

чим $K_0(X)$. Заметим, что из (обычной) эквивалентности расслоений вытекает s -эквивалентность, но обратное неверно. Например, касательное расслоение сферы S^{2n} s -эквивалентно тривиальному расслоению, но не эквивалентно ему.

Лемма 2. *Множество $K_0(X)$ всех классов s -эквивалентности главных унитарных расслоений над X образует абелеву группу относительно операции, индуцированной суммой Уитни расслоений.*

Доказательство. Пусть $\{\xi_1\}$ и $\{\xi_2\}$ — любые два элемента из $K_0(x)$. Тогда ξ_1 и ξ_2 — главные унитарные расслоения, представляющие классы $\{\xi_1\}$ и $\{\xi_2\}$. Положим

$$\{\xi_1\} \oplus \{\xi_2\} = \{\xi_1 \oplus \xi_2\}.$$

Легко проверить, что эта операция определена корректно. Согласно замечанию, предшествующему лемме 1, она коммутативна и ассоциативна. Нулем группы будет класс $\{\tau\}$ всех тривиальных расслоений τ :

$$\{\xi\} \oplus \{\tau\} = \{\xi\} = \{\tau\} \oplus \{\xi\};$$

этот объект определен корректно, поскольку все тривиальные расслоения s -эквивалентны.

Пусть $\{\xi\} \in K_0(X)$, а ξ — представитель этого класса. Если ξ^\perp — расслоение, построенное в лемме 1, т. е. $\xi \oplus \xi^\perp \cong \tau$, где τ — тривиальное расслоение, то

$$\{\xi\} \oplus \{\xi^\perp\} = \{\xi \oplus \xi^\perp\} = \{\tau\}.$$

Тем самым элемент $\{\xi^\perp\}$ — обратный к элементу $\{\xi\}$, и группа $K_0(X)$ абелева.

Примечание. Мы увидим дальше, что $K_0(X)$ можно даже сделать кольцом.

Функтор Атьи — Хирцебруха — Гrotендика

Пусть X — конечномерный клеточный комплекс, α — главное унитарное расслоение над X . Обозначим через (α) класс эквивалентности, содержащий расслоение α , и через $K_F(X)$ свободную абелеву группу,

образованную всеми классами эквивалентности (a) главных унитарных расслоений над X. Пусть $K_F^+(X)$ — подгруппа группы $K_F(X)$, образованная всеми элементами вида $(a_1 \oplus a_2) - (a_1) - (a_2)$. Факторгруппа

$$K_F(X)/K_F^+(X) = K(X)$$

называется *группой Гротендика* комплекса X, или *AХГ-функтором*.

В действительности $K(\)$ есть контравариантный функтор из категории клеточных комплексов и непрерывных отображений в категорию абелевых групп и гомоморфизмов. Чтобы убедиться в этом, заметим, что отображение $f: X \rightarrow Y$ индуцирует отображение f^+ расслоения над Y в расслоение над X. Поскольку f^+ переводит эквивалентные расслоения в эквивалентные, мы получаем индуцированное отображение из $K_F(Y)$ в $K_F(X)$; обозначим его тоже f^+ . Согласно замечанию перед леммой 1,

$$f^+((a_1 \oplus a_2)) = f^+((a_1)) \oplus f^+((a_2)).$$

Следовательно, f^+ отображает также $K_F^+(Y)$ в $K_F^+(X)$ и тем самым индуцирует отображение из $K(Y)$ в $K(X)$; это отображение мы также будем обозначать f^+ . Очевидно, что соответствие $X \rightarrow K(X)$, $f \rightarrow f^+$ функториально.

В силу замечания перед леммой 1 тензорное произведение расслоений естественно задает (коммутативную) кольцевую структуру на $K(X)$. Это кольцо обладает единицей — ее роль выполняет класс тривиального одномерного расслоения, т. е. тривиального $U(1)$ -расслоения.

Класс главного унитарного расслоения a над X в кольце $K(X)$ обозначается через $[a]$. Напомним, что (a) обозначает класс просто эквивалентности расслоения a, а {a} — класс s-эквивалентности. Мы уже отмечали, что $(a) = (\beta) \Rightarrow \{a\} = \{\beta\}$, но не обратно. Ясно также, что $(a) = (\beta) \Rightarrow [a] = [\beta]$.

Зададим теперь кольцевой гомоморфизм, называемый размерностным гомоморфизмом,

$$\dim: K(X) \rightarrow \mathbb{Z},$$

полагая

$$\dim (\sum n_i [\alpha_i]) = \sum n_i \dim \alpha_i.$$

Здесь n_i — целые числа, а $\sum n_i [\alpha_i]$ состоит из конечного числа членов и является произвольным элементом кольца $K(X)$. Заметим, кстати, что размерность $U(m_i)$ -расслоения α_i равна m_i , а не размерности многообразия $U(m_i)$. Целое число m_i иногда называется рангом группы $U(m_i)$ и расслоения α_i .

Положим

$$\tilde{K}(X) = \ker(\dim).$$

Тем самым $\tilde{K}(X)$ будет идеалом в $K(X)$. Очевидно, что $\tilde{K}(X)$ — контравариантный функтор тех же категорий, что и $K(X)$. Попытаемся установить связь между $\tilde{K}(X)$ и $K_0(X)$. Зададим гомоморфизм групп

$$h': K_F(X) \rightarrow K_0(X),$$

полагая $h'([\alpha]) = \{\alpha\}$, а далее продолжая по линейности. Если m — положительное целое число, то

$$h'(m[\alpha]) = \{\alpha\} \oplus \{\alpha\} \oplus \dots \oplus \{\alpha\} \quad (m \text{ слагаемых}),$$

если же m отрицательно, то

$$h'(m[\alpha]) = \{\alpha^\perp\} \oplus \{\alpha^\perp\} \oplus \dots \oplus \{\alpha^\perp\} \quad (m \text{ слагаемых}).$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} h'((\alpha_1 \oplus \alpha_2) - (\alpha_1) - (\alpha_2)) &= \{\alpha_1 \oplus \alpha_2\} \oplus \{\alpha_1^\perp\} \oplus \{\alpha_2^\perp\} = \\ &= \{\alpha_1 \oplus \alpha_1^\perp \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_2^\perp\} = \{\tau_1 \oplus \tau_2\} = \{\tau\}, \end{aligned}$$

а $\{\tau\}$ — нулевой элемент из $K_0(X)$. Следовательно, подгруппа $K_F^+(X)$ группы $K_F(X)$ лежит в ядре гомоморфизма h' , который тем самым приводит к такому гомоморфизму

$$h: K(X) \rightarrow K_0(X),$$

что

$$h([\alpha]) = \{\alpha\}, \quad h(-[\alpha]) = \{\alpha^\perp\}.$$

Наконец, сужение гомоморфизма h на $\tilde{K}(X)$ будет гомоморфизмом

$$\tilde{h}: \tilde{K}(X) \rightarrow K_0(X).$$

Лемма 3. Гомоморфизм \tilde{h} является (групповым) изоморфизмом.

Доказательство. Начнем с определения отображения

$$i: \mathbb{Z} \rightarrow K(X).$$

Пусть τ_n — тривиальное расслоение размерности n . Положим $i(m) = [\tau_m]$ для $m \geq 0$ и $i(m) = -[\tau_{-m}]$ для $m < 0$.

Для доказательства леммы достаточно показать, что последовательность

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow K(X) \xrightarrow{h} K_0(X) \rightarrow 0$$

точна. Покажем, что эта последовательность расщепляется. Для этого нужно определить гомоморфизм

$$j: K_0(X) \rightarrow K(X).$$

Возьмем $\{\beta\} \in K_0(X)$, и пусть $n = \dim \beta$, где β — представитель класса $\{\beta\}$. Положим $j(\{\beta\}) = [(\beta) - (\tau_n)]$. Легко проверить, что это определение корректно и

$$\dim \circ i = 1, \quad h \circ j = 1,$$

$$\dim \circ j = 0, \quad h \circ i = 0.$$

Наконец, если $[\alpha]$ — образующая в $K(X)$ и $\dim \alpha = n$, то

$$[\alpha] = [(\alpha) - (\tau_n)] + [\tau_n] = j(\{\alpha\}) + i(n),$$

т. е. $K(X) = \text{im}(i) \oplus \text{im}(j)$, и лемма доказана.

Поскольку $\tilde{K}(X)$ обладает кольцевой структурой, можно с помощью (группового) изоморфизма \tilde{h} задать кольцевую структуру на $K_0(X)$.

Теперь мы пришли к нашему основному результату:

Теорема 1. Существует пространство BU , для которого

$$K_0(X) \leftrightarrow (BU^X)$$

(\leftrightarrow обозначает взаимно однозначное соответствие).

Доказательство. Рассмотрим пространства E_{-n}^∞ ($n = 1, 2, \dots$), состоящие из бесконечных в обе стороны последовательностей комплексных чисел ($\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots$), в которых только конечное число членов отлично от нуля и все x_i при $i \leq -n$ равны нулю. Бесконечный грассманнан $G_{n, \infty}$ будем считать множеством n -плоскостей в пространстве E_{-n}^∞ (ср. гл. III).

Тогда у нас будет последовательность естественных вложений

$$G_{1, \infty} \subseteq G_{2, \infty} \subseteq G_{3, \infty} \subseteq \dots$$

Действительно, пусть $\pi_n \in G_{n, \infty}$. Очевидно, что $E_{-(n+1)}^\infty = E_{-n}^\infty \oplus$ одномерное пространство.

Пусть $e_{-(n+1)}$ — образующая этого одномерного пространства, и пусть отображение

$$i_{n, n+1}: G_{n, \infty} \rightarrow G_{n+1, \infty}$$

задано равенством

$$i_{n, n+1}(\pi_n) = \{\pi_n, e_{-(n+1)}\},$$

где $\{\pi_n, e_{-(n+1)}\}$ — плоскость, порожденная векторами π_n и $e_{-(n+1)}$. Обозначим сквозное вложение пространства $G_{n, \infty}$ в $G_{n+k, \infty}$ через $i_{n, n+k}$. Назовем пространством $BU = \lim_{n \rightarrow \infty} G_{n, \infty}$ объединение всех $G_{n, \infty}$ ($n = 1, 2, \dots$), взятое с топологией прямого предела.

Напомним, что каждое $G_{n, \infty}$ само есть пространство прямого предела, т. е.

$$G_{n, \infty} = \lim_{m \rightarrow \infty} G_{n, m}.$$

С помощью диагональной последовательности получаем

$$BU = \lim_{n \rightarrow \infty} G_{n, 2n},$$

т. е. BU — прямой предел компактных пространств. Отсюда следует, что любое его компактное подмножество содержится в некотором пространстве $G_{n, 2n}$ (и, следовательно, в $G_{n, \infty}$). Заметим, что само пространство BU не компактно.

Зададим теперь отображение $K_0(X) \rightarrow (BU^X)$. Возьмем $\{\alpha\} \in K_0(X)$ с представителем α , и пусть $\dim \alpha = k$. Тогда

$$\varphi_k: X \rightarrow G_{k, \infty},$$

где φ_k — классифицирующее отображение, индуцирующее α . Если $i_k: G_{k, \infty} \rightarrow BU$ — отображение вложения, зададим

$$\Phi: X \rightarrow BU$$

как композицию $\Phi = i_k \circ \varphi_k$. Пусть $\beta \sim^s \alpha$ и $\dim \beta = l$. Возьмем классифицирующее отображение

$$\psi_l: X \rightarrow G_{l, \infty},$$

индуктирующее β . Тогда

$$\Psi: X \rightarrow BU,$$

где $\Psi = i_l \circ \psi_l$.

Отображения Φ и Ψ гомотопны. В самом деле, так как $\alpha \sim^s \beta$, то существуют тривиальные расслоения τ_1, τ_2 , для которых

$$\alpha \oplus \tau_1 \cong \beta \oplus \tau_2.$$

Пусть $\dim(\alpha \oplus \tau_1) = \dim(\beta \oplus \tau_2) = r$. Тогда $r \geq k, l$, и мы получаем отображения

$$\varphi_r, \psi_r: X \rightarrow G_{r, \infty},$$

где $\varphi_r = i_{k, r} \circ \varphi_k, \psi_r = i_{l, r} \circ \psi_l$. Легко видеть, что

$$i_{k, r}^+(a_r) \cong a_k \oplus \tau_1, \quad i_{l, r}^+(a_r) \cong a_l \oplus \tau_2,$$

где a_n — стандартное главное $U(n)$ -расслоение над $G_{n, \infty}$ (см. гл. VI, определение 5). Но тогда

$$\varphi_r^+(a_r) \cong \alpha \oplus \tau_1, \quad \psi_r^+(a_r) \cong \beta \oplus \tau_2$$

и, следовательно,

$$\varphi_r^+(a_r) \cong \psi_r^+(a_r).$$

Согласно теореме 4 гл. VI,

$$\varphi_r \cong \psi_r,$$

а так как $\Phi = i_r \circ \varphi_r$, $\Psi = i_r \circ \psi_r$, то
 $\Phi \simeq \Psi$.

Тем самым соответствие

$$\{\alpha\} \rightarrow [\Phi],$$

где $[\Phi]$ – гомотопический класс отображения Φ , определено корректно. Его взаимная однозначность непосредственно следует из обратного утверждения теоремы 4 гл. VI. Осталось доказать надъективность этого соответствия.

Возьмем любое отображение Φ из X в BU . Так как X – конечный клеточный комплекс, то пространство X компактно, а потому компактен и его образ $\Phi(X)$. Отсюда $\Phi(X) \subseteq G_{n,\infty}$ для достаточно большого n . Тем самым Φ можно представить в виде

$$\Phi = i_n \circ \varphi_n,$$

где φ_n – отображение из X в $G_{n,\infty}$. Положим

$$\alpha = \varphi_n^+(\alpha_n).$$

Используя компактность пространства $X \times I$, можно показать, что элемент α определен отображением $[\Phi]$ однозначно с точностью до s -эквивалентности. Тем самым соответствие $\{\alpha\} \rightarrow [\Phi]$ обратимо, и теорема доказана.

Следствие 1. $\tilde{K}(X) \leftrightarrow (BU^X)$.

Это непосредственно следует из леммы 3.

Следствие 2. $K(X) \leftrightarrow ((BU \times \mathbb{Z})^X)$ (\mathbb{Z} берется с дискретной топологией).

Доказательство: Имеем $K(X) \cong \tilde{K}(X) \oplus \mathbb{Z}$ и $((BU \times \mathbb{Z})^X) \leftrightarrow (BU^X) \times (\mathbb{Z}^X) \leftrightarrow (BU^X) \times \mathbb{Z}$, и следствие 2 вытекает из следствия 1.

Замечание 1. Можно показать, что BU – абелево H -пространство. Тогда, если (BU^X) наделено естественной групповой структурой (см. часть А и добавление к ней), то $\tilde{K}(X)$ и (BU^X) изоморфны как группы.

Замечание 2. Пусть $U = \lim_{n \rightarrow \infty} U(n)$ — прямой предел унитарных групп. (Он называется бесконечной унитарной группой.) Тогда BU можно считать универсальным классифицирующим пространством для U ; отсюда и название BU .

Определение 2. Пусть (X, Y) — клеточная пара, т. е. Y — подкомплекс конечного клеточного комплекса X . Если $Y = \emptyset$ и X не обладает a priori отмеченной точкой, то заменим X объединением $X \cup \{p\}$, где точка p не принадлежит X . Назовем ее отмеченной точкой нового пространства. Для каждого $n \geq 0$ положим

$$K^{-n}(X, Y) = \tilde{K}(S^n(X/Y)).$$

Согласно результатам части А, группы $K^{-n}(X, Y)$ образуют экстраординарную теорию когомологий, называемую \tilde{K} -теорией. В следующей главе мы подробнее изучим некоторые особенности этой теории.

Г л а в а IX

K-ТЕОРИЯ. ПРОДОЛЖЕНИЕ

Изучим подробнее структуру групп $K^{-n}(X, Y)$, определенных в предыдущей главе. Для ссылок мы предлагаем работу Атьи и Хирцебруха [1]¹).

1. Теория умножения

Прежде всего рассмотрим экстраординарную теорию когомологий с H -пространством T . Исследуем точную последовательность пары $(X \times Y, X \vee Y)$. Так как $T^{-n}(X, Y) = T^{-n}(X/Y, *)$ (здесь * обозначает отмеченную точку) и $(X \times Y)/(X \vee Y) = X \wedge Y$, то

$$\dots \xrightarrow{\delta} T^{-n}(X \wedge Y) \xrightarrow{\pi^*} T^{-n}(X \times Y) \xrightarrow{i^*} \\ \xrightarrow{i^*} T^{-n}(X \vee Y) \xrightarrow{\delta} \dots, \quad (\text{E})$$

где i^* и π^* индуцированы естественными отображениями $i: X \vee Y \rightarrow X \times Y$ и $\pi: X \times Y \rightarrow X \wedge Y$.

Л е м м а 1. Точная последовательность (E) распадается на короткие точные последовательности

$$0 \rightarrow T^{-n}(X \wedge Y) \xrightarrow{\pi^*} T^{-n}(X \times Y) \xrightarrow{i^*} T^{-n}(X \vee Y) \rightarrow 0.$$

Д о к а з а т е льс т в о. Сделаем несколько предварительных замечаний. Пусть (S, s_0) — любое пространство с отмеченной точкой. Рассмотрим пространство ΩS петель на S с началом и концом в точке s_0 . Определим по индукции $\Omega^n S = \Omega(\Omega^{n-1} S)$. Отметим два свойства операции Ω^n :

¹) На русском языке K-теория изложена в книге Атьи [1]. — *Прим. перев.*

a) $\Omega^n S$ является H -пространством для $n > 0$ независимо от того, обладает или нет этим свойством пространство S ;

b) существует естественное взаимно однозначное соответствие между $(S^{sn} \wedge W)$ и $((\Omega^n S)^W)$ (W – любое пространство). Оно задается следующим образом. Пусть $n = 1$ (общий случай получается по индукции). Отображение $f: S^1 \wedge W \rightarrow S$ можно рассматривать как отображение $f: I \times W \rightarrow S$, для которого $f(0 \times W) = s_0$, $f(1 \times W) = s_0$, $f(I \times w_0) = s_0$. Отображение $f': W \rightarrow \Omega S$ определено так: $f'(w)$ – это петля, зависящая от времени t так же, как $f(t, w)$, т. е. $f'(w)(t) = f(t, w)$. Условия, наложенные на f , гарантируют, что f' сохраняет отмеченную точку, отображая W в ΩS . Соответствие $[f] \rightarrow [f']$ (где $[]$ обозначает гомотопический класс) – искомое.

Перейдем к доказательству леммы. Сначала покажем, что отображение

$$((\Omega^n T)^{X \times Y}) \xrightarrow{i^*} ((\Omega^n T)^{X \vee Y})$$

надъективно. Пусть $[f] \in ((\Omega^n T)^{X \vee Y})$ и $f: X \vee Y \rightarrow \Omega^n T$ – представитель из $[f]$; положим $f_1 = f|_{X \times y_0}$, $f_2 = f|_{x_0 \times Y}$. Зададим отображение $F: X \times Y \rightarrow \Omega^n T$ равенством $F(x, y) = f_1(x, y_0) \cdot f_2(y, x_0)$, где произведение определено структурой H -пространства на $\Omega^n T$. Ясно, что F продолжает f с точностью до гомотопии, т. е. $i^*([F]) = [f]$. Отображение

$$((\Omega^n T)^{X \wedge Y}) \xrightarrow{\pi^*} ((\Omega^n T)^{X \times Y})$$

взаимно однозначно. Следовательно, последовательность в условии леммы точна. Чтобы усмотреть, что последовательность (E) распадается, заметим, что $T^{-n}(X \vee Y) \cong T^{-n}(X) \oplus T^{-n}(Y)$ (из определения T^{-n}).

Естественные проекции $\pi_1: X \times Y \rightarrow X$ и $\pi_2: X \times Y \rightarrow Y$ индуцируют отображения

$\pi_1^*: T^{-n}(X) \rightarrow T^{-n}(X \times Y)$, $\pi_2^*: T^{-n}(Y) \rightarrow T^{-n}(X \times Y)$,
и, следовательно, определено отображение

$$\pi_1^* \oplus \pi_2^*: T^{-n}(X) \oplus T^{-n}(Y) \rightarrow T^{-n}(X \times Y).$$

Отождествляя $T^{-n}(X \vee Y)$ с $T^{-n}(X) \oplus T^{-n}(Y)$, мы видим, что $\pi_1 \oplus \pi_2$ обеспечивает требуемое распадение последовательности.

Вернемся снова к K -теории. (Внешнее) тензорное произведение расслоений определяет естественное умножение

$$\mu: K(X) \otimes K(Y) \rightarrow K(X \times Y).$$

Напомним, что $\tilde{K}(X) = \ker(\dim)$, а $\dim: K(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ — гомоморфизм, введенный в гл. VIII. Его можно представлять себе, как гомоморфизм, индуцированный вложением $x_0 \rightarrow X$, где x_0 — отмеченная точка пространства X . Если $a \in \tilde{K}(X)$, $b \in \tilde{K}(Y)$, то

$$\mu(a, b) \in \ker[\tilde{K}(X \times Y) \rightarrow \tilde{K}(X \vee Y)].$$

По лемме 1 $\mu(a, b) \in \tilde{K}(X \wedge Y)$. Тем самым μ индуцирует умножение

$$\tilde{\mu}: \tilde{K}(X) \otimes \tilde{K}(Y) \rightarrow \tilde{K}(X \wedge Y).$$

Теперь можно для $m, n \geq 0$ определить умножение

$$\begin{aligned} K^{-m}(X, X_0) \otimes K^{-n}(Y, Y_0) &\rightarrow \\ &\rightarrow K^{-(m+n)}(X \times Y, (X_0 \times Y) \cup (X \times Y_0)). \end{aligned}$$

Это делается следующим образом:

$$\begin{aligned} K^{-n}(X, X_0) &= \tilde{K}(S^m(X/X_0)), \quad K^{-n}(Y, Y_0) = \tilde{K}(S^n(Y/Y_0)), \\ K^{-(m+n)}(X \times Y, (X_0 \times Y) \cup (X \times Y_0)) &= \\ &= \tilde{K}(S^{m+n}(X \times Y / ((X_0 \times Y) \cup (X \times Y_0))). \end{aligned}$$

Но

$$X \times Y / ((X_0 \times Y) \cup (X \times Y_0)) = X/X_0 \wedge Y/Y_0$$

и

$$S^m(X/X_0) \wedge S^n(Y/Y_0) = S^{m+n}(X/X_0 \wedge Y/Y_0).$$

Осталось определить

$$\tilde{K}(S^m(X/X_0)) \otimes \tilde{K}(S^n(Y/Y_0)) \rightarrow \tilde{K}(S^m(X/X_0) \wedge S^n(Y/Y_0)),$$

а это как раз та ситуация, в которой определено $\tilde{\mu}$.

Для простоты будем обозначать новое умножение написанием сомножителей рядом друг с другом (без всякого знака между ними). В силу естественного гомеоморфизма между $X \times Y$ и $Y \times X$

$$K^{-n}(Y, Y_0) \otimes K^{-m}(X, X_0) \rightarrow$$

$$\rightarrow K^{-(m+n)}(X \times Y, (X_0 \times Y) \cup (X \times Y_0)).$$

Лемма 2. Если $a \in K^{-m}(X, X_0)$, $b \in K^{-n}(Y, Y_0)$, то $ab = (-1)^{mn}ba$.

Доказательство. Имеем гомеоморфизмы

$$S^m \wedge S^n \leftrightarrow S^{m+n}, \quad S^n \wedge S^m \leftrightarrow S^{m+n}.$$

Композиция отображений

$$S^{m+n} \rightarrow S^n \wedge S^m \rightarrow S^m \wedge S^n \rightarrow S^{m+n}$$

будет отображением степени $(-1)^{mn}$. Отсюда легко следует лемма (см. Атья и Хирцебрух [1]).

Пусть (X, X_0) — клеточная пара с отмеченной точкой $x_0 \in X_0$. Рассмотрим диагональные отображения

$$X \xrightarrow{d} X \times X, \quad X_0 \xrightarrow{d} (x_0 \times X) \cup (X \times X_0).$$

Переходя к факторпространствам, получаем

$$X/X_0 \xrightarrow{d} (X/x_0) \wedge (X/X_0).$$

Исследуя композицию

$$K^{-m}(X) \otimes K^{-n}(X, X_0) \rightarrow K^{-(m+n)}(X \wedge (X/X_0)) \xrightarrow{d^*} \\ \xrightarrow{d^*} K^{-(n+m)}(X/X_0),$$

видим, что $\sum_{n \geq 0} K^{-n}(X, X_0)$ является $\sum_{m \geq 0} K^{-m}(X)$ -модулем. Поэтому справедлива

Теорема 1. $\sum_{m \geq 0} K^{-m}(X)$ представляет собой градуированное антисимметрическое кольцо. Существует гомоморфизм степени 0

$$\left(\sum_{m \geq 0} K^{-m}(X) \right) \otimes \left(\sum_{n \geq 0} K^{-n}(X, X_0) \right) \rightarrow \sum_{p \geq 0} K^{-p}(X, X_0),$$

превращающий $\sum_{n \geq 0} K^{-n}(X, X_0)$ в градуированный $\sum_{m \geq 0} K^{-m}(X)$ -модуль.

Дополнение. Умножения, введенные в этом разделе, обладают, очевидно, функториальными свойствами. Например, пусть $f: (X, X_0) \rightarrow (X', X'_0)$ и $g: (Y, Y_0) \rightarrow (Y', Y'_0)$ — отображения пар. Тогда диаграмма

$$K^{-m}(X', X'_0) \otimes K^{-n}(Y', Y'_0) \rightarrow K^{-(m+n)}(X' \times Y', (X'_0 \times Y') \cup (X' \times Y'_0))$$

$$\begin{array}{ccc} & \downarrow f^* \otimes g^* & \\ K^{-m}(X, X_0) \otimes K^{-n}(Y, Y_0) & \rightarrow & K^{-(m+n)}(X \times Y, (X_0 \times Y) \cup (X \times Y_0)) \\ & \downarrow (f \times g)^* & \end{array}$$

коммутативна. Заметим также, что отображение $f: X \rightarrow Y$ индуцирует кольцевой гомоморфизм

$$f^*: \sum_{m \geq 0} K^{-m}(Y) \rightarrow \sum_{m \geq 0} K^{-m}(X).$$

Замечание. Обратим внимание на то, что мы использовали специфические свойства К-теории только однажды, когда показывали существование отображения

$$\mu: K(X) \otimes K(Y) \rightarrow K(X \times Y).$$

В последней части рассуждений использовалось только то, что К-теория есть экстраординарная теория когомологий. Тем самым теорию умножения можно развить для любой теории T -когомологий, допускающей отображение

$$\mu: T^0(X) \otimes T^0(Y) \rightarrow T^0(X \times Y).$$

2. Теорема Ботта и ее следствия

Специфические свойства экстраординарной теории когомологий зависят только от того, как устроено соответствующее пробное пространство T . Гомотопический тип пространства BU , пробного в К-теории,

полностью изучен Боттом. Мы приведем здесь результаты Ботта (в формулировке Ботта и Атьи), а затем используем их для вывода некоторых основных результатов K -теории. Доказательство теоремы Ботта можно найти в работах Милнора [1], Шварца [1] и, разумеется, самого Ботта¹⁾.

Теорема 2 (Ботт – Атья – Хирцебрух). $\tilde{K}(S^1) = 0$, $\tilde{K}(S^2) = \mathbb{Z}$. Образующую в $\tilde{K}(S^2)$ можно представить себе следующим образом. Рассмотрим S^2 как $P_1^{\mathbb{C}}$, и пусть η – каноническое линейное расслоение (расслоение Хопфа) над $P_1^{\mathbb{C}}$. Это расслоение определяется естественной проекцией $\mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\}$ на $P_1^{\mathbb{C}}$; слой представляет собой все пары $(\lambda z_1, \lambda z_2)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Пусть 1 обозначает тривиальное одномерное расслоение над S^2 , положим $\mu = \eta - 1$. Тогда $g = [\mu] \in \tilde{K}(S^2)$ (ибо $\dim g = 0$) и g – свободная образующая в $\tilde{K}(S^2)$. Если $a \in K^{-m}(X, X_0)$, то отображение

$$\beta: K^{-m}(X, X_0) \rightarrow K^{-(m+2)}(X, X_0),$$

заданное равенством $\beta(a) = ag$, будет изоморфизмом (так называемым изоморфизмом Ботта).

Доказательство. Утверждение из теоремы 2, относящееся к $\tilde{K}(S^2)$, элементарно, и его можно доказать следующим образом. Поскольку S^2 можно покрыть двумя координатными кругами P^+ и P^- , пересекающимися по окружности C , и любая структура $U(n)$ -расслоения на P^+ или P^- тривиальна, структура $U(n)$ -расслоения на S^2 определена координатным преобразованием $h: C \rightarrow U(n)$. Два таких отображения h и h' определяют эквивалентные структуры расслоений тогда и только тогда, когда существуют отображения $g_+: P^+ \rightarrow U(n)$ и $g_-: P^- \rightarrow U(n)$, для которых $g_+ h g_-^{-1} = h'$ (ср. замечание перед определением 2, стр. 86). Легко проверить, что это может

¹⁾ См. также Атья [1]. – Прим. перев.

быть тогда и только тогда, когда h и h' гомотопны между собой. Таким образом, установлено взаимно однозначное отображение между структурами $U(n)$ -расслоений на S^2 и гомотопическими классами в $\pi_1(U(n))$. Поскольку (как это будет подробнее разобрано ниже) любое отображение $h: C \rightarrow U(n)$ можно продеформировать в отображение $h: C \rightarrow U(1) \cong U(n)$, отсюда следует, что любая структура $U(n)$ -расслоения на S^2 эквивалентна прямой сумме $U(1)$ -расслоения и тривиального расслоения. Тем самым структура $\tilde{K}(S^2)$ определена $U(1)$ -расслоениями, которые она содержит. Если $U(1)$ -расслоение μ соответствует в указанном выше смысле данному отображению $h: C \rightarrow U(1)$, то $\mu \otimes \mu$ соответствует $h^2: C \rightarrow U(1)$. Легко видеть, что поскольку расслоение Хопфа η соответствует образующей h группы $\pi_1(U(1))$, каждая структура $U(n)$ -расслоения на S^2 s -эквивалентна либо степени Кронекера расслоения η , либо обратному одного из этих расслоений. Отсюда легко проверить то, что нам требуется.

Приведем набросок доказательства оставшейся части теоремы 2. Пусть X — любой конечномерный комплекс. Тогда, согласно теореме 1 стр. 162, элементы в $\tilde{K}(X)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с гомотопическими классами отображений $\varphi: X \rightarrow G_{n,2n}$ для любого достаточно большого n . Можно проверить (см. Шварц [1, лемма 7.22, следствие 7.23, 7.24, лемма 7.27 и следствие 7.28]), что существует некоторое вложение $G_{n,2n}$ в пространство петель $\Omega(U(2n))$, индуцирующее изоморфизм $(G_{n,2n}) \rightarrow (\Omega(U(2n)))^X$ для низкомерных пространств X . Это вложение можно описать следующим образом. Пусть p будет n -плоскостью в E^{2n} , а E_p — ортогональной проекцией на p . Тогда

$$C_p(t) = \begin{cases} \exp(2\pi i(I - E_p)t), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ \exp(2\pi it)I, & 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

определяет замкнутую петлю в $U(2n)$, оба конца которой — тождественные отображения; $p \rightarrow C_p(t)$ и есть требуемое вложение.

Для больших n многообразие $V_{2n, 4n} = U(4n)/U(2n)$ односвязно во всех низких размерностях и представляет собой расслоение со слоем $U(2n)$ над $G_{2n, 4n} = U(4n)/U(2n) \times U(2n)$. Тем самым любое отображение $\varphi: Y \rightarrow U(2n)$ гомотопно в $V_{2n, 4n}$ постоянному отображению, и получающаяся в результате гомотопия Φ_s , спроектированная естественным отображением $V_{2n, 4n} \rightarrow G_{2n, 4n}$, определяет некоторый элемент из $((\Omega(G_{2n, 4n}))^Y)$. Отображение $(U(2n))^Y \rightarrow ((\Omega(G_{2n, 4n}))^Y)$ определяет, таким образом, изоморфизм гомотопических классов для низкомерных Y . (См. ниже более удобное алгебраическое выражение этого изоморфизма.) Беря композицию наших двух изоморфизмов и используя очевидное тождество $(\Omega(Z_1))^{Z_2} \cong (Z_1^{S^1} \wedge Z_2)$, получаем сквозной изоморфизм $(G_{n, 2n}^X) \rightarrow (U(2n)^{S^1 \wedge X}) \rightarrow (G_{2n, 4n}^{S^2 \wedge X})$ для любого X размерности меньшей, чем n . Этот изоморфизм и есть изоморфизм Ботта β , указанный в теореме 2.

Наконец, теорема 2 отождествляет изоморфизм β с операцией умножения $a \rightarrow ag$. Мы опускаем доказательство этого факта; заметим, однако, что он будет редко использоваться в дальнейшем и что его можно установить из явного вида β , данного выше. Читатель, интересующийся дополнительными деталями доказательства, может обратиться к статье Атьи, Хирцебруха [1].

Следствие 1. $K^{-s}((p_1, p_2), p_2) \cong \mathbb{Z}$, если s четно, и $\cong 0$, если s нечетно.

Замечание. Следствие 1 показывает, что гомотопические группы $\pi_s(BU)$ периодичны с периодом 2. Обычная формулировка теоремы Ботта о периодичности утверждает, что гомотопические группы $\pi_s(U)$ бесконечной унитарной группы периодичны с периодом 2: $\pi_s(U) \cong \mathbb{Z}$, если s нечетно, и $\cong 0$, если s четно. Сейчас мы покажем, что это утверждение на самом деле эквивалентно следствию 1.

Докажем три формулы, из которых будет следовать эта эквивалентность.

Для фиксированного s и достаточно большого k
 $\pi_{s-1}(U(k)) \cong \pi_{s-1}(U(k+1)) \cong \dots \cong \pi_{s-1}(U)$, (1)

$$\pi_s(G_{k,2k}) \cong \pi_{s-1}(U(k)), \quad (2)$$

$$\pi_s(G_{k,2k}) \cong \pi_s(G_{k+1,2k+1}) \cong \dots \cong \pi_s(BU). \quad (3)$$

В самом деле, $U(k)$ представляет собой пространство расслоения над $U(k+1)/U(k) = S^{2k+1}$ со слоем $U(k)$. Запишем точную гомотопическую последовательность расслоения (см. гл. VI)

$$\dots \rightarrow \pi_s(S^{2k+1}) \xrightarrow{\partial} \pi_{s-1}(U(k)) \rightarrow \pi_{s-1}(U(k+1)) \rightarrow \dots \rightarrow \pi_{s-1}(S^{2k+1}) \rightarrow \dots;$$

так как $\pi_s(S^{2k+1}) = 0$ для $2k+1 > s$, то

$$0 \rightarrow \pi_{s-1}(U(k)) \rightarrow \pi_{s-1}(U(k+1)) \rightarrow 0.$$

Отсюда $\pi_{s-1}(U(k)) \cong \pi_{s-1}(U(k+1))$; этот изоморфизм индуцирован вложением $U(k) \rightarrow U(k+1)$. Используя, как мы делали это раньше, компактность, получаем, что вложение $U(k) \rightarrow U$ также индуцирует изоморфизм $\pi_{s-1}(U(k)) \cong \pi_{s-1}(U)$, и формула (1) доказана.

Далее, $V_{k,2k}$ — пространство расслоения над $G_{k,2k}$ со слоем $U(k)$. Снова напишем последовательность расслоения:

$$\dots \rightarrow \pi_s(V_{k,2k}) \rightarrow \pi_s(G_{k,2k}) \xrightarrow{\partial} \pi_{s-1}(U(k)) \rightarrow \pi_{s-1}(V_{k,2k}) \rightarrow \dots$$

Согласно лемме 2' стр. 107, $\pi_s(V_{k,2k}) = 0$ для $2k+1 > s$. Отсюда следует формула (2).

Вложения $U(k) \rightarrow U(k+1)$ и $U(2k) \rightarrow U(2k+1)$ дают отображения

$$\varphi: V_{k,2k} = U(2k)/U(k) \rightarrow U(2k+1)/U(k+1) = V_{k+1,2k+1},$$

$$\psi: G_{k,2k} = U(2k)/U(k) \times U(k) \rightarrow$$

$$\rightarrow U(2k+1)/U(k) \times U(k+1) = G_{k+1,2k+1}.$$

Очевидно, что φ — отображение расслоения, накрывающее отображение ψ . Поэтому диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow \pi_s(V_{k,2k}) & \rightarrow \pi_s(G_{k,2k}) & \xrightarrow{\partial} \pi_{s-1}(U(k)) & \rightarrow \pi_{s-1}(V_{k,2k}) & \rightarrow \dots \\ \downarrow & \downarrow \psi_* & \downarrow i_* & \downarrow & & \\ \rightarrow \pi_s(V_{k+1,2k+1}) & \rightarrow \pi_s(G_{k+1,2k+1}) & \xrightarrow{\partial} \pi_{s-1}(U(k+1)) & \rightarrow \pi_{s-1}(V_{k+1,2k+1}) & \rightarrow \dots \end{array}$$

коммутативна. Из формул (1) и (2) вытекает, что для $2k+1 > s$ отображения ∂ и i_* — изоморфизмы. Но тогда и ψ_* — изоморфизм.

Из соображений компактности следует, что вложение $G_{k, 2k} \rightarrow BU$ индуцирует изоморфизм $\pi_s(G_{k, 2k}) \rightarrow \pi_s(BU)$, и формула (3) доказана.

Комбинируя эти три формулы, получаем $\pi_s(BU) \cong \pi_{s-1}(U)$.

Попытаемся теперь извлечь из теоремы Ботта информацию о группах $K^{-n}(X, X_0)$.

Лемма 3. Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} K^{-n}(X', X'_0) & \xrightarrow{\beta} & K^{-n-2}(X', X'_0) \\ \downarrow f^* & & \downarrow f^* \\ K^{-n}(X, X_0) & \xrightarrow{\beta} & K^{-n-2}(X, X_0), \end{array}$$

где $f: (X, X_0) \rightarrow (X', X'_0)$ — отображение пар, коммутативна.

Это непосредственно следует из диаграммы, данной в дополнении к теореме 1, и из определения β .

Лемма 4. Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} K^{-n-1}(X_0) & \xrightarrow{\delta} & K^{-n}(X, X_0) \\ \downarrow \beta & & \downarrow \beta \\ K^{-n-3}(X_0) & \xrightarrow{\delta} & K^{-n-2}(X, X_0), \end{array}$$

где (X, X_0) — любая пара, коммутативна.

Это следует из леммы 3 и из того, что отображение δ можно считать индуцированным некоторым отображением пространств (см. гл. VIII, А, а также статью Атьи и Хирцебруха [1]).

Теорема 3. Пусть (X, X_0) — любая пара, а $X_0 \xrightarrow{i} X$ и $(X, \emptyset) \xrightarrow{j} (X, X_0)$ — естественные вложения. Если

в диаграмме

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & K^{-2}(X) & \xrightarrow{i^*} & K^{-2}(X_0) & \xrightarrow{\delta} & K^{-1}(X, X_0) & \xrightarrow{j^*} & K^{-1}(X) \\
 & & \swarrow \beta & & \nearrow \delta \circ \beta & & & & \searrow i^* \\
 & & & K^0(X_0) & & & & & K^{-1}(X_0) \\
 & & & \swarrow i^* & & & & & \searrow \delta \\
 & & & & K^0(X) & \xleftarrow{j^*} & K^0(X, X_0)
 \end{array}$$

верхняя строка представляет собой точную последовательность пары (X, X_0) , то шестиугольник в этой диаграмме точный.

Доказательство. Точность в $K^{-1}(X)$, $K^{-1}(X_0)$, $K^0(X, X_0)$, $K^0(X)$ очевидна. Точность в $K^{-1}(X, X_0)$ следует из того, что β — изоморфизм. Проверим точность в $K^0(X_0)$. Согласно лемме 4, $\delta \beta \circ i^* = \beta \delta \circ i^*$. Но так как $\delta \circ i^* = 0$, то $\beta \delta \circ i^* = 0$, т. е. $\text{Im } i^* \subseteq \ker \delta \beta$. Для доказательства обратного включения допустим, что $\delta \beta(a) = 0$, $a \in K^0(X_0)$. Тогда $\beta(a) \in \ker \delta$ и потому $\beta(a) = i^*(a')$, $a' \in K^{-2}(X)$. Так как отображение β надъективно, то $a' = \beta(a'')$, $a'' \in K^0(X)$. Тем самым $\beta(a) = i^*\beta(a'') = \beta i^*(a'')$ (по лемме 3). Кроме того, $a = i^*(a'')$, поскольку β взаимно однозначно, и потому $\ker \delta \beta \subseteq \text{Im } i^*$.

Определение 1. Для любого целого числа $n \geq 0$ и любой пары (X, X_0) положим

$$K^n(X, X_0) = \begin{cases} K^0(X, X_0), & \text{если } n \text{ четно,} \\ K^{-1}(X, X_0), & \text{если } n \text{ нечетно,} \end{cases}$$

$$K^*(X, X_0) = K^0(X, X_0) \oplus K^1(X, X_0).$$

Из определений и приведенных выше результатов следует

Теорема 4. $K^*(X)$ представляет собой \mathbb{Z} -гра-дуированное антисимметрическое кольцо, т. е.

$K^0(X)K^0(X) \subseteq K^0(X)$, $K^0(X)K^1(X) \subseteq K^1(X)$,
 $K^1(X)K^1(X) \subseteq K^0(X)$, а $K^*(X, X_0)$ является \mathbb{Z}_2 -градуированным $K^*(X)$ -модулем. Кроме того, шестиугольник

$$\begin{array}{ccccc}
 & & K^1(X, X_0) & \rightarrow & K^1(X) \\
 & \delta \nearrow & & & \searrow \\
 K^0(X_0) & & & & K^1(X_0) \\
 & \swarrow & & & \delta \searrow \\
 & & K^0(X) & \leftarrow & K^0(X, X_0)
 \end{array}$$

точный.

3. Характер Чжэня

Этот раздел посвящен построению кольцевого гомоморфизма из $K(X)$ в обычное кольцо когомологий (например, сингулярных) пространства X с рациональными коэффициентами. Этот гомоморфизм, называемый характером Чжэня, играет важную роль, например, в вычислении кольца $K(X)$. Такие вычисления мы произведем в следующей главе для случая, когда X — проективное пространство.

Характер Чжэня определяется с помощью классов Чжэня. Поэтому начнем с доказательства основной теоремы о классах Чжэня.

Теорема 5 (о произведении Уитни). Пусть ξ_1, ξ_2 — комплексные расслоения над комплексами X_1, X_2 . Тогда для классов Чжэня $c(\xi_1)$ и $c(\xi_2)$

$$c(\xi_1 \oplus \xi_2) = c(\xi_1) \times c(\xi_2).$$

Если $X_1 = X_2 = X$, то

$$c(\xi_1 \oplus \xi_2) = c(\xi_1) \cup c(\xi_2).$$

Доказательство. Обозначим через $c_j, c_k^{(1)}, c_l^{(2)}$ классы Чжэня пространств $G_{n_1+n_2, \infty}, G_{n_1, \infty}, G_{n_2, \infty}$ соответственно. Пространство $G_{n_1, \infty}$ можно представлять

себе как множество n_i -плоскостей в бесконечномерном евклидовом пространстве E_i^∞ , а $G_{n_1+n_2, \infty}$ — как множество (n_1+n_2) -плоскостей в $E^\infty = E_1^\infty \oplus E_2^\infty$. Зададим вложение

$$\tilde{N}: G_{n_1, \infty} \times G_{n_2, \infty} \rightarrow G_{n_1+n_2, \infty}$$

равенством $\tilde{N}(\pi_1, \pi_2) = \{\pi_1, \pi_2\}$, где $\{\pi_1, \pi_2\}$ — плоскость, образованная плоскостями π_1 и π_2 . Пусть

$$\varphi_1: X_1 \rightarrow G_{n_1, \infty} \quad \text{и} \quad \varphi_2: X_2 \rightarrow G_{n_2, \infty}$$

— классифицирующие отображения расслоений ξ_1, ξ_2 , причем $\varphi_i^*(a_{n_i}) = \xi_i$, а a_{n_i} — универсальное расслоение над $G_{n_i, \infty}$. Очевидно, что расслоение $\xi_1 \oplus \xi_2$ индуцировано отображением

$$\tilde{N} \circ (\varphi_1 \times \varphi_2): X_1 \times X_2 \rightarrow G_{n_1+n_2, \infty}.$$

Поскольку кольца когомологий $H^*(G_{n_i, \infty}; \mathbb{Z})$ свободны от кручений (гл. III), из теоремы Кюннета следует, что

$$\tilde{N}^* c_j = Q_j(c_k^{(1)}, c_l^{(2)}),$$

где Q_j — однородный полином степени j . Далее,

$$\begin{aligned} c_j(\xi_1 \oplus \xi_2) &= [\tilde{N} \circ (\varphi_1 \times \varphi_2)]^* c_j = (\varphi_1 \times \varphi_2)^* \circ \tilde{N}^*(c_j) = \\ &= (\varphi_1 \times \varphi_2)^* Q_j(c_k^{(1)}, c_l^{(2)}) \end{aligned}$$

и потому

$$c_j(\xi_1 \oplus \xi_2) = Q_j(c_k^{(1)}(\xi_1), c_l^{(2)}(\xi_2)).$$

Остается найти полином Q_j . Для этого положим $X_i = P_n^{(1)} \times \dots \times P_n^{(n_i)}$ и $X_{12} = X_1 \times X_2$ (здесь n выбрано так, что $n(n_1+n_2) \geq j$).

В гл. III были определены естественные отображения

$$N_i: P_n^{(1)} \times \dots \times P_n^{(n_i)} \rightarrow G_{n_i, \infty},$$

$$N: X_{12} = P_n^{(1)} \times \dots \times P_n^{(n_1+n_2)} \rightarrow G_{n_1+n_2, \infty}.$$

Напомним, как задается N_i . Элемент $v_j \in P_n^{(j)}$ определяет одномерное подпространство евклидова пространства E_j^n . Обозначим через $N_i((v_1, v_2, \dots, v_{n_i}))$ плоскость π в $E^{n_l n} = E_1^n \oplus \dots \oplus E_{n_l}^n$, порожденную одномерными пространствами v_1, \dots, v_{n_l} . Очевидно, что

$$N = \tilde{N} \circ (N_1 \times N_2).$$

Поэтому, если $\sigma_j (\sigma_k^{(1)}, \sigma_l^{(2)})$ есть j -й (k -й, l -й) элементарный симметрический полином от $n_1 + n_2$ (n_1, n_2) образующих, то

$$\sigma_j(t_1, \dots, t_{n_1+n_2}) = Q_j(\sigma_k^{(1)}(t_1, \dots, t_{n_1}), \sigma_l^{(2)}(t_{n_1+1}, \dots, t_{n_1+n_2})).$$

Так как

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_1+n_2} z^j \sigma_j(t_1, \dots, t_{n_1+n_2}) &= \prod_{j=1}^{n_1+n_2} (z - t_j) = \\ &= \prod_{j=1}^{n_1} (z - t_j) \prod_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} (z - t_j) = \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n_1} z^k \sigma_k^{(1)}(t_1, \dots, t_{n_1}) \right) \cdot \left(\sum_{l=1}^{n_2} z^l \sigma_l^{(2)}(t_{n_1+1}, \dots, t_{n_1+n_2}) \right), \end{aligned}$$

то

$$Q_j(\sigma_k^{(1)}, \sigma_l^{(2)}) = \sigma_j = \sigma_j^{(1)} + \sigma_{j-1}^{(1)} \cdot \sigma_1^{(2)} + \dots + \sigma_1^{(1)} \cdot \sigma_{j-1}^{(2)} + \sigma_j^{(2)}.$$

Поскольку $c(\xi) = 1 + c_1(\xi) + c_2(\xi) + \dots$, первая часть теоремы доказана. Вторая получается с помощью диагонального отображения.

Дальше наша цель состоит в том, чтобы доказать существование очень важного гомоморфизма $K(X) \rightarrow H^*(X, \mathbb{Q})$, где \mathbb{Q} — поле рациональных чисел, называемого характером Чжэня виртуального расслоения. Прежде чем определять этот гомоморфизм, приведем несколько подготовительных лемм, относящихся к унитарным расслоениям. Эти леммы понадобятся для того, чтобы установить, что введенное отображение действительно является гомоморфизмом. Из них бу-

дет следовать, что любое алгебраическое соотношение между классами Чжэня выполняется для всех сумм Уитни U_1 -расслоений и вообще для всех U_n -расслоений (ср. лемму 5). Чтобы установить этот основной факт, мы покажем, что для любого данного U_n -расслоения ξ с базой X существуют пространство Y и такое отображение $\rho: Y \rightarrow X$, что

- a) $\rho^+(\xi)$ приводимо к периодической подгруппе T_n группы U_n , т. е. представляет собой прямую сумму U_1 -расслоений (теоремы 6 и 7 и их следствия),
- b) $\rho^*: H^*(X) \rightarrow H^*(Y)$ — взаимно однозначное отображение (теоремы 8 и 9).

Пространство Y построено из пространства E главного расслоения посредством общей элементарной процедуры, которая дана в следующих нескольких абзацах. Пусть $\alpha = (E, X, G, G, \rho)$ — главное G -расслоение, G — топологическая группа. По определению G действует на себе левыми сдвигами. Заметим, что она естественно действует на пространстве расслоения E . В самом деле, E можно считать (см. гл. IV) множеством троек (x, g, U) (где $x \in X$, $g \in G$, U — открытая окрестность точки x), рассматриваемых с точностью до эквивалентности $(x, g, U) \sim (x, g', V) \Leftrightarrow g' = g_{uv}(x) \cdot g$ (здесь g_{uv} — координатное преобразование). Группа G действует на E справа:

$$[(x, g, U)] \cdot g_0 = [(x, g \cdot g_0, U)],$$

где $[]$ обозначает класс эквивалентности. Легко проверить, что это действие определено корректно.

Пусть Y — пространство, на котором группа G действует слева. Тогда можно задать ее действие справа

$$\phi: (E \times Y) \times G \rightarrow E \times Y$$

на прямом произведении $E \times Y$, положив

$$\phi((e, y), g) = (eg, g^{-1}y).$$

Рассмотрим факторпространство $(E \times Y)/G$, наделенное фактортопологией. Обозначим класс эквивалентности элемента (e, y) в $(E \times Y)/G$ через $\{(e, y)\}$. Задав отображение

$$p': (E \times Y)/G \rightarrow X$$

равенством

$$p': (\{(e, y)\}) = p(e),$$

получим расслоение $((E \times Y)/G, X, Y, G, p')$.

Пусть $\beta = (E, X, K, K, p)$ — главное K -расслоение и K — замкнутая подгруппа группы Ли G . Пусть $i: K \rightarrow G$ — вложение. Определим очевидным образом действие слева группы K на G . Применив описанную выше конструкцию, в которой роль группы G играет теперь группа K , получим расслоение $((E \times G)/K, X, G, K, p')$, которое, как легко видеть, можно считать главным G -расслоением $((E \times G)/K, X, G, G, p')$. (Заметим, кстати, что группа G действует на $(E \times G)/K$ справа, действуя на второй множитель.) Обозначим последнее расслоение через $i_+(\beta)$ ¹⁾.

Итак, пусть $\xi = (E, X, G, G, p)$ — главное G -расслоение, где G — группа Ли. Пусть опять K — замкнутая подгруппа группы G , а $i: K \rightarrow G$ — вложение. Поскольку K действует на E справа, мы получаем факторпространство E/K . Легко проверить, что $\beta = (E, E/K, K, K, \sigma)$ будет главным K -расслоением над E/K с проекцией σ , определенной равенством

$$\sigma(e) = \{e\}.$$

Согласно предыдущему абзацу, можно построить G -расслоение $i_+(\beta)$. Пусть $\{e\} \in E/K$ и e, e' — два представителя класса $\{e\}$. Тогда e и e' эквивалентны по модулю K и потому a fortiori эквивалентны по модулю G . Следовательно, отображение

$$\rho: E/K \rightarrow X,$$

заданное равенством

$$\rho(\{e\}) = p(e),$$

¹⁾ Описанная конструкция G -расслоения по заданному K -расслоению встречается во многих областях математики. В теории представлений групп она известна под названием „индуцированного представления“. — Прим. перев.

определенено корректно, и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\sigma} & E/K \\ & \searrow p & \downarrow \rho \\ & & X \end{array}$$

коммутативна. Ясно, что $(E/K, X, G/K, G, \rho)$ — расслоение. С другой стороны, отображение ρ индуцирует главное G -расслоение $\rho^+(\xi)$ с базой E/K . Пространство этого расслоения, как мы видели в гл. IV, состоит из пар $(\{e\}, e')$ (где $\{e\} \in E/K$, а $e, e' \in E$), для которых $\rho(\{e\}) = p(e)$. Обозначим это пространство через \bar{E} , и пусть $\bar{\rho}$ — проекция, заданная равенством

$$\bar{\rho}((\{e\}, e')) = \{e\}.$$

Теорема 6. *Расслоения $\rho^+(\xi)$ и $i_+(\beta)$ эквивалентны.*

Доказательство. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} (E \times G)/K & \xrightarrow{j'} & \bar{E} & \cong & E/K \times E \\ \searrow p' & & \downarrow \bar{\rho} & & \downarrow \rho \\ E/K & & & \xrightarrow{\rho} & X \end{array}$$

в которой еще надо определить отображение j' . Зададим отображение

$$j: E \times G \rightarrow (E/K) \times E$$

равенством

$$j((e, g)) = (\sigma(e), e \cdot g).$$

Так как $\rho\sigma = p$, $p(e \cdot h) = p(e)$ для любого $h \in G$ и $\sigma(e \cdot k) = \sigma(e)$ для любого $k \in K$, то j индуцирует отображение

$$j': (E \times G)/K \rightarrow \bar{E}.$$

Очевидно, что j' накрывает тождественное отображение E/K в себя, т. е. $p' = \bar{\rho} \circ j'$, и теорема доказана.

Если в качестве G взять унитарную группу U_n , а в качестве K „максимальный тор“ T_n группы U_n (например, замкнутую подгруппу всех диагональных матриц в U_n), то получится

Теорема 7. Пусть $\xi = (E, X, U_n, U_n, \rho_n)$ — главное U_n -расслоение, T_n — подгруппа диагональных матриц группы U_n , а $i_n: T_n \rightarrow U_n$ — вложение. Если $\beta = (E, E/T_n, T_n, T_n, \sigma_n)$, $(i_n)_+(\beta) = ((E \times U_n)/T_n, E/T_n, U_n, U_n, p'_n)$ и $\rho_n^+(\xi) = (\bar{E}, E/T_n, U_n, U_n, \bar{\rho}_n)$, где $\sigma_n, p'_n, \bar{\rho}_n$ имеют тот же смысл, что и $\sigma, p', \bar{\rho}$, то $(i_n)_+(\beta) \cong \rho_n^+(\xi)$. Кроме того, E/T_n — пространство U_n -расслоения над X со слоем U_n/T_n и проекцией ρ_n , а диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\sigma} & E/T_n \\ & \searrow p_n & \downarrow \rho_n \\ & X & \end{array}$$

коммутативна.

Следствие 1. U_n -расслоение $\rho_n^+(\xi)$ приводимо к T_n .
(Определение приводимости см. гл. IV, стр. 87.)

Следствие 2. $\rho_n^+(\beta)$ есть сумма (Уитни) n экземпляров U_1 -расслоения.

Это ясно, так как $T_n = U_1 \times \dots \times U_1$ (n множителей).

Пусть $\alpha_m = (V_{m, \infty}, G_{m, \infty}, U_m, U_m, \rho_m)$ — универсальное U_m -расслоение (см. определение 5 гл. VI). Положим $\alpha_1 = \alpha$ и вспомним, что $G_{1, \infty}$ — бесконечномерное (комплексное) проективное пространство P_∞ , а $V_{1, \infty}$ — бесконечномерная (комплексная) сфера S^∞ . Рассмотрим также

$$\alpha^n = (S^\infty \times \dots \times S^\infty, P_\infty \times \dots \times P_\infty, U_1 \times \dots \times U_1, U_1 \times \dots \times U_1, p_1 \times \dots \times p_1),$$

где каждое прямое произведение имеет n сомножителей. Так как пространство $S^\infty \times \dots \times S^\infty$ гомотопически тривиально во всех размерностях и $U_1 \times \dots \times U_1 = T_n$, то из теоремы 3 гл. VI следует, что α^n

можно рассматривать как универсальное T_n -расслоение. Таким образом, пространство $P_\infty \times \dots \times P_\infty$ является универсальным классифицирующим пространством для T_n -расслоения. Вместо принятого выше громоздкого обозначения будем писать

$$\alpha^n = (E_{T_n}, X_{T_n}, T_n, T_n, p_{T_n}).$$

В гл. II было показано, что

$$H^*(X_{T_n}; \mathbb{Z}) = H^*(P_\infty \times \dots \times P_\infty; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n],$$

где $\mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]$ — кольцо полиномов от n переменных с целыми коэффициентами.

Применим теорему 7 к расслоению α_n . Тогда $\beta = (V_{n,\infty}, V_{n,\infty}/T_n, T_n, T_n, \sigma_n)$, диаграмма

$$\begin{array}{ccc} V_{n,\infty} & \xrightarrow{\sigma_n} & V_{n,\infty}/T_n \\ & \searrow p_n & \downarrow \rho_n \\ & & G_{n,\infty} \end{array}$$

коммутативна и $(i_n)_+(\beta) \cong \rho_n^+(\alpha_n)$. Поскольку $V_{n,\infty}$ гомотопически тривиально во всех размерностях, можно рассматривать β как универсальное T_n -расслоение с базой $V_{n,\infty}/T_n$. В силу универсальности

$$H^*(V_{n,\infty}/T_n; \mathbb{Z}) \cong H^*(X_{T_n}) \cong \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n].$$

Согласно теореме 7, $V_{n,\infty}/T_n$ будет пространством U_n -расслоения над $G_{n,\infty}$ со слоем U_n/T_n . В этом случае справедлива

Теорема 8. *Последовательность градуированных колец*

$$1 \rightarrow H^*(G_{n,\infty}) \xrightarrow{\rho_n^*} H^*(V_{n,\infty}/T_n) \xrightarrow{j_n^*} H^*(U_n/T_n) \rightarrow 1,$$

где $j_n: U_n/T_n \rightarrow V_{n,\infty}/T_n$ — вложение слоя в пространство расслоения, точна.

Доказательство см. Хусейни [1, стр. 14].

Пусть теперь $\xi = (E, X, U_n, U_n, p)$ — главное U_n -расслоение. Тогда мы имеем расслоения

$$\beta = (E, E/T_n, T_n, \sigma) \quad \text{и} \quad (E/T_n, X, U_n/T_n, U_n, \rho),$$

По теореме о классификации найдется отображение

$$f: X \rightarrow G_{n, \infty},$$

для которого $f^*(\alpha_n) = \xi$. Кроме того, существует классифицирующее отображение

$$\bar{f}: E/T_n \rightarrow V_{n, \infty}/T_n,$$

для которого $\bar{f}^*(\beta_n) = \beta$. Следовательно, диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
 & & U_n/T_n & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 E \xrightarrow{\sigma} & E/T_n & \xrightarrow{j} & V_{n, \infty}/T_n & \xleftarrow{\sigma_n} V_{n, \infty} \\
 & \downarrow \rho & & \downarrow \rho_n & \\
 & X & \xrightarrow{j} & G_{n, \infty} & \\
 & \searrow p & & \swarrow p_n & \\
 & & & &
 \end{array} \quad (*)$$

где j и j_n — вложения слоев в пространства расслоений, коммутативна. Рассмотрим в когомологиях диаграмму, индуцированную верхним треугольником:

$$\begin{array}{ccc}
 & H^*(U_n/T_n) & \\
 j^* \nearrow & & \swarrow j_n^* \\
 H^*(E/T_n) & \xleftarrow{j^*} & H^*(V_{n, \infty}/T_n)
 \end{array}$$

В силу теоремы 8 гомоморфизм j_n^* надъективен, а потому надъективен и гомоморфизм j^* . И уже нетривиальные рассуждения (см. Хусейни [1]) показывают, что верна

Теорема 9. *Отображение $\rho^*: H^*(X) \rightarrow H^*(E/T_n)$ инъективно.*

Теперь мы подготовлены к тому, чтобы дать определение характера Чжэня.

Пусть c_1, c_2, \dots, c_n — классы Чжэня пространства $G_{n, \infty}$, т. е. элементы из $H^*(G_{n, \infty})$, соответствующие элементарным симметрическим полиномам $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ от n переменных t_1, \dots, t_n . Классами

Чжэня расслоения ξ (см. диаграмму (*)) будут $c_i(\xi) = f^*(c_i)$, $i = 1, \dots, n$, а полным классом Чжэня расслоения ξ будет $c(\xi) = 1 + c_1(\xi) + \dots + c_n(\xi)$. Выше было показано, что

$$H^*(V_{n,\infty}/T_n) \cong \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n].$$

Будем считать переменные t_i кольцевыми образующими кольца $H^*(V_{n,\infty}/T_n)$; $t_i \in H^2(V_{n,\infty}/T_n)$. Положим

$$\gamma_i = \bar{f}^*(t_i), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Тогда γ_i принадлежат $H^2(E/T_n)$ и называются корнями главного U_n -расслоения ξ . Полагая $c_0(\xi) = 1$, получаем

$$\rho^* c(\xi) = \rho^* \left(\sum_{i=0}^n c_i(\xi) \right) = \rho^* \bar{f}^* \left(\sum_{i=0}^n c_i \right).$$

В силу коммутативности квадрата диаграммы (*)

$$\rho^* c(\xi) = \bar{f}^* \rho_n^* \left(\sum_{i=0}^n c_i \right).$$

По теореме 9 $\rho_n^*: H^*(G_{n,\infty}) \rightarrow H^*(V_{n,\infty}/T_n)$ есть взаимно однозначное отображение подкольца, состоящего из всех симметрических полиномов, в кольцо $\mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]$. Тем самым

$$\rho_n^* \left(\sum_{i=0}^n c_i \right) = 1 + \sum_{i=1}^n \sigma_i.$$

По определению элементарных симметрических полиномов

$$1 + \sum_{i=1}^n \sigma_i = \prod_{i=1}^n (1 + t_i),$$

и потому

$$\rho^* c(\xi) = \bar{f}^* \left(\prod_{i=1}^n (1 + t_i) \right) = \prod_{i=1}^n (1 + \gamma_i).$$

Рассмотрим элемент $\sum_{i=1}^n e^{\gamma_i}$ кольца $H^*(E/T_n; \mathbb{Q})$.

(Тут мы должны предположить, что группы когомологий $H^m(E/T_n)$ равны нулю для $m \geq m_0$, где m_0 — некоторое целое число. В противном случае степенной

ряд $\sum_{i=1}^n e^{\gamma_i}$ может быть бесконечным и будет представлять собой некоторый элемент в бесконечном прямом произведении $H^{**}(E/T_n; \mathbb{Q}) = \prod_{i \geq 0} H^i(E/T_n; \mathbb{Q}).$

Заметим, что $\sum_{i=1}^n e^{\gamma_i}$ — симметрический полином от корней γ_i и потому будет полиномом от элементарных симметрических функций этих корней, т. е.

$$\sum_{i=1}^n e^{\gamma_i} = R(\bar{f}^*(\sigma_1), \dots, \bar{f}^*(\sigma_n)),$$

где R — полином, определенный выше.

Назовем

$$c(\xi, z) = 1 + c_1(\xi)z + \dots + c_n(\xi)z^n$$

полиномом Чжэня от вспомогательной переменной z .

С учетом уравнения $\rho^* c(\xi) = \prod_{i=1}^n (1 + \gamma_i)$ можно формально записать

$$c(\xi, z) = \prod_{i=1}^n (1 + \gamma_i z).$$

Если $\xi \cong \eta$, то очевидно, что $\text{ch}(\xi) = \text{ch}(\eta)$. Тем самым отображение

$$(\xi) \rightarrow \text{ch}(\xi),$$

где (ξ) — класс эквивалентности расслоения ξ , определено корректно. Продолжим его по линейности до гомоморфизма

$$\text{ch}: K_F(X) \rightarrow H^*(X; \mathbb{Q}).$$

Исследуем поведение этого гомоморфизма на $K_F^+(X)$ и на тензорных произведениях.

Теорема 10. *Если ξ — главное U_n -расслоение над X , а η — главное U_m -расслоение над X , то*

- a) $\text{ch}(\xi \oplus \eta) = \text{ch}(\xi) + \text{ch}(\eta),$
- b) $\text{ch}(\xi \otimes \eta) = \text{ch}(\xi) \text{ch}(\eta).$

Доказательство. По теореме о произведении Уитни

$$c(\xi \oplus \eta, z) = c(\xi, z)c(\eta, z).$$

Это означает, что если $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ — корни расслоения ξ , а $\{\gamma'_1, \dots, \gamma'_m\}$ — корни расслоения η , то $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\} \cup \{\gamma'_1, \dots, \gamma'_m\}$ — корни расслоения $\xi \oplus \eta$. Следовательно,

$$\rho^* \operatorname{ch}(\xi \oplus \eta) = \sum_{i=1}^n e^{\gamma_i} + \sum_{j=1}^m e^{\gamma'_j} = \rho^* \operatorname{ch}(\xi) + \rho^* \operatorname{ch}(\eta),$$

откуда непосредственно следует (а).

Так как

$$\left(\sum_{i=1}^n e^{\gamma_i} \right) \left(\sum_{j=1}^m e^{\gamma'_j} \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m e^{\gamma_i + \gamma'_j},$$

то для того, чтобы установить (б), достаточно доказать, что множество корней расслоения $\xi \otimes \eta$ имеет вид $\{\gamma_i + \gamma'_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$. Докажем это.

Случай 1: ξ и η являются U_1 -расслоениями.

Представляем читателю доказать, что тогда $c_1(\xi \otimes \eta) = c_1(\xi) + c_1(\eta)$. А так как

$$c(\xi \otimes \eta, z) = 1 + c_1(\xi \otimes \eta)z,$$

$$c(\xi, z) = 1 + c_1(\xi)z, \quad c(\eta, z) = 1 + c_1(\eta)z,$$

то утверждение доказано.

Случай 2: $\xi = \xi_1 \oplus \dots \oplus \xi_n$, $\eta = \eta_1 \oplus \dots \oplus \eta_m$, где ξ_i и η_j являются U_1 -расслоениями.

Так как

$$\xi \otimes \eta = \sum_{i,j} \xi_i \otimes \eta_j,$$

то по теореме о произведении Уитни

$$c(\xi, z) = \prod_{i=1}^n (1 + c_1(\xi_i)z),$$

$$c(\eta, z) = \prod_{j=1}^m (1 + c_1(\eta_j)z),$$

$$c(\xi \otimes \eta, z) = \prod_{i,j} (1 + c_1(\xi_i \otimes \eta_j)z) =$$

$$= \prod_{i,j} [1 + \{c_1(\xi_i) + c_1(\eta_j)\}z],$$

и утверждение для этого случая тоже верно.

Случай 3: ξ и η произвольны. Для доказательства теоремы в этом случае достаточно показать, что выполняется

Лемма 5. *Любое алгебраическое соотношение между классами Чжэня, справедливо для сумм U_1 -расслоений, справедливо и в общем случае.*

А эту лемму влечет

Лемма 6. *Пусть ξ_1, \dots, ξ_r — главные унитарные расслоения над X (не обязательно одной и той же размерности). Тогда существуют такое пространство Y и такое отображение $\varphi: Y \rightarrow X$, что индуцированное отображение $\varphi^*: H^*(X) \rightarrow H^*(Y)$ инъективно и каждое из индуцированных расслоений $\varphi^+(\xi_i)$ ($1 \leq i \leq r$) над Y равно сумме U_1 -расслоений.*

Доказательство. Сначала докажем лемму для $r = 1$. Пусть $\xi_1 = (E_1, X, U_{m_1}, U_{m_1}, p_1)$. Возьмем в качестве Y пространство E_1/T_{m_1} , а в качестве φ отображение ρ (см. теорему 7). В силу теоремы 9 отображение φ^* инъективно, а из следствия 2 теоремы 7 вытекает, что $\varphi^+(\xi_1)$ можно представить в виде суммы U_1 -расслоений.

Итак, найдутся пространство Y_1 и отображение

$$\varphi_1: Y_1 \rightarrow X,$$

для которых φ_1^* инъективно и $\varphi_1^+(\xi_1)$ равно сумме U_1 -расслоений. Используя те же рассуждения, най-

дем пространство Y_2 и отображение

$$\varphi_2: Y_2 \rightarrow Y_1,$$

для которых φ_2^* инъективно и $\varphi_2^*\varphi_1^*(\xi_2)$ равно сумме U_1 -расслоений. Заметим, что тогда и $\varphi_2^*\varphi_1^*(\xi_1)$ также равно сумме U_1 -расслоений. Зададим отображение

$$\psi: Y_2 \rightarrow X$$

равенством $\psi = \varphi_1 \circ \varphi_2$. Так как

$$\psi^* = \varphi_2^* \circ \varphi_1^*: H^*(X) \rightarrow H^*(Y_2)$$

инъективно, а $\psi^*(\xi_1)$ и $\psi^*(\xi_2)$ равны суммам U_1 -расслоений, то лемма доказана для $r = 2$. Общий случай $r > 1$ выводится по индукции.

Тем самым лемма 6, а с ней лемма 5 и теорема 10 доказаны.

Следствие. $\text{ch}|_{K_F^+(X)} = 0$, и отображение $\text{ch}: K_F(X) \rightarrow H^*(X; \mathbb{Q})$ индуцирует кольцевой гомоморфизм

$$\text{ch}: K(X) \rightarrow H^*(X; \mathbb{Q}).$$

В теореме 10 мы рассматривали расслоения ξ , η над одним и тем же пространством X . Для большей общности можно считать ξ расслоением над X , а η — расслоением над Y . Тогда справедливы утверждения, аналогичные теореме 10 и ее следствию. Например, диаграмма

$$\begin{array}{ccc} K(X) \otimes K(Y) & \xrightarrow{\mu} & K(X \otimes Y) \\ \downarrow \text{ch} \otimes \text{ch} & & \downarrow \text{ch} \\ H^*(X; \mathbb{Q}) \otimes H^*(Y; \mathbb{Q}) & \rightarrow & H^*(X \otimes Y; \mathbb{Q}) \end{array}$$

коммутативна. Отображение на нижней стороне прямоугольника является изоморфизмом Кюннета.

Для $\text{ch}|_{\tilde{K}(X)}$ получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \tilde{K}(X) \otimes \tilde{K}(Y) & \xrightarrow{\tilde{\mu}} & \tilde{K}(X \wedge Y) \\ \downarrow \text{ch} \otimes \text{ch} & & \downarrow \text{ch} \\ H^*(X; \mathbb{Q}) \otimes \tilde{H}^*(Y; \mathbb{Q}) & \rightarrow & \tilde{H}^*(X \wedge Y), \end{array}$$

в которой $\tilde{H}^*(X; \mathbb{Q})$ — кольцо приведенных когомологий, т. е. $\tilde{H}^*(X; \mathbb{Q}) = H^*(X, x_0; \mathbb{Q})$, а отображение на нижней стороне — изоморфизм по тензорной формуле Кюннета.

Пусть $H_G^*(X)$ — кольцо обычных когомологий пространства X с коэффициентами в G . Положим

$$H_G^e(X) = \sum_{i \geq 0} H^{2i}(X; G), \quad H_G^o(X) = \sum_{i \geq 0} H^{2i+1}(X; G).$$

Тогда

$$H_G^*(X) = H_G^e(X) \oplus H_G^o(X).$$

Лемма 7. ch отображает $K(X)$ в $H_Q^e(X) \subseteq H_Q^*(X)$. Если пространство X связно, то ch отображает $\tilde{K}(X)$ в $\tilde{H}_Q^e = \sum_{i \geq 1} H^{2i}(X; \mathbb{Q})$.

Доказательство нетрудно, если вспомнить, что корни расслоения представляют собой классы 2-мерных когомологий.

Определим теперь отображение

$$\text{ch}: K^{-n}(X, X_0) \rightarrow H^*(X, X_0; \mathbb{Q}).$$

Для этого зададим надстроечный изоморфизм

$$\sigma^n: \tilde{H}_Q^*(W) \rightarrow \tilde{H}_Q^*(S^n(W))$$

равенством

$$\sigma^n(x) = x \otimes s^n,$$

где s^n — каноническая образующая группы $H^n(S^n; \mathbb{Z})$, а W — любой комплекс. Из тензорной формулы Кюннета следует, что σ^n — изоморфизм. Пусть a принадлежит $K^{-n}(X, X_0) = \tilde{K}(S^n(X/X_0))$. По лемме 7 $\text{ch}(a) \in \tilde{H}_Q^*(S^n(X/X_0))$ и

$$(\sigma^n)^{-1} \text{ch}(a) \in \tilde{H}_Q^*(X/X_0) \cong H_Q^*(X, X_0).$$

Соответствие

$$a \rightarrow (\sigma^n)^{-1} \text{ch}(a)$$

и будет определять требуемый изоморфизм (который мы, допуская некоторую вольность, снова обозначим ch).

$$\text{ch}: K^{-n}(X, X_0) \rightarrow H_{\mathbb{Q}}^*(X, X_0).$$

По аналогии с изоморфизмом Ботта положим

$$s^2 = \hat{g}, \quad \sigma^2 = \hat{\beta}.$$

Тогда получим изоморфизм

$$\hat{\beta}: \tilde{H}_{\mathbb{Q}}^*(X/X_0) \rightarrow \tilde{H}_{\mathbb{Q}}^*(S^2(X/X_0)),$$

заданный равенством

$$\hat{\beta}(a) = \hat{a} \otimes \hat{g}.$$

Лемма 8. Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \tilde{K}(X) & \xrightarrow{\hat{\beta}} & \tilde{K}(S^2(X)) \\ \searrow \text{ch} & & \swarrow \text{ch} \\ H_{\mathbb{Q}}^*(X) & & \end{array}$$

коммутативна.

Доказательство. Если мы докажем, что $\text{ch}(g) = \hat{g}$, то утверждение будет следовать из второй коммутативной диаграммы на стр. 139. Так как $g = [\eta - 1]$, где η — каноническое линейное расслоение над $P_1^{\mathbb{C}}$, т. е. η индуцировано вложением $i_1: P_1^{\mathbb{C}} \rightarrow P_{\infty}^{\mathbb{C}}$, то

$$c_1(\eta) = i_1^*(c_1),$$

т. е. $c_1(\eta)$ — образующая группы $H^2(P_1^{\mathbb{C}})$. Далее

$$\text{ch}(\eta) = e^{c_1(\eta)} = 1 + c_1(\eta) + \frac{1}{2}c_1^2(\eta) + \dots,$$

а так как $c_1^2(\eta) = c_1^3(\eta) = \dots = 0$, то

$$\text{ch}(g) = \text{ch}(\eta) - \text{ch}(1) = 1 + c_1(\eta) - 1 = c_1(\eta),$$

и лемма доказана.

Возьмем $a \in K^n(X, X_0)$ и положим

$$\text{ch}(a) = \text{ch}(\beta^{-m}a),$$

где число m удовлетворяет неравенству $n - 2m \leq 0$. (Здесь снова допущена вольность обозначений.) Лемма 8 показывает, что это определение вполне законно. Тем самым определено отображение

$$\text{ch}: K^n(X, X_0) \rightarrow H_{\mathbb{Q}}^*(X, X_0)$$

для всех целых n . Кроме того (см. лемму 7), мы получаем, что ch отображает $K^0(X, X_0)$ в $H_{\mathbb{Q}}^e(X, X_0)$ и $K^1(X, X_0)$ в $H_{\mathbb{Q}}^o(X, X_0)$.

Для полноты картины напомним, что в теореме 4 мы построили точный K -шестиугольник. Аналогично имеем точный H -шестиугольник

$$\begin{array}{ccccc} & & H_{\mathbb{Q}}^o(X, X_0) \rightarrow \tilde{H}_{\mathbb{Q}}^o(X) & & \\ & \delta \nearrow & & \searrow & \\ \tilde{H}_{\mathbb{Q}}^e(X_0) & & & & \tilde{H}_{\mathbb{Q}}^o(X_0) \\ & \swarrow & & & \downarrow \\ & \tilde{H}_{\mathbb{Q}}^e(X) <- H_{\mathbb{Q}}^e(X, X_0) & & & \end{array}$$

Упражнение. Показать, что ch естественно преобразует K -шестиугольник в H -шестиугольник.
Указание. Согласно теореме 4, достаточно показать, что ch является \mathbb{Q} -когомологическим инвариантом расслоений, т. е. $\text{ch}f^+ = f^* \circ \text{ch}$, где f — непрерывное отображение пространств. А это лучше всего доказать сначала для сумм U_1 -расслоений, что практически тривиально, а затем перейти к общему случаю с помощью тех же рассуждений, что мы использовали в этом разделе.)

Замечание. При определении ch на $K^{-n}(X, X_0)$ и $K^n(X, X_0)$ мы требовали, чтобы образ лежал в $H_{\mathbb{Q}}^*(X, X_0)$. В противном случае можно было бы задать очевидным образом

$$\text{ch}: K^{-n}(X, X_0) \rightarrow H_{\mathbb{Q}}^*(S^n(X/X_0))$$

и положить

$$\mathcal{A}^{-n}(X, X_0) = H_{\mathbb{Q}}^e(S^n(X/X_0)).$$

Докажем, что группы $\mathcal{H}^{-n}(X, X_0)$ образуют экстраординарную теорию когомологий. Для любого целого n найдется такое пространство \mathcal{E}_n (так называемое пространство Эйленберга — Маклейна, обозначаемое обычно $K(\mathbb{Q}, n)$), что для любого конечного комплекса X

$$H_{\mathbb{Q}}^n(X) \cong (\mathcal{E}_n^X).$$

Если

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_2 \times \mathcal{E}_4 \times \mathcal{E}_6 \times \dots,$$

то

$$(\mathcal{E}^X) \cong \sum_{i \geq 1} H^{2i}(X; \mathbb{Q}) = \tilde{H}_{\mathbb{Q}}^e(X),$$

т. е. \mathcal{E} — пробное пространство, и утверждение доказано.

Наконец, можно построить \mathcal{H} -шестиугольник, как в K -теории (используя β вместо β), и показать, что ch естественно преобразует K -шестиугольник в \mathcal{H} -шестиугольник.

4. Спектральная последовательность Ати — Хирцебруха

В этом разделе мы получим спектральную последовательность, связывающую обычные когомологии клеточной пары с ее K -когомологиями, и извлечем из нее полезные сведения о K -группах. Мы получим спектральную последовательность, развивая общий метод, содержащийся в книге Картана и Эйленберга [1, гл. 15]. Начнем с описания этого метода.

Первое понятие — *групповая таблица*. Под *парой* мы будем понимать пару целых чисел (p, q) с $-\infty \leq p \leq q \leq +\infty$, а под *тройкой* — тройку целых чисел (p, q, r) с $-\infty \leq p \leq q \leq r \leq +\infty$. Групповой таблицей называется набор следующих объектов:

а) абелевой группы $H(p, q)$ для каждой пары (p, q) ,

б) гомоморфизма $H(p', q') \rightarrow H(p, q)$ для двух пар, удовлетворяющих неравенству $(p, q) \leq (p', q')$ (т. е. $p \leq p'$, $q \leq q'$),

с) гомоморфизма $H(p, q) \xrightarrow{\delta} H(q, r)$ для каждой тройки (p, q, r) .

Эти группы и гомоморфизмы должны удовлетворять следующим аксиомам.

0) $H(p, p) = 0$.

1) $H(p, q) \rightarrow H(p, q)$ — тождественный изоморфизм.

2) Если $(p, q) \leqslant (p', q') \leqslant (p'', q'')$, то треугольник

$$\begin{array}{ccc} H(p'', q'') & \xrightarrow{\quad} & H(p, q) \\ \searrow & & \swarrow \\ & H(p', q') & \end{array}$$

коммутативен.

3) Если $(p, q, r) \leqslant (p', q', r')$, то квадрат

$$\begin{array}{ccc} H(p', q') & \xrightarrow{\delta} & H(q', r') \\ \downarrow & & \downarrow \\ H(p, q) & \xrightarrow{\delta} & H(q, r) \end{array}$$

коммутативен.

4) Для каждой тройки (p, q, r) треугольник

$$\begin{array}{ccc} H(p, q) & \xrightarrow{\delta} & H(q, r) \\ \nwarrow & & \searrow \\ & H(p, r) & \end{array}$$

точен.

5) Группы $H(p, q)$ стабилизируются для малых значений p и для больших значений q .

Пример 1. Пусть (X, A) — пара пространств и

$$X = X_N \supseteq X_{N-1} \supseteq \dots \supseteq X_0 = A$$

— конечная фильтрация пары (X, A) . Положим

$$X_m = \begin{cases} A, & \text{если } m \leqslant 0; \\ X, & \text{если } m \geqslant N, \end{cases}$$

и

$$H(p, q) = \sum_{n \geqslant 0} T^{-n}(X_p, X_p)$$

для произвольной теории T -когомологий (T – пространство Хопфа). Получим групповую таблицу, в которой гомоморфизмом $H(p, q) \rightarrow H(p', q')$ будет гомоморфизм

$$\sum_{n \geq 0} T^{-n}(X_{q'}, X_{p'}) \rightarrow \sum_{n \geq 0} T^{-n}(X_q, X_p),$$

индуцированный вложением

$$(X_q, X_p) \subseteq (X_{q'}, X_{p'}),$$

а гомоморфизмом $H(p, q) \rightarrow H(q, r)$ – композиция

$$\sum_{n \geq 0} T^{-n}(X_q, X_p) \rightarrow \sum_{n \geq 0} T^{-n}(X_q) \xrightarrow{\delta} \sum_{n \geq 0} T^{-n}(X_r, X_q).$$

Все аксиомы легко проверяются.

Пример 2. Можно вместо $\sum_{n \geq 0} T^{-n}(X_q, X_p)$ взять $K^*(X_q, X_p)$ (см. определение 1) или $H_Q^*(X_q, X_p)$ (с обычной \mathbb{Z} -градуировкой или \mathbb{Z}_2 -градуировкой).

Пример 3. Другой частный случай примера 1. Пусть (X, A) – пара конечных комплексов. Возьмем каноническую фильтрацию пары (X, A) по оставам комплекса X . Другими словами, пространство X_p будет объединением A с p -остовом комплекса X .

Чрезвычайно важное сведение о групповых таблицах дает

Теорема 11. Для данной групповой таблицы существует спектральная последовательность $\{E_r^p\}$, $r \geq 1$, в которой $E_1^p = H(p, p+1)$, первый дифференциал δ^1 совпадает с гомоморфизмом $H(p, p+1) \xrightarrow{\delta} H(p+1, p+2)$ и группы E_∞^p образуют фильтрацию в $H(-\infty, \infty)$.

Эта теорема по существу была доказана в гл. V. Действительно, там мы доказали существование спектральной последовательности с требуемыми свойствами для групповой таблицы примера 1. Кроме

того, заметили, что построение спектральной последовательности не зависит существенным образом от топологической структуры пары (X, A) ; такое доказательство проходит для любой групповой таблицы.

Исследуем теперь ситуацию примера 3. В частности, изучим подробнее группы E_1 и E_2 . Для удобства записи обозначим

$$T^*(X, A) = \sum_{n \geq 0} T^{-n}(X, A).$$

Напомним, что

$$E_1^p = H(p, p+1) = T^*(X_{p+1}, X_p).$$

Заметим, что X_{p+1}/X_p представляет собой букет сфер (гроздь винограда), т. е.

$$X_{p+1}/X_p = S_1^{p+1} \vee S_2^{p+1} \vee \dots \vee S_{a_{p+1}}^{p+1},$$

где a_{p+1} — число $(p+1)$ -клеток в (X, A) . Пусть

$$f_i: (D_i^{p+1}, \partial D_i^{p+1}) \rightarrow (X_{p+1}, X_p) \quad (1 \leq i \leq a_{p+1})$$

— отображение приклеивания для $(p+1)$ -клеток пары (X, A) (см. стр. 55). Зададим отображение

$$I_{p+1}: T^*(X_{p+1}, X_p) \rightarrow \sum_{i=1}^{a_{p+1}} T^*(D_i^{p+1}, \partial D_i^{p+1})$$

равенством

$$I_{p+1}(a) = (f_1^*(a), \dots, f_{a_{p+1}}^*(a)).$$

Очевидно, что I_{p+1} — изоморфизм. Положим

$$\theta_i^{p+1} = f_i(\overset{\circ}{D}_i^{p+1}) \quad (1 \leq i \leq a_{p+1}).$$

Тогда

$$\theta_i^{p+1} \subseteq X_{p+1} - X_p,$$

или, что то же самое,

$$X_p \subseteq X_{p+1} - \theta_i^{p+1}.$$

Рассмотрим композицию g_i отображений

$$X_{p+1}/X_p \rightarrow X_{p+1}/X_p - \theta_i^{p+1} \rightarrow D_i^{p+1}/\partial D_i^{p+1},$$

первое из которых индуцировано вложением

$$(X_{p+1}, X_p) \subseteq (X_{p+1}, X_{p+1} - \theta_i^{p+1}),$$

второе переводит θ_i^{p+1} в $\overset{\circ}{D}_i^{p+1}$ посредством f_i^{-1} , а $X_{p+1} - \theta_i^{p+1}$ переводит в точку. Получаем отображение

$$J_{p+1}: \sum_{i=1}^{\alpha_{p+1}} T^*(D_i^{p+1}/\partial D_i^{p+1}) \rightarrow T^*(X_{p+1}/X_p),$$

заданное равенством

$$J_{p+1}(a_1, \dots, a_{\alpha_{p+1}}) = g_1^*(a_1) + \dots + g_{\alpha_{p+1}}^*(a_{\alpha_{p+1}}).$$

Ясно, что оно обратное для I_{p+1} .

Из формулы $E_1^p = H(p, p+1)$ легко вывести формулу

$$E_1^p = C^p \left(X, A; \sum_{n \geq 0} T^{-n-p-1}(X_0) \right),$$

где C^p — группа коцепей.

Исследуем теперь дифференциал ∂^1 , т. е. когранничное отображение

$$\delta: \sum_{n \geq 0} T^{-n}(X_{p+1}, X_p) \rightarrow \sum_{n \geq 0} T^{-n}(X_{p+2}, X_{p+1}).$$

Определим отображение

$$h^*: \sum_{i=1}^{\alpha_{p+1}} T^*(D_i^{p+1}/\partial D_i^{p+1}) \rightarrow \sum_{j=1}^{\alpha_{p+2}} T^*(\partial D_j^{p+2}),$$

где α_{p+2} — число $(p+2)$ -клеток пары (X, A) . Для любого i , удовлетворяющего неравенству $1 \leq i \leq \alpha_{p+1}$, составим композицию отображений

$$\partial D_i^{p+2} \xrightarrow{f_j} X_{p+1} \rightarrow X_{p+1}/X_{p+1} - \theta_i^{p+1} \rightarrow D_i^{p+1}/\partial D_i^{p+1},$$

где

$$f_j: (D_j^{p+2}, \partial D_j^{p+2}) \rightarrow (X_{p+2}, X_{p+1}) \quad (1 \leq j \leq \alpha_{p+2})$$

— отображение приклеивания, а последние два определены на стр. 191. Назовем эту композицию h_{ij} . Она индуцирует отображение

$$h_{ij}^*: T^*(D_i^{p+1}/\partial D_i^{p+1}) \rightarrow T^*(\partial D_j^{p+2}).$$

Зададим отображение

$$h_j^*(a_1, \dots, a_{a_{p+1}})$$

равенством

$$h_j^*(a_1, \dots, a_{a_{p+1}}) = h_{1j}^*(a_1) + \dots + h_{a_{p+1}, j}^*(a_{a_{p+1}}).$$

Тогда нужное отображение h^* задается равенством

$$\begin{aligned} h^*(a_1, \dots, a_{a_{p+1}}) &= \\ &= (h_1^*(a_1, \dots, a_{a_{p+1}}), \dots, h_{a_{p+2}}^*(a_1, \dots, a_{a_{p+1}})). \end{aligned}$$

Легко видеть, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & \sum_{i=1}^{a_{p+1}} T^*(D_i^{p+1}/\partial D_i^{p+1}) & \xrightarrow{I_{p+1}^{-1}} T^*(X_{p+1}/X_p) \\ h^* \swarrow & & \downarrow \delta \\ \sum_{j=1}^{a_{p+2}} T^*(\partial D_j^{p+2}) & & \\ \searrow \delta & \sum_{j=1}^{a_{p+2}} T^*(D_j^{p+2}/\partial D_j^{p+2}) & \xrightarrow{I_{p+2}} T^*(X_{p+2}/X_{p+1}) \end{array}$$

коммутативна.

Теперь мы уже почти показали, что дифференциал ∂^1 есть не что иное, как „формальная кограница“ δ клеточного комплекса (X, A) (ср. лемму 11 гл. II). Чтобы закончить это доказательство, осталось показать, что h_{ij} можно рассматривать как отображение $(p+1)$ -сферы в себя. Так как h_{ij} принадлежит гомотопическому классу, характеризуемому его степенью D_{ij} , то достаточно показать, что

$$h_{ij}^*(a) = D_{ij}a$$

для любого $a \in T^*(S^{p+1})$. Итак, осталось доказать, что справедлива

Лемма 9. Рассмотрим произвольную экстраординарную теорию когомологий с пробным пространством T . Пусть

$$\varphi: S^m \rightarrow S^m$$

— отображение степени D . Тогда индуцированное отображение

$$\varphi^*: T^{-n}(S^m) \rightarrow T^{-n}(S^m)$$

переводит элемент $a \in T^{-n}(S^m)$ в элемент Da .

Доказательство. Элемент a представлен некоторым отображением

$$f: S^n \wedge S^m \rightarrow T,$$

или, после обычного тождествования (см. доказательство леммы 1), отображением

$$f': S^m \rightarrow \Omega^n T.$$

Но тогда элемент $\varphi^*(a)$ представлен отображением

$$f' \circ \varphi: S^m \rightarrow \Omega^n T$$

и очевидно, что

$$[f' \circ \varphi] = D [f'].$$

Так как ∂^1 — формальный кограницочный оператор, то

$$E_2^p = H^p\left(X, A; \sum_{n \geq 0} T^{-n-p-1}(X_0)\right),$$

где H^p интерпретируется как формальная группа когомологий. Учитывая лемму 11 гл. II (точнее, двойственное к ней утверждение), можно считать H^p обычной группой когомологий пары (X, A) .

Замечание. В гл. II мы привели лемму 11 без доказательства. Лемму легко доказать с помощью результатов гл. V. В самом деле, рассмотрим спектральную последовательность на стр. 100, где в качестве $H(X, A)$ и т. п. берутся обычные гомологии. Из определения дифференциала ∂^r (в первой части доказательства теоремы 1 гл. V) непосредственно следует, что $\partial^r = 0$ для $r \geq 2$. Отсюда

$$E_2^l \cong E_3^l \cong \dots \cong E_\infty^l.$$

Но

$$E_\infty^j = \frac{[\operatorname{Im} H(X_j, A) \text{ в } H(X, A)]}{[\operatorname{Im} H(X_{j-1}, A) \text{ в } H(X, A)]},$$

и эта факторгруппа будет, очевидно, обычной j -группой гомологий $H_j(X, A)$ пары (X, A) .

Примечание. Равенство нулю дифференциалов ∂^r ($r \geq 2$) в случае, когда T^* — обычная теория когомологий, играет, как мы скоро увидим, важную роль.

Подытожим полученные результаты.

Теорема 12. Пусть (X, A) — клеточная пара. Существует спектральная последовательность, у которой

$$E_1^p = C^p\left(X, A; \sum_{n \geq 0} T^{-n-p-1}(X_0)\right),$$

$$E_2^p = H^p\left(X, A; \sum_{n \geq 0} T^{-n-p-1}(X_0)\right),$$

а E_∞^p — градуированная группа соответствующей фильтрации в $T^*(X, A)$.

Следствие. Пусть (X, A) — клеточная пара. Существует спектральная последовательность, у которой

$$E_1^p = C^p(X, A; \mathbb{Z}),$$

$$E_2^p = H^p(X, A; \mathbb{Z}),$$

а E_∞^p — градуированная группа соответствующей фильтрации в $K^*(X, A)$.

Доказательство. Нам понадобится здесь лишь соотношение

$$K^*(X_0) = K^0(X_0) \oplus K^1(X_0) \cong \mathbb{Z} \oplus 0.$$

С клеточной парой (X, A) ассоциированы групповые таблицы

$$H(p, q) = K^*(X_q, X_p),$$

$$\hat{H}(p, q) = H_Q^S(X_q, X_p).$$

(Мы используем обозначение

$$H_{\mathbb{Q}}^s(X_q, X_p) = H_{\mathbb{Q}}^e(X_q, X_p) + H_{\mathbb{Q}}^o(X_q, X_p),$$

чтобы не путать с обычной \mathbb{Z} -градуировкой

$$H_{\mathbb{Q}}^*(X_q, X_p) = \sum_n H_{\mathbb{Q}}^n(X_q, X_p).$$

Выше мы показали (стр. 186) существование естественного преобразования ch из K -теории в $H_{\mathbb{Q}}^s$ -теорию. Другими словами, у нас есть естественное преобразование из одной групповой таблицы в другую. Мы хотим изучить связь между спектральными последовательностями E_r^p, \hat{E}_r^p , которые можно получить посредством этого преобразования.

Лемма 10. Пусть $\{H(p, q)\}, \{\hat{H}(p, q)\}$ – две групповые таблицы и $\varphi: \{H(p, q)\} \rightarrow \{\hat{H}(p, q)\}$ – естественное гомоморфное преобразование, т. е. семейство гомоморфизмов

$$\varphi^{p, q}: H(p, q) \rightarrow \hat{H}(p, q),$$

коммутирующих очевидным образом с индуцированными и кограницочными гомоморфизмами. Тогда существует семейство $\Phi = \{\Phi_r^p\}$ гомоморфизмов спектральной последовательности $\{E_r^p, \partial^r\}$ в спектральную последовательность $\{\hat{E}_r^p, \hat{\partial}^r\}$, т. е. семейство гомоморфизмов

$$\Phi_r^p: E_r^p \rightarrow \hat{E}_r^p,$$

для которых $\Phi_r^{p-r} \circ \partial^r = \hat{\partial}^r \circ \Phi_r^p$. Кроме того, отображение

$$\Phi_1^p: E_1^p \rightarrow \hat{E}_1^p$$

совпадает с отображением

$$\varphi^{p, p+1}: H(p, p+1) \rightarrow \hat{H}(p, p+1).$$

Доказательство. Группу E_r^0 можно представить в виде

$$E_r^p = \frac{[\operatorname{Im} H(p-1, p+r-1) \text{ в } H(p-r, p+r-1)]}{[\operatorname{Im} H(p, p+r-1) \text{ в } H(p-r, p+r-1)]};$$

аналогично для \hat{E}_r^p . Случай общей групповой таблицы по существу не отличается от примера 1. Для этого случая группа E_r^p определена в гл. V (причем то определение согласуется с приведенной выше формулой). Поскольку гомоморфизмы Φ коммутируют с индуцированными гомоморфизмами, ясно, что существует индуцированный гомоморфизм

$$[\operatorname{Im} H(p-1, p+r-1) \text{ в } H(p-r, p+r-1)] \rightarrow \\ \rightarrow [\operatorname{Im} \hat{H}(p-1, p+r-1) \text{ в } \hat{H}(p-r, p+r-1)].$$

Аналогично и для „знаменателей“ групп E_r^p и \hat{E}_r^p . Таким образом, у нас есть требуемое индуцированное отображение из E_r^p в \hat{E}_r^p , которое мы обозначим через Φ_r^p . Коммутирование гомоморфизмов Φ с дифференциалами спектральных последовательностей следует из того, что дифференциалы определены с помощью индуцированных и кограницых гомоморфизмов, с которыми коммутируют гомоморфизмы Φ . Утверждение о Φ_r^p не вызывает сомнений.

Лемма 11. *Пусть Φ – семейство гомоморфизмов из $\{E_r^p, \partial^r\}$ в $\{\hat{E}_r^p, \hat{\partial}^r\}$. Предположим, что для некоторого r_0 гомоморфизмы*

$$\Phi_{r_0}^p: E_{r_0}^p \rightarrow \hat{E}_{r_0}^p$$

инъективны для всех p . Если $\hat{\partial}^r = 0$ для всех $r \geq r_0$, то $\partial^r = 0$ для всех $r \geq r_0$ и гомоморфизмы

$$\Phi_r^p: E_r^p \rightarrow \hat{E}_r^p$$

инъективны для всех $r \geq 0$. Если гомоморфизм $\Phi_{r_0}^p$ еще и надъективен, то все $\Phi_r^p (r \geq r_0)$ надъективны.

Доказательство. Покажем, что $\partial^{r_0} = 0$. Пусть $a \in E_{r_0}^p$; тогда

$$\Phi_{r_0}^{p-r_0}(\partial^{r_0}a) = \hat{\partial}^{r_0}\Phi_{r_0}^p(a) = 0,$$

ибо $\hat{\partial}^{r_0} = 0$. Так как гомоморфизм $\Phi_{r_0}^{p-r_0}$ инъективен, то $\partial^{r_0}a = 0$, откуда $\partial^{r_0} = 0$. Из соотношения Лере

тогда $E_{r_0+1}^p = E_{r_0}^p$, $\hat{E}_{r_0+1}^p = \hat{E}_{r_0}^p$, и гомоморфизм $\Phi_{r_0+1}^p: E_{r_0+1}^p \rightarrow \hat{E}_{r_0+1}^p$ совпадает с гомоморфизмом $\Phi_{r_0}^p: E_{r_0}^p \rightarrow \hat{E}_{r_0}^p$. В частности, гомоморфизм $\Phi_{r_0+1}^p$ инъективен, и доказательство можно закончить по индукции.

Вернемся к конкретным групповым таблицам

$$H(p, q) = K^*(X_q, X_p),$$

$$\hat{H}(p, q) = H_Q^S(X_q, X_p).$$

Теорема 13. Пусть (X, A) — клеточная пара, у которой группа $H^*(X, A; \mathbb{Z})$ свободна от кручений. Тогда отображение

$$\text{ch}: K^*(X, A) \rightarrow H_Q^S(X, A)$$

инъективно. В частности, $K^*(X, A)$ — свободная абелева группа конечного ранга.

Доказательство. Возьмем $\varphi = \text{ch}$ и, используя лемму 10, найдем гомоморфизмы Φ из $\{E_r^p, \partial^r\}$ в $\{\hat{E}_r^p, \hat{\partial}^r\}$.

Для $r = 1$ отображение

$$\Phi_1^p: E_1^p \rightarrow \hat{E}_1^p$$

совпадает с отображением

$$\text{ch}: K^*(X_{p+1}, X_p) \rightarrow H_Q^S(X_{p+1}, X_p).$$

Вычислив $K^*(X_{p+1}, X_p)$ и $H_Q^S(X_{p+1}, X_p)$ (см. теорему 12 и ее следствие), увидим, что отображение

$$\text{ch}: C^p(X, A; \mathbb{Z}) \rightarrow C^p(X, A; \mathbb{Q})$$

есть не что иное, как отображение, индуцированное гомоморфизмом коэффициентов $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$.

Для $r = 2$

$$\Phi_2^p: H^p(X, A; \mathbb{Z}) \rightarrow H^p(X, A; \mathbb{Q}),$$

где Φ_2^p — отображение, также индуцированное гомоморфизмом

$$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$$

(ибо ∂^1 совпадает с формальным кограницным оператором, а гомоморфизмы Φ коммутируют с дифференциалами). Так как группа $H^*(X, A; \mathbb{Z})$ свободна от кручений, то гомоморфизм Φ_2 инъективен. Кроме того, мы уже отмечали, что дифференциалы $\hat{\partial}'$ ($r \geq 2$) равны нулю. По лемме 11 гомоморфизм

$$\Phi_r^p: E_r^p \rightarrow \hat{E}_r^p$$

инъективен для $r \geq 2$. Но $E_r^p = E_\infty^p$ для достаточно большого r , скажем $r \geq R$ (поскольку остав пары (X, A) стабилизируется), и потому отображение

$$\Phi_\infty^p: E_\infty^p \rightarrow E_\infty^p$$

инъективно. В силу замечания на стр. 193 (применимого скорее к когомологиям, чем к гомологиям) отображение

$$ch: K^*(X, A) \rightarrow H_\mathbb{Q}^S(X, A)$$

инъективно, и теорема доказана.

Теорема 14. Пусть (X, A) — клеточная пара. Тогда

$$ch \otimes 1: K^*(X, A) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow H_\mathbb{Q}^S(X, A) \otimes \mathbb{Q} \cong H_\mathbb{Q}^S(X, A)$$

— изоморфизм, отображающий $K^0(X, A) \otimes \mathbb{Q}$ на $H_\mathbb{Q}^0(X, A)$ и $K^1(X, A) \otimes \mathbb{Q}$ на $H_\mathbb{Q}^1(X, A)$.

Доказательство. Вместо групповой таблицы $H(p, q) = K^*(X_p, X_q)$ рассмотрим групповую таблицу $\bar{H}(p, q) = K^*(X_q, X_p) \otimes \mathbb{Q}$ и будем рассуждать так же, как в теореме 13. Характер Чжэня индуцирует гомоморфизм Ψ из $\{\bar{E}_r^p, \bar{\partial}'\}$ в $\{\hat{E}_r^p, \hat{\partial}'\}$, и гомоморфизм

$$\psi_1^p: \bar{E}_1^p \rightarrow \hat{E}_1^p$$

совпадает с тождественным гомоморфизмом

$$ch: C^p(X, A; \mathbb{Q}) \rightarrow C^p(X, A; \mathbb{Q}).$$

Согласно лемме 11, Ψ_r^p будет изоморфизмом для всех r , и теорема доказана.

Следствие. Пусть (X, A) — клеточная пара. Тогда $K^0(X, A)$ (соответственно $K^1(X, A)$) — конечно порожденная абелева группа, ранг которой равен сумме четномерных (соответственно нечетномерных) чисел Бетти пары (X, A) .

5. Когомологические операции в К-теории

В этом разделе мы построим отображения

$$\Psi^k: K(X) \rightarrow K(X).$$

Эти отображения будут когомологическими операциями, т. е. кольцевыми гомоморфизмами, коммутирующими с индуцированными гомоморфизмами. Они играют основную роль в доказательстве теоремы Адамса о векторных полях (см. гл. X и статью Адамса [1]).

Нам понадобятся некоторые предварительные сведения о представлениях компактных топологических групп. Доказательства приводимых результатов см. Понtryгин [2]. Напомним, что *унитарным представлением* ρ компактной группы G будет непрерывный гомоморфизм

$$\rho: G \rightarrow U(n)$$

для некоторого n ; число n называется *степенью представления* ρ . (Конечно, понятие представления имеет смысл для любой топологической группы, но нас интересуют только компактные группы G .) Представления ρ_1 и ρ_2 группы G одинаковой степени n называют *эквивалентными* и пишут $\rho_1 \sim \rho_2$, если найдется элемент $u \in U(n)$, для которого $\rho_1(g) = u^{-1}\rho_2(g)u$ при всех $g \in G$. Обозначим класс эквивалентности представления ρ через (ρ) . Понятия прямой суммы и тензорного произведения представлений определяются очевидным образом. Заметим, что если $\deg(\rho_i) = n_i$ ($i = 1, 2$), то $\deg(\rho_1 \oplus \rho_2) = n_1 + n_2$ и $\deg(\rho_1 \otimes \rho_2) = n_1 n_2$. Представление ρ степени n называется *приводимым*, если пространство представления E^n (на котором $U(n)$ действует обычным образом) обладает собственным подпространством, инвариантным относительно всех

преобразований $\rho(g)$, $g \in G$. Из классических свойств унитарной группы следует, что любое унитарное представление вполне приводимо, т. е. представимо в виде прямой суммы неприводимых представлений. *Характером* представления ρ будет комплекснозначная функция

$$\chi_\rho(g) = \operatorname{tr}(\rho(g)).$$

Ясно, что $\rho_1 \sim \rho_2$ влечет $\chi_{\rho_1} = \chi_{\rho_2}$. Кроме того,

$$\chi_{\rho_1 \oplus \rho_2} = \chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2}, \quad \chi_{\rho_1 \otimes \rho_2} = \chi_{\rho_1} \chi_{\rho_2}.$$

Наконец, нам понадобится несколько глубоких результатов теории представлений компактных групп. В этой теории определен инвариантный относительно сдвигов интеграл Хаара на G , с помощью которого вводится понятие ортогональности функций: комплекснозначные функции

$$f_1, f_2: G \rightarrow \mathbb{C}$$

называются *ортогональными*, если

$$\int_G f_1(g) \cdot \overline{f_2(g)} dg = 0.$$

Сформулируем важные результаты, которые потребуются нам в дальнейшем.

Предложение 1. Пусть ρ_1, ρ_2 — неэквивалентные унитарные представления группы G . Тогда характеристики χ_{ρ_1} и χ_{ρ_2} ортогональны. Если ρ — унитарное неприводимое представление группы G , то χ_ρ имеет единичную длину¹⁾, т. е.

$$\int_G \chi_\rho(g) \overline{\chi_\rho(g)} dg = 1.$$

¹⁾ Предполагается, что интеграл Хаара нормирован условием $\int_G dy = 1$. — Прим. ред.