

Доказательство также оставляем читателю.

Пример 1. Пусть S^n обозначает n -мерную сферу. Известно, что $H_k(S^n, \mathbb{Z}_2) = 0$, если $k \neq 0, n$, и $H_k(S^n, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$, если $k = 0, n$.

Пусть γ^0, γ^n — нетривиальные классы гомологий размерности 0 и n . Выберем представителей a^0, a^n из γ^0, γ^n (т. е. $\{a^0\} = \gamma^0, \{a^n\} = \gamma^n$) следующим образом. Пусть $a^n: I^n \rightarrow S^n$ тождественно переводит внутренность куба I^n на внутренность куба I^n , а всю его границу в одну точку p_∞ . Тогда $a^n(I^n)$ будет n -кубом с границей, отождествленной в точку p_∞ , т. е. топологической сферой S^n . Пусть $a^0: I^0 \rightarrow p_0$, $p_0 \in S^n$, $p_0 \neq p_\infty$. В силу леммы 10 тогда $\gamma^0 \cdot \gamma^n = 1$.

Теорема 2. Пусть M, M' — многообразия, γ_1, γ_2 — классы гомологий на M , а γ'_1, γ'_2 — классы гомологий на M' , $\dim \gamma_1 + \dim \gamma_2 = \dim M$, $\dim \gamma'_1 + \dim \gamma'_2 = \dim M'$. Тогда $(\gamma_1 \times \gamma'_1) \cdot (\gamma_2 \times \gamma'_2) = (\gamma_1 \cdot \gamma_2) (\gamma'_1 \cdot \gamma'_2)$. Если же указанное условие на размерность не выполняется, то $(\gamma_1 \times \gamma'_1) \cdot (\gamma_2 \times \gamma'_2) = 0$.

Доказательство следует непосредственно из определения индекса пересечения и оставляется читателю.

Сформулируем теорему Кюннета о группах гомологий топологического произведения. Подробности и доказательство см. Хилтон и Уайли [1, гл. V].

Теорема (Кюннет). Пусть $|K|, |L|$ — полиздры¹). Тогда

$$(I) \quad H_p(|K| \times |L|) \cong \sum_{m+n=p} H_m(|K|) \otimes H_n(|L|) \oplus \sum_{m+n=p-1} H_m(|K|) * H_n(|L|),$$

где в качестве группы коэффициентов берется группа целых чисел, а знак $*$ означает периодическое умножение²;

¹) Полиздром называется пространство, допускающее симплексиальное разбиение. — Прим. перев.

²) Пусть A и B — абелевые группы. Представим B в виде L/R , где группа L свободна. Ядро гомоморфизма $A \otimes R \rightarrow A \otimes L$ обозначается $A * B$ или иногда Тор (A, B). — Прим. перев.

(II) если \mathcal{F} — поле характеристики нуль, то

$$H_p(|K| \times |L|; \mathcal{F}) \cong \sum_{m+n=p} H_m(|K|) \otimes H_n(|L|) \otimes \mathcal{F};$$

(III) если q — простое число и \mathbb{Z}_q — группа вычетов по модулю q , то

$$H_p(|K| \times |L|; \mathbb{Z}_q) \cong \sum_{m+n=p} H_m(|K|; \mathbb{Z}_q) \otimes H_n(|L|; \mathbb{Z}_q).$$

Пример 2. Рассмотрим $S^n \times S^n$, где S^n задано в примере 1. По теореме Кюннета нетривиальными классами гомологий у $S^n \times S^n$ будут только $\gamma^0 \times \gamma^0$, $\gamma^n \times \gamma^0$, $\gamma^0 \times \gamma^n$, $\gamma^n \times \gamma^n$. В силу теоремы 2

$$(\gamma^n \times \gamma^0) \cdot (\gamma^0 \times \gamma^n) = 1,$$

$$(\gamma^0 \times \gamma^0) \cdot (\gamma^n \times \gamma^n) = 1,$$

а все другие пересечения (которые определены) равны нулю.

Замечание. Если индекс пересечения какого-нибудь класса гомологий на $S^n \times S^n$ со всеми другими классами (соответственно дополнительной размерности) равен нулю, то сам этот класс нулевой.

В самом деле, n -цикл на $S^n \times S^n$ имеет вид $C_1(\gamma^0 \times \gamma^n) + C_2(\gamma^n \times \gamma^0)$. По условию $C_2 = \{C_1(\gamma^0 \times \gamma^n) + C_2(\gamma^n \times \gamma^0)\} \cdot (\gamma^0 \times \gamma^n) = 0$. Аналогично $C_1 = 0$. В силу примера 2 достаточно рассмотреть только n -циклы.

Пусть $\phi: S^n \rightarrow S^n$ — гладкое отображение. Зададим отображение $\Gamma^\Phi: S^n \rightarrow S^n \times S^n$ равенством $\Gamma^\Phi(x) = [x, \phi(x)]$ ($\Gamma^\Phi(x)$ называется графиком отображения ϕ) и обозначим через Λ_ϕ его образ. Это отображение индуцирует отображение $\Gamma_*^\Phi: H_p(S^n) \rightarrow H_p(S^n \times S^n)$ для всех p . Так как $\gamma^n \times \gamma^0$, $\gamma^0 \times \gamma^n$ образуют базис в $H_n(S^n \times S^n)$, то $\Gamma_*^\Phi(\gamma^n) = C_1(\gamma^n \times \gamma^0) + C_2(\gamma^0 \times \gamma^n)$. Возьмем в качестве представителя класса γ^n сингулярный n -куб σ из примера 1. Представитель класса $\Gamma_*^\Phi(\gamma^n)$ задан соответствием $x \rightarrow [\sigma(x), \phi(\sigma(x))]$; представитель класса $\gamma^n \times \gamma^0$ — соответствием $x \rightarrow [\sigma(x), x_0]$, где $x_0 = \gamma^0(I^0)$, а представитель класса $\gamma^0 \times \gamma^n$ задан

соответствием $x \rightarrow [x_0, \sigma(x)]$. Согласно лемме 10, $(\gamma^0 \times \gamma^n) \cdot \Gamma_*^\Phi(\gamma^n) = 1$, и $(\gamma^n \times \gamma^0) \cdot \Gamma_*(\gamma^n)$ равно четности числа решений уравнения $\varphi(\sigma(x)) = x_0$, или уравнения $\varphi(p) = x_0$, т. е. $\deg_2(\varphi)|_{x_0}$.

Поэтому

$$\begin{aligned} 1 &= (\gamma^0 \times \gamma^n) \cdot \Gamma_*^\Phi(\gamma^n) = \\ &= (\gamma^0 \times \gamma^n) \cdot \{C_1(\gamma^n \times \gamma^0) + C_2(\gamma^0 \times \gamma^n)\} = C_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \deg_2(\varphi)|_{x_0} &= (\gamma^n \times \gamma^0) \cdot \Gamma_*^\Phi(\gamma^n) = \\ &= (\gamma^n \times \gamma^0) \cdot \{C_1(\gamma^n \times \gamma^0) + C_2(\gamma^0 \times \gamma^n)\} = C_2. \end{aligned}$$

Тем самым

$$\Gamma_*^\Phi(\gamma^n) = (\gamma^n \times \gamma^0) + (\deg_2(\varphi)|_{x_0})(\gamma^0 \times \gamma^n).$$

Если ψ — другое отображение $S^n \rightarrow S^n$, то

$$\Gamma_*^\Psi(\gamma^n) = (\gamma^n \times \gamma^0) + (\deg_2(\psi)|_{x_0})(\gamma^0 \times \gamma^n).$$

Следовательно,

$$\Gamma_*^\Phi(\gamma^n) \cdot \Gamma_*^\Psi(\gamma^n) = \deg_2(\varphi)|_{x_0} + \deg_2(\psi)|_{x_0}.$$

Далее, $\Gamma_*^\Phi(\gamma^n)$ — цепь с носителем Λ_φ и $\Gamma_*^\Psi(\gamma^n)$ — цепь с носителем Λ_ψ . Отсюда, если $\deg_2(\varphi)|_{x_0} \neq \deg_2(\psi)|_{x_0}$, то $\Gamma_*^\Phi(\gamma^n) \cdot \Gamma_*^\Psi(\gamma^n) = 1$ и потому $\Lambda_\varphi \cap \Lambda_\psi = \emptyset$, т. е. существует такая точка $x_1 \in S^n$, что $\varphi(x_1) = \psi(x_1)$. Это дает нам так называемую *теорему совпадения*.

Следствие. Если $\deg_2 \varphi|_{x_0} = 0$, то φ имеет неподвижную точку.

Доказательство. Возьмем в качестве ψ тождественное отображение и применим полученный только что результат.

Теперь приведем без доказательства теорему о неподвижной точке. Подробности см., например, Лефшец [1].

Теорема (Лефшец). Пусть X — конечно триангулируемое пространство, отображение $\varphi: X \rightarrow X$ индуцирует отображение $\varphi_*: H_k(X) \rightarrow H_k(X)$. Если $l(\varphi) = \sum_{k=0}^{\dim X} (-1)^k \operatorname{tr}(\varphi_*|_{H_k(X)}) \neq 0$ (tr обозначает след линейного оператора), то φ имеет неподвижную точку.

Применение. Если $X = S^n$, то $l(\varphi) = 1 + (-1)^n \deg \varphi$.

Пусть $\varphi_1, \varphi_2: S^n \rightarrow S^n$, $\psi_1, \psi_2: S^n \rightarrow S^n$. Зададим $\Phi: S^n \rightarrow S^n \times S^n$ равенством $\Phi(p) = [\varphi_1(p), \varphi_2(p)]$. Аналогично зададим Ψ . Тогда

$$\Phi_*(\gamma^n) = \deg_2(\varphi_1)(\gamma^n \times \gamma^0) + \deg_2(\varphi_2)(\gamma^0 \times \gamma^n),$$

$$\Psi_*(\gamma^n) = \deg_2(\psi_1)(\gamma^n \times \gamma^0) + \deg_2(\psi_2)(\gamma^0 \times \gamma^n),$$

откуда

$$\Phi_*(\gamma^n) \cdot \Psi_*(\gamma^n) = \deg_2(\varphi_1) \deg_2(\varphi_2) + \deg_2(\psi_1) \deg_2(\psi_2).$$

Если эта величина не равна нулю, то существуют точки x_1, x_2 , для которых

$$[\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_1)] = [\psi_1(x_2), \psi_2(x_2)].$$

Определим теперь кольцо когомологий пространства. Возьмем топологическое пространство X и обозначим через $H(X)$ прямую сумму групп его сингулярных гомологий (всех размерностей). Если группа коэффициентов является полем, то $H(X)$ можно рассматривать как векторное пространство над этим полем. Сопряженное к нему пространство назовем (полной) группой $H^*(X)$ когомологий пространства X .

Пусть $\varphi: X \rightarrow Y$. Тогда φ индуцирует отображение $\varphi_*: H(X) \rightarrow H(Y)$ и двойственное ему $\varphi^*: H^*(Y) \rightarrow H^*(X)$.

Пусть $\operatorname{diag}: X \rightarrow X \times X$ — диагональное отображение, заданное равенством $\operatorname{diag}(x) = (x, x)$. Тогда

$$\operatorname{diag}_*: H(X) \rightarrow H(X \times X) = H(X) \otimes H(X),$$

$$\operatorname{diag}^*: H^*(X) \otimes H^*(X) \rightarrow H^*(X).$$

Определим \cup -произведение $\gamma_1^* \cup \gamma_2^*$ элементов из $H^*(X)$, полагая

$$\gamma_1^* \cup \gamma_2^* = \operatorname{diag}^*(\gamma_1^* \otimes \gamma_2^*).$$

Эта операция умножения превращает $H^*(X)$ в кольцо, называемое *кольцом когомологий пространства X* .

Пусть X — топологическое пространство, содержащее замкнутое множество A . Конечная последовательность $X = X_n \supseteq X_{n-1} \supseteq \dots \supseteq X_0 = A$ замкнутых множеств называется *фильтрацией* пространства X или *нормальной системой* замкнутых множеств в X . Фильтрация в X задает *клеточный комплекс*, если для каждой пары (X_j, X_{j-1}) , $j = 1, 2, \dots, n$, существуют j -кубы $C_p^{(j)}$, $C_2^{(j)}, \dots, C_{m_j}^{(j)}$ и отображения $\sigma_1^{(j)}, \sigma_2^{(j)}, \dots, \sigma_{m_j}^{(j)}$, удовлетворяющие условиям

(I) $\sigma_p^{(j)}: C_p^{(j)} \rightarrow X_j$ для каждого $p = 1, 2, \dots, m_j$;

(II) $\sigma_p^{(j)}: \partial C_p^{(j)} \rightarrow X_{j-1}$;

(III) $\sigma_p^{(j)}$ гомеоморфно отображает внутренность $\overset{\circ}{C}_p^{(j)}$ куба $C_p^{(j)}$ на ее образ;

(IV) $\bigcup_{p=1}^{m_j} \sigma_p^{(j)}(\overset{\circ}{C}_p^{(j)}) = X_j - X_{j-1}$.

Множество X_j называется тогда *j -остовом клеточного комплекса*, отображение $\sigma_p^{(j)}$ — *сингулярной j -клеткой клеточного комплекса* (или *отображением приклеивания клеток*), а множество $\sigma_p^{(j)}(\overset{\circ}{C}_p^{(j)})$ — *открытой j -клеткой клеточного комплекса*.

Введение этих понятий обусловлено тем, что они облегчают вычисление групп гомологий различных пространств. Приведем без доказательства две важные леммы. (Доказательство можно найти в книге Кука и Финрея [1].)

Лемма 11. а) *Любой сингулярный j -цикл пары (X, A) гомологичен линейной комбинации клеток $\sigma_p^{(j)}$.*

б) *Группу гомологий пары (X, A) можно вычислить следующим образом. Возьмем класс a на $(j-1)$ -мерной сфере $\partial C_p^{(j)}$, порождающий $(j-1)$ -мерную группу гомологий с целочисленными коэффициентами. Так как отображение из $\partial C_p^{(j)}$ в X_{j-1} , задаваемое клеткой $\sigma_p^{(j)}$, индуцирует гомоморфизм $\sigma_p^{(j)}$ из $H(\partial C_p^{(j)})$*

в $H(X_{j-1}, A)$, то $\sigma_{p_*}^{(j)}(a) \in H_{j-1}(X_{j-1}, A)$. Согласно утверждению (а), любой сингулярный $(j-1)$ -цикл пары (X_{j-1}, A) можно представить в виде линейной комбинации некоторых $(j-1)$ -клеток клеточного комплекса:

$$\sigma_{p_*}^{(j)}(a) = \left\{ \sum n_q \sigma_q^{(j-1)} \right\},$$

где $\{\beta\}$ — класс гомологий цепи β .

Введем теперь формальный граничный оператор $\tilde{\partial}$, положив $\tilde{\partial}\sigma_p^{(j)} = \sum n_q \sigma_q^{(j-1)}$. Лемма утверждает, что $\tilde{\partial}\tilde{\partial} = 0$. Следовательно, можно обычным образом определить формальные циклы и формальные границы и показать, что группа формальных j -границ содержится в группе формальных j -циклов. Переходя к факторгруппе, получаем формальную j -мерную группу гомологий. Лемма утверждает, что эти формальные группы гомологий изоморфны настоящим группам сингулярных гомологий.

Пусть $(X, A), (Y, B)$ — два клеточных комплекса, т. е.

$$\begin{aligned} X &= X_n \supseteq X_{n-1} \supseteq \dots \supseteq X_0 = A, \\ Y &= Y_n \supseteq Y_{n-1} \supseteq \dots \supseteq Y_0 = B, \end{aligned}$$

и пусть $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ — отображение пар, т. е. $f(X) \subseteq Y$, $f(A) \subseteq B$. Отображение f называется клеточным, если $f(X_j) \subseteq Y_j$ и f гомеоморфно отображает каждую открытую клетку из $X_j - X_{j-1}$ на некоторую открытую клетку из $Y_j - Y_{j-1}$ (напомним, что $X_j - X_{j-1}$ представляет собой конечное объединение открытых j -клеток).

Ориентация открытых клеток e клеточного комплекса определяется выбором для каждой клетки гомеоморфизма h на открытый единичный шар B_j . Говорят, что два гомеоморфизма $h_1: e \rightarrow B_j$, $h_2: e \rightarrow B_j$ задают одну и ту же ориентацию, если отображение $h_1 h_2^{-1}: B_j \rightarrow B_j$ сохраняет ориентацию. В противном случае говорят, что они задают противоположную ориентацию на e .

Лемма 12. Пусть $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ — клеточное отображение. Введем формальное отображение \tilde{f} на открытых ориентированных клетках e из (X, A) следующим образом. Ориентация на e задана гомеоморфизмом $h: e \rightarrow B_j$, а на $f(e)$ — гомеоморфизмом $g: f(e) \rightarrow B_j$ (напомним, что $f(e)$ — открытая j -клетка). Если h и gf задают одну и ту же ориентацию клетки e , положим $\tilde{f}(e) = +f(e)$, в противном случае пусть $\tilde{f}(e) = -f(e)$. По линейности можно определить формальное отображение на формальных линейных комбинациях открытых ориентированных клеток. Лемма утверждает, что отображение \tilde{f} перестановочно с $\tilde{\partial}$.

Отсюда следует, что \tilde{f} индуцирует отображение \tilde{f}_* групп формальных гомологий. Кроме того, это отображение \tilde{f}_* выполняет роль отображения f_* групп сингулярных гомологий.

Продемонстрируем теперь вычисление некоторых групп гомологий.

Пример 1. $X = S^n$ (n -мерная сфера). В лемме 11 мы уже пользовались тем, что группа $H_n(S^n)$ изоморфна группе коэффициентов. Покажем, что для $0 < k < n$ группа $H_k(S^n)$ тривиальна.

В качестве фильтрации $X_n \supseteq X_{n-1} \supseteq \dots \supseteq X_0$ возьмем $X_n = S^n$, $X_{n-1} = \dots = X_0 = \{p\}$ (одна точка), а в качестве n -клетки возьмем отображение $\sigma^n: C^{(n)} \rightarrow S^n$, тождественное на $\overset{\circ}{C}{}^{(n)}$ и переводящее $\partial C^{(n)}$ в точку p . Для $0 < k < n$ мы не выделяем ни одной k -клетки. В качестве (единственной) 0-клетки берем отображение $\sigma^{(0)}: C^{(0)} \rightarrow p$. Легко проверить, что мы получили клеточный комплекс и все операторы $\tilde{\partial}$ тривиальны. Осталось применить леммы 11 и 12.

Пример 2. $X = P_n^{\mathbb{C}}$ (комплексное проективное n -мерное пространство). В качестве фильтрации возьмем $P_n^{\mathbb{C}} \supseteq P_{n-1}^{\mathbb{C}} \supseteq \dots \supseteq P_0^{\mathbb{C}}$. Пусть $E_n^{\mathbb{C}}$ — комплексное евклидово пространство. Компактифицируем его точками ω^* в ∞ , соответствующими всем единичным векторам ω , а именно $z(n) \rightarrow \omega^*$, если $z(n)/|z(n)| \rightarrow \omega$.

Легко видеть, что так компактифицированное пространство E_n^\circlearrowleft гомеоморфно вещественному $2n$ -мерному шару. В качестве $2n$ -клетки возьмем отображение отождествления $\sigma^{(2n)}: B^{2n} \rightarrow P_n^\circlearrowleft$. Очевидно, что оно непрерывно. На внутренности шара B^{2n} (т. е. E_n^\circlearrowleft) оно совпадает с тождественным отображением, и, следовательно, $\sigma^{(2n)}|_{E_n^\circlearrowleft}$ — гомеоморфизм на $P_n^\circlearrowleft - P_{n-1}^\circlearrowleft$.

Определяя аналогично клетки $\sigma^{(2n-2)}, \dots, \sigma^{(0)}$ и не вводя клеток нечетных размерностей, приходим к клеточному разбиению пространства P_n^\circlearrowleft . Снова все границы ∂ тривиальны, поскольку нет клеток нечетной размерности. Тем самым

$$H_j(P_n^\circlearrowleft) = \mathbb{Z}, \quad j = 0, 2, \dots, 2n;$$

$$H_j(P_n^\circlearrowleft) = 0, \quad j = 1, 3, \dots, 2n-1.$$

Пример 3. $X = P_n$ (вещественное проективное n -мерное пространство). В качестве фильтрации возьмем $P_n \supseteq P_{n-1} \supseteq \dots \supseteq P_0$. Для каждого j , $0 \leq j \leq n$, получаем одну j -клетку $\sigma^{(j)}: C^{(j)} \rightarrow P_j$, где $C^{(j)}$ есть j -куб, а $\sigma^{(j)}$ — отображение отождествления. Такая фильтрация дает клеточный комплекс.

Зададим клеточное отображение из (S^n, S^0) в (P_n, P_0) следующим образом. Выберем клеточное разбиение сферы S^n (отличное от рассмотренного в примере 1): $S^n \supseteq S^{n-1} \supseteq \dots \supseteq S^0$, где S^{j-1} — экватор сферы S^j , $j = 1, 2, \dots, n$. Определим для каждой размерности j две j -клетки $\sigma_1^{(j)}, \sigma_2^{(j)}$. В качестве $C_1^{(j)}$ возьмем замкнутую верхнюю полусферу U_j сферы S^j , т. е. ту ее часть, где $x_{j+1} \geq 0$, а в качестве $C_2^{(j)}$ — замкнутую нижнюю полусферу L_j , для которой $x_{j+1} \leq 0$ ¹⁾. Точнее говоря, $\sigma_1^{(j)}$ и $\sigma_2^{(j)}$ представляют

¹⁾ Считается само собой разумеющимся, что рассматривается стандартная сфера S^n , заданная в пространстве E^{n+1} уравнением $\sum_{i=1}^{j+1} x_i^2 = 1$, а сфера S^j — уравнениями $\sum_{i=1}^{j+1} x_i^2 = 1$ и $x_{j+2} = x_{j+3} = \dots = x_{n+1} = 0$. — Прим. перев.

собой естественные гомеоморфизмы стандартных j -кубов $C_1^{(j)}, C_2^{(j)}$ соответственно на полусферах U_j, L_j . Очевидно, что $\sigma_1^{(j)}(\partial C_1^{(j)}) \cong S^{j-1}$ (ибо S^{j-1} — экватор сферы S^j) и аналогично $\sigma_2^{(j)}(\partial C_2^{(j)}) \cong S^{j-1}$. Наконец, $S^j - S^{j-1} = \sigma_1^{(j)}(\overset{\circ}{C}_1^{(j)}) \cup \sigma_2^{(j)}(\overset{\circ}{C}_2^{(j)})$, и все условия для клеточного комплекса выполнены.

Теперь мы определим само клеточное отображение f . Пусть $f: S^j \rightarrow P_j$ — отображение отождествления, т. е. мы считаем P_j сферой S^j с отождествленными точками x и $-x$. Из нашего построения ясно, что это отображение клеточное.

Выясним характер отображения \tilde{f} . Открытые j -клетки сферы S^n представляют собой открытые полусфера $\overset{\circ}{U}_j$ и $\overset{\circ}{L}_j$. Кроме того, открытую j -клетку пространства P_n можно рассматривать как $\overset{\circ}{U}_j$. Тем самым $\tilde{f}(\overset{\circ}{U}_j) = \overset{\circ}{U}_j$. Но сужение отображения f на $\overset{\circ}{L}_j$ переводит x в $-x$ и сохраняет (меняет) ориентацию, если $j+1$ четно (нечетно), т. е. $\tilde{f}(\overset{\circ}{L}_j) = (-1)^{j+1} \overset{\circ}{U}_j$. По лемме 11 $\partial \sigma^{(j)} = k_j \sigma^{(j-1)}$ для некоторого целого числа k_j , и в силу леммы 12

$$k_j = \begin{cases} 2, & \text{если } j \text{ четно,} \\ 0, & \text{если } j \text{ нечетно,} \end{cases}$$

поскольку основной цикл на S^j равен $U_j + L_j$, а его образ равен либо $2U_j$, либо 0. Теперь легко вычислить гомологию пространства P_n . Мы получаем следующий результат.

Если n четно, то

$$H_0(P_n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z},$$

$$H_1(P_n, \mathbb{Z}) \cong H_3(P_n, \mathbb{Z}) \cong \dots \cong H_{n-1}(P_n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2;$$

$$H_2(P_n, \mathbb{Z}) \cong H_4(P_n, \mathbb{Z}) \cong \dots \cong H_n(P_n, \mathbb{Z}) \cong \{0\}.$$

Если n нечетно, то

$$H_0(P_n, \mathbb{Z}) \cong H_n(P_n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z},$$

$$H_1(P_n, \mathbb{Z}) \cong H_3(P_n, \mathbb{Z}) \cong \dots \cong H_{n-2}(P_n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2,$$

$$H_2(P_n, \mathbb{Z}) \cong H_4(P_n, \mathbb{Z}) \cong \dots \cong H_{n-1}(P_n, \mathbb{Z}) \cong \{0\}.$$

Кольцо когомологий пространства $P_n \pmod{\mathbb{Z}_2}$

Займемся вычислением кольца когомологий $(\text{mod } \mathbb{Z}_2)$ вещественного проективного пространства P_n . Как было показано выше, группа $H_j(P_n, \mathbb{Z}_2)$ образована одним элементом, скажем α_j . Мы утверждаем, что $\alpha_j \cdot \alpha_{n-j} = 1$.

В самом деле, элемент α_j представлен отображением $\sigma^{(j)}$, переводящим $C^{(j)}$ на P_j , а элемент α_{n-j} — отображением $\sigma^{(n-j)}$, переводящим $C^{(n-j)}$ на P_{n-j} . Так как $\sigma^{(j)}$ и $\sigma^{(n-j)}$ невырождены на $\overset{\circ}{C}{}^{(j)}$ и $\overset{\circ}{C}{}^{(n-j)}$, то $\alpha_j \cdot \alpha_{n-j}$ равно индексу пересечения P_j с P_{n-j} , если они находятся в общем положении в P_n . Но $P_j \cap P_{n-j}$ состоит только из одной точки, и утверждение доказано.

Согласно теореме Кюннета, $H_j(P_n \times P_n, \mathbb{Z}_2)$ имеет в качестве образующих $\alpha_0 \times \alpha_j, \dots, \alpha_j \times \alpha_0$. По правилу пересечения получаем $(\alpha_0 \times \alpha_j) \cdot (\alpha_n \times \alpha_{n-j}) = 1$, $(\alpha_1 \times \alpha_{j-1}) \cdot (\alpha_{n-1} \times \alpha_{n-j+1}) = 1, \dots, (\alpha_j \times \alpha_0) \cdot (\alpha_{n-j} \times \alpha_n) = 1$. Все остальные пересечения пусты.

Рассмотрим диагональное отображение $P_n \rightarrow P_n \times P_n$ и найдем образ элемента α_j . Покажем, что

$$\text{diag}_*(\alpha_j) = (\alpha_0 \times \alpha_j) + (\alpha_1 \times \alpha_{j-1}) + \dots + (\alpha_j \times \alpha_0).$$

Прежде всего, $\text{diag}_*(\alpha_j) = C_0(\alpha_0 \times \alpha_j) + \dots + C_j(\alpha_j \times \alpha_0)$. Далее, $\text{diag}_*(\alpha_j) \cdot (\alpha_l \times \alpha_m) = 1$, если $j+l+m = 2n$. В самом деле, $\text{diag}_*(\alpha_j) \cdot (\alpha_l \times \alpha_m)$ — это число точек в пересечении $P_j \cap P_l \cap P_m$, где P_j, P_l, P_m находятся в $P_n \times P_n$ в общем положении. Но это пересечение равно $P_{j+l-n} \cap P_m = P_{j+l+m-2n} = P_0$, т. е. состоит из одной точки. Дальше доказательство очевидно.

Пусть $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$ — двойственный базис для групп когомологий пространства $P_n \pmod{\mathbb{Z}_2}$, т. е. β_j — линейный функционал, определенный равенством $\beta_j(\alpha_i) = \delta_{ji}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда $\beta_j \cup \beta_k = \beta_{j+k}$. В самом деле,

$$\begin{aligned} \beta_j \cup \beta_k(\alpha_{j+k}) &= \\ &= \text{diag}^*(\beta_j \otimes \beta_k)(\alpha_{j+k}) = \beta_j \otimes \beta_k(\text{diag}_*(\alpha_{j+k})) = \\ &= \beta_j \otimes \beta_k(\alpha_0 \times \alpha_{j+k} + \dots + \alpha_j \times \alpha_k + \dots + \alpha_{j+k} \times \alpha_0) = 1. \end{aligned}$$

Аналогично $\beta_j \cup \beta_k (\alpha_l) = 0$, если $l \neq j + k$, и утверждение доказано.

В результате получаем, что кольцо когомологий пространства $P_n(\text{mod } \mathbb{Z}_2)$ изоморфно кольцу $\mathbb{Z}_2[x]/(x^{n+1})$.

Упражнение. Вычислить кольцо целочисленных когомологий пространства $P_n^{\mathbb{C}}$ (см. стр. 72. — Перев.). Используя полученный результат и теорему Лефшеца о неподвижной точке, доказать, что пространство $P_{2k}^{\mathbb{C}}$ обладает свойством неподвижной точки, т. е. всякое непрерывное отображение его на себя имеет неподвижную точку.

Г л а в а III

ДРУГИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ

Эта глава разбита на две части. Первая посвящена вычислению групп гомологий и кольца когомологий многообразия Грассмана. Насколько важно знать гомологическую и когомологическую структуру этого многообразия, станет ясно позже, когда будет выявлена его роль в теории стинродовских расслоений (гл. IV, VI). Метод вычисления полностью аналогичен методу, использованному в гл. II при вычислении гомологической и когомологической структуры проективных пространств; результаты гл. II будут использованы в настоящей главе. С другой стороны, в частных случаях многообразие Грассмана представляет собой проективное пространство, а потому результаты этой главы можно рассматривать как обобщение результатов предыдущей.

Во второй части этой главы мы докажем классическую теорему двойственности Пуанкаре, но не самыми классическими методами. Вместо того чтобы использовать громоздкие методы комбинаторной топологии (см., например, Александров [1]), мы обратимся за помощью к теории Морса. Это подсказываетя самой последовательностью изложения, намеченной в гл. I и II, а именно подходом к топологическим вопросам (насколько это возможно) дифференциальными методами. Теорема двойственности Пуанкаре сама по себе больше не будет использоваться в этой книге.

A. Гомологии многообразий Грассмана

Обозначим через $G_{k, n}$ множество k -мерных линейных подпространств (k -плоскостей, проходящих через начало координат) пространства E^n . Это множество

называется *многообразием Грассмана* k -мерных плоскостей n -мерного евклидова пространства. Когда мы будем говорить о вещественных (комплексных) k -плоскостях в вещественном (комплексном) евклидовом n -мерном пространстве, мы будем иногда для ясности писать $G_{k,n}^{\mathbb{R}}$ ($G_{k,n}^{\mathbb{C}}$).

Легко видеть, что ортогональная группа $O(n)$ (группа линейных ортогональных преобразований n -мерного евклидова пространства) действует транзитивно на $G_{k,n}^{\mathbb{R}}$. Кроме того, если π — фиксированная k -плоскость, а π^\perp — ее ортогональное дополнение, то подгруппа группы $O(n)$, переводящая k -плоскость π на себя, расщепляется в прямое произведение $O(k) \times O(n-k)$, первый сомножитель которого оставляет неподвижной плоскость π^\perp , а второй — плоскость π . Следовательно, можно отождествить $G_{k,n}^{\mathbb{R}}$ с (аналитическим) многообразием $O(n)/(O(k) \times O(n-k))$, и тогда $G_{k,n}^{\mathbb{R}}$ будет компактным многообразием размерности $k(n-k)$. Аналогично можно отождествить $G_{k,n}^{\mathbb{C}}$ с $U(n)/(U(k) \times U(n-k))$, где $U(n)$ — унитарная группа, и тогда $G_{k,n}^{\mathbb{C}}$ будет компактным многообразием комплексной размерности $k(n-k)$ и, следовательно, вещественной размерности $2k(n-k)$.

Сопоставляя каждой k -плоскости ее ортогональное дополнение, мы получаем взаимно однозначное соответствие между $G_{k,n}$ и $G_{n-k,n}$. Очевидно, что $G_{1,n} = P_{n-1}$ — обычное проективное пространство.

Возьмем в E^n возрастающую последовательность $E^0 \subseteq E^1 \subseteq \dots \subseteq E^n$, где E^j — подпространство размерности j пространства E^n . Для данной плоскости $\pi \in G_{k,n}$ зададим числа

$$m_j(\pi) = \inf_m \{m \mid \dim(\pi \cap E^m) \geq j\}, \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

и будем писать πE^m вместо $\pi \cap E^m$. Заметим, что

$$m_1(\pi) < m_2(\pi) < \dots < m_k(\pi),$$

и положим

$$\begin{aligned} C_{m_1, \dots, m_k}(E^0, E^1, \dots, E^n) &= \\ &= \{\pi \in G_{k,n} \mid m_j(\pi) = m_j \ (j = 1, 2, \dots, k)\}. \end{aligned}$$

Для краткости будем писать C_{m_1, \dots, m_k} вместо $C_{m_1, \dots, m_k}(E^0, E^1, \dots, E^n)$ и называть это множество *клеткой Шуберта*, соответствующей мультииндексу (m_1, m_2, \dots, m_k) .

Лемма 1. Клетки Шуберта являются топологическими клетками. Семейство всех клеток Шуберта дает клеточное разбиение множества $G_{k,n}$.

Доказательство. В качестве базиса для E^n возьмем векторы

$$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где 1 в e_i стоит на i -м месте. Можно считать, что E^k порождается векторами e_1, e_2, \dots, e_k . Пусть $\pi \in G_{m_1, \dots, m_k}$. Тогда πE^{m_1} одномерно, ибо $\pi E^{m_1-1} = \{0\}$, и πE^{m_1} порождается вектором $x = (x_1, \dots, x_{m_1}, 0, \dots, 0)$, где $x_{m_1} \neq 0$. В самом деле, если $x_{m_1} = 0$, то $\dim(\pi E^{m_1-1}) \geq 1$, что невозможно. Будем считать, что $x_{m_1} = 1$.

Так как πE^{m_2} двумерно, а $\dim(\pi E^{m_2-1}) < 2$, то πE^{m_2} порождается вектором x и вектором

$$\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{m_1}, \eta_{m_1+1}, \dots, \eta_{m_2}, 0, \dots, 0).$$

Но так как линейное преобразование $x \rightarrow x$, $\eta \rightarrow \eta - \eta_{m_1}x$ обратимо, то векторы x и $y = \eta - \eta_{m_1}x$ также порождают πE^{m_2} . Вектор y имеет вид

$$y = (y_1, \dots, y_{m_1-1}, 0, y_{m_1+1}, \dots, y_{m_2}, 0, \dots, 0).$$

Как и раньше, $y_{m_1} \neq 0$. Будем считать, что $y_{m_2} = 1$. Продолжая этот процесс нахождения базиса для $\pi E^{m_2}, \dots, \pi E^{m_k}$, приходим к $(k \times n)$ -матрице

Первые j строк представляют собой векторы, порождающие πE^j ($j = 1, 2, \dots, k$). Элементами этой матрицы будут вещественные (если мы рассматриваем множество $G_{k,n}^R$) или комплексные (если мы рассматриваем $G_{k,n}^C$) числа, которые могут принимать любые значения. Тем самым на C_{m_1, \dots, m_k} определены координаты, а потому C_{m_1, \dots, m_k} — открытая клетка (хотя не обязательно открытое подмножество в $G_{k,n}$) размерности

$$(m_1 - 1) + (m_2 - 2) + \dots + (m_k - k) = \\ = (m_1 + \dots + m_k) - \frac{k(k+1)}{2}.$$

Ясно, что существует только одна клетка Шуберта нулевой размерности, а именно $C_{1,2,\dots,k}$, и только одна клетка Шуберта размерности $k(n-k)$, а именно $C_{n-k+1,\dots,n}$.

Покажем, что клетки Шуберта дают клеточное разбиение пространства $G_{k,n}$. Пусть D^α — замкнутый α -мерный единичный шар, B^α — его внутренность. Для краткости будем писать $D_i = D^{m_i-1}$. Пусть $D = D_1 \times D_2 \times \dots \times D_k$, а B — его внутренность. Ясно, что D гомеоморфно замкнутому шару размерности $(m_1 + \dots + m_k) - k(k+1)/2$. Нам нужно определить непрерывное отображение $\varphi: D \rightarrow G_{k,n}$, для которого

1) $\varphi(D) = C_{m_1, \dots, m_k} \cup$ клетки Шуберта меньшей размерности,

2) φ отображает B гомеоморфно на C_{m_1, \dots, m_k} ,

3) φ отображает $\partial D = D - B$ в объединение клеток Шуберта меньшей размерности.

Рассмотрим множество всех единичных векторов $u \in E^{m_1}$, у которых m_1 -я компонента $(u)_{m_1}$ неотрицательна; это множество гомеоморфно $D_1 = D^{m_1-1}$. Обозначим через $R_u^{(1)}$ вращение пространства E^n , непрерывно зависящее от u и такое, что

a) $R_u^{(1)} e_{m_1} = u$, b) $R_u^{(1)}|_{E^n \ominus E^{m_1}}$ — тождественное отображение.

Затем рассмотрим множество всех единичных векторов $v \in E^{m_2} \ominus \{e_{m_1}\}$ с $(v)_{m_1} \geq 0$; это множество

гомеоморфно $D_2 = D^{m_2-2}$. Обозначим через $R_v^{(2)}$ вращение пространства E^n , непрерывно зависящее от v и такое, что

$$\text{a) } R_v^{(2)} e_{m_2} = v, \quad \text{б) } R_v^{(2)}|_{E^n \ominus [E^{m_2} \ominus \{e_{m_2}\}]} — \text{тождественное отображение.}$$

Рассмотрим теперь множество всех единичных векторов $w \in E^{m_3} \ominus \{e_{m_1}, e_{m_2}\}$ с $(w)_{m_3} \geq 0$; это множество гомеоморфно $D_3 = D^{m_3-3}$. Обозначим через $R_w^{(3)}$ вращение пространства E^n , непрерывно зависящее от w и такое, что

$$\text{a) } R_w^{(3)} e_{m_3} = w, \quad \text{б) } R_w^{(3)}|_{E^n \ominus [E^{m_3} \ominus \{e_{m_1}, e_{m_2}\}]} — \text{тождественное отображение}$$

Повторим этот процесс k раз и зададим отображение φ формулой

$$\varphi((u, v, w, \dots)) = \{u, R_u^{(1)}v, R_u^{(1)}R_v^{(2)}w, \dots\} = \pi.$$

Тогда π будет плоскостью, натянутой на вектор $u, R_u^{(1)}v, R_u^{(1)}R_v^{(2)}w, \dots$. Размерность ее равна k , поскольку эти векторы взаимно ортогональны. Покажем, например, что $(u, R_u^{(1)}v) = 0$:

$$(u, R_u^{(1)}v) = (R_u^{(1)}e_{m_1}, R_u^{(1)}v) = (e_{m_1}, v) = 0.$$

(Здесь мы пользовались унитарностью отображения $R_u^{(1)}$.)

Очевидно, что φ непрерывно. Проверим условие 1). По построению $\dim(\pi E^{m_i}) \geq i$ для $i = 1, 2, \dots$. Тогда по определению $m_i(\varphi(d)) \leq m_i$ для $d \in \pi E^{m_i}$ для $i = 1, 2, \dots, k$. А это означает, что

$$\varphi(d) \in \bigcup_{(l_1, \dots, l_k)} C_{l_1, \dots, l_k},$$

причем суммирование производится по всем мультииндексам (l_1, \dots, l_k) , у которых $l_1 \leq m_1, l_2 \leq m_2, \dots, l_k \leq m_k$. Условие 1) доказано.

Чтобы проверить условие 2), построим взаимно однозначное непрерывное отображение

$$\psi: C_{m_1, \dots, m_k} \rightarrow B,$$

обратное к отображению $\varphi|_B$.

Возьмем π на C_{m_1, \dots, m_k} . Так как $\dim(\pi E^{m_1}) = 1$, то найдется только один единичный вектор $u \in \pi E^{m_1}$ с $(u)_{m_i} > 0$, порождающий πE^{m_1} . Так как $\dim(\pi E^{m_2}) = 2$, то πE^{m_2} порождено вектором u и единичным вектором $v \in \{(R_u^{(1)})^{-1}\pi\} \cap \{E^{m_2} \ominus \{e_{m_1}\}\}$. Если потребовать, чтобы $(v)_{m_2} > 0$, то v будет однозначно определяться плоскостью π . Продолжим этот процесс и положим

$$\psi(\pi) = (u, v, \dots).$$

Легко видеть, что отображение ψ обладает нужным свойством.

Проверка условия 3) не представляет затруднений. Итак, лемма 1 доказана.

Вычислим теперь гомологию многообразия $G_{k,n}$. В комплексном случае (т. е. в $G_{k,n}^{\mathbb{C}}$) будут только четномерные клетки, следовательно, граничный оператор действует тривиально.

В случае вещественного переменного обозначим через $(\partial D)_i$ ту часть границы ∂D , которая посредством φ отображается в объединение клеток Шуберта, причем размерность каждой из этих клеток ровно на единицу меньше размерности клетки C_{m_1, \dots, m_k} . Легко видеть, что такие клетки имеют вид $C_{m_1, \dots, m_{s-1}, m_s-1, m_{s+1}, \dots, m_k}$, где $m_s - 1 > m_{s-1}$.

Если $d \in (\partial D)_i$ и $d = (u, v, w, \dots)$, то на границе соответствующих полусфер D_1, D_2, D_3, \dots может лежать не более одного из единичных векторов u, v, w, \dots . В самом деле, пусть, например, u лежит на границе полусфера D_1 , а v лежит на границе полусфера D_2 . Тогда $\dim(\pi E^{m_1-1}) \geq 1$, $\dim(\pi E^{m_2-1}) \geq 2$ и, следовательно, $m_1(\pi) \leq m_1 - 1$, $m_2(\pi) \leq m_2 - 1$, что противоречит сказанному выше. Отсюда сразу следует, что на $(\partial D)_i$ отображение φ двулистное, т. е. прообраз каждой точки содержит ровно две точки.

Пусть теперь $C = C_{m_1, \dots, m_k}$. Тогда $\partial C = \sum n_i C^i$, где размерность клеток C^i на единицу меньше, чем клетки C , а n_i — целые числа (или вычеты по модулю 2,

если речь идет о гомологиях по модулю 2), определенные следующим образом (см. гл. II): если C^i не содержится в $\varphi(\partial D)$, то $n_i = 0$; если же $C^i \subseteq \varphi(\partial D)$, то n_i — степень отображения $\varphi: \varphi^{-1}(C^i) \rightarrow C^i$. Тем самым n_i — алгебраическая сумма точек в ∂D , отображаемых в одну точку клетки C^i . Так как φ — двулистное отображение на $(\partial D)_l$, то $\tilde{\partial}C = 0 \pmod{2}$.

Тем самым доказана

Теорема 1. Группа $H_l(G_{k,n}^{\mathbb{C}}, \mathbb{Z})$ изоморфна прямой сумме N_l экземпляров группы \mathbb{Z} , а группа $H_l(G_{k,n}^{\mathbb{R}}, \mathbb{Z}_2)$ изоморфна прямой сумме N_l экземпляров группы \mathbb{Z}_2 , где N_l — число клеток Шуберта размерности l .

Следствие. В силу двойственности $H^l(G_{k,n}^{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}) \cong H_l(G_{k,n}^{\mathbb{C}}, \mathbb{Z})$ и $H^l(G_{k,n}^{\mathbb{R}}, \mathbb{Z}_2) \cong H_l(G_{k,n}^{\mathbb{R}}, \mathbb{Z}_2)$.

Таким образом, теорема 1 позволяет вычислить также группы когомологий многообразия $G_{k,n}$.

Займемся теперь теорией пересечений на $G_{k,n}$. Обозначим через E_{\perp}^{β} ортогональное дополнение к E^{β} в пространстве E^n ($\beta \leq n$). Пусть $\pi \in G_{k,n}$ удовлетворяет условиям

$$\begin{array}{ll} \dim(\pi E^{m_1}) \geq 1, & \dim(\pi E_{\perp}^{m_1-1}) \geq k, \\ \dim(\pi E^{m_2}) \geq 2, & \dim(\pi E_{\perp}^{m_2-1}) \geq k-1, \\ \dots & \dots \\ \dim(\pi E^{m_k}) \geq k, & \dim(\pi E_{\perp}^{m_k-1}) \geq 1. \end{array} \quad (*)$$

Первая строка условий (*) означает, что π содержит единственный (с точностью до скалярного множителя) вектор e_{m_1} из $E^{m_1} \cap E_{\perp}^{m_1-1}$; вторая — что π содержит единственный (с точностью до скалярного множителя) вектор e_{m_2} из $E^{m_2} \cap E_{\perp}^{m_2-1}$. Вообще, j -я строка означает, что π содержит единственный (с точностью до скалярного множителя) вектор e_{m_j} из $E^{m_j} \cap E_{\perp}^{m_j-1}$. Следовательно, $\pi = \{e_{m_1}, e_{m_2}, \dots, e_{m_k}\}$, и это единственная плоскость, удовлетворяющая усло-

виям (*). Легко видеть, что в силу этих условий $\pi \in C_{m_1, \dots, m_k}$. Далее, так как

$$E^0 \subseteq E^1 \subseteq \dots \subseteq E^n,$$

то

$$E_\perp^0 \supseteq E_\perp^1 \supseteq \dots \supseteq E_\perp^n.$$

Обозначим $F^j = E_\perp^{n-j}$ ($j = 0, 1, \dots, n$); тогда

$$F^0 \subseteq F^1 \subseteq \dots \subseteq F^n.$$

Положим

$$\hat{m}_j(\pi) = \inf_m \{m \mid \dim(\pi F^m) \geq j\}$$

и

$$C_{m_1, \dots, m_k}^\perp = \{\pi \in G_{k,n} \mid \hat{m}_j(\pi) = m_j\}.$$

Заметим, что $C_{m_1, \dots, m_k}^\perp = C_{m_1, \dots, m_k}(F^0, F^1, \dots, F^n)$.

Из условий (*) вытекает, что $\pi \in C_{n-m_k+1, \dots, n-m_1+1}^\perp$, а непосредственные вычисления дают

$$\dim C_{m_1, \dots, m_k} + \dim C_{n-m_k+1, \dots, n-m_1+1}^\perp = \dim G_{k,n}.$$

Можно показать, что клетки C_{m_1, \dots, m_k} и $C_{n-m_k+1, \dots, n-m_1+1}^\perp$ находятся в общем положении в $G_{k,n}$. Отсюда

$$C_{m_1, \dots, m_k} \cdot C_{n-m_k+1, \dots, n-m_1+1}^\perp = 1.$$

Покажем теперь, что множество плоскостей $\pi \in G_{k,n}$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{array}{ll} \dim(\pi E^{m_1}) \geq 1, & \dim(\pi E_\perp^{l_1-1}) \geq k, \\ \dim(\pi E^{m_2}) \geq 2, & \dim(\pi E_\perp^{l_2-1}) \geq k-1, \\ \dots & \dots \\ \dim(\pi E^{m_k}) \geq k, & \dim(\pi E_\perp^{l_k-1}) \geq 1 \end{array} \quad (**)$$

и дополнительному условию $\sum_{i=1}^k l_i = \sum_{i=1}^k m_i$, непусто только тогда, когда $l_j = m_j$ ($j = 1, \dots, k$).

Пусть, например, $l_1 > m_1$. Тогда $E^{m_1} \cap E_{\perp}^{l_1-1} = \{0\}$ и первая строчка условий (***) нарушена. Тем самым $l_1 \leq m_1$ и аналогично $l_2 \leq m_2, \dots, l_k \leq m_k$. Так как $\sum_{i=1}^k l_i = \sum_{i=1}^k m_i$, то $l_j = m_j$ ($j = 1, \dots, k$).

Таким образом, если целые числа l_1, l_2, \dots, l_k строго возрастают и $l_{j_0} \neq m_{j_0}$ для некоторого $j_0 \in \{1, 2, \dots, k\}$, а $\sum_{i=1}^k l_i = \sum_{i=1}^k m_i$, то

$$C_{m_1, \dots, m_k} \cdot C_{n-l_k+1, \dots, n-l_1+1}^\perp = 0.$$

Мы уже обращали внимание на то, что клетки Шуберта зависят от последовательности $E^0 \subseteq E^1 \subseteq \dots \subseteq E^n$. Пусть даны две такие последовательности

$$E^0 \subseteq E^1 \subseteq \dots \subseteq E^n \quad \text{и} \quad \tilde{E}^0 \subseteq \tilde{E}^1 \subseteq \dots \subseteq \tilde{E}^n,$$

что $E^0 = \tilde{E}^0$, $E^n = \tilde{E}^n$ и E^i, \tilde{E}^i — евклидовы i -мерные пространства, вложенные в n -мерное евклидово пространство, и пусть

$$C_{m_1, \dots, m_k} = C_{m_1, \dots, m_k}(E^0, \dots, E^n),$$

$$\tilde{C}_{m_1, \dots, m_k} = C_{m_1, \dots, m_k}(\tilde{E}^0, \dots, \tilde{E}^n).$$

Тогда справедлива

Лемма 2. C_{m_1, \dots, m_k} и $\tilde{C}_{m_1, \dots, m_k}$ определяют один и тот же класс гомологий в $H(G_{k,n})$.

Доказательство. Последовательность $E^0 \subseteq \dots \subseteq E^n$ дает базис e_1, e_2, \dots, e_n , где $E^i = \{e_1, \dots, e_i\}$. Последовательность $\tilde{E}^0 \subseteq \tilde{E}^1 \subseteq \dots \subseteq \tilde{E}^n$ дает аналогичный базис $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_n$. Пусть $T: E^n \rightarrow \tilde{E}^n$ — линейное преобразование, заданное равенствами

$$Te_i = \tilde{e}_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Отображение T естественно индуцирует отображение

$$T': G_{k,n} \rightarrow G_{k,n},$$

которое в свою очередь индуцирует отображение

$$T_*: H(G_{k,n}) \rightarrow H(G_{k,n}).$$

Очевидно, что $T'(C_{m_1, \dots, m_k}) = \tilde{C}_{m_1, \dots, m_k}$.

Если мы рассматриваем многообразие $G_{k,n}^{\mathbb{C}}$, то T принадлежит группе $GL(n, \mathbb{C})$ всех обратимых линейных преобразований пространства \mathbb{C}^n , и поскольку она линейно связна, T можно соединить путем в $GL(n, \mathbb{C})$ с тождественной матрицей I . Этот путь индуцирует гомотопию между T' и тождественным отображением I' многообразия $G_{k,n}$. Следовательно, T_* — тождественное отображение многообразия $H(G_{k,n}^{\mathbb{C}})$, и для этого случая лемма доказана.

Если же мы рассматриваем многообразие $G_{k,n}^{\mathbb{R}}$, то $T \in GL(n, \mathbb{R})$, и тогда либо $\det T > 0$, либо $\det T < 0$. Если $\det T > 0$, то T можно соединить с I путем в $GL(n, \mathbb{R})$, поскольку T лежит в той связной компоненте группы $GL(n, \mathbb{R})$, которая содержит I . Отображение T_* здесь также будет тождественным. Если $\det T < 0$, то T можно соединить путем в $GL(n, \mathbb{R})$ с матрицей

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix},$$

поскольку \hat{I} лежит в той связной компоненте группы $GL(n, \mathbb{R})$, которая содержит I . Но отображение

$$\hat{I}' : G_{k,n} \rightarrow G_{k,n},$$

индуцированное отображением \hat{I} , будет тождественным отображением многообразия $G_{k,n}$, поскольку $G_{k,n}$ состоит из неориентированных k -плоскостей¹⁾.

¹⁾ Это утверждение неверно. Например, для $G_{2k,1}^{\mathbb{R}} = P_{2k-1}^{\mathbb{R}}$ отображение \hat{I} не только не тождественно, но и не гомотопно тождественному (так как умножает на -1 элементы из $H_{2k-1}(P_{2k-1}^{\mathbb{R}}, \mathbb{Z})$). Однако в гомологиях с коэффициентами из \mathbb{Z}_2 оно индуцирует тождественное отображение. — Прим. ред.

Следовательно, T_* снова будет тождественным отображением, и лемма доказана.

Так как $C_{m_1, \dots, m_k}^{\perp} = C_{m_1, \dots, m_k}(F^0, F^1, \dots, F^n)$, то верна

Теорема 2. Пусть $m_1 + m_2 + \dots + m_k = l_1 + l_2 + \dots + l_k$. Тогда

$$C_{m_1, \dots, m_k} \cdot C_{n-l_k+1, \dots, n-l_1+1} = \delta_{m_1 m_2 \dots m_k}^{l_1 l_2 \dots l_k},$$

где

$$\delta_{m_1 m_2 \dots m_k}^{l_1 l_2 \dots l_k} = \begin{cases} 1, & \text{если } l_i = m_i \ (i = 1, \dots, k), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Рассмотрим теперь кольцо когомологий многообразия $G_{k, n}$. Пусть $P_{n-1}^{(1)} \times \dots \times P_{n-1}^{(k)}$ — произведение k экземпляров проективного пространства P_{n-1} . Согласно результату гл. II (стр. 60),

$$H^*(P_{n-1}^{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[z]/(z^n)^1), \quad H^*(P_{n-1}^{\mathbb{R}}, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[x]/(x^n).$$

В силу теоремы Кюннета (стр. 51)

$$H^*(P_{n-1}^{\mathbb{C}} \times \dots \times P_{n-1}^{\mathbb{C}}) \cong \mathbb{Z}[z_1, \dots, z_k]/(z_1^n, \dots, z_k^n),$$

$$H^*(P_{n-1}^{\mathbb{R}} \times \dots \times P_{n-1}^{\mathbb{R}}) \cong \mathbb{Z}_2[x_1, \dots, x_k]/(x_1^n, \dots, x_k^n),$$

и классы гомологий произведения $P_{n-1}^{(1)} \times \dots \times P_{n-1}^{(k)}$ можно представить произведениями

$$P_{l_1}^{(1)} \times P_{l_2}^{(2)} \times \dots \times P_{l_k}^{(k)}, \quad l_i \leq n-1, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Определим теперь „естественное“ отображение

$$N: P_{n-1}^{(1)} \times \dots \times P_{n-1}^{(k)} \rightarrow G_{k, kn}.$$

Элемент из $P_{n-1}^{(i)}$ является классом эквивалентности n -вектора $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$. Этот класс задает одномерное подпространство евклидова пространства E_i^n ($i = 1, 2, \dots, k$).

¹⁾ В гл. II было показано, что $H^*(P_{n-1}^{\mathbb{R}}, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[x]/(x^n)$, а вычисление кольца $H^*(P_{n-1}^{\mathbb{C}}, \mathbb{Z})$ оставлено читателю в качестве простого упражнения в конце главы.— *Прим. перев.*

Пусть $E^{kn} = E_1^n \oplus \dots \oplus E_k^n$. Для $v_i \in P_{n-1}^{(i)}$ положим

$$N((v_1, v_2, \dots, v_k)) = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} = \pi,$$

т. е. π — плоскость в E^{kn} , порожденная векторами v_1, v_2, \dots, v_k .

Пусть $\{P_{a_1}^{(1)} \times \dots \times P_{a_k}^{(k)}\}$ обозначает класс гомологий произведения $P_{a_1}^{(1)} \times \dots \times P_{a_k}^{(k)}$ в $H(P_{n-1}^{(1)} \times \dots \times P_{n-1}^{(n)})$, а $\{C_{\beta_1, \dots, \beta_k}\}$ — класс гомологий клетки $C_{\beta_1, \dots, \beta_k}$ в $H(G_{k,n})$. Из теории пересечений следует, что

$$N_*\left(\{P_{l_1}^{(1)} \times \dots \times P_{l_k}^{(k)}\}\right) = \{C_{l_1+1, l_2+2, \dots, l_k+k}\} + \\ + \text{нижние классы той же размерности}$$

где $l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_k \leq n-1$, а N_* — отображение гомологий, индуцированное отображением N . Доказательство оставляем читателю.

Далее,

$$N_*\left(\{P_{l_1}^{(1)} \times \dots \times P_{l_k}^{(k)}\}\right) = \{C_{l'_1+1, l'_2+2, \dots, l'_k+k}\} + \\ + \text{нижние классы той же размерности}$$

где l_1, l_2, \dots, l_k — произвольная последовательность целых чисел, каждое из которых не больше $n-1$, а l'_1, l'_2, \dots, l'_k — та же последовательность, записанная в порядке возрастания ее членов. В самом деле, зададим отображение

$$\psi: P_{n-1}^{(1)} \times \dots \times P_{n-1}^{(k)} \rightarrow P_{n-1}^{(1)} \times \dots \times P_{n-1}^{(k)}$$

равенством $\psi((v_1, \dots, v_k)) = (v_{i_1}, \dots, v_{i_k})$, т. е. ψ будет перестановкой векторов v_1, \dots, v_k и

$$\psi(P_{l_1}^{(1)} \times \dots \times P_{l_k}^{(k)}) = P_{l_{i_1}}^{(1)} \times \dots \times P_{l_{i_k}}^{(k)}.$$

Выбирая ψ соответствующим образом, можно добиться того, чтобы $l_{i_1} \leq l_{i_2} \leq \dots \leq l_{i_k}$.

Заметим, что $N \circ \psi = T' \circ N$, где отображение $T': G_{k,n} \rightarrow G_{k,n}$ индуцировано соответствующим (невырожденным) линейным преобразованием пространства E^{kn} . Из доказательства леммы 2 получаем

$$N_* \circ \psi_* = N_*, \quad \psi^* \circ N^* = N^*,$$

где N^* , ψ^* — индуцированные отображения когомологий, а отсюда сразу следует наше утверждение.

Пусть теперь γ_{m_1, \dots, m_k} — класс когомологий, двойственный к $\{C_{m_1, \dots, m_k}\}$. В силу только что доказанного утверждения $N^*\gamma_{m_1, \dots, m_k}(\{P_{l_1}^{(1)} \times \dots \times P_{l_k}^{(k)}\})$ равно 1, если (l_1, l_2, \dots, l_k) — перестановка набора $(m_1 - 1, m_2 - 2, \dots, m_k - k)$, и 0, если $(l_1, \dots, l_k) < < (m_1 - 1, m_2 - 2, \dots, m_k - k)$ в лексикографическом порядке k -наборов.

Пусть $\delta_l^{(i)}$ — класс когомологий в $H^l(P_{n-1}^{(i)})$, двойственный к $\{P_l^{(i)}\}$ ($i = 1, \dots, k$). Согласно результатам гл. II $\delta_l^{(i)} = (\delta_1^{(i)})^l = \delta_1^{(i)} \cup \delta_1^{(i)} \cup \dots \cup \delta_1^{(i)}$ (l раз), откуда

$$N^*\gamma_{m_1, \dots, m_k} = \text{Symm} \left(\delta_{m_1-1}^{(1)} \otimes \delta_{m_2-2}^{(2)} \otimes \dots \otimes \delta_{m_k-k}^{(k)} \right) + \\ + \text{комбинация базисных векторов более высокого порядка}$$

где Symm — оператор симметризации. Записывая $\delta_{m_j-j}^{(j)}$ в виде $(\delta_1^{(j)})^{m_j-j}$, получаем

$$N^*\gamma_{m_1, \dots, m_k} = \text{Symm} \left((\delta_1^{(1)})^{m_1-1} \otimes \dots \otimes (\delta_1^{(k)})^{m_k-k} \right) + \\ + \text{комбинация базисных векторов более высокого порядка.}$$

Теорема 3. N^* отображает $H^*(G_{k, kn}^{\mathbb{C}})$ (или $H^*(G_{k, kn}^{\mathbb{R}})$) на подкольцо кольца $\mathbb{Z}[z_1, \dots, z_k]/(z_1^n, \dots, z_k^n)$ (или $\mathbb{Z}_2[x_1, \dots, x_k]/(x_1^n, \dots, x_k^n)$), состоящее из симметрических полиномов.

Рассмотрим возрастающую последовательность евклидовых пространств $E^k \subseteq E^{k+1} \subseteq \dots \subseteq E^N \subseteq \dots$, где

$$E^n = \{(x_1, \dots, x_n), x_n \in R\}, n \geq k.$$

Вложение $E^n \subseteq E^{n+1}$ задает отображение вложения

$$i_n: G_{k, n} \rightarrow G_{k, n+1},$$

которое, очевидно, является клеточным отображением. Так как граничные операторы на клетках

Шуберта тривиальны, то

$$(i_n)_*: H(G_{k,n}) \rightarrow H(G_{k,n+1})$$

— инъективный гомоморфизм.

Обозначим через E^∞ прямой предел последовательности $E^k \subseteq E^{k+1} \subseteq \dots$, а через $G_{k,\infty}$ прямой предел последовательности $G_{k,k} \subseteq G_{k,k+1} \subseteq \dots$. Ясно, что $G_{k,\infty}$ можно трактовать как множество k -плоскостей в E^∞ . Так как гомоморфизмы $(i_n)_*$ инъективны, то

$$H(G_{k,\infty}) = \varinjlim_{n \rightarrow \infty} H(G_{k,n})$$

(\varinjlim означает прямой предел). Таким образом, справедлива

Теорема 4. $H^*(G_{k,\infty})$ изоморфно кольцу всех симметрических полиномов от k переменных z_1, \dots, z_k .

По известной теореме из алгебры любой симметрический полином от k переменных можно записать в виде полинома от элементарных симметрических полиномов $\sigma_1, \dots, \sigma_k$. Пусть c_1, \dots, c_k — элементы из $H^*(G_{k,\infty})$, соответствующие (при изоморфизме из теоремы 4) полиномам $\sigma_1, \dots, \sigma_k$. Эти элементы называются *классами Уитни* в вещественном случае и *классами Чжэня* в комплексном случае.

Таким образом, в теореме 4 утверждается, что любой класс из $H^*(G_{k,\infty})$ можно представить в виде \cup -произведения классов Уитни (Чжэня).

Обратим внимание на то, что в вещественном случае $c_i \in H^i(G_{k,\infty}^R; \mathbb{Z}_2)$, а в комплексном случае $c_i \in H^{2i}(G_{k,\infty}^C; \mathbb{Z})$.

Б. Теорема двойственности Пуанкаре

Напомним некоторые факты из теории характеристик (полное изложение этих результатов см. Люмис [1] или Понtryгин [2]).

Для локально компактной абелевой группы G со счетным базисом можно определить группу харак-

теров \hat{G} как группу непрерывных гомоморфизмов из G в \mathbb{R}/\mathbb{Z} , где \mathbb{R} – аддитивная группа вещественных чисел, а \mathbb{Z} – группа целых чисел.

Известно, что (I) если $G \cong \mathbb{R}^n$, то $\hat{G} \cong \mathbb{R}^n$, (II) если G – конечная группа с дискретной топологией, то $G \cong \hat{G}$, (III) если $G \cong \mathbb{Z}$, то $\hat{G} \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Утверждение „группа G компактна“ равносильно утверждению „группа \hat{G} дискретна и $\hat{\hat{G}} \cong G$ для любой локально компактной группы G “.

Для групп G и \hat{G} определено так называемое *спаривание* в группу \mathbb{R}/\mathbb{Z} , т. е. задан естественный¹⁾ закон умножения: $g\hat{g} = r$, где $g \in G$, $\hat{g} \in \hat{G}$, $r \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. В частности, если $G = \hat{G} = \mathbb{R}$, то это обычное сложение по модулю 1.

Говорят, что группы G и G' образуют двойственную пару по отношению к \mathbb{R}/\mathbb{Z} , если определено произведение $gg' \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, удовлетворяющее следующему условию. Пусть φ_g – элемент из \hat{G}' , заданный равенством $\varphi_g(g') = gg'$, а $\psi_{g'}$ – элемент из \hat{G} , заданный равенством $\psi_{g'}(g) = gg'$; тогда отображения $g \rightarrow \varphi_g$ и $g' \rightarrow \psi_{g'}$ будут изоморфизмами G на \hat{G}' и G' на \hat{G} .

Теперь мы можем сформулировать основное утверждение.

Теорема двойственности Пуанкаре. Пусть M^m – компактное ориентируемое многообразие без края и G – локально компактная абелева группа со счетным базисом. Тогда $H_k(M; G)$ и $H_{m-k}(M; \hat{G})$ образуют двойственную пару по отношению к \mathbb{R}/\mathbb{Z} , если умножение между $H_k(M; G)$ и $H_{m-k}(M; \hat{G})$ определено как нахождение индекса пересечения классов гомологий.

Следствие 1. Пусть M^m – компактное ориентируемое многообразие без края. Если a – сингулярный

¹⁾ Это значит, что умножение обладает свойством дистрибутивности. – Прим. перев.

k -цикл на M с вещественными (целыми) коэффициентами и $\alpha \cdot \beta = 0$ для всех сингулярных $(m-k)$ -циклов β на M с вещественными (из \mathbb{R}/\mathbb{Z}) коэффициентами, то α является границей.

Если G — поле, то группы сингулярных гомологий многообразия M будут векторными пространствами. Назовем p -м числом Бетти b_p многообразия M раз мерность пространства $H_p(M; G)$. Из теоремы двойственности Пуанкаре вытекает

Следствие 2. $b_k = b_{m-k}$.

Если M неориентируемо, то целочисленная теория пересечений неприменима. Однако справедлива

Теорема двойственности Пуанкаре mod 2. Если M^m — компактное многообразие без края, то $H_k(M; \mathbb{Z}_2)$ и $H_{m-k}(M; \mathbb{Z}_2)$ образуют двойственную пару по отношению к \mathbb{R}/\mathbb{Z} , если умножение между $H_k(M; \mathbb{Z}_2)$ и $H_{m-k}(M; \mathbb{Z}_2)$ определено как нахождение индекса пересечения mod 2 классов гомологий.

В нашем доказательстве этих теорем будет использоваться теория Морса. Мы только сформулируем нужные нам результаты, а доказательства можно найти в книге Милнора [1].

Пусть f — гладкая вещественнозначная функция на многообразии M^m . Точка $p \in M$ называется *критической точкой* для f , если в локальных координатах $\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_m}(p) = 0$. Критическая точка p называется *невырожденной*, если матрица $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (p) \right|$ невырождена. В лемме Морса утверждается, что если p — невырожденная критическая точка для f , то в этой точке можно так задать локальные координаты, что $f = f(p) - x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_m^2$ в некоторой координатной окрестности многообразия. Число k называется *индексом* критической точки p . Из леммы Морса непосредственно вытекает, что невырожденные критические точки изолированы.

Следовательно, если M — компактное многообразие, то число таких точек конечно.

Важную роль в дальнейшем играет следующая лемма, тесно связанная с леммой о шевелении.

Лемма 1. Пусть f — гладкая вещественнонозначная функция на компактном многообразии M . В любой близости от f (в смысле d_k -метрики для любого k) найдется гладкая вещественнонозначная функция g на M , имеющая только невырожденные критические точки. Более того, функцию g можно выбрать так, что значения $g(p_1), g(p_2), \dots, g(p_l)$ во всех ее критических точках p_1, p_2, \dots, p_l будут попарно различны.

Прежде чем сформулировать один из основных результатов теории Морса, дадим некоторые определения.

Пусть f — гладкая вещественнонозначная функция на компактном многообразии M . Вещественное число c называется *критическим уровнем* функции f , если существует критическая точка p этой функции, в которой $f(p)=c$. Обозначим через $(r_1 \leq f \leq r_2)$ множество всех точек $g \in M$, для которых $r_1 \leq f(g) \leq r_2$, где r_1 и r_2 — любые вещественные числа, а через $(f \leq r)$ (соответственно $(f \geq r)$) множество всех точек $g \in M$, для которых $f(g) \leq r$ (соответственно $f(g) \geq r$).

Теорема Морса. Пусть a и b — вещественные числа, $a < b$. Если между a и b нет ни одного критического уровня функции f , то множество $(f \leq a)$ будет деформационным ретрактом¹⁾ множества $(f \leq b)$. В частности, группа относительных сингулярных гомологий $H((f \leq b)/(f \leq a))$ ²⁾ равна 0. Если же между a и b содержится ровно один критический уровень функции f , соответствующий только одной невырожденной критической точке индекса k , то $H_l((f \leq b)/(f \leq a)) = 0$ для $k \neq l$ и $H_k((f \leq b)/(f \leq a); G) \cong G$.

¹⁾ Деформационным ретрактом пространства X называется множество $A \subset X$, для которого существует ретракция $r: X \rightarrow A$, гомотопная тождественному отображению $X \rightarrow X$. — Прим. перев.

²⁾ $H_k(X/Y) = H_k(X, Y)$; $X/Y \cong X \cup CY$, где CY — конус над Y , получающийся из $Y \times I$ при стягивании $Y \times 1$ в точку. — Прим. перев.

Теперь мы приступим к доказательству теоремы двойственности Пуанкаре. По лемме 1 найдется гладкая вещественнозначная функция f на M , все критические точки p_1, p_2, \dots, p_{n-1} которой невырождены и все значения $f(p_1), f(p_2), \dots, f(p_{n-1})$ различны. Без ограничения общности можно предполагать, что $f(p_1) < f(p_2) < \dots < f(p_{n-1})$. Очевидно, что $f(p_1)$ — минимум, а $f(p_{n-1})$ — максимум функции f .

Возьмем любые вещественные числа c_1, c_2, \dots, c_n , для которых $c_1 < f(p_1) < c_2 < f(p_2) < \dots < c_{n-1} < f(p_{n-1}) < c_n$. Достаточно доказать, что группы $H_k((f \leq c_i); G)$ и $H_{m-k}((f \leq c_i)/(f = c_i); \hat{G})$ представляют собой двойственную пару по отношению к \mathbb{R}/\mathbb{Z} . В самом деле, если это будет доказано, то, положив $i = n$, получим $(f \leq c_n) = M$ и $(f = c_n) = \emptyset$, откуда следует теорема.

Проведем индукцию по i . Для $i = 1$ утверждение верно, ибо $(f \leq c_1) = \emptyset$. Обозначим через $c = f(p_1)$ минимальное значение функции. Существует координатная окрестность точки p_1 , в которой функция f имеет вид $c + x_1^2 + \dots + x_m^2$. Поскольку p_1 — единственная точка на M , в которой функция принимает минимальное значение, из компактности M следует, что найдется такое число $\varepsilon > 0$, что множество $(f \leq c + \varepsilon)$ гомеоморфно шару $B_\varepsilon^m = \{(x_1, \dots, x_m) | x_1^2 + \dots + x_m^2 \leq \varepsilon\}$. Группы $H_k(B_\varepsilon^m; G)$ и $H_{m-k}(B_\varepsilon^m / \partial B_\varepsilon^m; \hat{G})$ образуют двойственную пару по отношению к \mathbb{R}/\mathbb{Z} . В самом деле, если $k \neq 0$, то

$$H_k(B_\varepsilon^m; G) = 0 = H_{m-k}(B_\varepsilon^m / \partial B_\varepsilon^m; \hat{G}), \\ H_0(B_\varepsilon^m; G) \cong G, \quad H_m(B_\varepsilon^m / \partial B_\varepsilon^m; \hat{G}) \cong \hat{G}.$$

Из первой части теоремы Морса получаем

$$H_k((f \leq c_2); G) \cong H_k(B_\varepsilon^m; G), \\ H_{m-k}((f \leq c_2)/(f = c_2); \hat{G}) \cong H_{m-k}(B_\varepsilon^m / \partial B_\varepsilon^m; \hat{G}),$$

и утверждение верно для $i = 2$. Предположим, что оно верно для $i \leq j$, и докажем его для $i = j + 1$.

Пусть индекс критической точки p_j равен λ . Положим

$$\begin{aligned} T = (f \leq c_{j+1}), \quad U = (f = c_{j+1}), \quad T_- = (f \leq c_{j+1} - \varepsilon), \\ T_0 = (c_j + \varepsilon \leq f \leq c_{j+1}), \quad L = (f \leq c_j). \end{aligned}$$

Здесь ε выбрано так, чтобы выполнялись неравенства $c_{j+1} - \varepsilon > f(p_j) > c_j + \varepsilon$. Рассмотрим две точные¹⁾ гомологические последовательности: последовательность пары (T_-, L)

$$\dots \rightarrow H_{k+1}(T_-/L; G) \rightarrow H_k(L; G) \rightarrow H_k(T_-; G) \rightarrow \dots \rightarrow H_k(T_-/L; G) \rightarrow H_{k-1}(L; G) \rightarrow \dots \quad (1)$$

и последовательность тройки (T, T_0, U)

$$\begin{aligned} \dots \leftarrow H_{m-k-1}(T_0/U; \hat{G}) \leftarrow H_{m-k}(T/T_0; \hat{G}) \leftarrow \\ \leftarrow H_{m-k}(T/U; \hat{G}) \leftarrow H_{m-k}(T_0/U; \hat{G}) \leftarrow \\ \leftarrow H_{m-k+1}(T/T_0; \hat{G}) \leftarrow \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Мы хотим показать, что $H_k(T; G)$ и $H_{m-k}(T/U; \hat{G})$ образуют двойственную пару. В силу теоремы Морса можно рассматривать $H_k(T_-; G)$ вместо $H_k(T; G)$. Напомним, что индекс пересечения цепей α и β определен, когда $\partial\alpha \cap \beta = \emptyset$, $\alpha \cap \partial\beta = \emptyset$. Следовательно, индекс пересечения определен между элементами из $H_r(L; G)$ и $H_{m-r}(T/T_0; \hat{G})$, из $H_r(T_-; G)$ и $H_{m-r}(T/U; \hat{G})$, из $H_r(T_-/L; G)$ и $H_{m-r}(T_0/U; \hat{G})$, так как $L \cap T_0 = T_- \cap U = \emptyset$.

Покажем, что $H_k(L; G)$ и $H_{m-k}(T/T_0; G)$ образуют двойственную пару по отношению к \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Согласно аксиоме вырезания,

$$H_{m-k}(T/T_0; \hat{G}) \cong H_{m-k}((f \leq c_j + \varepsilon)/(f = c_j + \varepsilon); \hat{G}),$$

а в силу первой части теоремы Морса

$$H_k(L; G) \cong H_k((f \leq c_j + \varepsilon); G),$$

¹⁾ Точность выписанных ниже последовательностей (1) и (2) гарантируется аксиомой точности и аксиомой вырезания сингулярной теории гомологий. Автор далее в тексте часто ссылается на семь аксиом теорий гомологий и когомологий, сформулированных в книге Стинродда и Эйленберга [1]. Аксиомы 4–7 имеют специальные названия — аксиомы точностей, гомотопии, вырезания и размерности соответственно. — Прим. перев.

и утверждение следует теперь по индукции с использованием еще раз теоремы Морса. Аналогичный результат верен, очевидно, и для групп $H_{k-1}(L; G)$ и $H_{m-k+1}(T_0/U; \hat{G})$.

Докажем, что группы $H_k(T_-/L; G)$ и $H_{m-k}(T_0/U; \hat{G})$ также образуют двойственную пару. Из второй части теоремы Морса непосредственно следует, что

$$H_k(T_-/L; G) \cong \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq \lambda, \\ G, & \text{если } k = \lambda. \end{cases}$$

Согласно аксиоме вырезания,

$$\begin{aligned} H_{m-k}(T_0/U; \hat{G}) &\cong H_{m-k}((f \geq c_j + \varepsilon) / (f \geq c_{j+1}); \hat{G}) \cong \\ &\cong H_{m-k}((-f \leq -c_j + \varepsilon) / (-f \leq -c_{j+1}); \hat{G}). \end{aligned}$$

Так как p_j — критическая точка для функции f с индексом λ , то она будет критической точкой и для функции $-f$ с индексом $m-\lambda$. Снова применяя вторую часть теоремы Морса, получаем

$$H_{m-k}(T_0/U; \hat{G}) \cong \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq \lambda, \\ \hat{G}, & \text{если } k = \lambda, \end{cases}$$

и утверждение доказано. Аналогичный результат верен, очевидно, и для групп $H_{k+1}(T_-/L; G)$ и $H_{m-k-1}(T_0/U; \hat{G})$. Мы утверждаем, что точные последовательности (1) и (2) двойственны друг другу в следующем смысле.

Рассмотрим две точные последовательности групп

$$\dots \rightarrow A_{j+1} \xrightarrow{\Phi_{j+1}} A_j \xrightarrow{\Phi_j} A_{j-1} \rightarrow \dots, \quad (1')$$

$$\dots \leftarrow B_{j+1} \xleftarrow{\Psi_j} B_j \xleftarrow{\Psi_{j-1}} B_{j-1} \leftarrow \dots \quad (2')$$

Пусть определено произведение $a \cdot b$ для $a \in A_j$, $b \in B_j$. Последовательности (1') и (2') называются *двойственными точными последовательностями*, если $\Phi_{j+1}a' \cdot b = a' \cdot \Psi_j b$ для всех $a' \in A_{j+1}$, $b \in B_j$. Двойственность последовательностей (1) и (2) легко следует из свойств индекса пересечений. Теперь для завершения доказательства теоремы нам понадобится

Алгебраическая лемма. Пусть (1') и (2') — двойственные точные последовательности, и пусть A_{3j} и B_{3j} , а также A_{3j+1} и B_{3j+1} образуют двойственные пары по отношению к \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Тогда A_{3j+2} и B_{3j+2} также образуют двойственную пару.

Доказательство. Пусть $C_i = \hat{B}_i$ — группа характеров группы B_i . Точная последовательность (2') индуцирует точную последовательность

$$\dots \rightarrow C_{i+1} \xrightarrow{\Phi_j} C_i \xrightarrow{\Phi_{j+1}} C_{i-1} \rightarrow \dots$$

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & A_{i+1} & \xrightarrow{\Phi_{j+1}} & A_j & \xrightarrow{\Phi_j} & A_{j-1} \rightarrow \dots \\ & & f_{j+1} \downarrow & & f_j \downarrow & & f_{j-1} \downarrow \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \rightarrow & C_{i+1} & \xrightarrow{\Psi_j} & C_i & \xrightarrow{\Psi_{j-1}} & C_{i-1} \rightarrow \dots \end{array}$$

Гомоморфизмы $f_i: A_i \rightarrow C_i$ здесь заданы соотвествием $a_i \rightarrow g_{a_i}$, где $g_{a_i}(b_i) = a_i \cdot b_i$. Так как $\Phi_{j+1}a' \cdot b = a' \cdot \Psi_j b$, то диаграмма коммутативна. По условию f_{3j} и f_{3j+1} — изоморфизмы. По лемме о пяти гомоморфизмах (см. Стинрод и Эйленберг [1]) f_{3j+2} также будет изоморфизмом, и лемма доказана.

Из этой леммы и двойственности последовательностей (1) и (2) следует, что $H_k(T_-; G)$ и $H_{m-k}(T_+ U; \hat{G})$ образуют двойственную пару по отношению к \mathbb{R}/\mathbb{Z} .

Г л а в а IV

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ РАССЛОЕНИЙ СТИНРОДА¹⁾

В этой главе мы начинаем изучение расслоений Стинрода и некоторых их приложений к дифференциальной топологии. Основное внимание будет уделено теории векторных расслоений и ассоциированных с ними главных расслоений. Мы рассмотрим также важный частный случай таких расслоений — касательное расслоение многообразия.

Геометрически расслоение Стинрода можно представлять себе как обобщение прямого произведения пространств. На самом деле, как мы увидим ниже, расслоение локально устроено как прямое произведение, однако разрешается „кручение в целом“.

Формальное определение расслоения Стинрода довольно запутано. Кроме того, многие теоремы по существу носят исключительно технический характер, и поскольку существует подробная книга, посвященная этим вопросам (Стинрод [1]), мы позволим себе небрежность в приведении полной аргументации. Мы будем часто формулировать без доказательства теоремы, которые можно найти в этой книге. В качестве другого источника для справок (особенно по теории векторных расслоений) мы предлагаем книгу Хирцебруха [1].

Напомним, что топологическая группа G называется группой гомеоморфизмов топологического пространства Y , если существует такое непрерывное отображение $\eta: G \times Y \rightarrow Y$ (т. е. $\eta(g, y) = g \cdot y$), что $e y = y$ для всех $y \in Y$ (e — единица группы G) и

¹⁾ Расслоение Стинрода — сравнительно новый термин. Раньше в русской литературе употреблялся термин *косое произведение*. — Прим. перев.

$g_1(g_2y) = (g_1g_2)y$ для всех $g_1, g_2 \in G, y \in Y$. Группа G называется *эффективной*, если из равенства $gy = y$ для всех $y \in Y$ вытекает, что $g = e$.

Определение 1. *Расслоением Стинрода с группой G , или просто G -расслоением*, называется совокупность (X, B, F, G, π) следующих объектов:

1) пространства X , называемого *пространством расслоения*¹⁾,

2) пространства B , называемого *базой расслоения*,

3) пространства F , называемого *слоем расслоения*,

4) эффективной группы G гомеоморфизмов пространства F , называемой *группой расслоения*,

5) отображения $\pi: X \xrightarrow{\text{на}} B$, называемого *проекцией*, причем $\pi^{-1}(b)$ гомеоморфно пространству F для всех $b \in B$.

6) Кроме того, имеется семейство $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ открытых множеств, покрывающих B , называемых *координатными окрестностями*. Для каждой окрестности \mathcal{U}_α существует гомеоморфизм $\text{im}_\alpha: \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \xrightarrow{\text{на}} \mathcal{U}_\alpha \times F$, заданный равенством

$$\text{im}_\alpha(x) = [b, f] = [\pi(x), f_\alpha(x)], \quad b \in \mathcal{U}_\alpha, \quad f \in F.$$

7) Если $b \in \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$, то

$$\text{im}_\beta \circ \text{im}_\alpha^{-1} [b, f] = [b, U_b(\beta, \alpha)f].$$

Отображения $U_b(\beta, \alpha): F \rightarrow F$, непрерывно зависящие от b и принадлежащие группе гомеоморфизмов G , называются *координатными преобразованиями* (или функциями перехода G -расслоения).

Примеры (подробности см. Стинрод [1]).

1. Если X — группа Ли, а F — ее замкнутая подгруппа, то X будет пространством расслоения с базой $B = X/F$, слоем F и группой F , действующей на себе левыми сдвигами.

2. Лист Мёбиуса является пространством расслоения над окружностью как базой и отрезком прямой

¹⁾ Часто, если не возникает путаницы, пространство расслоения называют просто *расслоением*. — Прим. ред.

как слоем. Группа G для него — циклическая группа второго порядка.

3. Тривиальный пример дает прямое произведение $B \times F$ — пространство расслоения над B со слоем F . Группа G здесь тривиальна.

4. Пусть M^m — многообразие, $\tau(M)$ — множество касательных пространств во всех точках многообразия M , т. е. множество всех пар $[p, v]$, где $p \in M$, а v — касательный вектор к M в точке p . Пусть отображение $\pi: \tau(M) \rightarrow M$ задано равенством $\pi[p, v] = p$. Тогда $\tau(M)$ будет пространством расслоения над M , называемым *касательным расслоением*¹⁾, а слоем будет линейное пространство. В самом деле, в качестве координатных окрестностей \mathcal{U}_α можно взять координатные окрестности многообразия M , а в качестве отображений $U_b(\beta, \alpha)$ — матрицы Якоби координатных преобразований. Тогда группа G будет полной линейной группой $GL(m)$ преобразований слоя и потому расслоение $\tau(M)$ будет $GL(m)$ -*расслоением* над M .

Замечание. Координатные преобразования $U_b(\beta, \alpha)$ G -расслоения удовлетворяют условиям

- (I) $U_b(\alpha, \alpha)$ — тождественный гомеоморфизм $e \in G$,
- (II) $U_b(\gamma, \beta) \circ U_b(\beta, \alpha) = U_b(\gamma, \alpha)$.

Очевидно, из этих условий следует, что

$$U_b(\alpha, \beta) \circ U_b(\beta, \alpha) = e.$$

Семейство функций $U_b(\beta, \alpha)$, определенных на множествах $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$, непрерывных по b (в том смысле, что отображение $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \rightarrow G$, заданное соответствием $b \rightarrow U_b(\beta, \alpha)$, непрерывно) и удовлетворяющих условиям (I) и (II), определяет *структуру G -расслоения* на B .

Пусть B — некоторое пространство, $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ — его открытое покрытие. Предположим, что топологическая группа G действует на некотором пространстве F как группа гомеоморфизмов и функции $U_b(\beta, \alpha)$, заданные на $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$, определяют структуру G -расслоения на B . Тогда справедлива

¹⁾ См. сноску 1 на стр. 37. — Прим. перев.

Теорема существования (Стинрод [1, стр. 20])
Существует G -расслоение X над B со слоем F и координатными преобразованиями $U_b(\beta, a)$.

Пространство X строится следующим образом
Пусть \tilde{X} – множество троек $\{[b, f, a] \mid b \in \mathcal{U}_a, f \in F\}$
снабженное топологией прямого произведения (множество индексов берется с дискретной топологией)
Введем в \tilde{X} отношение эквивалентности $[b, f, a] \sim [b, U_b(\beta, a)f, \beta]$. Тогда X определяется как множество классов эквивалентности.

Теорема уверждает также, что пространство X единственно с точностью до эквивалентности (см. ниже)

Эквивалентность G -расслоений

Пусть X, X' – два G -расслоения с одной и той же базой B , одним и тем же слоем F и проекциями π, π' соответственно. Эти расслоения называются эквивалентными (\cong), если существует гомеоморфизм $\phi: X \xrightarrow{\text{на}} X'$, для которого $\pi' \phi = \pi$ (тем самым $\phi: \pi^{-1}(b) \rightarrow \pi'^{-1}(b)$ – гомеоморфизм), и если $\mathcal{U}_\beta, \mathcal{V}_\beta$ – координатные окрестности G -расслоений X, X' соответственно и $i_{\mathcal{U}_\beta} \circ \phi \circ i_{\mathcal{V}_\beta}^{-1} [b, f] = [b, \Phi_b(\beta, a)f]$ то Φ_b непрерывно зависит от b и принадлежит G

Замечание. Непосредственно из определения получаем

$$U_b(\gamma', \beta') \Phi_b(\beta', a) U_b(a, \delta) = \Phi_b(\gamma', \delta),$$

или

$$U_b(\gamma', \beta') = \Phi_b(\gamma', \delta) U_b(\delta, a) \Phi_b^{-1}(\beta', a).$$

Последнее равенство можно взять в качестве определения эквивалентности структур G -расслоений над B

Определение 2. Пусть ξ – структура G -расслоения над B со слоем F и $\psi: B' \rightarrow B$ – непрерывное отображение. Индуцированной структурой $\psi^* G$ -расслоения над B' со слоем F называется структура, для которой координатные окрестности представляют собой прообразы $\mathcal{U}'_a = \psi^{-1}(\mathcal{U}_a)$ координат

ных окрестностей \mathcal{U}_α из ξ , а в качестве координатных преобразований берутся $U_{\psi(b')}(b, \alpha)$, где $\psi(b') \in \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_{\beta'}$.

Заметим, что если ξ_1, ξ_2 — эквивалентные структуры над B , то $\psi^+\xi_1$ и $\psi^+\xi_2$ — эквивалентные структуры над B' . Кроме того, $(\psi_1\psi_2)^+ = (\psi_2)^+(\psi_1)^+$, $(1)^+ = 1$ (1 — тождественное отображение).

Определение 3. Пусть ξ — структура G -раслоения над B , G' — подгруппа группы G . Структура ξ называется *приводимой* к G' , если существует такая эквивалентная ей структура ξ' , что все координатные преобразования $U_b(b, \alpha)$ лежат в G' . Если $G' = \{e\}$, то структура ξ , называемая *тривиальной*, эквивалентна структуре прямого произведения.

Если $G = \mathrm{GL}(n)$ — полная линейная группа и структура ξ приводима к подгруппе $\mathrm{GL}^+(n)$ группы $\mathrm{GL}(n)$, состоящей из всех $(n \times n)$ -матриц с положительным определителем, то говорят, что ξ определяет *ориентируемое расслоение*.

Лемма 1. *Многообразие M^m ориентируемо тогда и только тогда, когда касательное расслоение $\tau(M)$ ориентируемо.*

Доказательство. Напомним, что многообразие ориентируемо, если его можно покрыть такими координатными окрестностями, что определители матриц Якоби координатных преобразований положительны. Отсюда и из определения касательного расслоения следует достаточность условия.

Необходимость. Пусть τ_1, \dots, τ_m — репер в некоторой точке $p \in M$, т. е. множество линейно независимых векторов в точке p . Пусть x — координатная система в некоторой окрестности точки p и $\tau_i^{(j)}(x)$ — компоненты векторов τ_i ($j = 1, 2, \dots, m$) в этой координатной системе. Говорят, что репер τ_i положительно ориентирован, если определитель матрицы $\|\tau_i^{(j)}\|$ положителен. Это определение корректно, если $\tau(M)$ ориентировано.

Зададим координатную систему x_a на M и возьмем в качестве τ_1, \dots, τ_m производные по координатным направлениям. Назовем эту систему положительной, если τ_1, \dots, τ_m образуют положительный репер, и отрицательной в противном случае. Покроем многообразие M координатными окрестностями из системы x_a , если она положительна, и из системы x'_a обратной к x_a , в противном случае (обратной к системе $[x_1, \dots, x_n]$ называется система $[x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n]$). Таким образом, многообразие M ориентируемо.

Сечение расслоения

Определение 4. Пусть X — расслоение с базой B и проекцией $\pi: X \rightarrow B$. Сечением расслоения X называется непрерывное отображение $k: B \rightarrow X$, для которого πk — тождественное отображение.

Пример. Непрерывное векторное поле на многообразии является сечением касательного расслоения этого многообразия.

Примечание. Не все расслоения обладают сечениями. Например, множество $\hat{\tau}(M)$ всех ненулевых векторов в $\tau(M)$ будет расслоением над M , но у него может не быть сечений. В самом деле, спрятавшись

Теорема. На многообразии существует непрерывное поле отличных от нуля векторов тогда и только тогда, когда эйлерова характеристика многообразия равна нулю.

Векторные расслоения

Определение 5. Расслоение Стинрода называется **векторным**, если слой представляет собой векторное пространство V^k некоторой размерности а структурная группа расслоения содержится в $GL(k)$. Одномерное векторное расслоение называется **линейным**.

Определение 6. Пусть $(X, B, V^k, \mathrm{GL}(k), \pi)$ — векторное расслоение, $\pi(X') = B$ для некоторого $X' \subseteq X$. Тогда $(X', B, V^j, \mathrm{GL}(j), \pi|_{X'})$ называется *векторным подрасслоением* расслоения $(X, B, V^k, \mathrm{GL}(k), \pi)$, если

1) $\pi^{-1}(b) \cap X' = V'(b)$ — линейное подпространство пространства V^k всегда одной и той же размерности j , т. е. $j = \dim V'(b)$ не зависит от выбора точки b ;

2) $V'(b)$ непрерывно зависит от b , т. е. $V'(b)$ имеет базис, непрерывно зависящий от b .

Пусть $b_0 \in B$. Возьмем какой-нибудь базис $\{v_1(b_0), \dots, v_j(b_0)\}$ пространства $V'(b_0)$ и найдем векторы v_{j+1}, \dots, v_k в $V(b_0) = \pi^{-1}(b_0)$, для которых система $\{v_1(b_0), \dots, v_j(b_0), v_{j+1}, \dots, v_k\}$ образует базис пространства $V(b_0)$. По условию 2) определения 6 найдется базис $\{v_1(b), \dots, v_j(b)\}$ пространства $V'(b)$, у которого $v_i(b)$ близко к $v_i(b_0)$, если b близко в b_0 ($1 \leq i \leq j$). Легко видеть, что если b достаточно близко к b_0 , то система $\{v_1(b), \dots, v_j(b), v_{j+1}, \dots, v_k\}$ образует базис пространства $V'(b)$. Тем самым существует единственное невырожденное линейное преобразование $L(b)$, непрерывно зависящее от b и переводящее $\{v_1(b_0), \dots, v_j(b_0), v_{j+1}, \dots, v_k\}$ в $\{v_1(b), \dots, v_j(b), v_{j+1}, \dots, v_k\}$.

Пространство X локально устроено как $\mathcal{U} \times V(b_0)$, где \mathcal{U} — некоторая координатная окрестность, а b_0 — какая-нибудь точка из B (см. определение 1). Из предыдущего абзаца следует, что X' локально устроено как $\mathcal{U} \times V'(b_0)$.

Читатель, вероятно, уже убедился, что векторное подрасслоение само является векторным расслоением.

Определение 7. Пусть X — векторное расслоение, а X' — его векторное подрасслоение. Будем говорить, что x_1 эквивалентно x_2 в X , и писать $x_1 \sim x_2$, если $\pi(x_1) = \pi(x_2)$ и $x_2 - x_1 \in X'$. Множество X/X' классов эквивалентности можно превратить в пространство векторного расслоения, так как локально $X = \mathcal{U} \times V(b_0)$, $X' = \mathcal{U} \times V'(b_0)$ и тем самым $X/X' =$

$= (\mathcal{U} \times V(b_0))/V'(b_0)$. Эта „координатизация“ задает естественную структуру для векторного расслоения на X/X' . Пространство векторного расслоения X/X' называется *факторрасслоением*.

Лемма 2. *Пусть X – ориентируемое векторное расслоение с базой B и проекцией π . Его векторное подрасслоение X' ориентируемо тогда и только тогда, когда ориентируемо X/X' . Кроме того, любая ориентация одного расслоения естественно индуцирует ориентацию другого.*

Доказательство. Если V^k – слой векторного расслоения X , то k -репер в X представляет собой множество k линейно независимых элементов x_1, x_2, \dots, x_k в X , для которых $\pi(x_i) = b$ (поскольку $\pi^{-1}(b) = V^k$). Заметим, что расслоение ориентируемо, если множество реперов можно разбить на правосторонние и левосторонние реперы „непрерывно“, т. е. если x_1, \dots, x_k – правосторонний репер, то любой достаточно близкий к нему репер – также правосторонний.

Пусть X' ориентируемо. Назовем репер x_{j+1}, \dots, x_k в X/X' правосторонним, если, дополняя его правосторонним репером из X' , мы получаем правосторонний репер в X . Обратно, предположим, что X/X' ориентируемо. Назовем репер x_1, \dots, x_j в X' правосторонним, если, дополняя его правосторонним репером из X/X' , мы получаем правосторонний репер в X . Тем самым лемма доказана.

Пусть M – многообразие, $M' \subseteq M$ – подмногообразие, $\tau(M)$ – касательное расслоение над M , а $\tau_0(M)$ – его сужение на M' , т. е. множество касательных векторов к M в точках из M' . Ясно, что

$$\tau_0(M) \cong \tau(M').$$

Предположим, что на M задана риманова метрика (см. гл. VII). Обозначим через $v(M')$ множество векторов из $\tau_0(M)$, нормальных к M' . Оно называется *нормальным расслоением многообразия M'* . Легко видеть, что $\tau_0(M) \cong \tau(M') \oplus v(M')$ (определение знака \oplus

см. на стр. 147). Если многообразие M ориентируемо, то ориентируемо касательное расслоение $\tau(M)$, а следовательно, и $\tau_0(M)$. Отсюда в силу леммы 2 расслоение $\tau(M')$ ориентируемо тогда и только тогда, когда ориентируемо нормальное расслоение $v(M')$. В силу леммы 1 многообразие M' ориентируемо тогда и только тогда, когда ориентируемо расслоение $v(M')$.

Частный случай. Пусть M — ориентируемое многообразие с краем $M' = \partial M$. Тогда $v(M')$ — тривиальное расслоение. В самом деле, обозначим через $n(b)$ единичный нормальный вектор в точке $b \in M'$, направленный внутрь многообразия M ; он непрерывно зависит от b . Любому нормальному вектору v в точке b сопоставим координаты $[b, v \cdot n(b)]$ ($x \cdot y$ — скалярное произведение векторов x и y). Таким образом,

$$v(M') \cong M' \times \mathbb{R},$$

где \mathbb{R} — вещественная прямая. Это означает, что $v(M')$ — тривиальное расслоение, следовательно, оно ориентируемо. Поэтому, если M — ориентируемое многообразие, то его край ∂M также ориентируем.

Замечание. Соотношение $v(M') \oplus \tau(M') \cong \tau_0(M)$, упоминаемое выше, означает, что расслоение $v(M')$ естественным образом эквивалентно факторрасслоению $\tau_0(M)/\tau(M')$. Очевидно, что $\tau_0(M)/\tau(M')$ не зависит от выбора римановой метрики на многообразии, а потому расслоение $v(M')$, которое, казалось бы, зависит от римановой метрики, в действительности определено (с точностью до эквивалентности) внутренней структурой многообразия M .

Теперь предположим, что многообразия M и M' содержатся оба в многообразии M_0 и пересекаются трансверсально, т. е. в каждой точке $p \in M \cap M' = MM'$

$$\tau(M)|_p + \tau(M')|_p = \tau(M_0)|_p.$$

Если M_0 , M и M' ориентированы некоторым образом, то многообразие MM' ориентируемо (и обладает естественной ориентацией). В самом деле,

заметим, что

$$\{\tau(M)|_{MM'} + \tau(M')|_{MM'}\}/\tau(MM') \cong \tau(M_0)|_{MM''}$$

(Через $\tau(M)|_{MM'}$ обозначено множество всех касательных векторов к M в точках из MM' . Аналогично для $\tau(M')|_{MM'}$ и $\tau(M_0)|_{MM''}$.)

Так как по условию $\tau(M)|_{MM'}$, $\tau(M')|_{MM'}$ и $\tau(M_0)|_{MM''}$ ориентированы, то ориентировано $\tau(MM')$, а следовательно, и MM' .

Чтобы замкнуть круг идей, относящихся к ориентации подмногообразий и т. п., приведем еще одну лемму и следствие из нее. Доказательство леммы оставляем читателю в качестве упражнения.

Лемма 3. Пусть $\phi: M \rightarrow M'$ — гладкое отображение многообразия M в многообразие M' . Если N' — подмногообразие многообразия M' и отображение ϕ всюду трансверсально к N' , то

$$\nu(N) \cong \phi^+(\nu(N')),$$

где $N = \phi^{-1}(N')$ и ϕ^+ — индуцированное отображение расслоений.

Следствие. Если M , M' и N' ориентируемы, то N также ориентируемо.

Доказательство. Так как M' и N' ориентируемые, то $\nu(N')$ также ориентируемо. Это означает, что $\nu(N')$ приводимо к группе $GL^+(n')$, где n' — размерность многообразия N' . Отображение ϕ^+ не „расширяет“ группу $GL^+(n)$, т. е. $\phi^+(\nu(N'))$ — ориентируемое расслоение. По лемме 3 расслоение $\nu(N)$ также ориентируемо. А тогда многообразие N ориентируемо поскольку ориентируемо многообразие M .

Г л а в а V

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Если X – топологическое пространство, а A – его замкнутое подмножество, назовем (X, A) парой. *Нормальным рядом пары* (X, A) называется последовательность

$$X = X_n \supseteq X_{n-1} \supseteq \dots \supseteq X_0 = A,$$

где все X_i замкнуты в X .

Обозначим $H(X, A) = \sum_{d=1}^{\infty} \oplus H_d(X, A)$, где $H_d(X, A)$ есть d -мерная относительная группа гомологий пары (X, A) . Отображение вложения $(X_j, A) \rightarrow (X_n, A)$ индуцирует гомоморфизм $H(X_j, A) \rightarrow H(X_n, A)$. Обозначим через $\text{Im } H(X_j, A)$ образ при этом гомоморфизме группы $H(X_j, A)$ в группе $H(X_n, A)$ (вообще, если (R, U) и (S, V) – две пары, для которых $R \subseteq S$, $U \subseteq V$, обозначим через $[\text{Im } H(R, U)]$ образ группы $H(R, U)$ в группе $H(S, V)$ относительно гомоморфизма, индуцированного вложением $(R, U) \rightarrow (S, V)$). Рассмотрим последовательность

$$\begin{aligned} H(X, A) &= H(X_n, A) \supseteq \text{Im } H(X_{n-1}, A) \supseteq \\ &\supseteq \text{Im } H(X_{n-2}, A) \supseteq \dots \supseteq \text{Im } H(A, A) = 0. \end{aligned}$$

Поскольку все написанные группы абелевы, эта последовательность будет нормальным рядом для $H(X, A)$ (в теоретико-групповом смысле). Пусть F_j обозначает j -й фактор этого нормального ряда, т. е.

$$F_j = \frac{\text{Im } H(X_j, A)}{\text{Im } H(X_{j-1}, A)}$$

(фактор A/B для удобства записи представляем в виде $\frac{A}{B}$).

Положим $A = X_{-k}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) и $X = X_l$ ($l = n, n+1, \dots$). Мы хотим найти соотношения между группами $H(X_j, X_{j-1})$ и группами нормального ряда пары (X, A) . Для этого зададим *вспомогательные группы Лере*

$$E_r^l = \frac{[\operatorname{Im} H(X_j, X_{j-r}) \text{ в } H(X_{j+r-1}, X_{j-r})]}{[\operatorname{Im} H(X_{j-1}, X_{j-r}) \text{ в } H(X_{j+r-1}, X_{j-r})]}.$$

Легко проверить, что $E_1^l = H(X_j, X_{j-1})$ и $E_\infty^l = F_j$. Основной результат дает

Теорема 1. *Существуют такие граничные операторы ∂^r : $E_r^l \rightarrow E_r^{l-r}$, что*

- 1) $\partial^r \partial^r = 0$, откуда $B(E_r^l) \subseteq Z(E_r^l)$, где $Z(E_r^l) = \{z \in E_r^l \mid \partial^r z = 0\}$ и $B(E_r^l) = \{\partial^r \omega \mid \omega \in E_r^{l+r}\}$,
- 2) $H(E_r^l) \cong E_{r+1}^l$, где $H(E_r^l) = Z(E_r^l)/B(E_r^l)$.

Доказательство. Определим оператор ∂^r следующим образом. Рассмотрим последовательность $H(X_j, X_{j-r}) \xrightarrow{\partial} H(X_{j-r}) \rightarrow \dots \rightarrow H(X_{j-2r}, X_{j-2r}) \rightarrow H(X_{j-1}, X_{j-2r})$;

здесь ∂ — граничный оператор, а другие отображения индуцированы соответствующими вложениями. Композиция этих отображений переводит $H(X_j, X_{j-r})$ в $H(X_{j-1}, X_{j-2r})$, обозначим ее ∂'_0 . Заметим, что ∂'_0 можно рассматривать как отображение из $H(X_j, X_{j-r})$ в $[\operatorname{Im} H(X_{j-r}, X_{j-2r}) \text{ в } H(X_{j-1}, X_{j-2r})]$ и a fortiori как отображение из $H(X_j, X_{j-r})$ в E_r^{l-r} , где

$$E_r^{l-r} = \frac{[\operatorname{Im} H(X_{j-r}, X_{j-2r}) \text{ в } H(X_{j-1}, X_{j-2r})]}{[\operatorname{Im} H(X_{j-r-1}, X_{j-2r}) \text{ в } H(X_{j-1}, X_{j-2r})]}.$$

Если $\{\gamma\}$ принадлежит E_r^l и $\gamma \in [\operatorname{Im} H(X_j, X_{j-r}) \text{ в } H(X_{j+r-1}, X_{j-r})]$ — представитель класса $\{\gamma\}$, то положим $\partial^r \{\gamma\} = \{\partial'_0 \alpha\}$, где $\alpha \in H(X_j, X_{j-r})$ — элемент,

образом которого в $H(X_{j+r-1}, X_{j-r})$ является γ , а $\{\partial'_0\alpha\}$ – класс эквивалентности (т. е. элемент из E_r^{j-r}), содержащий $\partial'_0\alpha$.

Чтобы убедиться в том, что ∂^r – гомоморфизм из E_r^j в E_r^{j-r} , нужно проверить, что

а) если образ элемента α в $H(X_{j+r-1}, X_{j-r})$ равен 0, то $\partial'_0\alpha = 0$,

б) если $\alpha \in [Im H(X_{j-1}, X_{j-r})]$ в $H(X_j, X_{j-r})$, то $\partial'_0\alpha = 0$.

Проверим (а). Рассмотрим последовательность

$$H(X_{j+r-1}, X_j) \xrightarrow{\partial^*} H(X_j, X_{j-r}) \rightarrow H(X_{j+r-1}, X_{j-r}),$$

точную последовательность тройки $(X_{j+r-1}, X_j, X_{j-r})$. Так как α переходит в 0, то в силу точности последовательности $\alpha = \partial^*\beta$, где $\beta \in H(X_{j+r-1}, X_j)$. Затем рассмотрим последовательность

$$\begin{aligned} H(X_{j+r-1}, X_j) &\xrightarrow{\partial} H(X_j) \rightarrow H(X_j, X_{j-r}) \rightarrow H(X_{j-r}) \rightarrow \\ &\rightarrow H(X_{j-r}, X_{j-2r}) \rightarrow H(X_{j-1}, X_{j-2r}). \end{aligned}$$

Гомоморфизм ∂^* есть не что иное, как композиция оператора ∂ и „вложения“ $H(X_j) \rightarrow H(X_j, X_{j-r})$. Чтобы показать, что образ элемента α в $H(X_{j+r-1}, X_{j-r})$ равен 0, достаточно показать, что образ элемента $\partial\beta$ в $H(X_{j+r-1}, X_{j-r})$ равен 0. Но уже образ элемента $\partial\beta$ в $H(X_{j-r})$ равен 0, потому что кусок $H(X_j) \rightarrow H(X_j, X_{j-r}) \rightarrow H(X_{j-r})$ написанной выше последовательности является частью точной последовательности пары (X_j, X_{j-r}) . Условие а) выполнено.

Проверим (б). Рассмотрим диаграмму

$$H(X_j, X_{j-r}) \xrightarrow{\partial} H(X_{j-r}) \rightarrow H(X_{j-r}, X_{j-2r}) \rightarrow H(X_{j-1}, X_{j-2r})$$

```

graph LR
    A[H(X_{j-1}, X_{j-r})] -- i1 --> B[H(X_j, X_{j-r})]
    B -- \partial' --> C[H(X_{j-r})]
    B -- i2 --> D[H(X_{j-1})]
    C -- i3 --> D
  
```

Пусть α — такой элемент из $H(X_j, X_{j-r})$, что $i_1(\beta) = \alpha$, где $\beta \in H(X_{j-1}, X_{j-r})$. Тогда $\partial'_0 \alpha = \partial'_0 i_1(\beta) = i_3 i_2 \partial'(\beta)$. Так как

$$H(X_{j-1}, X_{j-r}) \xrightarrow{\partial'} H(X_{j-r}) \xrightarrow{i_2} H(X_{j-1})$$

— часть точной последовательности пары (X_{j-1}, X_{j-r}) , то $i_2 \partial'(\beta) = 0$, а потому и $\partial'_0 \alpha = 0$. Условие b) выполнено.

Покажем теперь, что $\partial' \partial' = 0$, и даже больше, а именно, что $\partial'_0 \partial'_0 = 0$. Для этого рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} H(X_j, X_{j-r}) & \xrightarrow{\partial_1} & H(X_{j-r}) & \xrightarrow{i_1} & H(X_{j-r}, X_{j-2r}) & \longrightarrow & H(X_{j-1}, X_{j-2r}) \\ & & & & \downarrow \partial^1 & & \downarrow \partial_r \\ & & & & H(X_{j-2r}, X_{j-3r}) & \xleftarrow{i_3} & H(X_{j-2r}) \\ & & & & \uparrow \partial_2 & & \end{array}$$

Имеем $\partial'_0 \partial'_0 \alpha = i_3 i_2 \partial^1 \partial_1(\alpha)$. Полагаем $\beta = \partial_1(\alpha)$. Тогда, как и раньше, $\partial^1 i_1(\beta) = 0$, а потому $\partial'_0 \partial'_0 \alpha = 0$.

Остается доказать, что $H(E_r^j) \cong E_{r+1}^j$. Определим для каждого элемента $x_0 \in H(X_j, X_{j-r})$, для которого $\{x_0\} \in Z(E_r^j)$ (т. е. $\{\partial'_0 x_0\} = 0$), такой элемент $\{\omega_0\} \in E_{r+1}^j$, что соответствие $\{x_0\} \rightarrow \{\omega_0\}$ задает гомоморфизм группы $Z(E_r^j)$ в группу E_{r+1}^j , а затем покажем, что этот гомоморфизм надъективен, а его ядро совпадает с $B(E_r^j)$. Доказательство разобьем на три леммы.

Лемма 1. Пусть $\partial' \{x_0\} = 0$. Тогда существуют такие элементы $z_0 \in H(X_{j-1}, X_{j-r})$ и $\omega_0 \in H(X_j, X_{j-r-1})$, что $x_0 = \text{im } z_0 + \text{im } \omega_0$. (Напомним, что $\text{im } z_0$ обозначает образ элемента z_0 в $H(X_j, X_{j-r})$, аналогично для $\text{im } \omega_0$.)

Доказательство. Сначала рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} H(X_j, X_{j-r}) & \xrightarrow{\partial} & H(X_{j-r}, X_{j-2r}) & \rightarrow & H(X_{j-1}, X_{j-2r}) \\ & & \uparrow i & & \\ & & H(X_{j-r-1}, X_{j-2r}). & & \end{array}$$

Так как $\partial^r\{x_0\} = 0$, то по определению группы E_r^{j-r} найдется элемент $y_0 \in H(X_{j-r-1}, X_{j-2r})$, для которого образ разности $\partial x_0 - iy_0$ в $H(X_{j-1}, X_{j-2r})$ равен 0. Далее рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{c} H(X_j, X_{j-r}) \xrightarrow{\partial} H(X_{j-r}, X_{j-r-1}) \rightarrow H(X_{j-1}, X_{j-r-1}) \\ \uparrow \\ H(X_{j-r-1}, X_{j-r-1}). \end{array}$$

Поскольку $H(X_{j-r-1}, X_{j-r-1}) = 0$, легко видеть, что элемент ∂x_0 из $H(X_{j-r}, X_{j-r-1})$ имеет нулевой образ в $H(X_{j-1}, X_{j-r-1})$. В силу точности последовательности тройки $(X_{j-1}, X_{j-r}, X_{j-r-1})$ существует такой элемент $z_0 \in H(X_{j-1}, X_{j-r})$, что $\partial x_0 = \partial z_0$ в $H(X_{j-r}, X_{j-r-1})$. Очевидно, $\partial(x_0 - im z_0) = 0$ в $H(X_{j-r}, X_{j-r-1})$. В силу точности последовательности тройки $(X_j, X_{j-r}, X_{j-r-1})$ существует такой элемент $\omega_0 \in H(X_j, X_{j-r-1})$, что $x_0 - im z_0 = im \omega_0$, т. е. $x_0 = im z_0 + im \omega_0$. Доказательство закончено.

Определим теперь отображение из $Z(E_r^j)$ в E_{r+1}^j . Пусть $\{x_0\} \in Z(E_r^j)$ и x_0 — элемент в $H(X_j, X_{j-r})$, представляющий класс $\{x_0\}$. Согласно лемме 1, $x_0 = im z_0 + im \omega_0$, причем $\omega_0 \in H(X_j, X_{j-r-1})$ и

$$E_{r+1}^j = \frac{[im H(X_j, X_{j-r-1}) \text{ в } H(X_{j+r}, X_{j-r-1})]}{[im H(X_{j-1}, X_{j-r-1}) \text{ в } H(X_{j+r}, X_{j-r-1})]}.$$

Пусть $\{\omega_0\}$ — элемент в E_{r+1}^j , определенный элементом ω_0 . Покажем, что отображение $\{x_0\} \rightarrow \{\omega_0\}$ корректно определено.

Лемма 2. *Если $\{x_0\} = 0$, то $\{\omega_0\} = 0$.*

Доказательство. Мы должны доказать, что

а) если образ элемента x_0 в $H(X_{j+r-1}, X_{j-r})$ равен 0, то $\{\omega_0\} = 0$;

б) если $x_0 \in [im H(X_{j-1}, X_{j-r}) \text{ в } H(X_j, X_{j-r})]$, то $\{\omega_0\} = 0$.

Докажем (а). По лемме 1 $x_0 = im z_0 + im \omega_0$. Из условия непосредственно следует, что образ элемента x_0 в $H(X_{j+r}, X_{j-1})$ равен 0. Кроме того, образ

элемента z_0 в $H(X_{j+r}, X_{j-1})$ равен 0 в силу коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} H(X_{j-1}, X_{j-r}) & \xrightarrow{\quad} & H(X_{j+r}, X_{j-1}) \\ & \searrow & \nearrow \\ & H(X_{j-1}, X_{j-1}). & \end{array}$$

Тем самым образ элемента ω_0 в $H(X_{j+r}, X_{j-1})$ равен 0. Пусть $\bar{\omega}_0$ — образ элемента ω_0 относительно отображения $H(X_j, X_{j-r-1}) \rightarrow H(X_{j+r}, X_{j-r-1})$. Тогда образ элемента $\bar{\omega}_0$ в $H(X_{j+r}, X_{j-1})$ равен 0. В силу точности последовательности тройки $(X_{j+r}, X_{j-1}, X_{j-r-1})$ $\bar{\omega}_0$ принадлежит $[Im\ H(X_{j-1}, X_{j-r-1})]$ в $H(X_{j+r}, X_{j-r-1})$. Из определения группы E_{r+1}^j непосредственно следует, что $\{\omega_0\} = 0$, и утверждение а) доказано.

Чтобы доказать (б), заметим, что по предположению существует такой элемент z_0 в $H(X_{j-1}, X_{j-r})$, что $x_0 = im\ z'_0$. Тем самым $im\ \omega_0 = im(z'_0 - z_0)$, следовательно, образ элемента ω_0 в группе $H(X_j, X_{j-1})$ равен нулю. В силу точности гомологической последовательности тройки $(X_j, X_{j-1}, X_{j-r-1})$ существует такой элемент $u_0 \in H(X_{j-1}, X_{j-r-1})$, что $\omega_0 = im\ u_0$, а потому $\{\omega_0\} = 0$.

Леммы 1 и 2 показывают, что соответствие $\{x_0\} \rightarrow \{\omega_0\}$ задает гомоморфизм группы $Z(E_r^j)$ в группу E_{r+1}^j . Этот гомоморфизм надъективен, так как, имея $\{\omega_0\} \in E_{r+1}^j$, мы как раз выбираем такой элемент $x_0 \in H(X_j, X_{j-r})$, что $x_0 = im\ \omega_0$. Для завершения доказательства теоремы осталось показать, что ядром этого гомоморфизма будет $B(E_r^j)$.

Лемма 3. *Если $\{\omega_0\} = 0$, то $\{x_0\} \in B(E_r^j)$.*

Доказательство. $\{\omega_0\} = 0$ тогда и только тогда, когда существует такой элемент $u_0 \in H(X_{j-1}, X_{j-r-1})$, что образ элемента ω_0 в $H(X_{j+r}, X_{j-r-1})$ совпадает с образом элемента u_0 в $H(X_{j+r}, X_{j-r-1})$. Обозначим через \tilde{u}_0 и \tilde{z}_0 образы элементов u_0 и z_0 в $H(X_j, X_{j-r})$,

а через \bar{x}_0 , \bar{u}_0 и \bar{z}_0 — соответственно образы элементов x_0 , u_0 , z_0 в $H(X_{j+r}, X_{j-r})$. Очевидно, что $\bar{x}_0 = \bar{z}_0 + \bar{u}_0$. Образ элемента $r_0 = x_0 - \bar{u}_0 - \bar{z}_0$ в $H(X_{j+r}, X_{j-r})$ равен 0. В силу точности последовательности тройки (X_{j+r}, X_j, X_{j-r}) тогда $r_0 = \partial s_0$, где $s_0 \in H(X_{j+r}, X_j)$. Поэтому $x_0 = \partial s_0 + \bar{z}_0 + \bar{u}_0$. Если $\{\tilde{z}_0\}$ и $\{\tilde{u}_0\}$ — элементы из E_r^j , определенные элементами \bar{z}_0 и \bar{u}_0 , то легко видеть, что $\{\tilde{z}_0\} = \{\tilde{u}_0\} = 0$. Так как

$$E_r^{j+r} = \frac{[\operatorname{Im} H(X_{j+r}, X_j) \text{ в } H(X_{j+2r-1}, X_j)]}{[\operatorname{Im} H(X_{j+r-1}, X_j) \text{ в } H(X_{j+2r-1}, X_j)]},$$

то s_0 определяет элемент $\{s_0\} \in E_r^{j+r}$. Из определения оператора ∂^r следует, что $\{x_0\} = \partial^r \{s_0\}$. Тем самым $\{\omega_0\} = 0$ тогда и только тогда, когда $\{x_0\} \in \partial^r E_r^{j+r}$. Теорема доказана.

Заметим, что в ходе доказательства мы не пользовались всеми аксиомами теории гомологий (см. Стинрод и Эйленберг [1]). В частности, мы не использовали аксиому размерности. Независимость соотношения Лере $H(E_r^j) \cong E_{r+1}^j$ от этой аксиомы приводит к так называемой обобщенной теории гомологий, в которой отсутствует аксиома размерности. Заметим также, что доказательство соотношения Лере полностью алгебраично, не имеет явных ссылок на топологические пространства или непрерывные отображения. Теория спектральных последовательностей находит широкую область применения, которая не ограничивается только топологическими вопросами. Прежде чем переходить к приложению теории спектральных последовательностей к расслоениям Стинрода, сделаем несколько замечаний.

Если положить

$$E_{r,d}^j = \frac{[\operatorname{Im} H_d(X_j, X_{j-r}) \text{ в } H_d(X_{j+r-1}, X_{j-r})]}{[\operatorname{Im} H_d(X_{j-1}, X_{j-r}) \text{ в } H_d(X_{j+r-1}, X_{j-r})]},$$

то ∂^r будет гомоморфизмом, переводящим $E_{r,d}^j$ в $E_{r,d-1}^{j-r}$. Как и прежде,

$$Z(E_{r,d}^j)/B(E_{r,d}^j) \cong E_{r+1,d}^j.$$

Последовательность групп E_r^j с граничным оператором ∂_r^j из теоремы 1, в которой $H(E_r^j) \cong E_{r+1}^j$, называется *спектральной последовательностью*. Если существует такое число r_0 , что $\partial_r^j = 0$ для $r \geq r_0$, то последовательность называется *сходящейся*. Группы E_r^j для $r \geq r_0$ в таком случае обозначаются через E_∞^j и называются *пределыми группами* спектральной последовательности.

Упомянем, наконец, о спектральной последовательности в когомологиях. Здесь мы берем нормальный ряд, отличный от того, который брали в гомологиях, а именно

$$\begin{aligned} H^*(X, A) &= \ker(H^*(X, A) \rightarrow H^*(A, A)) \cong \\ &\cong \ker(H^*(X, A) \rightarrow H^*(X_1, A)) \cong \\ &\cong \ker(H^*(X, A) \rightarrow H^*(X_2, A)) \cong \dots \\ &\dots \cong \ker(H^*(X, A) \rightarrow H^*(X, A)) = 0, \end{aligned}$$

где \ker обозначает ядро соответствующего гомоморфизма. Положим

$$E_r^{*j} = \frac{\ker(H^*(X_{j+r-1}, X_{j-r}) \rightarrow H^*(X_{j-1}, X_{j-r}))}{\ker(H^*(X_{j+r-1}, X_{j-r}) \rightarrow H^*(X_j, X_{j-r}))}.$$

Как и раньше, можем показать, что $E_1^{*j} = H^*(X_j, X_{j-1})$, а E_∞^{*j} есть j -й фактор нормального ряда. Далее можно развить такую же теорию, как и в случае гомологий.

Одно из основных приложений спектральных последовательностей — выяснение связи между гомологическими (когомологическими) группами пространства, базы и слоя расслоения. Мы дадим только набросок метода.

Пусть X — расслоение над (конечно) триангулируемой базой (т. е. полиэдром) B со слоем F и проекцией π .

Предложение. *Любое расслоение над клеткой топологично.*

Доказательство см. Стинрод [1, стр. 67].