Пусть σ — какой-нибудь симплекс в B, $\partial\sigma$ — его граница. Возьмем его „раздутую“ границу $(\partial\sigma)_\tau$ и рассмотрим $\hat{\sigma} = \overline{\sigma - (\partial\sigma)_\tau}$. Например, на рис. 1 весь (замкнутый) треугольник соответствует σ, заштрихованная часть (включая границы) соответствует $(\partial\sigma)_\tau$, а внутренний (замкнутый) треугольник соответствует $\hat{\sigma}$.

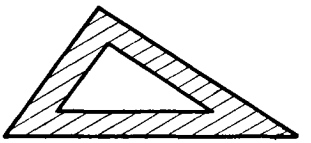

Рис. 1.

Согласно сформулированному только что предложению, $\pi^{-1}(\sigma) = \sigma \times F$, $\pi^{-1}(\partial\sigma) = \partial\sigma \times F$, $\pi^{-1}((\partial\sigma_\tau) = (\partial\sigma)_\tau \times F$. Так как $\partial\sigma$ — деформационный ретракт для $(\partial\sigma)_\tau$, то множество $\partial\sigma \times F = \pi^{-1}(\partial\sigma)$ будет деформационным ретрактом для $(\partial\sigma)_\tau \times F = \pi^{-1}((\partial\sigma)_\tau)$. Обозначим через X_j подмножество пространства X, лежащее над j-мерным остовом базы B, а через $(X_k)_\tau$ — подмножество, лежащее над объединением $(k-1)$-мерного остова базы B и раздутых границ симплексов размерности k. Тогда X_{j-1} будет деформационным ретрактом для $(X_{j-1})_\tau$ и потому $H(X_j, X_{j-1}) \cong H(X_j, (X_{j-1})_\tau)$.

Согласно аксиоме вырезания, $H(X_j, X_{j-1}) \cong H\left(\pi^{-1}\left(\bigcup_\alpha \hat{\sigma}^j_\alpha\right), \pi^{-1}\left(\bigcup_\alpha \partial\hat{\sigma}^j_\alpha\right)\right)$, где суммируются все j-мерные симплексы в B. Так как симплексы $\hat{\sigma}^j_\alpha$ не пересекаются, то

$$H\left(\pi^{-1}\left(\bigcup_\alpha \hat{\sigma}^j_\alpha\right), \pi^{-1}\left(\bigcup_\alpha \partial\hat{\sigma}^j_\alpha\right)\right) =$$

$$= \sum_\alpha \oplus H\left(\pi^{-1}(\hat{\sigma}^j_\alpha), \pi^{-1}(\partial\hat{\sigma}^j_\alpha)\right) = \sum_\alpha \oplus H(\hat{\sigma}^j_\alpha \times F, \partial\hat{\sigma}^j_\alpha \times F).$$

Элементарный подсчет с использованием теоремы Кюннета дает $\sum_\alpha \oplus H(\hat{\sigma}^j_\alpha \times F, \partial\hat{\sigma}^j_\alpha \times F) \cong \sum_\alpha \oplus H(F)$.

Возвращаясь к базе B, получаем

$$H(X_j, X_{j-1}) \cong C_j(B; H(F)),$$

где $C_j(B; H(F))$ — группа j-мерных цепей базы B с коэффициентами в $H(F)$.

Далее, пусть $X = X_n \supseteq X_{n-1} \supseteq \ldots$ — фильтрация пространства X, соответствующая фильтрации $B = B_n \supseteq B_{n-1} \supseteq \ldots$ комплекса B. Так как по определению $E_1^j = H(X_j, X_{j-1})$, полученный выше результат можно записать в виде

$$E_1^j \cong C_j(B; H(F)).$$

И, наконец,

$$E_2^j \cong H_j(B; H(F))\,^{1)}.$$

Эта формула является основным соотношением, к которому мы будем обращаться. Ее легко доказать с помощью соотношения Лере $H(E_r^j) \cong E_{r+1}^j$. Детали оставляем читателю.

---

[1]) Для выполнения этого соотношения необходимо, чтобы фундаментальная группа базы тривиально действовала на (ко)гомологиях слоя. В противном случае мы приходим к так называемым (ко)гомологиям с локальными коэффициентами. Подробнее об этом см., например, Фукс [1]. — *Прим. ред.*

Глава VI

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ КЛАССОВ

В этой главе мы познакомимся с гомотопической и когомологической теориями расслоений Стинрода. Многие стандартные теоремы мы только формулируем; доказательства см. Стинрод [1].

Основная цель этой главы — показать, что по крайней мере в некоторых отношениях изучение произвольного главного G-расслоения можно свести к изучению так называемого универсального G-расслоения. В частности, если G — одна из классических групп Ли: группа U_n унитарных матриц n-го порядка или группа O_n ортогональных матриц n-го порядка, — то базой соответствующего универсального расслоения будет грассманово многообразие $G_{n,\infty}$. В этом случае можно с помощью знания когомологической структуры многообразия $G_{n,\infty}$ определить и изучить классы Чжэня и Уитни произвольного главного U_n- или O_n-расслоения. В следующих главах мы продолжим исследование этих „характеристических классов". В конце главы мы коротко упомянем (и больше не будем к ним возвращаться) о классах Понтрягина.

Напомним некоторые факты о гомотопических группах (подробности см. Ху Сы-цзян [1, гл. IV]). Пусть X — топологическое пространство, A — его подпространство, $x_0 \in A$ — фиксированная точка. Обозначим через I^{n-1} грань куба $I^n = \{t \mid |t_i| \leqslant 1, i = 1, 2, \ldots, n\}$, определенную равенством $t_n = 0$, а через J^{n-1} — множество $\overline{\partial I^n - I^{n-1}}$. Рассмотрим множество $F^n(X, A, x_0)$ всех отображений f куба I^n в X, переводящих I^{n-1} в A и J^{n-1} в x_0. Сложение в этом множестве для $n > 1$ зададим формулой

$$(f+g)(t) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \ldots, t_n), & 0 \leqslant t_1 \leqslant \frac{1}{2}, \\ g(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_n), & \frac{1}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1, \end{cases}$$

где $f, g \in F^n(X, A, x_0)$. Назовем два отображения $f_0, f_1 \in F^n(X, A, x_0)$ эквивалентными, если существует гомотопия f_t, связывающая их и такая, что

$$f_t(I^{n-1}) \subseteq A, \ f_t(J^{n-1}) = x_0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Обозначим полученное таким образом множество классов эквивалентности через $\pi_n(X, A, x_0)$. Сложение в $F^n(X, A, x_0)$ индуцирует сложение в $\pi_n(X, A, x_0)$, которое и превращает $\pi_n(X, A, x_0)$ в группу. Эта группа называется *n-мерной относительной гомотопической группой пары (X, A) в точке x_0*; для $n \geqslant 3$ она абелева. В частности, если $A = x_0$, то пишут $\pi_n(X, x_0, x_0) = \pi_n(X, x_0)$ и называют эту группу n-мерной *абсолютной гомотопической группой пространства X в точке x_0*; эта группа абелева для $n \geqslant 2$. При $n = 1$ получаем *фундаментальную группу* $\pi_1(X, x_0)$ пространства X в точке x_0. Если пространства X и A линейно связны, то n-мерные гомотопические группы в любых двух точках x_0, x_1 изоморфны. В этом случае мы будем писать $\pi_n(X, A)$ вместо $\pi_n(X, A, x_0)$.

Можно сказать, что отображение $f\colon (X, A, x_0) \to (Y, B, y_0)$, для которого $f(A) \subseteq B$ и $f(x_0) = y_0$, индуцирует гомоморфизм

$$f_*\colon \pi_n(X, A, x_0) \to \pi_n(Y, B, y_0).$$

Если $f \in F^n(X, A, x_0)$, то его сужение на грань I^{n-1} определяет элемент в $\pi_{n-1}(A, x_0)$ и тем самым гомоморфизм

$$\partial\colon \pi_n(X, A, x_0) \to \pi_{n-1}(A, x_0),$$

называемый граничным гомоморфизмом.

Лемма 1. *Последовательность гомотопических групп пары (X, A)*

$$\ldots \to \pi_n(X, A) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \pi_{n-1}(X) \xrightarrow{j_*} \to \pi_{n-1}(X, A) \to \ldots$$

точна.

Здесь i_* и j_* — гомоморфизмы, индуцированные вложениями i, j.

Замечание. Существует полезное обобщение этого понятия гомотопической последовательности на случай тройки (X, A, B), где $X \supseteq A \supseteq B$ и $x_0 \in B$:

$$\ldots \to \pi_n(A, B) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, B) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A) \xrightarrow{\tilde{\partial}} \to \pi_{n-1}(A, B) \to \ldots \to \pi_2(X, A),$$

где i, j — вложения, а $\tilde{\partial}$ — композиция гомоморфизмов

$$\pi_n(X, A) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A) \xrightarrow{k_*} \pi_{n-1}(A, B),$$

где k — вложение. Из леммы 1 без особых трудностей следует, что это последовательность точна.

Займемся теперь гомотопическими свойствами расслоений Стинрода. Ключевое свойство, которым обладает расслоение Стинрода и на которое опираются последующие теоремы, дает

Теорема 1 (о накрывающей гомотопии) (Стинрод [1, стр. 63—67] и Ху Сы-цзян [1, стр. 89]). *Пусть X — расслоение Стинрода над B с проекцией p и f: $K \to X$ — отображение „хорошего" пространства* (например, конечного комплекса) *в X. Если существует гомотопия g_t: $K \to B$ с $g_0 = p \circ f$, то существует гомотопия f_t: $K \to X$ с $f_0 = f$, $p \circ f_t = g_t$.*

С помощью этой теоремы и леммы 1 построим *точную гомотопическую последовательность расслоения* (Стинрод [1, стр. 110]). Возьмем $x_0 \in X$, $b_0 = p(x_0)$, $F_0 = p^{-1}(b_0)$, причем F_0 гомеоморфно слою F. По теореме 1 отображение p_*: $\pi_n(X, F_0, x_0) \to \pi_n(B, b_0, b_0)$ — изоморфизм для $n \geqslant 2$. Тогда композиция $\Delta = \partial \circ p_*^{-1}$, где ∂: $\pi_n(X, F_0) \to \pi_{n-1}(F_0)$ — граничный гомоморфизм, будет гомоморфизмом из $\pi_n(B, b_0)$ в $\pi_{n-1}(F_0, x_0)$. Тем самым точная последовательность пары (X, F_0) (см. лемму 1) превращается в точную последовательность

$$\ldots \xrightarrow{\Delta} \pi_n(F_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B) \xrightarrow{\Delta} \pi_{n-1}(F_0) \xrightarrow{i_*} \ldots$$
$$\ldots \xrightarrow{p_*} \pi_2(B) \xrightarrow{\Delta} \pi_1(F_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B).$$

Определение 1. Расслоение ξ называется *главным* G-расслоением, если a) слой F представляет собой группу G и b) G действует на себе левыми сдвигами.

Пусть ξ — расслоение с базой B, группой G и слоем F. Расслоение ξ с той же базой B, теми же координатными окрестностями $\mathscr{U}_\alpha$, теми же отображениями $U_b(\alpha, \beta)$ и той же группой G, что и у ξ, но у которого роль слоя F играет группа G, действующая на себе левыми сдвигами, называется *ассоциированным главным расслоением.*

Замечание. Обратим внимание на то, что с точностью до эквивалентности существует взаимно однозначное соответствие между структурами G-расслоения с базой B и главными G-расслоениями над B. Это следует из того, что для данной структуры G-расслоения над B существует единственный путь построения главного G-расслоения над B (см. теорему существования в гл. IV).

Теорема 2 (о групповых расслоениях) (Стинрод [1, стр. 39]). *Пусть G — топологическая группа, H и K — ее замкнутые подгруппы, причем $K \subset H, K \neq H$. Пусть H допускает локальное сечение*[1]). *Если p — отображение, порожденное вложением классов смежности, то G/K будет расслоением над G/H с проекцией p, слоем H/K и группой H/K_0, действующей на H/K левыми сдвигами (K_0 — максимальный нормальный делитель группы H, лежащий в K). Кроме того, любые два локальных сечения приводят к эквивалентным расслоениям. Наконец, левые сдвиги расслоения G/K на элементы группы G будут отображениями этого расслоения на себя.*

В частности, если $K = \{e\}$, то G будет главным расслоением над G/H со слоем и группой H.

В дальнейшем нам понадобится

[1]) *Локальным сечением* группы H в группе G называется такое непрерывное отображение f некоторой окрестности V точки $x_0 \in G/H$ в группу G, что $pf(x) = x$ для всех $x \in V$. — *Прим. перев.*

Лемма 2. *Если O_m — группа ортогональных преобразований евклидова пространства E^m, то пространство O_N/O_n „асферично“ для всех $k<n$, т. е. $\pi_k(O_N/O_n)=0$ для $k<n$.*

(Заметим, что пространство O_N/O_n линейно связно, поскольку O_N имеет две компоненты, а O_n содержит матрицы как с положительным, так и отрицательным определителями.)

Доказательство. Так как O_m — группа Ли, то она допускает локальное сечение. Далее, $O_n \subset O_{n+1} \subset \subset O_{n+2} \subset \ldots \subset O_N$.

По теореме 2 O_N/O_n будет расслоением над O_N/O_{n+1} со слоем $O_{n+1}/O_n = S^n$, причем $\pi_k(S^n)=0$, если $k<n$. В точной последовательности этого расслоения каждый третий член равен нулю. Поэтому

$$\pi_k(O_N/O_n) \cong \pi_k(O_N/O_{n+1}), \qquad k<n.$$

Повторяя это рассуждение, получаем

$$\pi_k(O_N/O_n) \cong \pi_k(O_N/O_{n+1}) \cong \ldots \cong \pi_k(O_N/O_N) = 0.$$

Аналогично доказывается

Лемма 2′. *Если U_n — группа всех унитарных преобразований пространства $\mathbb{C}^n$, то*

$$\pi_k(U_N/U_n) = 0 \quad \textit{при} \quad k<2n+1.$$

Определение 2. Напомним, что k-репер в E^N — это упорядоченная система k независимых векторов в E^N. Множество всех ортонормированных $(N-n)$-реперов в E^N называется *многообразием Штифеля* $V_{N-n,\,N}$.

Очевидно, что группа O_N действует транзитивно на $V_{N-n,\,N}$. Подгруппа, оставляющая на месте какой-нибудь определенный репер f_0^{N-n}, есть не что иное, как группа $O_{N-(N-n)} = O_n$, действующая в пространстве, ортогональном ко всем векторам из f_0^{N-n}. Тем самым $V_{N-n,\,N} = O_N/O_n$.

Если рассматривать вместо E^N пространство $\mathbb{C}^N$, то аналогично можно определить $V^{\mathbb{C}}_{N-n,\,N}$. Очевидно, что $V^{\mathbb{C}}_{N-n,\,N} = U_N/U_n$.

Так как $O_n \subseteq O_n \times O_m$ и по теореме 2 $V_{m,\,n+m} = O_{n+m}/O_n$ — расслоение над $O_{n+m}/(O_n \times O_m) = G_{m,\,m+n}$ со слоем $(O_m \times O_n)/O_n \cong O_m$ и группой $(O_m \times O_n)/O_n \cong O_m$, то многообразие Штифеля $V_{m,\,m+n}$ является главным расслоением над многообразием Грассмана $G_{m,\,m+n}$ с группой O_m и слоем O_m[1]).

Определение 3. Пусть ξ — главное расслоение над пространством B с группой G. Оно называется *n-универсальным* для группы G, если для любого n-комплекса K и его подкомплекса L, главного расслоения ξ' над K с группой G и отображения расслоений $f\colon \xi'|_L \to \xi$ существует продолжение отображения f до отображения $\xi' \to \xi$.

Если η — расслоение (X, A, p, G) и $\hat{A} \subset A$, то можно построить очевидным образом расслоение

$$\hat{\eta} = \left(p^{-1}(\hat{A}), \hat{A},\ p|_{p^{-1}(\hat{A})},\ G\right).$$

n-универсальные расслоения

Теорема 3 (Стинрод [1, стр. 124]). *Главное G-расслоение ξ с пространством X будет n-универсальным тогда и только тогда, когда $\pi_i(X) = 0$ для $0 \leqslant i < n$.*

(Заметим, что $\pi_0(X) = 0$ означает, что X линейно связно.)

Следствие. *Вещественное (комплексное) многообразие Грассмана $G_{m,\,n}$ с определенной над ним структурой O_m-расслоения (U_m-расслоения) является*

---

[1]) Проекция этого расслоения имеет простой геометрический смысл: каждому реперу сопоставляется плоскость, порожденная векторами репера. Слой состоит из всех ортонормированных m-реперов в данной m-плоскости и естественно отождествляется с группой O_m. — *Прим. перев.*

$(n-m)$-универсальным O_m-расслоением ($[2(n-m)+1]$-*универсальным U_m-расслоением*).

Доказательство. Выше мы показали, что $V_{m,n}$ является главным O_m-расслоением над $G_{m,n}$ и $\pi_k(V_{m,n})=0$ при $0\leqslant k<n-m$. Аналогично для комплексного случая.

Определение 4. Рассмотрим последовательность естественных вложений $E^m\subseteq E^{m+1}\subseteq\ldots$, индуцирующую последовательность вложений $V_{m,m}\subseteq\subseteq V_{m,m+1}\subseteq\ldots$. Обозначим через $V_{m,\infty}$ прямой предел второй последовательности, т. е. $V_{m,\infty}$ — *множество ортогональных m-реперов в E^∞*.

Определение 5. Множество $V_{m,\infty}$ можно рассматривать как главное O_m-расслоение над $G_{m,\infty}$ (U_m-расслоение в комплексном случае). Это расслоение r-универсально для O_m-расслоений (U_m-расслоений) для всех целых чисел $r>0$. Пространство $G_{m,\infty}$ называется *универсальным классифицирующим пространством* для O_m-расслоений (U_m-расслоений). Главное расслоение над $G_{m,\infty}$ обозначим через α_m.

Теорема 4 (классификационная) (Стинрод [1, стр. 123]). *Пусть ξ будет $(n+1)$-универсальным расслоением с базой B и пространством X, K — некоторым n-мерным комплексом. Пусть $\pi_k(X)=0$ $(0\leqslant k\leqslant n)$. Операция, относящая каждому отображению $f\colon K\to B$ индуцированное расслоение над K, устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами эквивалентности главных G-расслоений над K и гомотопическими классами отображений из K в B.*

Следствие. *Структуры O_m-расслоений (U_m-расслоений) над комплексом K конечной размерности взаимно однозначно соответствуют гомотопическим классам отображений $K\to G^{\mathbb{R}}_{m,\infty}$ $(K\to G^{\mathbb{C}}_{m,\infty})$.*

Определение 6. Напомним, что отображение $\varphi\colon X\to Y$ индуцирует отображение φ^* колец когомологий $H^*(Y)\to H^*(X)$ и отображение $\varphi^\dagger$ структур

G-расслоений над Y в структуры G-расслоений над X. Пусть Γ — отображение, сопоставляющее каждой структуре ξ G-расслоения над произвольным пространством Y элемент кольца $H^*(Y; C)$ так, что $\Gamma(\varphi^+\xi) = \varphi^*\Gamma(\xi)$ для всех пространств X, Y и всех непрерывных отображений φ: $X \to Y$. Тогда Γ называется *C-когомологическим инвариантом структур G-расслоения*. Здесь C — коммутативное кольцо (группа) коэффициентов для когомологий.

Пример когомологического инварианта. Пусть β будет O_m-расслоением над триангулируемым пространством B со слоем F и пространством расслоения X. Пусть $\pi_i(F) = 0$ для $i \leqslant n-1$ $(n > 1)$. Обозначим через B^k k-остов пространства B, через σ^{k+1} $(k+1)$-мерный симплекс в B и через $\partial\sigma^{k+1}$ — его границу (гомеоморфную k-мерной сфере S^k).

Мы хотим узнать, можно ли сечение расслоения φ, определенное на B^k, продолжить на B^{k+1}. Сужение расслоения β на клетку σ^{k+1} тривиально, ибо всякое расслоение над клеткой тривиально. Поэтому $\varphi|_{\partial\sigma^{k+1}}$ будет отображением $\partial\sigma^{k+1} \to \partial\sigma^{k+1} \times F$, заданным равенством $\varphi(c) = (c, f)$ и, следовательно, будет определять отображение (назовем его тоже φ) $\partial\sigma^{k+1} \to F$. Так как $\partial\sigma^{k+1}$ гомеоморфно сфере S^k и слой F односвязен, то φ определяет некоторый элемент α_σ в $\pi_k(F)$. Легко видеть, что φ можно продолжить на σ^{k+1} тогда и только тогда, когда $\alpha_\sigma = 0$. Поэтому при $k \leqslant n-1$ его можно продолжить на все B^{k+1}.

Если $k = n$, то указанная операция сопоставления каждой клетке σ^{k+1} элемента α_σ в $\pi_k(F)$ определяет $(k+1)$-коцепь α на B. Можно показать, что α — коцикл и он не зависит от последовательных продолжений отображения φ в низших размерностях. Поэтому можно было начать с отображения φ, заданного произвольным образом на B^0. Таким образом, очевидно, что каждому β можно сопоставить единственный элемент в $H^{n+1}(B; \pi_n(F))$; обозначим его через $\mathrm{obst}_{n+1}(\beta, F)$.

Отображение obst структур O_m-расслоений над B в $H^{n+1}(B; \pi_n(F))$ является $\pi_n(F)$-когомологическим инвариантом структур O_m-расслоения [1]).

Теорема 5. *Множество S $\mathbb{Z}$-когомологических инвариантов структур U_m-расслоения взаимно однозначно соответствует множеству классов когомологий пространства $G^{\mathbb{C}}_{m,\infty}$ с целыми коэффициентами.*

Доказательство. Напомним, что $V^{\mathbb{C}}_{m,\infty}$ — главное U_m-расслоение над $G^{\mathbb{C}}_{m,\infty}$. Пусть α_m — соответствующая ему структура и Γ — элемент из S. Тем самым $\Gamma(\alpha_m)$ представляет собой элемент γ кольца когомологий $H^*(G^{\mathbb{C}}_{m,\infty}, \mathbb{Z})$. Пусть β_1 — структура U_m-расслоения с базой B. По теореме 4 существует такое отображение φ (единственное с точностью до гомотопии) из B в $G^{\mathbb{C}}_{m,\infty}$, что $\beta_1 = \varphi^\dagger(\alpha_m)$; тогда

$$\Gamma(\beta_1) = \Gamma(\varphi^\dagger\alpha_m) = \varphi^*\Gamma(\alpha_m) = \varphi^*(\gamma).$$

Если Γ' — другой когомологический инвариант, для которого $\Gamma'(\alpha_m) = \gamma$, то $\Gamma'(\beta_1) = \varphi^*(\gamma)$ и потому $\Gamma(\beta_1) = \Gamma'(\beta_1)$ для всех пространств B и структур β_1 U_m-расслоения, т. е. $\Gamma = \Gamma'$.

Обратно, пусть γ — любой элемент из $H^*(G^{\mathbb{C}}_{m,\infty}, \mathbb{Z})$. Мы хотим определить некоторый элемент Γ_γ в S, который соответствовал бы γ. Пусть B — любое пространство, ξ — структура U_m-расслоения над B. Тогда существует такое отображение φ (единственное с точностью до гомотопии) из B в $G^{\mathbb{C}}_{m,\infty}$, что $\xi = \varphi^\dagger(\alpha_m)$. Положим $\Gamma_\gamma(\xi) = \varphi^*(\gamma) \in H^*(B, \mathbb{Z})$. Легко проверить, что Γ_γ будет $\mathbb{Z}$-когомологическим инвариантом структур U_m-расслоения. Мы должны показать, что если $\Gamma_\gamma = \Gamma_{\gamma'}$, то $\gamma = \gamma'$. Очевидно, достаточно показать, что $\Gamma_\gamma(\alpha_m) = \gamma$. Но это ясно, поскольку, если i — тождественное отображение $G^{\mathbb{C}}_{m,\infty} \to G^{\mathbb{C}}_{m,\infty}$, то $i^\dagger$ и i^* — также тождественные отображения. Теорема доказана.

---

[1]) Этот инвариант называют также $(n+1)$-*м препятствием* (к построению сечения). Отсюда и происходит символ obst — *obstacle* (*препятствие*). — *Прим. перев.*

Так как классы Чжэня $c_j \in H^{2j}(G_{m,\infty}, \mathbb{Z})$ составляют множество образующих кольца $H^*(G_{m,\infty}, \mathbb{Z})$, мы получаем

Следствие. *Каждый $\mathbb{Z}$-когомологический инвариант структур U_m-расслоения можно единственным образом отождествить с линейной комбинацией $\smile$-произведений классов Чжэня.*

Теорема 6. *Множество S' $\mathbb{Z}_2$-когомологических инвариантов структур O_m-расслоения взаимно однозначно соответствует множеству классов когомологий пространства $G^{\mathbb{R}}_{m,\infty}$ с коэффициентами из $\mathbb{Z}_2$.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 5.

Следствие. *Каждый $\mathbb{Z}_2$-когомологический инвариант структур O_m-расслоения можно единственным образом отождествить с линейной комбинацией $\smile$-произведений классов Уитни.*

Определение 7. Пусть $\xi = (X, B, U_m, p)$ — главное U_m-расслоение с базой B, пространством X и проекцией p. Так как $G^{\mathbb{C}}_{m,\infty}$ — универсальное классифицирующее пространство, то существует такое отображение ψ: $B \to G^{\mathbb{C}}_{m,\infty}$ (единственное с точностью до гомотопии), что $\xi = \psi^{+}(\alpha_m)$, где $\alpha_m = (V_{m,\infty}, G_{m,\infty}, U_m, p_m)$. Это отображение индуцирует отображение ψ^* из $H^*(G^{\mathbb{C}}_{m,\infty})$ в $H^*(X)$. Заметим, что если ψ и $\tilde{\psi}$ гомотопны, то $\psi^* = \tilde{\psi}^*$. Таким образом, ψ^* определено расслоением ξ и не зависит от отображения ψ, а потому можно определить *класс Чжэня $c_j(\xi)$ главного расслоения* ξ, полагая $c_j(\xi) = \psi^*(c_j)$, где c_j есть j-й класс Чжэня расслоения α_m. Кстати, $c_j(\xi)$ принадлежит $H^{2j}(X)$.

Назовем *классами Чжэня* произвольного *U_m-расслоения* классы Чжэня ассоциированного главного расслоения.

Определение 8. Элемент $c(\xi) = 1 + c_1(\xi) + \ldots + c_m(\xi)$ называется *полным классом Чжэня расслоения* ξ.

Аналогично определяются *классы Уитни O_m-расслоений* и *полный класс Уитни O_m-расслоений* с помощью вещественного многообразия Грассмана $G^{\mathbb{R}}_{m,\infty}$ и его кольца когомологий с коэффициентами из $\mathbb{Z}_2$.

Сопряженное расслоение

Пусть ξ — структура U_m-расслоения над B с координатными окрестностями $\mathcal{N}_i$ и координатными преобразованиями $U_b(i, j)$. Каждое координатное преобразование принадлежит U_m и может рассматриваться как унитарная $(m \times m)$-матрица. Пусть $\bar{U}_b(i, j)$ — ее комплексно сопряженная матрица, также принадлежащая U_m. Структура $\bar{\xi}$ расслоения над B с координатными окрестностями $\mathcal{N}_i$ и координатными преобразованиями $\bar{U}_b(i, j)$ называется *сопряженной* по отношению к ξ.

Найдем связь между классами Чжэня структур ξ и $\bar{\xi}$. Структура ξ индуцирована отображением φ: $B \to G_{m,\infty}$. Рассмотрим отображение

$$C\colon\ G_{m,\infty} \to G_{m,\infty},$$

сопоставляющее элементу $\pi \in G_{m,\infty}$ (где π есть m-плоскость в E^∞, проходящая через начало координат) комплексно сопряженный ему элемент $\bar{\pi} \in G_{m,\infty}$. Композиция

$$C \circ \varphi\colon\ B \to G_{m,\infty}$$

индуцирует структуру $\bar{\xi}$. Пусть отображение

$$C'\colon\ P_n^{(1)} \times P_n^{(2)} \times \ldots \times P_n^{(m)} \to P_n^{(1)} \times P_n^{(2)} \times \ldots \times P_n^{(m)}$$

задано равенством

$$C'\left((z^{(1)},\ z^{(2)},\ \ldots,\ z^{(m)})\right) = (\bar{z}^{(1)},\ \bar{z}^{(2)}.\ \ldots,\ \bar{z}^{(m)}).$$

В гл. III, стр. 72 мы обозначили отображение $P_n^{(1)} \times \ldots \times P_n^{(m)} \to G_{m,m(n+1)}$ через N. Обозначим через $\tilde{N}$ его композицию с отображением вложения $G_{m,m(n+1)} \to$

$\to G_{m,\infty}$. Легко видеть, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} P_n^{(1)} \times \ldots \times P_n^{(m)} & \xrightarrow{\tilde{N}} & G_{m,\infty} \\ \downarrow{\scriptstyle C'} & & \downarrow{\scriptstyle C} \\ P_n^{(1)} \times \ldots \times P_n^{(m)} & \xrightarrow{\tilde{N}} & G_{m,\infty} \end{array}$$

коммутативна.

Далее, клеточное разбиение пространства P_n задается последовательностью вложений

$$P_n \supseteq P_{n-1} \supseteq \ldots \supseteq P_1 \supseteq P_0.$$

Ясно, что C' переводит гомеоморфно каждую клетку из P_n на себя, но, возможно, с изменением ориентации. Исследуя координаты на P_j, нетрудно увидеть, что в действительности C' отображает P_j на себя гомеоморфно со степенью $(-1)^j$. Поэтому индуцированное отображение классов когомологий переводит класс t^j в $(-1)^j t^j$, где t — образующая кольца $H^*(P_n, \mathbb{Z})$. В силу коммутативности приведенной выше диаграммы C^* оказывает такое же действие на $H^*(G_{m,\infty})$, что и C'^* на $H^*(P_n^{(1)} \times \ldots \times P_n^{(m)})$. Кроме того, $c_j(\xi) = \psi^*(c_j)$, где ψ — отображение из определения 7, и

$$c_j(\xi) = (C \circ \psi)^*(c_j) = \psi^* C^*(c_j) = \psi^*((-1)^j c_j).$$

Таким образом,

$$c_j(\xi) = (-1)^j c_j(\xi). \qquad (*)$$

Классы Понтрягина

Пусть γ — структура O_m-расслоения над B с координатными окрестностями $\mathcal{N}_i$ и координатными преобразованиями $U_b(i, j)$. Как и прежде, $U_b(i, j)$ рассматривается как вещественная ортогональная $(m \times m)$-матрица. „Расширим“ структурную группу, считая O_m подгруппой группы U_m, а $U_b(i, j)$ — элементом из U_m.

Тогда мы получим структуру γ^c U_m-расслоения над B. Очевидно, что $\gamma^c = \bar{\gamma}^c$. Поэтому, согласно формуле (*),

$$c_j(\gamma^c) = c_j(\bar{\gamma}^c) = (-1)^i c_j(\gamma^c).$$

Тем самым $2c_j(\gamma^c) = 0$, если j нечетно. Определим *классы Понтрягина* $p_j(\gamma)$ структуры γ O_m-расслоения, полагая

$$p_j(\gamma) = c_{2j}(\gamma^c).$$

Ясно, что $p_j(\gamma)$ — элемент группы $H^{4j}(B; \mathbb{Z})$.

Глава VII

РИМАНОВА ГЕОМЕТРИЯ. ПРИЛОЖЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ КЛАССОВ

Сначала мы коснемся некоторых аспектов римановой геометрии, а затем рассмотрим приложения изложенной ранее теории к некоторым геометрическим задачам (подробности см. Милнор [1]).

Напомним, что векторное поле V на многообразии M представляет собой линейное отображение в себя алгебры $C^\infty(M)$ определенных на M вещественнозначных функций класса C^∞, удовлетворяющее равенству $V(\varphi\psi) = (V\varphi)\psi + \varphi(V\psi)$ для $\varphi, \psi \in C^\infty(M)$. Если U и V — два векторных поля, то скобка Пуассона $[U, V] = UV - VU$ также будет векторным полем. Обозначим через $D^1(M)$ (или просто D^1) множество всех векторных полей на M.

Определение 1. *Римановой метрикой* на M называется билинейное отображение g: $D^1 \times D^1 \to C^\infty(M)$,

a) локальное, т. е. $g(\varphi U, \psi V) = \varphi\psi g(U, V)$ для $U, V \in D^1$ и $\varphi, \psi \in C^\infty(M)$;

b) симметричное, т. е. $g(U, V) = g(V, U)$ для $U, V \in D^1$;

c) положительно определенное, т. е. $g(U, U) \geqslant 0$ и $g(U, U) = 0 \Leftrightarrow U = 0$.

Определение 2. *Аффинной связностью* на M называется билинейное отображение $\vdash$: $D^1 \times D^1 \to D$ (мы будем писать $V \vdash U$ вместо $\vdash (U, V)$), для которого

a) $$\varphi V \vdash U = \varphi(V \vdash U),$$

b) $$V \vdash \varphi U = (V\varphi)\, U + \varphi(V \vdash U).$$

Определение 3. Аффинная связность называется *симметричной*, если $(V \vdash U) - (U \vdash V) = [V, U]$ для $U, V \in D^1$.

Определение 4. Аффинная связность называется *совместной с данной метрикой* g, если

$$W(U \circ V) = (W \vdash U) \circ V + U \circ (W \vdash V) \text{ для } U, V, W \in D^1.$$

(Здесь $U \circ V$ означает $g(U, V)$).

Посмотрим, что представляют собой введенные понятия в локальных координатах. Положим $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j) = \partial_i \circ \partial_j$, где $\partial_i = \partial/\partial x_i$. Тем самым, если $U = u^i \partial_i$, $V = v^j \partial_j$ (мы опускаем, как общепринято, знак суммирования), то $g(U, V) = g_{ij} u^i v^j$. Если $\partial_j \vdash \partial_i = \Gamma^k_{ij} \partial_k$, то

$$V \vdash U = v^j \partial_j \vdash u^i \partial_i = v^j (\partial_j \vdash u^i \partial_i) =$$
$$= v^j (u^i \partial_j \vdash \partial_i + (\partial_j u^i) \partial_i) = v^j (u^i \Gamma^k_{ji} \partial_k + (\partial_j u^i) \partial_i) =$$
$$= (v^j u^i \Gamma^k_{ji} + v^j \partial_j u^k) \partial_k.$$

Нетрудно проверить, что связность симметрична тогда и только тогда, когда $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$.

Теорема 1. *Пусть M — риманово многообразие, т. е. многообразие с заданной римановой метрикой g. Тогда на M существует одна и только одна симметричная связность, совместная с g.*

Доказательство. Сначала докажем единственность. Пусть $\vdash$ — связность на M, обладающая требуемыми свойствами. Локально она полностью определена функциями Γ^k_{ij}. Выразим равенство из определения 4 в локальных координатах. Левая часть равна $w^k (\partial_k (g_{ij} u^i v^j))$, где $W = w^k \partial_k$. Правая часть равна

$$(w^k u^i \Gamma^l_{ki} + (\partial_k u^l) w^k) \partial_l \circ v^j \partial_j +$$
$$+ u^i \partial_i \circ (w^k v^j \Gamma^l_{kj} + (\partial_k v^l) w^k) \partial_l =$$
$$= g_{lj} \{u^i v^j w^k \Gamma^l_{ik} + v^j w^k \partial_k u^l\} +$$
$$+ g_{il} \{u^i v^j w^k \Gamma^l_{kj} + u^i w^k \partial_k v^l\}.$$

Положим $\Gamma_{\rho\sigma\tau} = g_{\rho l} \Gamma^l_{\sigma\tau}$. Тогда $\Gamma^\rho_{\sigma\tau} = g^{\rho l} \Gamma_{l\sigma\tau}$, где матрица $\| g^{ij} \|$ — обратная к матрице $\| g_{ij} \|$ (положительно определенной и, следовательно, обратимой).

Так как

$$w^k(\partial_k(g_{ij}u^iv^j)) = \\ = w^k\{(\partial_k g_{ij})u^iv^j + g_{ij}u^i(\partial_k v^j) + g_{ij}v^j(\partial_k u^i)\},$$

то

$$\{(\partial_k g_{ij})u^iv^jw^k\} + \{g_{ij}u^iw^k(\partial_k v^j) + g_{ij}v^jw^k(\partial_k u^i)\} = \\ = \{g_{lj}\Gamma^l_{ki}u^iv^jw^k + g_{li}\Gamma^l_{kj}u^iv^jw^k\} + \\ + \{g_{ij}u^iw^k(\partial_k v^j) + g_{ij}v^jw^k(\partial_k u^i)\},$$

т. е. $\partial_k g_{ij} = \Gamma_{jki} + \Gamma_{ikj}$. Обозначим $\partial_\alpha g_{\beta\gamma}$ через $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ и $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$ через $[\alpha\beta\gamma]$. Полученное равенство приобретает вид $\{kij\} = [jki] + [ikj]$, откуда с помощью циклической перестановки индексов получаем

$$\{ijk\} = [kij] + [jik], \qquad \{jki\} = [ijk] + [kji].$$

В силу симметричности связности $[\alpha\beta\gamma] = [\alpha\gamma\beta]$. Тем самым

$$[ijk] = (\{kij\} + \{jki\} - \{ijk\})/2,$$

или

$$\Gamma_{ijk} = (\partial_k g_{ij} + \partial_j g_{ki} - \partial_i g_{jk})/2,$$

поэтому

$$\Gamma^i_{jk} = (\partial_k g_{\alpha j} + \partial_j g_{k\alpha} - \partial_\alpha g_{jk})g^{\alpha i}/2,$$

что и доказывает единственность.

Чтобы доказать существование, определим Γ^i_{jk} полученной формулой. Легко проверить, что заданная таким образом связность удовлетворяет всем требованиям.

Определение 5. *Ковариантным n-тензорным полем* на многообразии M называется такое n-линейное отображение

$$T\colon \underbrace{D^1 \times \ldots \times D^1}_{n} \to C^\infty(M),$$

что

$$T(\varphi_1 U_1, \ldots, \varphi_n U_n) = \varphi_1 \ldots \varphi_n T(U_1, \ldots, U_n),$$

т. е. это отображение локально (значение $T(U_1, \ldots, U_n)$ в точке x зависит только от значений $U_1, \ldots, U_n$ в этой точке).

Риманова метрика является ковариантным 2-тензорным полем. Построим теперь два других важных тензорных поля.

1. *Ковариантная производная ковариантного n-тензорного поля T.* Положим

$$DT(U_1, \ldots, U_n, W) = W(T(U_1, \ldots, U_n)) - \\ - T(W \vdash U_1, U_2, \ldots, U_n) - \\ - T(U_1, W \vdash U_2, \ldots, U_n) - \ldots \\ \ldots - T(U_1, \ldots, U_{n-1}, W \vdash U_n).$$

Очевидно, что поле DT $(n+1)$-линейно, и нетрудно показать, что оно локально.

Если $t_{i_1 \ldots i_n}$ — координаты поля T, то координатами поля DT будут

$$t_{i_1 \ldots i_n; j} = \partial_j (t_{i_1 \ldots i_n}) - t_{\alpha i_2 \ldots i_n} \Gamma^{\alpha}_{i_1 j} - \\ - t_{i_1 \alpha i_3 \ldots i_n} \Gamma^{\alpha}_{i_2 j} - \ldots - t_{i_1 \ldots i_{n-1} \alpha} \Gamma^{\alpha}_{i_n j}.$$

2. *Тензор римановой кривизны.* Положим

$$[R(U, V) W] \circ Z = \\ = \{U \vdash (V \vdash W) - V \vdash (U \vdash W) - [U, V] \vdash W\} \circ Z.$$

Очевидно, что поле R 4-линейно, и нетрудно показать, что оно локально. Если положить $R(\partial_j, \partial_k)\partial_i = R^m_{ijk}\partial_m$, то легко проверить, что

$$R^l_{ijk} = \partial_j \Gamma^l_{ik} - \partial_k \Gamma^l_{ij} + \Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{mj} - \Gamma^m_{ij}\Gamma^l_{mk}.$$

Полагая

$$R_{hijk} = g_{hm} R^m_{ijk} = [R(\partial_j, \partial_k) \cdot \partial_i] \circ \partial_h,$$

получаем

$$R_{hijk} = \frac{1}{2}(g_{hk, ij} + g_{ij, hk} - g_{hj, ik} - g_{ik, hj}) + \sum,$$

где $\sum$ — сумма членов, содержащих первые производные тензора метрики, а $g_{\alpha\beta, \gamma\delta} = \partial^2 g_{\alpha\beta}(x)/\partial x^{\gamma} \partial x^{\delta}$.

Далее, пусть γ — (гладкая) кривая на многообразии M^n, а $V(t)$ — векторное поле вдоль γ, т. е. если

$\gamma(t)=(p^1(t), \ldots, p^n(t))$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, то $V(t)$ — касательный вектор в точке $\gamma(t)$. Поле $V(t)$ называется *параллельным* вдоль $\gamma(t)$, если $d\gamma/dt \vdash V(t)=0$. Кривая $\gamma(s)$ называется *геодезической*, если $d\gamma/ds \vdash$ $\vdash d\gamma/ds=0$, где s — длина кривой. В локальных координатах

$$\frac{d^2p^i(s)}{ds^2}+\Gamma^i_{jk}(p(s))\frac{dp^j(s)}{ds}\cdot\frac{dp^k(s)}{ds}=0.$$

Определение 6. Локальная система координат $(x^1, \ldots, x^n)$ на римановом многообразии M^n называется *геодезической координатной системой*, если

$$\Gamma^i_{jk}(x)\,x^jx^k=0, \qquad i=1, 2, \ldots, n.$$

Заметим, что в геодезических координатах $\Gamma_{ijk}(x)\,x^jx^k=0$. Так как $\Gamma_{ijk}=(\partial_k g_{ij}+\partial_j g_{ik}-\partial_i g_{jk})/2$, то должно быть

$$2(\partial_k g_{ji})\,x^jx^k-(\partial_i g_{jk})\,x^jx^k=0.$$

Предположим, что $g_{\alpha\beta}(x)$ — вещественная аналитическая функция. После очевидных выкладок получаем

$$(x^k\partial_k)(g_{ji}x^j)=x^jx^k(\partial_k g_{ji})+g_{ji}x^j,$$
$$\partial_i(g_{jk}x^jx^k)=(\partial_i g_{jk})\,x^jx^k+2g_{ij}x^j.$$

Комбинируя полученные результаты, находим, что в геодезических координатах

$$2(x^k\partial_k)(g_{ij}x^j)-\partial_i(g_{jk}x^jx^k)=0. \qquad (*)$$

Положим $v_i(x)=g_{ij}(x)\,x^j$ и

$$v_i^{(\delta)}(x)=\partial_{j_1}\ldots{}_{j_\delta}(v_i)(0)\,x^{j_1}\ldots x^{j_\delta},$$

где δ — неотрицательное целое число. Тогда формула $(*)$ принимает вид

$$2(x^k\partial_k)\,v_i=\partial_i(v_jx^j). \qquad (**)$$

Приравнивая суммы членов порядка δ в левой и правой частях этого уравнения, получаем

$$2(x^k\partial_k)\,v_i^{(\delta)}=\partial_i(v_j^{(\delta)}x^j).$$

Далее, $v_i^{(\delta)}(tx)=t^\delta v_i^{(\delta)}(x)$ и дифференцирование по t дает $(x^k\partial_k)\,v_i^{(\delta)}(x)=\delta v_i^{(\delta)}(x)$ при $t=1$.

Формула (**) теперь принимает вид

$$2\delta v_i^{(\delta)} = \partial_i (v_j^{(\delta)} x^j). \qquad (***)$$

Положим $f^{(\delta)} = v_j^{(\delta)} x^j$, тогда

$$v_i^{(\delta)} = \frac{1}{2\delta} \partial_i f^{(\delta)}, \qquad \delta > 0,$$

и в результате

$$f^{(\delta)} = \frac{1}{2\delta} (x^j \partial_j f^{(\delta)}) = \frac{\delta+1}{2\delta} f^{(\delta)}.$$

Следовательно, $f^{(\delta)} = 0$, если $\delta \neq 1$. Без ограничения общности можно считать $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$, и тогда $f^{(\delta)} = 0$ $(\delta > 1)$ влечет в геодезических координатах

$$g_{ij}(x) x^j = x^i.$$

Разлагая левую часть в ряд Тейлора и сравнивая коэффициенты с правой частью, находим

$$g_{ij,\, k_1 \ldots k_m}(0)\, x^j x^{k_1} \ldots x^{k_m} = 0$$

и, в частности,

$$g_{ij,\, k}(0) = 0.$$

Чтобы установить существование геодезических координат, достаточно найти такую координатную систему $(x^1, \ldots, x^n)$, чтобы геодезические линии, проходящие через начало этой системы, представлялись в виде $x^i(s) = a^i s$ (т. е. были бы прямыми).

В самом деле, подстановка $x^i(s) = a^i s$ в дифференциальные уравнения для геодезических дает $\Gamma_{ij}^k(x) x^i x^j = 0$. Существование такой координатной системы $(x^1, \ldots, x^n)$ следует из известных свойств обыкновенных дифференциальных уравнений. Используя полученную формулу для R_{hijk}, имеем в геодезических координатах

$$R_{hijk}(0) = \frac{1}{2} (g_{hk,\, ij}(0) + g_{ij,\, hk}(0) - g_{hj,\, ik}(0) - g_{ik,\, hj}(0)).$$

Теорема 2. *В начале геодезических координат частные производные m-го порядка метрического тензора (метрики) алгебраически выражаются через*

ковариантные производные порядка $\leqslant m-2$ риманова тензора.

Доказательство. Из равенства

$$R_{ijkl}=\frac{1}{2}(g_{ij,kl}-g_{ik,jl}+g_{kl,ij}-g_{jl,ik})+T^{(1)}$$

(здесь и ниже мы обозначаем через $T^{(n)}$ любое алгебраическое выражение для метрического тензора g и его m-х производных, $m\leqslant n$), меняя местами i, k и складывая, находим, что

$$2(R_{ijkl}+R_{kjil})+T^{(1)}=g_{kl,ij}+g_{il,kj}-2g_{jl,ik}. \qquad (1)$$

Дважды дифференцируя уравнение $g_{ri}(x)x^r=x^i$, получаем $-g_{ri,jk}x^r=g_{ij,k}+g_{ik,j}$. Последовательное дифференцирование дает

$$-g_{ri,i_1\ldots i_n}x^r=g_{ii_1,i_2\ldots i_n}+\ldots+g_{ii_n,i_1\ldots i_{n-1}}. \qquad (E_n)$$

Используя уравнение (E_2) для того, чтобы заменить первые два члена в правой части уравнения (1), находим, что

$$g_{rl,ijk}x^r-2(R_{ijkl}+R_{kjil})+T^{(1)}=3g_{jl,ik}. \qquad (2)$$

Полагая $x=0$ в (2), получаем выражение для второй производной метрического тензора в начале координат через члены риманова тензора.

Докажем теперь теорему 2 индукцией по целым числам m. Теорема уже доказана нами для $m=2$. Допустим, что теорема верна для $m_1<m$, $m>2$. Возьмем $(m-2)$-ю производную от уравнения (2) и заметим, что $(m-2)$-ю производную риманова тензора можно выразить через его $(m-2)$-е ковариантные производные и производные метрического тензора порядка не больше $m-1$. Мы видим, что для доказательства теоремы 2 достаточно доказать, что в центре геодезических координат производную $h=g_{ij,i_1\ldots i_k}$ можно выразить через суммы

$$3g_{ij_0,j_1\ldots j_n}+g_{ij_1,j_2\ldots j_nj_0}+\ldots+g_{ij_{n-2},j_{n-1}j_nj_0\ldots j_{n-3}}.$$

Пусть σ — циклическая перестановка индексов $j_0\ldots j_n\to j_1\ldots j_nj_0$, так что $\sigma^{n+1}=1$. Тогда нам нужно

доказать, что h можно выразить через сумму $3h+\sigma h+\ldots+\sigma^{n-2}h$, учитывая что $(1+\sigma+\ldots$ $\ldots+\sigma^n)h=0$ (это равенство следует из (E_n), когда мы полагаем $x=0$). Для доказательства заметим, что полиномы $P(y)=3+y+\ldots+y^{n-2}$ и $Q(y)=1+$ $+y+\ldots+y^n$ не имеют общих корней и, следовательно, взаимно просты. В самом деле $P(y_0)-$ $-y_0P(y_0)=0$, где y_0 — корень уравнения $P(y)=0$. Следовательно, $3-2y_0-y_0^{n-1}=0$, и y_0 лежит на единичной окружности тогда и только тогда, когда $2y_0=2$ и $y_0^{n-1}=1$, так что $y_0=1$ и $Q(y_0)\neq 0$.

Таким образом, можно найти рациональные полиномы $A(y)$ и $B(y)$, для которых $A(y)P(y)+$ $+B(y)Q(y)=1$, так что $h=A(\sigma)P(\sigma)h$, и теорема 2 доказана.

Следствие. *Ковариантные производные риманова тензора дают полное множество инвариантов для римановой метрики в геодезических координатах.*

Доказательство. По теореме 2 ковариантные производные риманова тензора полностью определяют значения функции g_{ij} и всех ее производных в начале геодезических координат. Так как g_{ij} — аналитическая функция, то она полностью определена во всей координатной окрестности значениями всех ее производных в начале координат.

Рассмотрим еще один важный пример ковариантных n-тензорных полей — кососимметрические n-тензорные поля (или n-формы). Так называются n-тензорные поля ω, для которых

$$\omega(V_{\sigma(1)},\ldots,V_{\sigma(n)})=\operatorname{sgn}\sigma\cdot\omega(V_1,\ldots,V_n),$$

где $V_i\in D^1$, σ — перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$ и $\operatorname{sgn}\sigma$ — знак этой перестановки. Если ω_i — кососимметрическое k_i-тензорное поле $(i=1, 2)$, то тензорное произведение полей ω_1 и ω_2 задается равенством

$$\omega_1\cdot\omega_2(V_1,\ldots,V_{k_1},\ldots,V_{k_1+k_2})=$$
$$=\omega_1(V_1,\ldots,V_{k_1})\cdot\omega_2(V_{k_1+1},\ldots,V_{k_1+k_2}),$$

а внешнее произведение — равенством

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = A(\omega_1 \cdot \omega_2),$$

где A — альтернирующая операция

$$A\omega(V_1, \ldots, V_n) = (n!)^{-1} \sum_{\sigma} \operatorname{sgn} \sigma \cdot \omega(V_{\sigma(1)}, \ldots, V_{\sigma(n)}).$$

Легко показать, что внешнее умножение ассоциативно и

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{k_1 k_2} \omega_2 \wedge \omega_1.$$

Если $D\omega$ — ковариантная производная от ω, положим

$$d\omega = A(D\omega)$$

и назовем d внешним дифференцированием. Очевидно, что

$$d^2 = 0, \quad d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{k_1} \omega_1 \wedge d\omega_2.$$

Рассмотрим теперь семейство всех пар (S, T), где S — компактное подмножество евклидова пространства E^N, а T — замкнутое подмножество в S. Зададим следующие объекты:

F^k — пространство всех (гладких) k-форм, определенных на E^N,

$V^k(S)$ — подпространство пространства F^k, состоящее из форм, равных нулю вблизи S,

$$Z^k(S, T) = \{\omega \in V^k(T) \mid d\omega \in V^{k+1}(S)\},$$
$$B^k(S, T) = \{d\omega + \theta \mid \omega \in V^{k-1}(T),\ \theta \in V^k(S)\},$$
$$D^k(S, T) = Z^k(S, T)/B^k(S, T).$$

Теорема 3 (де Рам). *Для каждой триангулируемой пары (S, T) группа $D^k(S, T)$ естественно изоморфна k-мерной относительной (сингулярной) группе когомологий пары (S, T) с вещественными коэффициентами.*

Доказательство мы опускаем.

Если в качестве S взять многообразие M^m и положить $T = \varnothing$, то получится классическая теорема де Рама.

Назовем $Z^k(M)$ *пространством замкнутых k-форм*, а $B^k(M)$ — *пространством точных k-форм*.

Пусть φ: $M^m \to N^n$ — гладкое отображение, а ω будет k-формой на N. Зададим k-форму $\varphi'\omega$ на M равенством

$$\varphi'\omega(V_1, \ldots, V_k) = \omega(\varphi_1 V_1, \ldots, \varphi_1 V_k),$$

где $V_i \in D^1(M)$ $(i = 1, \ldots, k)$ и φ_1 — отображение векторных полей, индуцированное отображением φ. Легко видеть, что $d\varphi'\omega = \varphi' d\omega$. Таким образом, φ' индуцирует отображение из $D^k(N)$ в $D^k(M)$ (назовем его тоже φ'). Оказывается, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H^k(N; \mathbb{R}) & \xrightarrow{\varphi^*} & H^k(M; \mathbb{R}) \\ \uparrow \nu_N & & \uparrow \nu_M \\ D^k(N) & \xrightarrow{\varphi'} & D^k(M) \end{array}$$

коммутативна. Здесь ν_N, ν_M — естественные изоморфизмы, определенные теоремой де Рама, а φ^* — гомоморфизм когомологий, индуцируемый (непрерывным) отображением φ.

Пусть M^n — риманово многообразие и $V_1, \ldots, V_n$ — гладкие векторные поля, определенные в некоторой координатной окрестности $\mathscr{N}$, причем $V_i \circ V_j = g(V_i, V_j) = \delta_{ij}$. Пусть 1-форма ω_i задана равенством

$$\omega_i(V_j) = \delta_{ij}.$$

Зададим 1-форму ω_{ij} равенством

$$\omega_{ij}(V) = \omega_i(V \vdash V_j),$$

где V — векторное поле на $\mathscr{N}$. Дифференцирование равенства $V_i \circ V_j = \delta_{ij}$ ковариантно по V дает

$$(V \vdash V_j) \circ V_i + V_j \circ (V \vdash V_i) = 0,$$

а так как $\omega_i(V) = V \circ V_i$, то

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji}.$$

Если U — векторное поле на $\mathscr{N}$, то $U = \omega_j(U) V_j$ (сумма берется по повторным индексам). По определению аффинной связности

$$\omega_i(V \vdash \omega_j(U) V_j) = \omega_j(U)\,\omega_{ij}(V) + \omega_i(V_j) \cdot V(\omega_j(U)) = \\ = \omega_j(U)\,\omega_{ij}(V) + V(\omega_i(U)),$$

откуда

$$D\omega_i(U, V) = V(\omega_i(U)) - \omega_i(V \vdash U) = -\omega_j(U)\,\omega_{ij}(V).$$

Альтернируя обе части этого уравнения, получаем

$$d\omega_i = -\omega_j \wedge \omega_{ij}. \qquad (K_1)$$

Пусть теперь $\Omega_{ij}(U, V) = \omega_i(R(U, V) V_j)$. Довольно громоздкое, но непосредственное вычисление, использующее определения и приведенные выше формулы, дает равенство

$$\omega_i(R(U, V) Z) = \omega_k(Z)\{\omega_{il} \wedge \omega_{lk}(U, V) - d\omega_{ik}(U, V)\}.$$

В частности, если $Z = V_j$, то

$$d\omega_{ij} = \omega_{il} \wedge \omega_{lj} - \Omega_{ij}. \qquad (K_2)$$

Беря внешние производные от обеих частей уравнения (K_2) с учетом того, что $\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$, получаем

$$d\Omega_{ij} = d\omega_{il} \wedge \omega_{lj} - d\omega_{jl} \wedge \omega_{li}. \qquad (K_3)$$

Формулы $(K_1)-(K_3)$ называются *структурными уравнениями Картана.*

Построим на римановом многообразии M^n важный класс форм, называемых *формами кривизны.*

Положим

$$\Omega_{(k)} = \Omega_{i_1 i_2} \wedge \Omega_{i_2 i_3} \wedge \ldots \wedge \Omega_{i_{k-1} i_k} \wedge \Omega_{i_k i_1}.$$

Если n четно и M ориентируемо, положим

$$\Omega = \varepsilon^{i_1 \ldots i_n} \Omega_{i_1 i_2} \wedge \Omega_{i_3 i_4} \wedge \ldots \wedge \Omega_{i_{n-1} i_n},$$

где $\varepsilon^{i_1 \ldots i_n} = \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ i_1 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$, если все $i_1, \ldots, i_n$ различны, и $\varepsilon^{i_1 \ldots i_n} = 0$ в противном случае.

Теорема 4. *Формы кривизны* $\Omega_{(k)}$ *инвариантно определены на* M, *т. е. если* $\widehat{V}_1, \ldots, \widehat{V}_n$ — *другая ортонормальная система векторных полей на* $\mathcal{N}$ *и* $\widehat{\omega}_i$, $\widehat{\Omega}_{ij}, \widehat{\Omega}_{(k)}$ — *построенные из них формы, то* $\widehat{\Omega}_{(k)} = \Omega_{(k)}$. *Кроме того, формы* $\Omega_{(k)}$ *замкнуты, т. е.* $d\Omega_{(k)} = 0$, *и* $\Omega_{(k)} = 0$ *для нечетных* k.

Доказательство. Существует такая ортогональная матрица $\|a_{ij}\|$, что $\widehat{V}_i = a_{ki}V_k$ (сумма по k, как обычно) [1]). Тогда если форма $\widehat{\omega}_i$ задана условием $\widehat{\omega}_i(\widehat{V}_j) = \delta_{ij}$, то $\widehat{\omega}_i = a_{ki}\omega_k$. Из определения форм $\widehat{\Omega}_{ij}$ и Ω_{ij} легко вывести, что

$$\widehat{\Omega}_{ij}(U, V) = a_{ki}a_{lj}\Omega_{kl}(U, V).$$

Заменяя соответствующим образом каждый сомножитель формы $\widehat{\Omega}_{i_1i_2} \wedge \widehat{\Omega}_{i_2i_3} \wedge \ldots \wedge \widehat{\Omega}_{i_ki_1}$ и учитывая ортогональность матрицы $\|a_{ij}\|$, получаем нужный результат.

Равенство $d\Omega_{(k)} = 0$ докажем с помощью формулы

$$d\Omega_{ij} = -\Omega_{il} \wedge \omega_{lj} + \omega_{il} \wedge \Omega_{lj}, \qquad (*)$$

которая следует из структурных уравнений Картана. Итак,

$$d\Omega_{(k)} = d\Omega_{i_1i_2} \wedge (\Omega_{i_2i_3} \wedge \Omega_{i_3i_4} \wedge \ldots \wedge \Omega_{i_ki_1}) + \\ + \Omega_{i_1i_2} \wedge d(\Omega_{i_2i_3} \wedge \ldots \wedge \Omega_{i_ki_1}).$$

Но

$$\begin{aligned}
\Omega_{i_1i_2} \wedge d(\Omega_{i_2i_3} \wedge \ldots \wedge \Omega_{i_ki_1}) &= \\
&= \Omega_{i_1i_2} \wedge \{d\Omega_{i_2i_3} \wedge \Omega_{i_3i_4} \wedge \ldots \wedge \Omega_{i_ki_1} + \\
&+ \Omega_{i_2i_3} \wedge d(\Omega_{i_3i_4} \wedge \Omega_{i_4i_5} \wedge \ldots \wedge \Omega_{i_ki_1})\} = \\
&= \Omega_{i_1i_2} \wedge d\Omega_{i_2i_3} \wedge \Omega_{i_3i_4} \wedge \ldots \wedge \Omega_{i_ki_1} + \\
&+ \Omega_{i_1i_2} \wedge \Omega_{i_2i_3} \wedge d(\Omega_{i_3i_4} \wedge \ldots \wedge \Omega_{i_ki_1}) = \\
&= d\Omega_{i_2i_3} \wedge \Omega_{i_3i_4} \wedge \ldots \wedge \Omega_{i_ki_1} \wedge \Omega_{i_1i_2} + \\
&+ \Omega_{i_1i_2} \wedge \Omega_{i_2i_3} \wedge d(\Omega_{i_3i_4} \wedge \ldots \wedge \Omega_{i_ki_1}),
\end{aligned}$$

---

[1]) Заметим, что коэффициенты a_{ij} будут на M гладкими функциями. — *Прим. перев.*

поскольку $\Omega_{i_1 i_2}$ есть 2-форма, коммутирующая с любой формой.

Следовательно,

$$d\Omega_{(k)} = 2\, d\Omega_{i_1 i_2} \wedge \Omega_{i_2 i_3} \wedge \ldots \wedge \Omega_{i_k i_1} + \\ + \Omega_{i_1 i_2} \wedge \Omega_{i_2 i_3} \wedge d\left(\Omega_{i_3 i_4} \wedge \ldots \wedge \Omega_{i_k i_1}\right),$$

и по индукции

$$d\Omega_{(k)} = k \cdot d\Omega_{i_1 i_2} \wedge \Omega_{i_2 i_3} \wedge \ldots \wedge \Omega_{i_k i_1}.$$

Чтобы убедиться в том, что $d\Omega_{i_1 i_2} \wedge \Omega_{i_2 i_3} \wedge \ldots \wedge \Omega_{i_k i_1} = 0$, нужно применить формулу (*) к $d\Omega_{i_1 i_2}$ и произвести необходимые вычисления.

Наконец, чтобы показать, что $\Omega_{(k)} = 0$ для нечетного k, заметим, что $\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$ (это следует из (K_2)). Тогда

$$\Omega_{(k)} = \Omega_{i_1 i_2} \wedge \Omega_{i_2 i_3} \wedge \ldots \wedge \Omega_{i_k i_1} = \\ = (-1)^k \Omega_{i_2 i_1} \wedge \Omega_{i_3 i_2} \wedge \ldots \wedge \Omega_{i_k i_{k-1}} \wedge \Omega_{i_1 i_k} = \\ = (-1)^k \Omega_{i_1 i_k} \wedge \Omega_{i_k i_{k-1}} \wedge \ldots \wedge \Omega_{i_3 i_2} \wedge \Omega_{i_2 i_1} = -\Omega_{(k)},$$

поскольку k нечетно. Теорема доказана.

Теорема 5. *Форма кривизны Ω инвариантно определена на четномерном ориентированном многообразии M^n, т. е. если $\widehat{V}_1, \ldots, \widehat{V}_n$ — другая ортонормальная система векторных полей на $\mathcal{N}$, задающая ту же ориентацию, что и $V_1, \ldots, V_n$, то $\widehat{\Omega} = \Omega$. Кроме того, форма Ω замкнута.*

Доказательство. Так же, как в теореме 3, $\widehat{\Omega}_{ij} = a_{ki} a_{lj} \Omega_{kl}$ и $|a_{ij}| = \det(\|a_{ij}\|) = 1$. Непосредственные вычисления дают

$$\widehat{\Omega} = \varepsilon^{j_1 \cdots j_n} \widehat{\Omega}_{j_1 j_2} \wedge \widehat{\Omega}_{j_3 j_4} \wedge \ldots \wedge \widehat{\Omega}_{j_{n-1} j_n} = \\ = \varepsilon^{j_1 \cdots j_n} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \ldots a_{i_n j_n} \Omega_{i_1 i_2} \wedge \Omega_{i_3 i_4} \wedge \ldots \wedge \Omega_{i_{n-1} i_n} = \\ = \varepsilon^{i_1 \cdots i_n} \Omega_{i_1 i_2} \wedge \Omega_{i_3 i_4} \wedge \ldots \wedge \Omega_{i_{n-1} i_n}.$$

Так как $d\Omega$ имеет порядок $n+1$, а многообразие M n-мерно, то $d\Omega = 0$.

Определение 7. Согласно теоремам 4 и 5, формы кривизны $\Omega_{(k)}$, Ω определяют элементы в кольце когомологий де Рама. Назовем эти элементы *когомологическими классами кривизны*. По теореме де Рама их можно отождествить с элементами обычного кольца когомологий (с вещественными коэффициентами).

Пусть M_0^ν — подмногообразие риманова многообразия M^n. Метрика g на M естественным образом индуцирует риманову метрику g_0 на M_0. По теореме 1 g_0 определяет симметричную связность $\vdash_0$, совместную с g_0.

Лемма 1. *$V \vdash_0 U = P_0(V \vdash U)$, где $U, V \in D^1(M_0)$, а P_0 — ортогональная проекция касательного пространства к M на соответствующее касательное пространство к M_0.*

Доказательство. Положим $V \vdash_1 U = P_0(V \vdash U)$. Легко убедиться, что $\vdash_1$ — аффинная связность, симметричная и совместная с g_0.

Так как такая связность единственна (теорема 1), то лемма доказана.

Пусть теперь $V_1, \ldots, V_n$ — система ортонормальных векторных полей в координатной окрестности $\mathcal{N}$ многообразия M^n, причем $V_1, \ldots, V_\nu$ образуют систему касательных векторных полей к M_0^ν, а $V_{\nu+1}, \ldots, V_n$ образуют систему нормальных векторных полей к M_0^ν. Пусть $\omega_i^{(0)}$, $\omega_{ij}^{(0)}$, $\Omega_{ij}^{(0)}$ — формы на M_0, заданные с помощью векторных полей $V_1, \ldots, V_\nu$. Тем самым эти формы определены только для значений $1 \leqslant i, j \leqslant \nu$.

Если $1 \leqslant i \leqslant \nu$ и $V \in D^1(M_0)$, то $\omega_i(V) = \omega_i^{(0)}(V)$, т. е. $\omega_i^{(0)}$ — сужение формы ω_i $(1 \leqslant i \leqslant \nu)$. Если $1 \leqslant i, j \leqslant \nu$ и $V \in D^1(M_0)$, то $\omega_{ij}(V) = \omega_i(V \vdash V_j) = \omega_i(P_0(V \vdash V_j)) = \omega_i(V \vdash_0 V_j) = \omega_i^{(0)}(V \vdash_0 V_j) = \omega_{ij}^{(0)}(V)$, т. е. $\omega_{ij}^{(0)}$ — сужение формы ω_{ij} $(1 \leqslant i, j \leqslant \nu)$.

На многообразии M^n выполняется равенство (K_2):

$$\Omega_{ij} = \sum_{l=1}^{n} \omega_{il} \wedge \omega_{lj} - d\omega_{ij}, \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant n.$$

Аналогично на M_0^ν

$$\Omega_{ij}^{(0)} = \sum_{l=1}^{\nu} \omega_{il}^{(0)} \wedge \omega_{lj}^{(0)} - d\omega_{ij}^{(0)}, \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant \nu.$$

Из приведенных выше замечаний вытекает, что фактически

$$\Omega_{ij}^{(0)} = \sum_{l=1}^{\nu} \omega_{il} \wedge \omega_{lj} - d\omega_{ij}, \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant \nu.$$

Вычитая, получаем

$$\Omega_{ij}^{(0)} = \Omega_{ij} - \sum_{l=\nu+1}^{n} \omega_{il} \wedge \omega_{jl}, \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant \nu. \qquad (**)$$

В дальнейшем мы воспользуемся следующей трудной теоремой, которую сформулируем сейчас без доказательства (см. Шварц [1]).

Теорема 6 (Нэш). *Любое риманово многообразие можно изометрично вложить в E^N для некоторого достаточно большого N.*

В силу этой теоремы можно считать произвольное риманово многообразие M_0^ν изометрично вложенным в E^N и заменить в предыдущих рассуждениях M^n на E^N. Так как $\Omega_{ij} = 0$ в E^N, то из формулы (**) вытекает

Теорема 7 (обобщенная theorema egregium[1]).

$$\Omega_{ij}^{(0)} = -\sum_{l=\nu+1}^{N} \omega_{il} \wedge \omega_{lj}, \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant \nu.$$

Пусть M^n обозначает произвольное риманово многообразие, изометрично вложенное в E^N. Введем понятие, которое позволит связать когомологические

[1]) Theorema egregium — это сформулированная Гауссом в 1816 г. теорема: *поверхности, отображенные друг на друга с сохранением длин, имеют в соответственных точках одинаковую меру кривизны.* Egregium означает „блистательный“.—*Прим. перев.*

классы кривизны, определенные выше, с характеристическими классами гл. VI (ср. Понтрягин [1]).

Определение 8. Пусть 0 — начало координат в E^N. Зададим отображение

$$T\colon M^n \to G_{n,N}$$

следующим образом. Пусть T_x — касательное пространство к M^n в точке $x \in M^n$. Его можно считать n-плоскостью в E^N, поскольку $M^n \subseteq E^N$. Обозначим через $T(x)$ n-мерное подпространство, проходящее через 0 параллельно T_x. Отображение $x \to T(x)$ называется *касательным представлением многообразия* M^n.

Пусть $W_{n,N}$ — подпространство в $G_{n,N} \times G_{1,N}$, состоящее из пар (π, e), для которых вектор e лежит в π. Это подпространство наследует топологию всего пространства. Проекция $p_2\colon W_{n,N} \to G_{n,N}$ задана равенством $p_2(\pi, e) = \pi$. Тогда $W_{n,N}$ — пространство векторного расслоения ξ над $G_{n,N}$ (см. гл. IV, определение 5). Можно считать структурной группой этого расслоения группу O_n, действующую, как обычно, на n-мерное векторное пространство. Если $\tau(M)$ — касательное расслоение многообразия M (напомним, что $\tau(M)$ состоит из пар (x, e_x), где $x \in M$, а вектор e_x лежит в T_x) и $p_1\colon \tau(M) \to M$ — проекция $(x, e_x) \to x$, то существует отображение расслоений

$$\tilde{T}\colon \tau(M) \to W_{n,N},$$

т. е. диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \tau(M) & \xrightarrow{\tilde{T}} & W_{n,N} \\ \downarrow{\scriptstyle p_1} & & \downarrow{\scriptstyle p_2} \\ M & \xrightarrow{T} & G_{n,N} \end{array}$$

коммутативна. В самом деле, $\tilde{T}$ задано равенством

$$\tilde{T}((x, e_x)) = (T_x, e(x)),$$

где вектор $e(x)$ проходит через 0 параллельно e_x. Ясно, что ассоциированное с ξ главное расслоение $\tilde{\xi}$ (см. стр. 106) будет расслоением с многообразием

Штифеля $V_{n,N}$ в качестве пространства расслоения (см. стр. 108). Таким образом, $T^+\xi$ есть как раз ассоциированное с $\tau(M)$ главное расслоение. По классификационной теореме (см. стр. 108) гомотопический класс отображения T однозначно определен (для достаточно большого числа N). В частности, индуцированное отображение T^* когомологий является инвариантом ассоциированного главного O_n-расслоения пространства $\tau(M)$. Тем самым T^* не зависит ни от вложения M^n в E^N, ни от числа N (если N достаточно велико).

Построим семейство форм на многообразии $G_{n,N}$ аналогично тому, как мы строили формы кривизны на M^n, и покажем, что формы кривизны на M^n можно получить из этого нового семейства с помощью отображения T' (T' — индуцированное отображение форм).

Пусть π — типичный элемент из $G_{n,N}$. Выберем ортонормальный базис в π, скажем $e_1, e_2, \ldots, e_n$ (где $e_i = e_i(\pi)$), и дополним его ортонормальным базисом $e_{n+1}(\pi), \ldots, e_N(\pi)$ в $\pi^\perp$. Мы считаем, что векторы $e_i(\pi)$ гладко изменяются на $G_{n,N}$ в окрестности точки π.

Напомним, что если f — вещественнозначная гладкая функция, определенная на $G_{n,N}$ (как и на любом многообразии), и V — векторное поле на $G_{n,N}$, то $df(V) = Vf$. Гладкое отображение g из $G_{n,N}$ в E^N можно представить как набор N функций $g_1, \ldots, g_N$, где g_i: $G_{n,N} \to \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \ldots, N$). Поэтому зададим dg равенством

$$dg(V) = (Vg_1, \ldots, Vg_n).$$

Тем самым dg будет отображением

$$dg\colon D^1(G_{n,N}) \to \underbrace{C^\infty(G_{n,N}) \times \ldots \times C^\infty(G_{n,N})}_{N}.$$

(Обозначения $D^1(M)$, $C^\infty(M)$ введены в начале этой главы.)

Векторы $e_i(\pi)$ можно интерпретировать как отображения

$$e_i\colon G_{n,N} \to E^N.$$

Зададим 1-формы $\tilde{\omega}_{\alpha\beta}$ на $G_{n,N}$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, N)$ равенством

$$\tilde{\omega}_{\alpha\beta} = de_\alpha \circ e_\beta,$$

где $\circ$ обозначает риманову метрику на E^N, т. е. обычное скалярное произведение. Далее, 2-формы $\tilde{\Omega}_{ij}$ на $G_{n,N}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ зададим равенством

$$\tilde{\Omega}_{ij} = -\sum_{r=n+1}^{N} \tilde{\omega}_{ir} \wedge \tilde{\omega}_{rj}.$$

Как и раньше, введем формы $\tilde{\Omega}_{(k)}$, $\tilde{\Omega}$ равенствами

$$\tilde{\Omega}_{(k)} = \tilde{\Omega}_{i_1 i_2} \wedge \tilde{\Omega}_{i_2 i_3} \wedge \ldots \wedge \tilde{\Omega}_{i_{k-1} i_k} \wedge \tilde{\Omega}_{i_k i_1},$$

$$\tilde{\Omega} = \varepsilon^{i_1 \ldots i_n} \tilde{\Omega}_{i_1 i_2} \wedge \tilde{\Omega}_{i_3 i_4} \wedge \ldots \wedge \tilde{\Omega}_{i_{n-1} i_n} \text{ для четных } n.$$

Замечание. Очевидно, форма $\tilde{\Omega}$ определена только с точностью до знака. Чтобы $\tilde{\Omega}$ была определена однозначно, можно считать ее заданной на двулистном накрывающем пространстве $\overline{G}_{n,N}$ (см. стр. 29), на котором группа SO_n действует транзитивно, и ясно, что $\overline{G}_{n,N} = SO_N/(SO_n \times SO_{N-n})$. Мы не будем останавливаться на этом чисто техническом вопросе, а предоставим читателю строго доказать все сформулированные без доказательства утверждения. Заметим, что формы $\tilde{\Omega}_{(k)}$ инвариантно определены на $G_{n,N}$, поскольку вопрос ориентации в этом случае роли не играет.

Так как O_n действует транзитивно на $G_{n,N}$, то для $g \in O_n$ существует индуцированное гладкое отображение

$$g\colon G_{n,N} \to G_{n,N}.$$

Говорят, что r-форма ω на $G_{n,N}$ инвариантна относительно O_n, если $g'\omega = \omega$ для всех $g \in O_n$, где g' — индуцированное отображение форм.

Мы утверждаем, что введенные выше формы $\tilde{\Omega}_{(k)}$, Ω не зависят от выбора базиса e_i, использованного при их определении. Поскольку доказательство этого

утверждения очень похоже на доказательство теорем 4 и 5, мы оставляем его детали читателю. Из определения форм $\tilde{\omega}_{ij}$ и того факта, что векторы e_α образуют ортонормальный базис, непосредственно следует, что $d\tilde{\omega}_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{N} \omega_{i\alpha} \wedge \omega_{\alpha j}$. Отсюда $d\tilde{\omega}_{ij} = \tilde{\omega}_{ik} \wedge \wedge \tilde{\omega}_{kj} - \tilde{\Omega}_{ij}$, причем суммирование по k производится от 1 до n. Используя эту формулу вместо (K_2), можно убедиться в том, что формы $\tilde{\Omega}_{(k)}$ и $\tilde{\Omega}$ замкнуты, причем убедиться точно так же, как и в случае форм $\Omega_{(k)}$ и Ω; все дополнительные детали доказательства оставляются читателю.

Нетрудно убедиться, что

$$T'(\tilde{\Omega}_{(k)}) = \Omega_{(k)}, \qquad T'(\tilde{\Omega}) = \Omega,$$

следовательно,

$$T^*(\{\tilde{\Omega}_{(k)}\}) = \{\Omega_{(k)}\}, \qquad T^*(\{\tilde{\Omega}\}) = \{\Omega\},$$

где T^* — индуцированное отображение классов когомологий { }.

Теорема 8. *Когомологические классы кривизны многообразия M^n являются (вещественными) линейными комбинациями $\smile$-произведений классов Уитни ассоциированного главного O_n-расслоения пространства $\tau(M)$.*

Доказательство. Пусть $T_N\colon M^n \to G_{n,N}$ — касательное представление многообразия M^n и $\tilde{\Omega}^{(N)}_{(k)}$, $\tilde{\Omega}^{(N)}$ — формы, построенные выше (мы обозначали их $\tilde{\Omega}_{(k)}$, $\tilde{\Omega}$). Тогда

$$T^*(\{\tilde{\Omega}^{(N)}_{(k)}\}) = \{\tilde{\Omega}_{(k)}\}, \qquad T^*(\{\tilde{\Omega}^{(N)}\}) = \{\Omega\}.$$

Рассмотрим отображение

$$i_N \circ T\colon\ M^n \to G_{n,\infty},$$

где $i_N\colon G_{n,N} \to G_{n,\infty}$ — естественное вложение. Так как $i_N \circ T \simeq i_P \circ T$ для любых достаточно больших N и P, то выбор числа N не существен. Кроме того,

$$(i_N \circ T)^\dagger(\alpha_n) = \tilde{\tau}(M),$$

где α_n — расслоение, введенное в гл. VI (определение 5), а $\tilde{\tau}(M)$ — ассоциированное главное расслоение для $\tau(M)$. Поскольку гомоморфизм i_N^* надъективен, существуют такие элементы $\gamma_{(k)}$, $\gamma \in H^*(G_{n,N})$, что

$$i_N^*(\gamma_{(k)}) = \{\tilde{\Omega}_{(k)}^{(N)}\}, \quad i_N^*(\gamma) = \{\tilde{\Omega}^{(N)}\},$$

откуда

$$(i_N \circ T)^*(\gamma_{(k)}) = \{\Omega_{(k)}\}, \quad (i_N \circ T)^*(\gamma) = \{\Omega\}.$$

Элементы $\gamma_{(k)}$, γ можно представить в виде линейных комбинаций $\smile$-произведений классов Уитни, и теорема получается прямо из определения классов Уитни расслоения $\tilde{\tau}(M)$.

Пусть M^n — ориентированное четномерное многообразие. Мы выразили формы кривизны многообразия M^n, первоначально заданные в терминах риманова тензора на M^n, в топологически инвариантном виде. Посмотрим, например, как обстоит дело с формой Ω. Очевидно, интеграл $\int\limits_{M^n} \Omega$ должен также быть инвариантом многообразия M^n. Можно просто попытаться вычислить его в том виде, в каком он записан. Однако, используя связь между Ω и $\tilde{\Omega}^{(N)}$, можно свести эту задачу к вычислению интеграла $\int\limits_{T_N(M^n)} \tilde{\Omega}^{(N)}$. В самом деле, обычная замена переменных дает

$$\int\limits_{T_N(M^n)} \tilde{\Omega}^{(N)} = \int\limits_{M^n} T_N'(\tilde{\Omega}^{(N)}) = \int\limits_{M^n} \Omega.$$

Тем самым вся тяжесть вычислений ложится всего лишь на одну форму $\tilde{\Omega}^{(N)}$ на многообразии $G_{n,N}$. Это, конечно, отражает „универсальный“ характер пространства $G_{n,N}$. Интеграл $\int\limits_{T_N(M^n)} \tilde{\Omega}^{(N)}$ можно найти без особых трудностей (см. Понтрягин [1]). Мы

опускаем вычисления и приводим окончательный результат:

Теорема 9 (обобщенная теорема Гаусса—Боннэ). *Если $\chi(M^n)$ — эйлерова характеристика многообразия M^n, а σ_n — объем n-мерного единичного шара, то*

$$\int_{M^n} \Omega = \frac{1}{2} \sigma_n \cdot \chi(M^n).$$

Глава VIII

ОБОБЩЕННЫЕ ТЕОРИИ КОГОМОЛОГИЙ

В последних трех главах мы продолжим изучение теории расслоений. Для любого конечного комплекса X и даже для любой клеточной пары (X, Y) мы введем последовательность групп, заданных в терминах расслоений над X. Эти группы и их гомоморфизмы образуют систему, очень схожую с теорией когомологий и удовлетворяющую всем аксиомам Стинрода—Эйленберга, кроме аксиомы размерности. Эта теория „когомологий из расслоений" находит много важных приложений в топологии; одно из них мы рассмотрим в гл. X.

Эта глава разбита на две части. В части А вводится общее понятие экстраординарной теории когомологий (не связанной с расслоениями). В части Б изучается упомянутая теория „когомологий из расслоений" — так называемая K-теория. Показывается, что K-теория является экстраординарной теорией когомологий в смысле части А. Более глубоко и детально K-теория изучается в гл. IX.

А. Экстраординарная теория когомологий

Мы будем рассматривать здесь топологические пространства с отмеченной точкой и отображения, переводящие отмеченную точку в отмеченную.

Пусть T — некоторое линейно связное пространство; назовем его *пробным пространством*. Для любого пространства X рассмотрим множество T^X всех непрерывных отображений пространства X в пространство T. Обозначим через (T^X) множество всех гомотопических классов отображений из X в T. Если на T^X

задана компактно-открытая топология (окрестность отображения f определяется выбором компакта K в X и открытого множества $U \supset f(x)$ в T; эта окрестность состоит из всех отображений g, для которых $g(K) \subset U$), то элементами множества (T^X) будут компоненты линейной связности пространства T^X. Легко проверить, что (T^X) есть функтор двух переменных T и X, ковариантный по T и контравариантный по X.

Пусть A — замкнутое подмножество в X, причем отмеченная точка x_0 принадлежит A, а X/A — множество, полученное отождествлением всех точек из A. Множество X/A становится топологическим пространством, если мы будем считать подмножество $W \subset X/A$ открытым тогда и только тогда, когда $p^{-1}(W)$ открыто в X (здесь p: $X \to X/A$ — естественная проекция).

Назовем *букетом* $X \vee Y$ пространство, полученное отождествлением в топологической сумме $X \cup Y$ отмеченных точек x_0, y_0.

Назовем *скрещенным произведением*[1]) пространство

$$X \wedge Y = (X \times Y)/(X \vee Y).$$

Возьмем в качестве отмеченной точки n-мерной сферы S^n ее северный полюс ν и положим

$$S^n(X) = S^n \wedge X.$$

Тогда $S^n(X)$ будет ковариантным функтором по X. В самом деле, любое отображение f: $Y \to X$ продолжается до отображения

$$f'\colon\ S^n \times Y \to S^n \times X,$$

определенного равенством $f'(p, y) = (p, f(y))$, $p \in S^n$, $y \in Y$. Но так как $f'(S^n \times y_0) \subseteq S^n \times x_0$, $f'(\nu \times Y) \subseteq \nu \times X$, то f' индуцирует отображение

$$\bar{f}\colon\ S^n(Y) \to S^n(X).$$

---

[1]) Иногда его называют приведенным произведением. — *Прим. перев.*

Нетрудно видеть, что соответствие $X \to S^n(X)$, $f \to \bar{f}$ функториально.

Определим теперь экстраординарную теорию когомологий на классе всех пар (X, Y), где X — клеточный комплекс, а Y — его замкнутый подкомплекс. Мы требуем, чтобы отмеченная точка x_0 была вершиной в Y (если $Y \neq \varnothing$).

Эту теорию назвали экстраординарной потому, что „группы" когомологий не обязаны быть группами в обычном смысле и аксиома размерности не обязана выполняться.

Для пары (X, Y) положим

$$T^{-n}(X, Y) = \left(T^{S^n(X/Y)}\right)$$

и назовем $T^{-n}(X, Y)$ n-мерной „группой" T-когомологий пары (X, Y).

Хотя множество $T^{-n}(X, Y)$ не всегда будет группой (см. по этому поводу стр. 145), оно имеет некоторый элемент (который заменяет единицу). В самом деле, если U и V — пространства и U линейно связно, можно рассматривать элемент множества (U^V), соответствующий классу всех отображений, гомотопных постоянному отображению, как особый элемент.

Определив $T^{-n}(X, Y)$, нужно определить для любого отображения $f\colon (X, Y) \to (X', Y')$ соответствующий „гомоморфизм"

$$f^*\colon T^{-n}(X', Y') \to T^{-n}(X, Y).$$

Это легко сделать. Действительно, f индуцирует отображение $\tilde{f}\colon X/Y \to X'/Y'$, которое в свою очередь индуцирует отображение $\bar{f}\colon S^n(X/Y) \to S^n(X'/Y')$. Но так как функтор (T^X) контравариантен по X, то $\bar{f}$ индуцирует нужное отображение.

Теперь мы должны определить кограничный оператор

$$\delta\colon T^{-(n+1)}(Y) \to T^{-n}(X, Y).$$

Для этого приведем несколько предварительных предложений, но сначала перечислим три важных

свойства операций $\vee$ и $\wedge$. Их доказательства оставляем читателю.

$$\text{(I)} \qquad (X \vee Y) \vee Z = X \vee (Y \vee Z),$$

$$\text{(II)} \qquad (X \wedge Y) \wedge Z = X \wedge (Y \wedge Z),$$

$$\text{(III)} \quad S^1 \wedge S^1 = S^2 \quad \text{и вообще} \quad \underbrace{S^1 \wedge \ldots \wedge S^1}_{n} = S^n,$$

равенства понимаются с точностью до гомеоморфизма.

Теорема о продолжении гомотопии (ТПГ). *Пусть (X, Y) — пара, состоящая из клеточного комплекса X и его подкомплекса Y. Пусть $f\colon X \to T$ — отображение, а $h_t\colon Y \to T$ — его частичная гомотопия (т. е. $f|_Y = h_0$). Тогда существует гомотопия $H_t\colon X \to T$, у которой $H_0 = f$, $H_t|_Y = h_t$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$.*

Доказательство для случая, когда (X, Y) — триангулируемая пара, см. Ху Сы-цзян [1, стр. 24].

Следствие 1. *Пусть A — подкомплекс клеточного комплекса B; t, s — точки отрезка $I = [0, 1]$; b — точка из B. Пусть C — подмножество произведения $I \times I \times B$:*

$$C = \{(0, s, b) \mid s \in I,\ b \in B\} \cup \{(t, s, b) \mid t \in I,\ s \in I,\ b \in A\}.$$

Тогда любое отображение $f\colon C \to T$ можно продолжить до отображения всего произведения $I \times I \times B$.

Доказательство. Достаточно применить ТПГ к паре $(I \times B,\ I \times A)$.

Следствие 1 можно сформулировать и так: *если z — комплексная переменная, пробегающая единичный квадрат комплексной плоскости, а отображение $f(z, b)$ определено для всех z на нижней стороне квадрата и всех $b \in B$ или для всех z во всем квадрате и всех $b \in A$, то его можно продолжить на все z в этом квадрате и все $b \in B$.*

Следствие 2. *Если отображение $f(z, b)$ определено для всех z на левой, нижней и правой сторонах единичного квадрата и всех $b \in B$ или для всех z во всем квадрате и всех $b \in A$, то его можно продолжить на все z в этом квадрате и все $b \in B$.*

Доказательство. Топологически нижняя сторона квадрата ничем не отличается от объединения левой, нижней и правой его сторон. Таким образом, следствие 2 представляет собой всего лишь переформулировку следствия 1.

Приступим к определению оператора δ. Пусть $\alpha \in T^{-(n+1)}(Y) = \left(T^{S^{n+1}(Y)}\right)$ и φ: $S^{n+1}(Y) \to T$ — какой-нибудь представитель элемента α. В силу свойств (II) и (III) (см. стр. 140) $S^{n+1}(Y) = S^1(S^n(Y))$. Из определения скрещенного произведения легко усмотреть, что φ можно представлять себе как такое отображение

$$\varphi\colon I \times S^n(Y) \to T,$$

что φ: $0 \times S^n(Y) \to t_0$, φ: $1 \times S^n(Y) \to t_0$, φ: $I \times p_0 \to t_0$, где t_0 — отмеченная точка пространства T, а p_0 — отмеченная точка пространства $S^n(Y)$. Зададим семейство отображений

$$\varphi_t\colon S^n(Y) \to T,$$

полагая $\varphi_t(p) = \varphi(t, p)$, $p \in S^n(Y)$. Тем самым φ_0 — постоянное отображение пространства $S^n(Y)$ и его можно продолжить до постоянного отображения всего пространства $S^n(X)$. (Поскольку $X \supseteq Y$, очевидно, что $S^n(X) \supseteq S^n(Y)$. Заметим также, что $S^n(X)$ — клеточный комплекс, а $S^n(Y)$ — его подкомплекс.)

Таким образом, если отображение f_0: $S^n(X) \to T$ задано равенством $f_0(p) = t_0$ для всех $p \in S^n(X)$, то φ_t — его частичная гомотопия. По ТПГ найдется гомотопия

$$f_t\colon S^n(X) \to T,$$

продолжающая ее. Так как отображение f_1: $S^n(X) \to T$ продолжает φ_1, то f_1: $S^n(Y) \to t_0$. Поэтому f_1 можно считать отображением

$$f_1\colon S^n(X)/S^n(Y) \to T.$$

Легко проверить, что $S^n(X)/S^n(Y) = S^n(X/Y)$, и тогда

$$f_1\colon S^n(X/Y) \to T.$$

Обозначим через $\{f_1\}$ класс отображения f_1 в $\left(T^{S^n(X/Y)}\right)$ и положим

$$\delta\alpha = \delta\{\varphi\} = \{f_1\}.$$

Покажем, что α однозначно определяет элемент $\{f_1\}$. Пусть $\varphi^{(0)}$ и $\varphi^{(1)}$ — два представителя элемента α. Они определяют семейства отображений $\varphi_t^{(0)}$, $\varphi_t^{(1)}$, удовлетворяющие приведенным выше условиям. Кроме того, существуют гомотопия $\varphi_t^{(s)}$ между отображениями $\varphi_t^{(0)}$, $\varphi_t^{(1)}$ и продолжения $f_t^{(0)}$, $f_t^{(1)}$ этих отображений на все $S^n(X)$, постоянные при $t=0$. Зададим $f_0^{(s)}$ равенством

$$f_0^{(s)}(p) = t_0 \quad \text{для всех} \quad p \in S^n(X)$$

и положим

$$f_t^{(s)}(p) = \varphi_t^{(s)}(p) \quad \text{для всех} \quad p \in S^n(Y).$$

Тем самым задано отображение f, удовлетворяющее условиям следствия 2 из ТПГ и потому продолжаемое до отображения всего произведения $I \times I \times S^n(X)$ в пространство T. Это продолжение в свою очередь задает отображение $f_t^{(s)}(p)$, определенное для всех $t, s \in I$, $p \in S^n(X)$. Очевидно, что $f_1^{(s)}$ — гомотопия, связывающая отображения $f_1^{(0)}$ и $f_1^{(1)}$, и так как она постоянна на $S^n(Y)$, то $\{f_1^{(0)}\} = \{f_1^{(1)}\}$ в $T^{-n}(X, Y)$, т. е. оператор δ определен корректно.

Теперь проверим первые шесть аксиом теории когомологий[1]). Аксиомы 1—3 очень просты, и мы оставляем их читателю.

Для проверки выполнения аксиомы 4 (аксиома точности) рассмотрим последовательность

$$\ldots \to T^{-n}(Y) \xrightarrow{\delta} T^{-n+1}(X, Y) \xrightarrow{j^*} \xrightarrow{i^*} T^{-n+1}(X) \xrightarrow{i^*} T^{-n+1}(Y) \to \ldots,$$

[1]) См. сноску 1 на стр. 80. — *Прим. перев.*

где отображения i^* и j^* индуцированы вложениями

$$i\colon Y \to X, \qquad j\colon X \to (X, Y),$$

а оператор δ определен только что.

Нужно проверить шесть вложений. Мы ограничимся проверкой только двух из них. Проверка остальных того же порядка трудности, что и этих двух.

1. $\ker i^* \subseteq \operatorname{im} j^*$. Пусть $\{\varphi\} \in \ker i^*$. Тогда φ отображает $S^{n-1}(X)$ в T, а его сужение на $S^{n-1}(Y)$ гомотопно постоянному отображению. Назовем эту гомотопию φ_t. По ТПГ найдется гомотопия $\Phi_t\colon S^{n-1}(X) \to T$, продолжающая φ_t. Следовательно, $\varphi \simeq \Phi_1$ и $\Phi_1|_{S^{n-1}(Y)} = \varphi_1$ — постоянное отображение, т. е. $\{\varphi\} = j^*\{\Phi_1\}$.

2. $\ker j^* \subseteq \operatorname{im} \delta$. Пусть $\{\psi\} \in \ker j^*$. Тогда $\psi\colon S^{n-1}(X) \to T$ — постоянное отображение на $S^{n-1}(Y)$, гомотопное постоянному отображению на всем $S^{n-1}(X)$. Пусть ψ_t — гомотопия, и пусть для удобства $\psi_1 = \psi$, ψ_0 постоянно. Так как гомотопия $\psi_t|_{S^{n-1}(Y)}$ постоянна для $t = 0$ и $t = 1$, то она индуцирует отображение $S^1(S^{n-1}(Y)) \to T$, назовем его Ψ. Тогда по определению $\{\psi\} = \{\psi_1\} = \delta\{\Psi\}$, т. е. $\{\psi\} \in \operatorname{im} \delta$.

Проверим выполнение аксиомы 5 (аксиома гомотопии).

Пусть отображения $f_0, f_1\colon (X, Y) \to (X', Y')$ гомотопны, а f_t — их гомотопия. Она индуцирует гомотопию $f'_t\colon X/Y \to X'/Y'$, которая в свою очередь индуцирует $\bar{f}_t\colon S^n \wedge (X/Y) \to S^n \wedge (X'/Y')$. Отображение

$$f_i^*\colon \left(T^{S^n(X'/Y')}\right) \to \left(T^{S^n(X/Y)}\right)$$

зададим соответствием $\{h\} \to \{h\bar{f}_i\}$, где $h \in T^{S^n(X'/Y')}$ и $i = 0, 1$. Но композиции $h\bar{f}_0$ и $h\bar{f}_1$ гомотопны посредством гомотопии $h\bar{f}_t$ и, следовательно, $\{h\bar{f}_0\} = \{h\bar{f}_1\}$, т. е. $f_0^* = f_1^*$.

Наконец, проверим аксиому 6 (аксиому вырезания). Фактически в этой теории справедлива усиленная аксиома вырезания. Рассмотрим вложение

$$f\colon (X - U, Y - U) \to (X, Y),$$

где U — любое открытое множество в Y. Так как X/Y и $(X-U)/(Y-U)$ гомеоморфны, то отображение

$$f^*\colon T^{-n}(X,Y)\to T^{-n}(X-U,\ Y-U)$$

будет изоморфизмом.

Теперь убедимся в том, что в общем случае аксиома размерности не выполняется. Пусть $\{p,\ p_0\}$ — двухэлементное пространство с отмеченной точкой p_0. Так как

$$S^n\wedge\{p,\ p_0\}=$$
$$=(S^n\times p)\cup(S^n\times p_0)/(\nu\times p)\cup(\nu\times p_0)\cup(S^n\times p_0),$$

то

$$T^{-n}(\{p,\ p_0\},\ p_0)=\pi_n(T).$$

Перечислим в заключение условия на T, при которых теория T-когомологий совпадает с обычной теорией когомологий.

Определение 1. Пространство T называется *пространством Хопфа* (*H-пространством*), если существует такое непрерывное отображение $\eta\colon T\times T\to T$ (мы будем писать $t_1\times t_2=\eta(t_1,\ t_2)$), что

(I) в T найдется элемент e, для которого $e\times e=e$, и отображения $t\to e\times t$ и $t\to t\times e$ гомотопны тождественному отображению $t\to t$;

(II) для каждого элемента $t\in T$ найдется элемент $I(t)\in T$, для которого отображения $t\to t\times I(t)$ и $t\to I(t)\times t$ гомотопны постоянному отображению $t\to e$;

(III) отображения $(t_1,\ t_2,\ t_3)\to(t_1\times t_2)\times t_3$ и $(t_1,\ t_2,\ t_3)\to t_1\times(t_2\times t_3)$ гомотопны между собой.

Элемент e называется *гомотопической единицей*, $I(t)$ — *гомотопически обратным* к элементу t, а отображение η — *гомотопически ассоциативным умножением*.

Если, кроме того,

(IV) отображение $\eta'\colon T\times T\to T$, заданное равенством $\eta'(t_1,\ t_2)=t_2\times t_1$, гомотопно отображению η, то H-пространство T называется *абелевым*.

Примечание. В качестве отмеченной точки пространства T берется элемент e. Все гомотопии, фигурирующие в определениях, должны сохранять отмеченную точку.

Если T есть H-пространство, то на (T^X) можно ввести групповую структуру, положив $\{f\}\cdot\{g\}=\{f\cdot g\}$, где $\{f\}$, $\{g\}\in(T^X)$, а $f\cdot g$ задается равенством

$$f\cdot g(x)=f(x)\times g(x).$$

Заметим, что идемпотентность элемента e обеспечивает сохранение отображением $f\cdot g$ отмеченной точки. Определим единичный элемент как гомотопический класс такого отображения

$$E\colon X\to T,$$

что $E(x)=e$ для всех $x\in X$. Возьмем $\{f\}\in(T^X)$ и зададим отображение $\tilde{f}\colon X\to T$ равенством $\tilde{f}(x)=I(f(x))$. Тогда, как легко видеть, $\{f\}\cdot\{\tilde{f}\}=\{\tilde{f}\}\cdot\{f\}=\{E\}$. Ассоциативность этого умножения следует из свойства (III) определения 1. Наконец, если T — абелево H-пространство, то (T^X) будет, очевидно, абелевой группой.

Далее, согласно конструкции Эйленберга — Маклейна (см. Ху Сы-цзян [1, стр. 234—236]), для произвольной абелевой группы G существует абелево H-пространство T_G, у которого

$$\pi_1(T_G)\approx G,\quad \pi_n(T_G)\approx 0\quad \text{для } n\neq 1.$$

Если в теории T_G-когомологий положить $H^n(X,Y)=T_G^{-n+1}(X,Y)$, то получится обычная теория когомологий с коэффициентами в G.

Добавление

Цель этого добавления состоит в том, чтобы обратить внимание на неточное утверждение, сделанное на стр. 139, и коротко объяснить, в чем дело. Мы утверждали, что „множество с особым элементом“ $(T^{S^n(X/Y)})$ в общем случае не обладает групповой

структурой. Однако можно показать, что без всяких ограничений на пространство T можно ввести групповую структуру на $(T^{S^n(X/Y)})$ для всех $n \geqslant 1$. Более того, оказывается, что для $n \geqslant 2$ эта группа абелева. Мы покажем, как это делается, в общих чертах; подробности см. Буржен [1, стр. 414—421].

Наличие групповой структуры на $(T^{S^n}) = \pi_n(T)$ следует из существования отображения μ: $S^n \to S_1^n \vee S_2^n$ (состоящего в стягивании экватора в точку), обладающего нужными свойствами. Группа $\pi_n(T)$ абелева для $n \geqslant 2$, поскольку S_1^n и S_2^n можно поменять местами. Отображение μ естественно индуцирует отображение μ': $S^n \wedge W \to (S_1^n \wedge W) \vee (S_2^n \wedge W)$, которое, как и μ, обладает всеми свойствами, нужными для введения групповой структуры.

Читатель может теперь сам попытаться решить, будут ли индуцированные отображения T-когомологий и кограничный оператор, определенные в части А, гомоморфизмами.

Наконец, возникает вопрос, согласована ли „естественная“ групповая структура, введенная здесь, с групповой структурой, определенной в части А, в случае когда H-пространство T абелево. Ответ на этот вопрос утвердительный (см. Буржен [1]).

В части Б мы изучим обобщенную теорию когомологий, у которой пробное пространство T, как нетрудно показать, будет H-пространством. На основании предыдущего замечания групповая структура, которую всегда можно ввести в обобщенные когомологии, совпадает со структурой, возникающей из H-пространства. Поэтому замечания, сделанные в этом добавлении, несущественны для чтения последующего текста.

Б. *K*-теория

Начнем с описания некоторых алгебраических операций над расслоениями Стинрода, определяющих (коммутативное) кольцо $K(X)$. Затем покажем, как это кольцо связано с теорией, развитой в части А,

Сумма Уитни

1. Пусть γ_α — структура $U(m_\alpha)$-расслоения над пространством B_α, $\alpha = 1, 2$. Обозначим через $\{\mathscr{U}_i^{(1)}\}$, $\{\mathscr{U}_k^{(2)}\}$ соответствующие координатные окрестности, а через $\{U_{b_1}^{(1)}(i, j)\}$, $\{U_{b_2}^{(2)}(k, l)\}$ соответствующие координатные преобразования. Семейство $\{\mathscr{U}_i^{(1)} \times \mathscr{U}_k^{(2)}\}$ покрывает $B_1 \times B_2$.

Для $(b_1, b_2) \in (\mathscr{U}_i^{(1)} \times \mathscr{U}_k^{(2)}) \cap (\mathscr{U}_j^{(1)} \times \mathscr{U}_l^{(2)})$ положим

$$U_{(b_1, b_2)}(i, k; j, l) = U_{b_1}(i, j) \oplus U_{b_2}(k, l),$$

здесь знак $\oplus$ обозначает прямую сумму матриц. Группу $U(m_1) \oplus U(m_2)$ можно считать вложенной в $U(m_1 + m_2)$ посредством отображения, переводящего $(u, v) \in U(m_1) \oplus U(m_2)$ в $(m_1 + m_2) \times (m_1 + m_2)$-матрицу $\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$. Если в качестве координатных преобразований взять функции $U_{(b_1, b_2)}(i, k; j, l)$, получится структура $U(m_1 + m_2)$-расслоения над $B_1 \times B_2$, называемая *внешней суммой* $\gamma_1 \oplus \gamma_2$ структур γ_1 и γ_2.

При $B_1 = B_2 = B$ имеем диагональное отображение $\delta\colon B \to B \times B$, задаваемое соответствием $x \to (x, x)$. С помощью понятий гл. IV получаем индуцированную структуру $\delta^+(\gamma_1 \oplus \gamma_2)$ расслоения над B, называемую *суммой Уитни* структур γ_1 и γ_2,

$$\gamma_1 \oplus \gamma_2 = \delta^+(\gamma_1 \oplus \gamma_2).$$

2. Сумму Уитни векторных расслоений (с одной и той же базой) можно определить иначе. Пусть $\xi_\alpha = (E_\alpha, B, F_\alpha, U(m_\alpha), p_\alpha)$ $(\alpha = 1, 2)$ — комплексное векторное расслоение (т. е. расслоение, у которого слой F_α является m_α-мерным комплексным векторным пространством) с базой B, пространством расслоения E_α и проекцией p_α. Обозначим через E подмножество $\{(e_1, e_2) \in E_1 \times E_2 \mid p_1(e_1) = p_2(e_2)\}$ пространства $E_1 \times E_2$ и зададим проекцию

$$p\colon E \to B$$

равенством $p(e_1, e_2) = p_1(e_1) = p_2(e_2)$. Слой при этой проекции гомеоморфен прямому произведению (т. е.

прямой сумме в смысле векторных пространств) $F_1 \times F_2$. Поскольку $U(m_1+m_2)$ действует на $F_1 \times F_2$, можно построить расслоение $\xi = (E, B, F_1 \times F_2, U(m_1+m_2), p)$, которое и будет *суммой Уитни* векторных расслоений ξ_1 и ξ_2.

3. Еще один способ определения суммы Уитни. Пусть γ_1, γ_2 — структуры векторных расслоений над B_1, B_2 с группами $U(m_1)$ и $U(m_2)$ соответственно. По теореме о классификации существуют отображения

$$\varphi_i\colon B_i \to G_{m_i,\infty} \qquad (i=1,\ 2),$$

индуцирующие расслоения γ_i. Кроме того, существует отображение

$$N\colon G_{m_1,\infty} \times G_{m_2,\infty} \to G_{m_1+m_2,\infty},$$

определяемое равенством $N(\pi_1, \pi_2) = \pi_1 \oplus \pi_2$, где $\pi_i \in G_{m_i,\infty}$ $(i=1,\ 2)$[1]. Поэтому

$$B_1 \times B_2 \xrightarrow{\varphi_1 \times \varphi_2} G_{m_1,\infty} \times G_{m_2,\infty} \xrightarrow{N} G_{m_1+m_2,\infty}.$$

Композиция $N \circ (\varphi_1 \times \varphi_2)$ индуцирует структуру расслоения над $B_1 \times B_2$. Можно убедиться в том, что это и есть внешняя сумма $\gamma_1 \oplus \gamma_2$. При $B_1 = B_2 = B$ композиция

$$N \circ (\varphi_1 \times \varphi_2) \circ \delta\colon B \to G_{m_1+m_2,\infty}$$

индуцирует сумму Уитни структур γ_1 и γ_2 над пространством B.

Тензорное произведение (произведение Кронекера)

Мы дадим только один вариант определения тензорного произведения, соответствующий третьему способу определения суммы Уитни.

Естественное билинейное отображение

$$h\colon E_\infty^{(1)} \times E_\infty^{(2)} \to E_\infty^{(1)} \otimes E_\infty^{(2)} \approx E_\infty,$$

---

[1]) Предполагается, что $G_{m_i,\infty}$ состоит из плоскостей в $E_\infty^{(i)}$ $(i=1,\ 2)$, а $G_{m_1+m_2,\infty}$ — из плоскостей в $E_\infty^{(1)} \oplus E_\infty^{(2)} \approx E_\infty$. — *Прим. перев.*

заданное соответствием $(u, v) \to u \otimes v$, индуцирует отображение

$$h': G_{m_1, \infty} \times G_{m_2, \infty} \to G_{m_1 m_2, \infty}.$$

Поэтому

$$B_1 \times B_2 \xrightarrow{\varphi_1 \times \varphi_2} G_{m_1, \infty} \times G_{m_2, \infty} \xrightarrow{h'} G_{m_1 m_2, \infty}.$$

Композиция $h' \circ (\varphi_1 \times \varphi_2)$ индуцирует структуру расслоения над $B_1 \times B_2$, называемую *внешним тензорным произведением* $\gamma_1 \otimes \gamma_2$ структур γ_1 и γ_2. При $B_1 = B_2 = B$ диагональное отображение δ индуцирует структуру

$$\delta^+ (\gamma_1 \otimes \gamma_2) = \gamma_1 \otimes \gamma_2,$$

называемую *тензорным произведением* структур γ_1 и γ_2.

Замечание. Легко доказать, что

a) $\gamma_1 \oplus \gamma_2 \cong \gamma_2 \oplus \gamma_1$,

b) $\gamma_1 \oplus (\gamma_2 \oplus \gamma_3) \cong (\gamma_1 \oplus \gamma_2) \oplus \gamma_3$,

c) $\gamma_1 \otimes \gamma_2 \cong \gamma_2 \otimes \gamma_1$,

d) $\gamma_1 \otimes (\gamma_2 \otimes \gamma_3) \cong (\gamma_1 \otimes \gamma_2) \otimes \gamma_3$,

e) $\gamma_1 \otimes (\gamma_2 \oplus \gamma_3) \cong (\gamma_1 \otimes \gamma_2) \oplus (\gamma_1 \otimes \gamma_3)$,

f) если $f: \hat{B} \to B$, то $f^+ (\gamma_1 \oplus \gamma_2) \cong f^+ (\gamma_1) \oplus f^+ (\gamma_2)$ и $f^+ (\gamma_1 \otimes \gamma_2) \cong f^+ (\gamma_1) \otimes f^+ (\gamma_2)$.

Лемма 1. *Для каждого главного $U(n)$-расслоения ξ с базой X найдется главное $U(n')$-расслоение $\xi^\perp$ над X (где n' — некоторое целое число), для которого расслоение $\xi \oplus \xi^\perp$ тривиально.*

Доказательство. Сначала докажем лемму для случая $\xi = \alpha_{n, N} = (V_{n, N}, G_{n, N}, U(n), U(n), p_{n, N})$. Напомним, что многообразие Штифеля $V_{n, N}$ состоит из всех ортонормальных n-реперов в начале координат N-мерного пространства, или, что то же самое, представляет собой множество всех пар (π, v_n), где $\pi \in G_{n, N}$, а v_n — ортонормальный базис для π. Проекция $p_{n\, N}$ задается равенством

$$p_{n, N} ((\pi, v_n)) = \pi.$$

Обозначим через $E_{n,N}$ множество $\{(\pi, v^{\perp}_{N-n}) | \pi \in G_{n,N}\}$, где $v^{\perp}_{N-n}$ — ортонормальный $(N-n)$-репер, образующий ортонормальный базис в $\pi^{\perp}$. Проекция

$$p'_{n,N}\colon E_{n,N} \to G_{n,N}$$

задается равенством

$$p'_{n,N}((\pi, v^{\perp}_{N-n})) = \pi.$$

Таким образом, мы получаем главное расслоение $\alpha^{\perp}_{n,N} = (E_{n,N}, G_{n,N}, U(N-n), U(N-n), p'_{n,N})$. Ясно, что сумма $\alpha_{n,N} \oplus \alpha^{\perp}_{n,N}$ эквивалентна прямому произведению $G_{n,N} \times U(N)$, т. е. расслоение $\alpha_{n,N} \oplus \alpha^{\perp}_{n,N}$ тривиально.

Чтобы доказать лемму для общего случая расслоения ξ, возьмем „классифицирующее" отображение для ξ

$$\varphi\colon X \to G_{n,N},$$

где N — достаточно большое целое число (зависящее от размерности пространства X). Тем самым

$$\varphi^{+}(\alpha_{n,N}) = \xi.$$

Положим

$$\xi^{\perp} = \varphi^{+}(\alpha^{\perp}_{n,N}).$$

Тогда в силу замечания, предшествующего лемме,

$$\xi \oplus \xi^{\perp} = \varphi^{+}(\alpha_{n,N}) \oplus \varphi^{+}(\alpha^{\perp}_{n,N}) \cong \varphi^{+}(\alpha_{n,N} \oplus \alpha^{\perp}_{n,N}),$$

откуда следует лемма.

Определение 1. Два главных унитарных расслоения ξ_1 и ξ_2 с базой X называются *s-эквивалентными* (или *стабильно эквивалентными*), если существуют тривиальные расслоения τ_1 и τ_2, для которых

$$\xi_1 \oplus \tau_1 \cong \xi_2 \oplus \tau_2.$$

Легко проверить, что s-эквивалентность действительно является отношением эквивалентности. Обозначим это отношение через $\overset{s}{\sim}$, а класс s-эквивалентности, содержащий расслоение α, — через $\{\alpha\}$. Множество всех классов s-эквивалентности обозна-