\alpha\beta} \lambda^\alpha \mu^\beta$  по степеням  $\lambda$  и  $\mu$ ,

при этом все полиномы  $P_{\alpha\beta}(X, a)$  будут интегралами уравнения; 2) рассмотреть функции  $S_k = \text{Sp}(X + \lambda a)^k$  и их разложения по степеням  $\lambda$ :  $S_k = \sum_{\alpha} Q_a^{(k)}(X, a) \lambda^\alpha$ . Связь полиномов Ньютона с симметрическими полиномами  $\sigma_i$  и определяет связь  $Q_\alpha^{(k)}$  с  $P_{\alpha\beta}$ .

Перейдем теперь к построению интегралов компактной серии. Пусть  $G_u$  — компакция форма алгебры  $G$ . Пусть  $X \in G_u$ ,  $a, b \in H_u$ ,  $X + \lambda a \in G_u$ , если  $\lambda$  вещественно. Рассмотрим действие  $\mathfrak{G}_u$  на  $G_u$ . В отличие от комплексного случая объединение орбит, вырастающих из картановской подалгебры  $H_u = H_u(a, b)$ , совпадает с  $G_u$ . Пусть  $\varphi: G_u \rightarrow G_u$  — оператор компактной серии.

**Лемма 17.3.** *Любая гладкая функция  $f$ , инвариантная относительно присоединенного действия  $\mathfrak{G}_u$  (т. е. постоянная на орбитах), является интегралом уравнения Эйлера  $\dot{X} = [X, \varphi X]$ , где  $\varphi: G_u \rightarrow G_u$  — произвольный самосопряженный оператор.*

*Доказательство* очевидно. Пусть  $IG_u$  — кольцо инвариантных полиномов на  $G_u$ . Предъявим в явном виде мультиплекативные образующие кольца  $IG_u$ . Пусть  $N$  — нормализатор  $H_u$  в  $G_u$ , тогда  $N/\mathfrak{H}_u = \Phi$  — группа Вейля (см. выше). Пусть  $t \in H_u$ , тогда орбита  $O(t)$  ортогональна алгебре  $H_u$ , и эта орбита возвращается снова на  $H_u$ , прорыкая  $H_u$  в конечном числе точек, являющихся образами элемента  $t$  при действии группы Вейля. Кольцо  $IG_u$  отождествляется с кольцом полиномов на  $H_u$ , инвариантных относительно действия группы Вейля. Это кольцо допускает простое описание: если  $\mathfrak{G}_u$  связна, то кольцо  $IG_u$  — свободная алгебра от  $r$  образующих, где  $r = \text{ранг } G_u$ , в качестве которых можно выбрать однородные алгебраически независимые полиномы  $P_{k_1}, \dots, P_{k_r}$ , где  $k_i = \deg P_{k_i}$ . Для простых алгебр Ли числа  $k_i$ , степени полиномов, имеют следующий вид:

$$A_n: 2, 3, 4, \dots, n, n+1;$$

$$B_n: 2, 4, 6, \dots, 2n;$$

$$C_n: 2, 4, 6, \dots, 2n;$$

$$D_n: 2, 4, 6, \dots, 2n-2, n;$$

$$G_2 : 2, 6;$$

$$F_4 : 2, 6, 8, 12;$$

$$E_6 : 2, 5, 6, 8, 9, 12;$$

$$E_7 : 2, 6, 8, 10, 14, 18;$$

$$E_8 : 2, 8, 12, 14, 18, 20, 24, 30.$$

Полиномы  $P_{k_i}$  можно указать явно. Рассмотрим линейное представление алгебры  $G_u$  минимальной размерности матрицами размера  $(m \times m)$ . Пусть  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_m$  — веса представления, т. е. линейные функционалы на  $H_u$ , отвечающие собственным векторам операторов из  $H_u$  в пространстве представления. Координаты  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_m$  на  $H_u$  могут быть линейно зависимы. Полиномы  $P_{k_i}$  имеют вид

$$A_n : \sum_{j=1}^{n+1} \Lambda_i^{k_j};$$

$$B_n : \sum_{j=1}^n \Lambda_i^{k_j};$$

$$C_n : \sum_{j=1}^n \Lambda_i^{k_j};$$

$$D_n : \sum_{j=1}^n \Lambda_i^{k_j};$$

$$k_i = 2, 4, 6, \dots, 2n - 2; \quad P'_n = \Lambda_1 \cdot \Lambda_2 \cdot \dots \cdot \Lambda_n.$$

Если  $G_u$  — особая простая алгебра, то  $P_{k_i} = \sum_{j=1}^m \Lambda_j^{k_i}$ . Ясно, что все кольца  $IG_u$  являются подкольцами кольца симметрических полиномов  $S(\Lambda_1, \dots, \Lambda_m)$ . Все указанные функции имеют вид  $\text{Sp } X^{k_i} = \sum_{j=1}^m \Lambda_j^{k_i}$  за исключением серии  $D_n$ , в которой добавляется еще один полином  $\sqrt{\det X}$ .

**Предложение 17.2.** *Пусть  $f \in IG_u$ , т. е. функция  $f$  постоянна на орбитах алгебры  $G_u$ . Тогда функции  $h_\lambda(X) = f(X + \lambda a)$  являются (при любом  $\lambda$ ) интегралами уравнения  $\dot{X} = [X, \varphi X]$ , где  $\varphi$  — оператор компактной серии  $X + \lambda a \in G_u$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Интегралом является и функция  $F(X) = \langle X, \varphi X \rangle$ .*

Доказательство проводится по схеме доказательства предложения 17.1. Подробности см. в [12].

Рассмотрим теперь интегралы нормальной серии. Рассмотрим вложение  $G_n$  в  $G_u$ . Операторы  $\varphi_{ab}: G_n \rightarrow G_n$  порождаются векторами  $a, b \in H_u$ , в частности  $a, b \notin G_n$ , а потому  $X + \lambda a \notin G_n$ , если  $X \in G_n$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Предложение 17.3.** *Пусть  $f \in IG_u$ , т. е. функция  $f$  постоянна на орбитах алгебры  $G_u$ . Рассмотрим функции  $q_\lambda(X)$ , где  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $X \in G_n \subset G_u$ , являющиеся ограничениями функций  $h_\lambda(X) = f(X + \lambda a)$  на  $G_n \subset G_u$ . Тогда функции  $q_\lambda$  являются интегралами уравнения  $\dot{X} = [X, \varphi_{ab}X]$ , где  $\varphi_{ab}$  — оператор нормальной серии. Интегралом также является и функция  $F(X) = \langle X, \varphi X \rangle$ .*

## 2. Примеры для алгебр Ли $so_3$ и $so_4$ .

Рассмотрим в качестве наглядной иллюстрации несколько примеров построенных выше серий интегралов для простейших алгебр Ли. В частности, мы обнаружим, что среди этих интегралов содержатся известные классические интегралы. Пусть  $G_u = so_3$ , запишем  $so_3$  в виде  $su_2$ , воспользовавшись известным изоморфизмом. Алгебру  $su_2$  вложим как компактную вещественную форму  $G_u$  в алгебру  $G = sl(2, \mathbb{C})$ ; тогда  $su_2$  совпадает с неподвижными точками инволюции  $\sigma X = -\overline{X}^T$ . Ясно, что  $G_u$  распадается в сумму трех одномерных подпространств, порожденных векторами следующего вида:

$$E_+ = E_\alpha + E_{-\alpha}, \quad E_- = i(E_\alpha - E_{-\alpha}), \quad E_0, \quad \text{где } E_0 \in H_u = iH_0,$$

$$E_0 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad E_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_- = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Оператор компактной серии  $\varphi: su_2 \rightarrow su_2$  действует так:

$$\varphi E_+ = \frac{\alpha(b)}{\alpha(a)} E_+, \quad \varphi E_- = \frac{\alpha(b)}{\alpha(a)} E_-, \quad \varphi E_0 = \lambda_0 E_0,$$

где  $\lambda_0 \neq 0$  — произвольное вещественное число,

$$b = \lambda_+ a, \quad \lambda_+ \neq 0, \quad \alpha(a) \neq 0, \quad \text{т. е. } \lambda_+ = \frac{\alpha(b)}{\alpha(b)}.$$

Окончательно,  $\varphi E_+ = \lambda_+ E_+$ ,  $\varphi E_- = \lambda_+ E_-$ ,  $\varphi E_0 = \lambda_0 E_0$ , и отличны от нуля. Для  $\varphi$  общего положения  $\lambda_+ \neq \lambda_0$ . В случае  $G_u = su_2$

операторы  $\varphi$  компактной серии образуют 2-параметрическое семейство  $(\lambda_+, \lambda_0)$ . Если

$$X = \begin{pmatrix} iz & x + iy \\ -x + iy & -iz \end{pmatrix} \in su_2,$$

то  $\varphi X = \begin{pmatrix} i\lambda_0 z & \lambda_+(x + iy) \\ \lambda_+(-x + iy) & -i\lambda_0 z \end{pmatrix}$ .

Ясно, что  $\langle X, \dot{X} \rangle = 0$ , т. е. вектор скорости  $\dot{X}$  касается орбит присоединенного действия  $SU_2$  на  $su_2$ . Орбиты — двумерные сферы с центром в точке  $O$  и сама точка  $O$ . Все орбиты, кроме точки  $O$ , являются орбитами общего положения. Фиксируем произвольную орбиту общего положения, тогда интегральные траектории потока  $\dot{X}$  на сфере совпадают с траекториями точек сферы при ее вращении вокруг оси  $E_0$ . Интегралами потока должны быть функции  $\text{Sp}(X + \lambda a)^k$ . Имеем

$$X + \lambda a = \begin{pmatrix} i(z + q\lambda) & x + iy \\ -x + iy & -i(z + q\lambda) \end{pmatrix},$$

где  $a = qE_0$ ,  $q \neq 0$ . Отсюда  $S_1 = 0$ ,  $S_2 = -2(x^2 + y^2 + z^2 + 2zq\lambda + q^2\lambda^2)$ . Интегралами являются коэффициенты перед степенями  $\lambda$ :  $Q_1(X, a) = x^2 + y^2 + z^2$ ,  $Q_2(X, a) = zq$ ,  $Q_3(X, a) = q^2$ , т. е. в действительности функции  $z = \text{const}$ ,  $x^2 + y^2 = \text{const}$ . Интегральные траектории — это пересечения сфер с плоскостями  $z = \text{const}$ . Получен один из простейших классических случаев движения твердого тела: интеграл  $Q_1(X, a) = Q_1(X)$  является интегралом кинетического момента, интеграл  $z = \text{const}$  эквивалентен интегралу энергии в том частном случае, когда инварианты  $I_1, I_2, I_3$  связаны соотношением  $I_1 = I_2$  (эллипсоид вращения).

Снова рассмотрим алгебру  $so_3$  и реализуем ее теперь в виде нормальной формы, т. е. изучим интегралы нормальной серии для  $so_3$ . Пусть  $G = sl(3, \mathbb{C})$ ,  $G_u = su_3$ ,  $G_n = so_3$ ,  $\sigma X = -\overline{X}^T$ ,  $\tau X = \overline{X}$ ,  $G_n$  — множество неподвижных точек инволюций  $\sigma$  и  $\tau$ . Подалгебра  $G_n = so_3$  порождена тремя векторами:  $E_{ij} = E_\alpha + E_{-\alpha}$ ,

$$E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть  $a, b$  являются элементами множества  $H_u$  чисто мнимых матриц  $3 \times 3$  со следом нуль. Тогда операторы  $\varphi_{ab}: G_n \rightarrow G_n$  приобретают вид

$$\begin{aligned}\varphi E_{12} &= \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2} E_{12}, \quad \varphi E_{13} = \frac{b_1 - b_3}{a_1 - a_3} E_{13}, \\ \varphi E_{23} &= \frac{b_2 - b_3}{a_2 - a_3} E_{23}.\end{aligned}$$

Множество  $\{\varphi_{ab}\}$  для нормальной серии образует 3-параметрическое семейство, в отличие от 2-параметрического для компактной серии. Ни один компактный оператор не является нормальным (проверьте!). Положим

$$\begin{aligned}\lambda_{ij} &= \frac{b_i - b_j}{a_i - a_j}, \text{ тогда } \dot{X} = \gamma\beta(\lambda_{13} - \lambda_{23})E_{12} + \alpha\gamma(\lambda_{23} - \lambda_{12})E_{13} + \\ &\quad + \alpha\beta(\lambda_{12} - \lambda_{13}), \text{ где } X = \alpha E_{12} + \beta E_{13} + \gamma E_{23}.\end{aligned}$$

Ясно, что  $\langle X, \dot{X} \rangle = 0$ , т. е. векторы  $\dot{X}$  касаются сфер с центром в точке  $O$ . Напомним, что для  $so_3 = su_2$  форма Киллинга совпадает с евклидовым скалярным произведением. Имеем

$$X + \lambda a = \begin{pmatrix} i\lambda a_1 & \alpha & \beta \\ -\alpha & i\lambda a_2 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & i\lambda a_3 \end{pmatrix}.$$

Интегралы задаются функциями  $\text{Sp}(X + \lambda a)^k$ ,  $1 \leq k \leq 3$ . Вычисление дает  $P(X) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ ,  $Q(X, a) = \alpha^2(a_1 + a_2) + \beta^2(a_1 + a_3) + \gamma^2(a_2 + a_3)$ . Эти интегралы совпадают с классическими:  $P = M^2$  — интеграл кинетического момента,  $Q = E$  — энергия.

Уравнения Эйлера полностью интегрируемы при любых  $a, b \in H_u$ . Поток  $\dot{X}$  компактной серии получается предельным переходом из потока нормальной серии (проверьте!).

В качестве следующего примера разберем потоки нормальной серии для  $G_n = so_4 \subset G_u = su_4 \subset G = sl(4, \mathbb{C})$ . Алгебра  $so_4$  реализуется в  $G$  в виде кососимметрических матриц и натянута на векторы  $E_{ij} = E_\alpha + E_{-\alpha}$  стандартного вида. Запишем  $X \in so_4$  в виде  $X = \alpha E_{12} + \beta E_{13} + \gamma E_{14} + \delta E_{23} + \rho E_{24} + \varepsilon E_{34}$ , где все коэффициенты вещественны. Напомним, что ранг  $so_4 = 2$ , и орбитами общего положения

являются четырехмерные многообразия  $S^2 \times S^2$ . Пусть  $a, b \in H_u \subset su_4$ , тогда

$$\begin{aligned}\varphi_{ab}X = & \alpha \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2} E_{12} + \beta \frac{b_1 - b_3}{a_1 - a_3} E_{13} + \gamma \frac{b_1 - b_4}{a_1 - a_4} E_{14} + \\ & + \delta \frac{b_2 - b_3}{a_2 - a_3} E_{23} + \rho \frac{b_2 - b_4}{a_2 - a_4} E_{24} + \varepsilon \frac{b_3 - b_4}{a_3 - a_4} E_{34}.\end{aligned}$$

Для каждой пары  $a, b$  общего положения получаем поток  $\dot{X}$  на  $S^2 \times S^2$ . Интегралами будут функции  $\text{Sp}(X + \lambda a)^k$ ,  $1 \leq k \leq 4$ , где

$$X + \lambda a = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & \alpha & \beta & \gamma \\ -\alpha & \lambda a_2 & \delta & \rho \\ -\beta & -\delta & \lambda a_3 & \varepsilon \\ -\gamma & -\rho & -\varepsilon & \lambda a_4 \end{pmatrix}.$$

Вычисления дают четыре интеграла:  $h_1 = \text{Sp } X^2$ ,  $h_2 = \text{Sp } X^4$ ,  $h_3 = \text{Sp } X^2 a$ ,  $h_4 = 2 \text{Sp } X^2 a^2 + \text{Sp } X a X a$ . Интегралы  $h_1$  и  $h_2$  постоянны на орбитах и имеют вид

$$h_1 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \rho^2 + \varepsilon^2,$$

$$h_2 = h_1^2 + 4(\beta\delta\gamma\rho - \alpha\delta\gamma\varepsilon + \alpha\rho\beta\varepsilon) - 2(\alpha^2\varepsilon^2 + \beta^2\rho^2 + \gamma^2\delta^2).$$

В действительности,  $h_2$  является квадратом интеграла  $q$  степени 2 (после вычитания из  $h_2$  функции  $h_1^2$ ), где  $q = \alpha\varepsilon - \beta\rho + \gamma\delta$ . Таким образом, два квадратичных интеграла  $h_1$  и  $q$  являются образующими кольца  $Iso_4$ , т.е. любой полином, постоянный на орбитах, разлагается по  $h_1$  и  $q$ . Легко проверяется, что  $h_1$  и  $q$  независимы. Уравнения  $h_1 = p$ ,  $q = t$  где  $p, t$  постоянные, определяют орбиты общего положения. Эти интегралы, в частности  $q$ , рассматривались в [19]. Интегралы  $h_3$  и  $h_4$  уже не постоянны на орбитах и имеют вид  $h_3 = \alpha^2(a_1 + a_2) + \beta^2(a_1 + a_3) + \gamma^2(a_1 + a_4) + \delta^2(a_2 + a_3) + \rho^2(a_2 + a_4) + \varepsilon^2(a_3 + a_4)$ ,  $h_4 = \alpha^2(a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2) + \beta^2(a_1^2 + a_1 a_3 + a_3^2) + \gamma^2(a_1^2 + a_1 a_4 + a_4^2) + \delta^2(a_2^2 + a_2 a_3 + a_3^2) + \rho^2(a_2^2 + a_2 a_4 + a_4^2) + \varepsilon^2(a_3^2 + a_3 a_4 + a_4^2)$ . Легко проверить, что интегралы  $h_1$ ,  $q$ ,  $h_3$ ,  $h_4$  функционально независимы, а интегралы  $h_3$  и  $h_4$  находятся в инволюции на орбитах.

### 3. Случаи полной интегрируемости уравнений движения многомерного твердого тела с закрепленной точкой в отсутствие силы тяжести и полная интегрируемость их аналогов на полупростых алгебрах Ли

Здесь мы дадим краткую схему доказательства, отсылая за техническими подробностями к [12, 15].

*Доказательство.*

1) Пусть  $G$  — комплексная полупростая алгебра Ли,  $\dot{X} = [X, \varphi_{abD}X]$  — уравнения Эйлера с оператором комплексной серии. Тогда эта система вполне интегрируема (по Лиувиллю) на орбитах общего положения. Пусть  $f$  — любая инвариантная функция на алгебре. Тогда все функции  $h_\lambda(X, a)$  являются интегралами потока  $\dot{X}$  для любых  $\lambda$ . Любые два интеграла  $h_\lambda(X, a)$  и  $\rho_\mu(X, a)$ , построенные по функциям  $f, g \in IG$ , находятся в инволюции на орбитах. Гамильтониан  $F = \langle X, \varphi X \rangle$  потока  $\dot{X}$  также коммутирует со всеми интегралами вида  $h_\lambda(X, a)$ . Из множества этих интегралов можно выбрать функционально независимые на орбитах общего положения интегралы в количестве, равном половине размерности орбиты. Интеграл  $F$  функционально выражается через интегралы вида  $h_\lambda(X, a)$ .

2) Пусть  $G_u$  — компактная вещественная форма полупростой алгебры Ли и  $\dot{X} = [X, \varphi X]$  — гамильтонова система, определяемая оператором  $\varphi$  компактной серии. Тогда множество функций вида  $f(X + \lambda a)$ , где  $f \in IG_u$ , образует полный коммутативный набор на орбитах общего положения в алгебре Ли  $G_u$ .

3) Пусть  $G_n$  — нормальная компактная подалгебра в компактной алгебре  $G_u$  и  $\dot{X} = [X, \varphi X]$  — гамильтонова система нормальной серии. Тогда множество функций вида  $f(X + \lambda a)$ , где  $f \in IG_n$ , образует полный коммутативный набор функций на орбитах общего положения. ■

Докажем сначала инволютивность интегралов комплексной серии. Предварительно вычислим в явном виде  $sgrad f$  для любой гладкой функции  $f$  на  $G$ , выразив  $sgrad f$  через  $grad f$ .

**Лемма 17.4.** Для любой гладкой функции  $f$  на  $G$  выполнено тождество  $sgrad f(X) = [\text{grad } f(X), X]$ .

*Доказательство.*

Пусть  $\xi$  — вектор из  $T_X O$ , тогда

$$\omega(sgrad f, \xi) = \xi f(X) = \langle \text{grad } f, \xi \rangle$$

по определению формы  $\omega$  получаем  $\omega(\text{sgrad } f, \xi) = \langle \text{sgrad } f, y \rangle$ , где  $\xi = [X, y]$ , отсюда  $\langle \text{grad } f, [X, y] \rangle = \langle \text{sgrad } f, y \rangle$  т. е.  $\langle [\text{grad } f, X], y \rangle = \langle \text{sgrad } f, y \rangle$ . Так как это тождество верно при любом  $y$ , то  $\text{sgrad } f = [\text{grad } f, X]$ . ■

Если  $F = \langle X, \varphi X \rangle$ , то  $\varphi X = \text{grad } f(X)$ , откуда  $-\dot{X} = [\varphi X, X]$ , что и доказывает гамильтоновость  $X$ . Итак, если  $f$  и  $g$  — две функции на  $G$ , то  $\{f, g\} = \langle [X, \text{grad } f], \text{grad } g \rangle$ . Окончательно,  $\{f, g\} = \langle X, [\text{grad } f, \text{grad } g] \rangle$ . Нами доказана

**Лемма 17.5.** Для любых гладких функций  $f$  и  $g$  на  $G$  выполнено тождество  $\{f, g\} = \langle X, [\text{grad } f, \text{grad } g] \rangle$ .

**Лемма 17.6.** Пусть  $f$  и  $g$  — гладкие функции на  $G$ , постоянные на орбитах. Тогда  $[\text{grad } f, \text{grad } g] = 0$ .

*Доказательство.*

Пусть сначала  $X \in \text{Reg } G$ . Так как  $f$  и  $g$  постоянны на орbitах, то их градиенты ортогональны к орбите, т. е. оба они лежат в  $H(X)$  и, следовательно, коммутируют. Так как регулярные элементы всюду плотны, то лемма доказана. ■

**Предложение 17.4.** Пусть  $F$  и  $G$  — гладкие функции на  $G$ , постоянные на орбитах. Рассмотрим функции  $h_\lambda(X, A) = f(X + \lambda a)$ ,  $d_\mu(X, a) = g(X + \mu a)$ , где  $a \in H(a, b)$ . Тогда интегралы  $h_\lambda$  и  $d_\mu$  коммутируют. Кроме того,  $\{F, h_\lambda\} = 0$  для любой  $f \in IG$ .

*Доказательство.*

Напомним, что функции  $h_\lambda$  и  $d_\mu$  в силу предложения 17.1 являются интегралами потока  $\dot{X} = [X, \varphi X]$ . В силу леммы 17.5 достаточно доказать, что  $\langle X, [\text{grad } h_\lambda, \text{grad } d_\mu] \rangle = 0$ , т. е.  $\langle X, [\text{grad } f(X + \lambda a), \text{grad } g(X + \mu a)] \rangle = 0$ . Положим  $Y = X + \lambda a$ , тогда  $X = Y - \lambda a$ ,  $X + \mu a = Y + \nu a$ , где  $\nu = \mu - \lambda$ . Предположим сначала, что  $\nu \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} Z &= \langle Y - \lambda a, [\text{grad } f(Y), \text{grad } g(Y + \nu a)] \rangle = \\ &= \langle [Y, \text{grad } f(Y)], \text{grad } g(Y + \nu a) \rangle - \\ &\quad - \langle [\lambda a, \text{grad } g(Y + \nu a)], \text{grad } f(Y) \rangle. \end{aligned}$$

Так как  $f \in IG$ , то  $[Y, \text{grad } f(Y)] = 0$  в силу леммы 17.2. Так как  $g \in IG$ , то, в силу этой же леммы,  $[Y + \nu a, \text{grad } g(Y + \nu a)] = 0$ . Отку-

да  $[Y, \text{grad } g(Y + \nu a)] = -\nu[a, \text{grad } g(Y + \nu a)]$ . Подставляя в  $Z$ , получаем:

$$\begin{aligned} Z &= -\frac{\lambda}{\nu} \langle [Y, \text{grad } g(Y + \nu a)], \text{grad } f(Y) \rangle = \\ &= \frac{\lambda}{\nu} \langle \text{grad } g(Y + \nu a), [Y, \text{grad } f(Y)] \rangle = 0, \end{aligned}$$

так как  $f \in IG$ . Утверждение доказано при  $\lambda \neq \mu$ . Если  $\lambda = \mu$ , то  $0 = \langle X, [\text{grad } f(X + \lambda a), \text{grad } g(X + \lambda a)] \rangle$  в силу леммы 17.6. Осталось доказать, что  $\{F, h_\lambda\} = 0$ , т. е. вычислить  $L = \langle X, [\varphi X, \text{grad } f(X + \lambda a)] \rangle$ , так как  $\text{grad } F(X) = \varphi X$ . Положим  $Y = X + \lambda a$ , тогда

$$\begin{aligned} L &= \langle [Y - \lambda a, \varphi Y - \lambda \varphi a], \text{grad } f(Y) \rangle = \\ &= \langle [Y, \varphi Y], \text{grad } f(Y) \rangle - \lambda \langle [Y, \varphi a], \text{grad } f(Y) \rangle - \\ &\quad - \lambda \langle [a, \varphi Y], \text{grad } f(Y) \rangle + \lambda^2 \langle [a, \varphi a], \text{grad } f(Y) \rangle = 0, \end{aligned}$$

так как в первом слагаемом  $[Y, \text{grad } f(Y)] = 0$ , во втором — аналогично, в четвертом —  $\varphi a = Da \in H(a, b)$ , т. е.  $[a, \varphi a] = 0$ , в третьем —  $[a, \varphi Y] = \text{ad}_b Y = [b, Y]$  и снова  $[Y, \text{grad } f(Y)] = 0$ . Аналогично доказывается инволютивность интегралов компактной серии. ■

**Предложение 17.5.** Пусть  $f, g \in IG_u$ , положим  $h_\lambda(X, a) = f(X + \lambda a)$ ,  $d_\mu(X, a) = g(X + \mu a)$ , где  $a, b \in H_u(a, b)$ . Тогда интегралы  $h_\lambda$  и  $g_\mu$  коммутируют, и  $\{F, h_\lambda\} = 0$  для любой  $f \in IG_u$ .

Та же схема рассуждений лежит в основе доказательства инволютивности интегралов нормальной серии. Переходим к доказательству полноты предъявленного коммутативного набора функций. Эта последняя часть доказательства является технически более тонкой, поэтому мы ограничимся изложением только схемы конструкций.

Пусть  $G$  — комплексная полупростая алгебра,  $X \in \text{Reg } G$ . Пусть  $f_1, \dots, f_r \in IG$  — полный набор инвариантов алгебры. В точке  $X$  возникает набор комплексных векторов  $\text{grad } h_{\lambda,k}$ , где  $h_{\lambda,k}(X, a) = f_k(X + \lambda a)$ . Пусть  $V(X, a)$  — подпространство в  $G$ , порожденное векторами  $\text{grad } h_{\lambda,k}(X, a)$ . Наша цель — оценить снизу  $\dim V(X, a)$ .

Рассмотрим разложения  $h_{\lambda,k} = \sum_{i=0}^{q_k+1} P_k^i \lambda^i$ , где  $q_k + 1 = \deg f_k$ . Пусть полиномы  $f_k$  упорядочены по возрастанию степени. Пусть  $N + 1 = q_r + 1 = \deg f_r$  — наибольшая степень среди образующих  $f_k$ . Все полиномы  $h_{\lambda,k}$  можно рассматривать как полиномы степени  $N + 1$ , у

которых некоторые коэффициенты при больших степенях  $\lambda$  равны нулю.

Имеем  $\text{grad } h_{\lambda,k} = \sum_{i=0}^{q_k} U_k^i \lambda^i$ , где  $U_k^i(X, a) = \text{grad } P_k^i(X, a)$  — полиномы степени  $i$  по  $X$  и  $a$ . Ясно, что  $U_k^{q_k}(a)$  не зависит от  $X$ , так как  $P_k^{q_k}$  линеен по  $X$ . Все векторы  $U_k^{q_k}$  порождают картановскую подалгебру  $H(a)$ , не зависящую от выбора  $X$ . Ясно, что  $V(X, a)$  порождено всеми векторами  $U_k^i$ .

**Лемма 17.7.** Для каждого  $k$  выполняются рекуррентные соотношения для векторов  $U_k^i$ :

$$\begin{aligned} [U_k^0, X] &= 0, \\ [U_k^1, X] + [U_k^0, a] &= 0, \\ \dots & \\ [U_k^i, X] + [U_k^{i-1}, a] &= 0, \\ \dots & \\ [U_k^N, X] + [U_k^{N-1}, a] &= 0, \\ [U_k^N, a] &= 0 \end{aligned}$$

*Доказательство.*

В силу леммы 17.2  $[X, \text{grad } f]k(X) = 0$ . Применяя это тождество к функциям  $h_{\lambda,k}$ , получаем  $[X + \lambda a, \text{grad } h_{\lambda,k}(X, a)] = 0$ , т. е.  $\left[ X + \lambda a, \sum_{i=0}^N U_k^i \lambda^i \right] = 0$ , откуда и следует утверждение. ■

Так как  $H(X)$  — подалгебра Картана, то можно построить корневое разложение  $G$  относительно  $H(X)$  и выбрать базис Вейля.

**Лемма 17.8.** Если  $a \in H(X) \oplus V^+(X)$ , то  $\text{grad } h_{\lambda,k}(X, a) \in H(X) \oplus \oplus V^+(X)$ , т. е.  $U_k^i \in H(X) \oplus V^+(X)$ .

Для дальнейшего считаем, что  $a \in H(X) \oplus V^+(X)$ . Рассмотрим простые корни  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ , тогда каждый положительный корень  $\alpha$  можно представить в виде  $\alpha = \sum_{i=1}^r m_i \alpha_i$ , где  $m_i \geq 0$ , причем  $m_i$  целие. Порядком или высотой корня  $\alpha$  называется целое число  $k = k(\alpha) = \sum_{i=1}^r m_i$ . Через  $V_k^+(X)$  обозначим подпространство в  $V^+(X)$ , порожденное векторами  $X_\alpha$ , для которых  $k(\alpha) = k$ . Тогда, очевидно,  $V^+(X) =$

$= V_1^+ \oplus \dots \oplus V_s^+$ , причем  $V_1^+$  порождено  $X_{\alpha_1}, \dots, X_{\alpha_r}$ , т. е. простыми корнями. Уточним выбор  $a \in H(X) \oplus V^+(X)$ . Пусть  $a \in V_1^+$  и  $a = \sum_{i=1}^r \nu_i X_{\alpha_i}$ , где все  $\nu_i \neq 0$ ,  $1 \leq i \leq r$ . Тогда  $[V_k^+, a] \subset V_{k+1}^+$ ,  $[H(X), a] \subset V_1^+$ .

**Лемма 17.9.** *Пусть  $X, a$  выбраны, как показано выше. Тогда  $V_1^+ = [H(X), a]$ , и  $\text{ad}_a: H(X) \rightarrow V_1^+$  — изоморфизм.*

**Лемма 17.10.** *Пусть  $X, a$  — векторы, указанные выше. Тогда  $[V_k^+, a] = V_{k+1}^+$ , т. е.  $\text{ad}_a: V_k^+ \rightarrow V_{k+1}^+$  — эпиморфизм.*

**Лемма 17.11.** *Имеют место соотношения:  $U_k^0 \in H(X)$ ,  $U_k^i \in H(X) \oplus V_1^+ \oplus \dots \oplus V_i^+$  для любого  $1 \leq k \leq r$ .*

**Лемма 17.12.** *Векторы  $U_k^j$ ,  $j \leq i$ , порождают все подпространства  $H(X) \oplus V_1^+ \oplus \dots \oplus V_i^+$ .*

**Лемма 17.13.** *Пусть  $a$  — элемент общего положения. Тогда  $\dim_{\mathbb{C}} V(X, a) \geq \dim H(X) \oplus V^+(X) = 1/2(\dim G + \text{ранг } G)$ , где  $V(X)$  — комплексное подпространство, порожденное всеми векторами вида  $\text{grad } h_{\varkappa, k}$  для всех точек  $X \in G$  из открытого всюду плотного подмножества в алгебре  $G$ .*

Для завершения доказательства теоремы достаточно заметить, что элементы  $X$  и  $a$  входят симметрично во все предыдущие утверждения, так как  $f(X + \lambda a) = \lambda^q f\left(\frac{1}{\lambda}X + a\right)$ , где  $f \in IG$  — полином степени  $q$ .

Доказательство полноты построенных выше коммутативных наборов в случае компактной и нормальной серий получается из приведенной схемы после учета инволюций, определяющих эти две серии.

#### 4. Случай полной интегрируемости уравнений движения многомерного твердого тела по инерции в идеальной жидкости

Рассмотрим вложение указанной в заголовке системы в некомпактную алгебру Ли группы движений евклидова пространства. Оказывается, что и в этом случае метод сдвига аргумента позволяет построить полный коммутативный набор интегралов на орбитах общего положения [11].

**Лемма 17.14.** *Пусть  $f$  — инвариант коприсоединенного представления группы движений евклидова пространства  $\mathbb{R}$ . Тогда функции*

$f(X + \lambda a)$  при любом вещественном  $\lambda$  являются интегралами уравнений Эйлера  $\dot{X} = \text{ad}_{QX}^* X$ , где  $Q(a, b, D)$  — построенные выше секционные операторы  $Q: e(n)^* \rightarrow e(n)$ .

*Доказательство.*

Достаточно проверить равенство  $\langle a(X, QX), df(X + \lambda a) \rangle = 0$ , где  $\langle X, \xi \rangle$  — значение функционала  $X$  на векторе  $\xi$ . Очевидно, имеем

$$A = \langle a(X, QX), df(X + \lambda a) \rangle = -\langle QX, a(X + \lambda a, df(X + \lambda a)) \rangle - \lambda \langle a(QX, a), df(X + \lambda a) \rangle.$$

Так как  $f$  инвариант, то первое слагаемое равно нулю. Из определения секционного оператора  $Q(a, b, D)$  получаем

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\lambda} A &= \langle a(\Phi_a^{-1} \text{ad}_b^* X_1, a), df(X + \lambda a) \rangle + \\ &\quad + \langle a(DX_2, a), df(X + \lambda a) \rangle \text{ где } X_1 \in K^{*\perp}, X_2 \in K^*. \end{aligned}$$

Второе слагаемое равно нулю, так как  $DX_2 \in K$ ,  $a \in K^*$ . Первое слагаемое равно

$$\langle a(X_1 + X_2 + \lambda a, b), df(X + \lambda a) \rangle.$$

Так как  $X_2, b \in \text{Ann}(a)$ , то

$$\langle a(X_1 + X_2 + \lambda a, b), df(X + \lambda a) \rangle = \langle a(X + \lambda a, df(X + \lambda a)), b \rangle = 0,$$

так как  $f$  — инвариант. Лемма доказана. ■

### Теорема 17.1.

1) Система дифференциальных уравнений  $\dot{X} = \text{ad}_{QX}^* X$ , где  $Q = Q(a, b, D)$  на  $e(n)^*$ , вполне интегрируема на орбитах общего положения.

2) Пусть  $f$  — инвариантная функция на  $e(n)^*$ . Тогда функции  $h_\lambda(X) = f(X + \lambda a)$  являются интегралами движения при любых числах  $\lambda$ . Любые два интеграла  $h_\lambda$  и  $g_\mu$  находятся в инволюции на всех орбитах представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли  $E(n)$ , причем число независимых интегралов указанного вида равно половине размерности орбиты общего положения. При этом если  $O$  — орбита максимальной размерности (общего положения) присоединенного представления, то  $\text{codim } O = \left[ \frac{n+1}{2} \right]$ .

*Доказательство.*

То, что указанные функции являются интегралами, проверено в лемме 17.14. Их инволютивность доказывается как в п. 3. Осталось проверить, что сдвиги инвариантов  $f(X + \lambda a)$  образуют полный коммутативный набор на орбитах общего положения. Утверждение, что  $\text{codim } O = \left[ \frac{n+1}{2} \right]$ , проверяется стандартными методами. Приведем полный набор инвариантов алгебры. Для этого запишем  $e(n)^*$  в матричном виде:

$$e(n)^* = \left( \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} so_n \\ y_1 \quad \dots \quad y_n \end{matrix} & 0 \end{array} \right)$$

Минор матрицы  $X$ , стоящий на пересечении строк с номерами  $i_1, \dots, i_s$  и столбцов с номерами  $j_1, \dots, j_s$ , обозначим через  $M_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_s}$ , где  $1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq n$ ,  $1 \leq j_1 < \dots < j_s \leq n$ . Тогда функции

$$J_s(X) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq n} M_{i_1 \dots i_s, n+1}^{i_1 \dots i_s, n+1} \left( \frac{1}{2}(X - X^T) \right)$$

являются инвариантами алгебры. Функции с четными номерами тождественно равны нулю, а функции с нечетными номерами дают полный набор инвариантов, что проверяется непосредственным вычислением. Пусть  $(f_i)$  — полный набор полиномиальных инвариантов, тогда

$$f_i(X + \lambda a) = \sum_{s=0}^{N_i} P_{is}(X, a) \lambda^s, \quad df_i \in e(n)^{**} = e(n).$$

Положим  $df_i(X + \lambda a) = \sum_{s=0}^{N_i} U_{is}(X, a) \lambda^s$ , где  $U_{is} = e(n)$ .

**Лемма 17.15.** *Имеет место система рекуррентных соотношений:  $a(X, U_{i0}) = 0$ ,  $a(X, U_{i1}) + a(a, U_{i0}) = 0, \dots, a(X, U_{i,N_i}) + a(a, U_{i,N_i-1}) = 0$ ,  $a(a, U_{i,N_i}) = 0$ .*

Пусть  $n = 2s + 1$ . Рассмотрим комплексификацию  $\mathbb{C}e(n)$ . Алгебра Ли  $so(n, \mathbb{C})$  является простой, пусть  $so(n, \mathbb{C}) = H \oplus \sum_{i \geq 1} G_i^+ \oplus \sum_{i \geq 1} G_i^-$ ,

где подпространства  $G_i^\pm$  натянуты на корневые векторы  $e_\alpha$ , для которых высота корня  $\alpha$  равна  $\pm i$ , и  $H = \bigoplus_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} \mathbb{C}E_{2k+1, 2k+2}$ . В пространстве  $e(n)$  рассмотрим градуированное подпространство  $e(n)^+ = (H \oplus \mathbb{C}e_n) \oplus (G_1^+ \oplus B_1) \oplus \dots \oplus (G_s^+ \oplus B_s) \oplus \sum_{k \geq s+1} G_k^+ = \bigoplus_{i \geq 0} H_i$ , где  $B_{s+1-j} = \mathbb{C}(e_{2j-1} + ie_{2j}) \subset \mathbb{C}^n$ ,  $j = 1, \dots, s$ . Подпространство  $e(n)^+$  с указанной градуировкой можно считать лежащим в  $e(n)$ . Выберем  $X$ ,  $a \in \mathbb{C}e(n)^*$  так:  $X \in K^*$  общего положения,  $a \in G_1^+ \oplus B_1$  такой, что все компоненты в разложении по корневому базису в  $G_1^+$  и координата относительно базисного вектора  $e_{n-2} + ie_{n-1} \in \mathbb{C}^n$  отличны от нуля.

**Лемма 17.16.** *Пусть  $a \in G_1^+ \oplus B_1 \subset e(n)^*$  элемент, указанный выше. Тогда для  $H_i \subset e(n)$  имеем  $a(a, H_i) \subset H_{i+1} \subset e(n)^*$ ,  $i \geq 0$ .*

**Лемма 17.17.** *Пусть  $X$ ,  $a \in e(n)^*$  выбраны так, как это указано выше, тогда отображение  $H_i \rightarrow H_{i+1} \subset e(n)^*$ , определенное равенством  $y \rightarrow a(a, y)$ ,  $y \in H_i \subset e(n)$ , является эпиморфизмом.*

**Лемма 17.18.** *Имеют место соотношения: а)  $U_{j0} \in H_0$ , б)  $U_{jk} \in H_k$  для любого  $j$ .*

**Лемма 17.19.** *Векторы  $U_{jk}$  порождают все подпространство  $H_k$ .*

Окончательно получаем, что размерность подпространства, порожденного  $df(X + \lambda a)$ , не меньше, чем размерность  $\dim e(n)^+ = s^2 + 2s + 1$ . Для полной интегрируемости надо иметь

$$\text{codim } O + 1/2(\dim e(n)^* - \text{codim } O) = s^2 + 2s + 1$$

функционально независимых интегралов на  $G^*$ . Следовательно, теорема доказана нами для случая  $n = 2s + 1$ . Случай  $n = 2s$  рассматривается по аналогичной схеме. ■

## 5. Конечномерные аппроксимации уравнений магнитной гидродинамики и случаи их полной интегрируемости

Пусть  $G$  — произвольная алгебра Ли, тогда можно достроить новую алгебру Ли  $\Omega G$ , которую определим так. Рассмотрим полупрямую сумму двух экземпляров алгебры  $G$ , т. е. рассмотрим алгебру  $G \oplus_\rho G$ , где  $G$  действует на втором слагаемом  $G$  с помощью присоединенного представления  $\rho = \text{ad}$ , и второе слагаемое рассматривается при этом

как абелева алгебра Ли. Эту полупрямую сумму и обозначим через  $\Omega G$ . Особый интерес представляют следующие алгебры  $\Omega G$ ,  $\Omega G_u$ ,  $\Omega G_n$ , где  $G$  — комплексная полупростая алгебра Ли, а  $G_u$  и  $G_n$  — ее компактная форма и нормальная компактная подалгебра соответственно. Пусть  $\Omega G^*$ ,  $\Omega G_u^*$ ,  $\Omega G_n^*$  — соответствующие им коалгебры. Все эти алгебры некомпактны. Оказывается (В. В. Трофимов), что на каждой из этих алгебр существуют полные коммутативные наборы функций (интегралов) на орбитах общего положения, причем эти наборы являются аналогами «твердотельных» гамильтоновых систем, построенных нами выше при помощи секционных операторов. Гамильтоновы системы вида  $\dot{X}_Q$ , построенные по секционным операторам типа  $Q(a, b, D)$ , являются, как можно проверить, аналогами магнитогидродинамических систем на произвольных полупростых алгебрах Ли. Если в качестве  $G$  взять ортогональную алгебру Ли  $so_n$ , то эти уравнения превращаются в конечномерные аппроксимации уравнений магнитной гидродинамики, изученные в [20]. Таким образом, эти уравнения допускают вложение в алгебру Ли в смысле определения 16.1. Так, например, в случае  $G = so_n$  эти уравнения имеют вид:  $\dot{M} = [\Omega, M] - [H, J]$ ,  $\dot{H} = [\Omega, H]$ , где  $\Omega = (R_{g^{-1}})\dot{g}$  — правый сдвиг в единицу группы вектора скорости  $\dot{g} \in T_g SO_n$ ,  $J = \text{Ad}_{g^{-1}}^* j$ , где  $j$  — плотность тока в теле,  $H = \text{Ad}_g h$ ,  $h$  — напряженность магнитного поля в теле,  $m$  — кинетический момент в пространстве.

Оказывается, как и в предыдущих примерах п. 3,4, эти многомерные аналоги уравнений магнитной гидродинамики для произвольной полупростой алгебры Ли и компактных нормальных подалгебр являются вполне интегрируемыми гамильтоновыми системами для много параметрической серии секционных операторов  $Q(a, b, D)$ . В том числе полный набор коммутирующих интегралов имеется и в случае алгебры  $so_n$ .

---

---

## Литература

- [1] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. *Современная геометрия*. — М.: Наука, 1979.
- [2] Мищенко А. С., Фоменко А. Т. *Курс дифференциальной геометрии и топологии*. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980.
- [3] Фукс Д. Б., Фоменко А. Т., Гутенмакер В. Л. *Гомотопическая топология*. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1969.
- [4] Борисович Ю. Г., Близняков Н. М., Израилевич Я. А., Фоменко Т. Н. *Введение в топологию*. — М.: Высшая школа, 1980.
- [5] Милнор Дж. *Особые точки комплексных гиперповерхностей*. — М.: Мир, 1971.
- [6] Милнор Дж. *Теорема об  $h$ -кобордизме*. — М.: Мир, 1980.
- [7] Семинар «Софус Ли». *Теория алгебр Ли. Топология групп Ли*. — М.: ИЛ, 1962.
- [8] Арнольд В. И. *Математические методы классической механики*. — М.: Наука, 1974.
- [9] Фоменко А. Т. *Групповые симплектические структуры на однородных пространствах*. — ДАН, 1980, т. 253, № 5, с. 1062–1067.
- [10] Мищенко А. С., Фоменко А. Т. *Обобщенный метод Лиувилля интегрирования гамильтоновых систем*. — «Функц. анализ», 1978, т. 12, вып. 2, с. 46–56.
- [11] Трофимов В. В., Фоменко Л. Т. *Методика построения гамильтоновых потоков на симметрических пространствах и интегрируемость гидродинамических систем*. — ДАН, 1980, т. 254, № 6, с. 1349–1353.

- [12] Мищенко А. С., Фоменко А. Т. *Интегрирование гамильтоновых систем с некоммутативными симметриями*. — В кн.: Труды семинара по векторному и тензорному анализу, вып. 20. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980, с. 5–54.
- [13] Хелгасон С. *Дифференциальная геометрия и симметрические пространства*. — М.: Мир, 1964.
- [14] Фоменко А. Т. *О симплектических структурах и интегрируемых системах на симметрических пространствах*. — «Матем. сб.», 1981, т. 115, № 2, с. 263–280.
- [15] Мищенко А. С., Фоменко А. Т. *Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли*. — «Изв. АН СССР», 1978, т. 42, № 2, с. 396–415.
- [16] Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. *Теоретическая гидромеханика*, ч. 1. — М.: Физматгиз, 1963.
- [17] Горр Г. В., Кудряшова Л. В., Степанова Л. А. *Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние*. — Киев: Наукова думка, 1978.
- [18] Манаков С. В. *Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики  $n$ -мерного твердого тела*. — «Функц. анализ», 1976, т. 10, № 4.
- [19] Langlois M. *Contribution a l'étude du mouvement du corps rigide a  $N$  dimensions autor d'un point fixe*. — In: These presentee a la faculte des sciences de l'universite de Besancon. Besancon, 1971.
- [20] Вишик С. В., Должанский Ф. В. *Аналоги уравнений Эйлера–Пуассона и магнитной гидродинамики, связанные с группами Ли*. — ДАН, 1978, т. 238, № 5, с. 1032–1035.
- [21] Трофимов В. В. *Уравнения Эйлера на борелевских подалгебрах полупростых алгебр Ли*. — «Изв. АН СССР», 1979, т. 43, № 3, с. 714–732.
- [22] Трофимов В. В. *Конечномерные представления алгебр Ли и вполне интегрируемые системы*. — «Матем. сборник», 1980, т. 111, № 4, с. 610–621.

- 
- [23] Марков А. А. *Неразрешимость проблемы гомеоморфии*. — ДАН, 1958, т. 121, № 2, с. 218–220.
  - [24] Адян С. И. *Неразрешимость некоторых алгоритмических проблем теории групп*. — «Труды Моск. матем. о-ва», 1957, т. 6, с. 231–298.
  - [25] Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П. *Нелинейные уравнения типа Кортевега–де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия*. — УМН, 1976, т. 26, вып. 1.
  - [26] Володин И. А., Кузнецов В. Е., Фоменко А. Т. *О проблеме алгоритмического распознавания стандартной трехмерной сферы*. — УМН, 1974, т. 24, вып. 5, с. 71–168.
  - [27] Fomenko A. T. *Multidimensional Plateau problem on Riemannian manifolds. On the problem of the Algorithmical Recognizability of the standart tree-dimensional Sphere*. — In Proc. of the Intern. Congress of Math., vol. 1, p. 515–525. Vancouver, 1974.
  - [28] Виро О. Я., Кобельский В. Л. *Гипотеза Володина–Кузнецова–Фоменко о диаграмме Хегора  $S^3$  не верна*. — УМН, 1977, т. 32, вып. 5.
  - [29] Homma T., Ochiai M., Takahashi M. *An algorithm for recognizing  $S^3$  in 3-manifolds with Heegaard splittings of genus two*. — «Osaka J. Math.», 1980, vol. 17, p. 625–648.
  - [30] Ochiai M. *A counterexample to conjecture of Whitehead and Volo-din–Kuznetzov–Fomenko*. — «J. Math. Soc. Japan», 1979, v. 31, p. 687–691.

**Анатолий Тимофеевич Фоменко**

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ  
Дополнительные главы**

*Дизайнер М. В. Ботя  
Компьютерная подготовка А. В. Широбоков,  
Б. А. Скорняков*

*Рисунки А. Т. Фоменко  
Корректор Т. Н. Артемьева*

Лицензия ЛУ № 056 от 06.01.98. Подписано к печати 19.10.99.

Формат 60 × 84 $\frac{1}{16}$ . Усл. печ. л. 14,65. Уч. изд. л. 15,2.  
Печать офсетная. Гарнитура Computer Modern Roman.  
Заказ № К160. Тираж 1000 экз.

Ижевская республиканская типография  
426057, г. Ижевск, ул. Пастухова, 13.