Отсюда непосредственно следует

Предложение 2. *Унитарные представления компактной группы эквивалентны тогда и только тогда, когда их характеры равны.*

Определим теперь по аналогии с $K(X)$ функтор Атьи — Хирцебруха — Гротендика $K(G)$ для компактных групп G.

Пусть $\hat{K}_F(G)$ обозначает свободную абелеву группу, образованную классами эквивалентности представлений группы G. (Под представлением мы все время будем понимать унитарное представление некоторой степени.) Обозначим через $\hat{K}_F^+(G)$ подгруппу группы $\hat{K}_F(G)$, образованную элементами вида $(\rho_1 \oplus \rho_2) - (\rho_1) - (\rho_2)$, и положим

$$\hat{K}_F(G) = \hat{K}_F(G)/K_F^+(G).$$

Класс элемента $\rho \in \hat{K}(G)$ обозначим через $[\rho]$. Элементы из $\hat{K}(G)$ будем называть виртуальными *представлениями*. (По аналогии элементы из $K(X)$ можно назвать *виртуальными расслоениями*.)

Любой элемент $\theta \in \hat{K}(G)$ можно представить в виде

$$\theta = \sum n_i [\rho_i],$$

причем представители ρ_i из $[\rho_i]$ неприводимы. Это следует из того, что все представления вполне приводимы и $[\rho_1 \oplus \rho_2] = [\rho_1] + [\rho_2] \left(\mathrm{mod}\, \hat{K}_F^+(G)\right)$. По аналогии с размерностным гомоморфизмом $\dim\colon K(X) \to \mathbb{Z}$ можно очевидным образом определить степенной гомоморфизм

$$\deg\colon \hat{K}(G) \to \mathbb{Z}.$$

Кроме того, $K(G)$ является коммутативным кольцом с единицей (произведение в $\hat{K}(G)$ индуцировано тензорным произведением представлений, а роль единицы играет класс тривиального представления степени 1). Это кольцо — *пополненное* (см. Картан и

Эйленберг [1, гл. VIII]), и deg — пополняющий гомоморфизм. Непрерывный гомоморфизм ρ: $G \to H$, где H — еще одна компактная группа, порождает естественным образом отображение

$$\rho^*: \hat{K}(H) \to \hat{K}(G),$$

которое, очевидно, обладает функториальными свойствами.

Пусть ξ — структура G-расслоения над X. Она определяется открытым покрытием $\{U\}$ пространства X вместе с функциями

$$g_{UV}: U \cap V \to G,$$

удовлетворяющими определенным условиям (см. гл. IV). Если ρ — непрерывный гомоморфизм из G в H, зададим структуру $\rho(\xi)$ H-расслоения над X следующим образом.

Открытое покрытие $\{U\}$ пространства X оставим прежним, а функции

$$h_{UV}: U \cap V \to H$$

зададим равенством

$$h_{UV}(x) = \rho(g_{UV}(x)), \qquad x \in U \cap V.$$

Легко проверить, что эти функции удовлетворяют требованиям структуры расслоения.

Пусть θ — виртуальное представление группы $U(n)$. Тогда

$$\theta = \sum n_i [\rho_i].$$

Если ξ обозначает $U(n)$-расслоение над X, зададим виртуальное расслоение $\theta(\xi)$ равенством

$$\theta(\xi) = \sum n_i [\rho_i(\xi)].$$

Допустим, что для каждого n у нас есть элемент $\theta_n \in \hat{K}(U)$. Назовем $\Theta = \{\theta_i\} = \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n\}$ просто *последовательностью*. Пусть

$$\pi_1 : U(n) \times U(m) \to U(n), \quad \pi_2 : U(n) \times U(m) \to U(m)$$

— две проекции произведения.

Определение 2. Последовательность Θ называется *аддитивной*, если

$$\theta_{n+m}(\pi_1 \oplus \pi_2) = (\theta_n \circ \pi_1) + (\theta_m \circ \pi_2)$$

для всех n, m. Другими словами, для всех $u \in U(n)$, $v \in U(m)$

$$\theta_{n+m}(U \oplus V) = \theta_n(u) + \theta_m(v).$$

Лемма 12. *Пусть ξ и η — соответственно $U(n)$- и $U(m)$-расслоения над X, а Θ — аддитивная последовательность. Тогда*

$$\theta_{n+m}(\xi \oplus \eta) = \theta_n(\xi) + \theta_m(\eta).$$

Доказательство очевидно.

Определение 3. Пусть Θ — аддитивная последовательность и $a \in K(X)$. Представим a в виде

$$a = \sum n_i [\xi_i]$$

и положим

$$\Theta(a) = \sum n_i \theta_{d_i}(\xi_i),$$

где ξ_i есть $U(d_i)$-расслоение. Из леммы 12 следует, что это определение имеет смысл.

Определение 4. Аддитивная последовательность Θ называется *мультипликативной*, если

$$\theta_{nm} \circ (\pi_1 \otimes \pi_2) = (\theta_n \circ \pi_1) \cdot (\theta_m \circ \pi_2)$$

для всех n, m. Другими словами, для всех $u \in U(n)$, $v \in U(m)$

$$\theta_{nm}(u \otimes v) = \theta_n(u) \cdot \theta_m(v).$$

Лемма 13. *Пусть ξ и η — соответственно $U(n)$- и $U(m)$-расслоения над X, а Θ — мультипликативная последовательность. Тогда*

$$\theta_{nm}(\xi \otimes \eta) = \theta_n(\xi) \cdot \theta_m(\eta).$$

Доказательство, как и в лемме 12, очевидно.

Теорема 15. *Если Θ — мультипликативная последовательность, то*

$$\Theta\colon K(X) \to K(X)$$

(см. определение 3) — *кольцевой гомоморфизм, естественный по отношению к отображениям пространства X, т. е. представляет собой когомологическую операцию.*

Доказательство. Первое утверждение следует из лемм 12 и 13. Второе очевидно.

Теперь мы готовы к тому, чтобы определить когомологические операции Ψ^k. Пусть V — (комплексное) векторное пространство, а V^* — двойственное к нему пространство. Пусть V_r — множество полилинейных кососимметрических отображений

$$V^* \times \ldots \times V^* \to \mathbb{C} \ (r \text{ множителей}).$$

Прямая сумма $\sum_{r=0}^{\dim V} V_r$ называется пространством Грассмана[1]), ассоциированным с V. Унитарное отображение

$$u\colon V \to V$$

индуцирует унитарное отображение

$$u^{(r)}\colon V_r \to V_r,$$

определенное равенством

$$u^{(r)}(v_1 \wedge \ldots \wedge v_r) = uv_1 \wedge \ldots \wedge uv_r.$$

Отображение

$$K_V^{(r)}\colon U \to U^{(r)}$$

является унитарным представлением группы унитарных преобразований пространства V. Если V — евклидово пространство E, то

$$K_n^{(r)} = K_{E^n}^{(r)}$$

будет унитарным представлением группы $U(n)$.

---

[1]) В этом пространстве вводится так называемое внешнее умножение, обозначаемое знаком $\wedge$ и отображающее $V_r \times V_s$ в V_{r+s}. Пространство V_1 естественно отождествляется с V. Легко проверить, что V_r порождается элементами вида $v_1 \wedge \ldots \wedge v_r$, $v_i \in V$. Пространство Грассмана с внешним умножением называется *грассмановой*, или *внешней*, алгеброй над V. — *Прим. перев.*

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ суть n формальных переменных. Сумма $\sum_{i=1}^{n} x_i^k$ представляет собой симметрическую функцию от этих переменных и поэтому ее можно записать в виде $Q_n^k(\sigma_1^{(n)}, \ldots, \sigma_n^{(n)})$, где Q_n^k — полином с целыми коэффициентами, а $\sigma_j^{(n)}$ есть j-я элементарная симметрическая функция от n переменных. Положим

$$\psi_n^k = Q_n^k(K_n^{(1)}, K_n^{(2)}, \ldots, K_n^{(n)});$$

здесь сумма и произведение берутся в смысле прямой суммы и тензорного произведения представлений. Тем самым ψ_n^k — виртуальное представление группы $U(n)$ для каждого k, и можно составить последовательность

$$\Psi^k = \{\psi_1^k, \psi_2^k, \ldots\}.$$

Лемма 14. *Последовательность Ψ^k мультипликативна для каждого k.*

Доказательство. Сначала мы докажем, что $\chi_{\psi_n^k}(u) = \operatorname{tr}(u^k)$ для $u \in U(n)$. Матрица u в некотором базисе имеет диагональный вид. Пусть ее собственными значениями будут $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, а соответствующими собственными векторами — $e_1, \ldots, e_n$. Векторы

$$e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_r} \ (1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leqslant n)$$

образуют базис пространства E_r^n. Эти векторы будут собственными для матрицы $u^{(r)}$ с собственными значениями $\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \ldots, \lambda_{i_r}$. Тогда

$$\chi_{K_n^{(r)}}(u) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_r \leqslant n} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2} \ldots \lambda_{i_r} = \sigma_r^{(n)}(\vec{\lambda}),$$

где $\sigma_r^{(n)}(\vec{\lambda})$ есть r-я элементарная симметрическая функция чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, и из свойств характеров получаем

$$\chi_{\psi_n^k}(u) = Q_n(\sigma_1^{(n)}(\vec{\lambda}), \ldots, \sigma_n^{(n)}(\lambda)) = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \ldots + \lambda_n^k = \operatorname{tr}(u^k).$$

Для доказательства леммы нужно показать, что

$$\psi^k_{n+m}(u_1 \oplus u_2) = \psi^k_n(u_1) + \psi^k_m(u_2),$$
$$\psi^k_{nm}(u_1 \otimes u_2) = \psi^k_n(u_1) \cdot \psi^k_m(u_2).$$

Докажем первое равенство, второе доказывается аналогично. Из предложения 2 о связи представлений с характерами (стр. 201) следует, что следы обеих частей равенства одинаковы. Тогда в силу только что доказанной формулы

$$\operatorname{tr}(\psi^k_{n+m}(u_1 \oplus u_2)) = \operatorname{tr}((u_1 \oplus u_2)^k) = \operatorname{tr}(u_1^k) + \operatorname{tr}(u_2^k) =$$
$$= \operatorname{tr}(\psi^k_n u_1) + \operatorname{tr}(\psi^k_m u_2),$$

откуда следует утверждение леммы.

Теорема 16. Отображение Ψ^k: $K(X) \to K(X)$ *является когомологической операцией для каждого положительного целого числа* k.

Это непосредственно следует из теоремы 15.

Если Θ и Θ' — аддитивные последовательности, зададим композицию $\Theta \circ \Theta'$, определив n-й член $(\Theta \circ \Theta)_n$ последовательности $\Theta \circ \Theta'$ как виртуальное представление $\Theta(\theta'_n)$, описанное в определении 3.

Теорема 17. $\Psi^k \circ \Psi^l = \Psi^{kl}$.

Доказательство. Из формулы, установленной в ходе доказательства леммы 14, получаем, что $\operatorname{tr}(\Psi^k \circ \psi^l_n(u)) = \operatorname{tr}(u^{kl}) = \operatorname{tr}(\psi^{kl}_n(u))$ для всех $u \in U(n)$, откуда следует теорема.

Лемма 15. $\operatorname{ch}_q(\Psi^k a) = k^q \cdot \operatorname{ch}_q(a)$, *где* $a \in K(X)$, *а* $\operatorname{ch}_q(a)$ *обозначает* $2q$*-мерную компоненту множества* $\operatorname{ch}(a)$.

Доказательство. Пусть z — комплексное число с модулем 1; его можно считать унитарной матрицей степени 1. Тогда $\operatorname{tr}(\psi^k_1(z)) = z^k$. Следовательно, для $U(1)$-расслоения ζ

$$\Psi^k(\zeta) = \zeta^k.$$

Если $\xi = \xi_1 \oplus \ldots \oplus \xi_n$ — сумма $U(1)$-расслоения, то

$$\mathrm{ch}(\xi) = e^{c_1(\xi_1)} + \ldots + {}^{c_n(\xi_n)};$$

так как $\Psi^k(\xi) = \Psi^k(\xi_1) + \ldots + \Psi^k(\xi_n)$, то

$$\mathrm{ch}(\Psi^k(\xi)) = \mathrm{ch}(\Psi^k(\xi_1)) + \ldots + \mathrm{ch}(\Psi^k(\xi_n)) = \\ = e^{c_1(\xi_1^k)} + \ldots + e^{c_n(\xi_n^k)}.$$

Из доказательства формулы (b) теоремы 10 видно, что

$$c_1(\xi_i^k) = k \cdot c_1(\xi_i), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Поэтому

$$\mathrm{ch}(\Psi^k(\xi)) = e^{k \cdot c_1(\xi_1)} + \ldots + e^{k \cdot c_1(\xi_n)}.$$

Отсюда, используя формулу для $\mathrm{ch}(\xi)$, получаем результат для ξ. Результат для расслоений общего вида вытекает из леммы 5, а переход от расслоений к элементам из $K(X)$ не вызывает труда.

Заметим теперь, что степень виртуального представления ψ_n^k равна n. Это следует из равенства

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^k = Q_n^k(\sigma_1^{(n)}, \ldots, \sigma_n^{(n)})$$

после подстановки в него $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, ..., $x_n = 1$.

Если X — пространство с отмеченной точкой x_0, то

$$K(X) \cong K(x_0) \oplus \tilde{K}(X).$$

В силу предыдущего замечания когомологические операции Ψ^k сохраняют это разложение. Действительно, кольцо $\tilde{K}(X)$ характеризуется тем, что его элементы имеют размерность нуль и отображения Ψ^k действуют тождественно на $K(x_0)$. (Проверьте, как действуют Ψ^k на векторные расслоения над x_0.)

Теорема 18. *Операция* Ψ^k: $\tilde{K}(S^{2q}) \to \tilde{K}(S^{2q})$ *задается равенством*

$$\Psi^k(a) = k^q \cdot a.$$

Доказательство. Напомним, что $\tilde{K}(S^{2q}) = K^0(S^{2q})$. Так как группа $H^*(S^{2q}; \mathbb{Z})$ свободна от кручений, то из теоремы 13 следует, что отображение

$$\mathrm{ch}\colon K^0(S^{2q}) \to \tilde{H}^e_{\mathbb{Q}}(S^{2q})$$

инъективно и, более того, переводит $K^0(S^{2q})$ изоморфно на $\tilde{H}^e(S^{2q}; \mathbb{Z}) \subseteq \tilde{H}^e_{\mathbb{Q}}(S^{2q})$. Так как

$$\tilde{H}^e(S^{2q}; \mathbb{Z}) = H^{2q}(S^{2q}; \mathbb{Z}),$$

то отображение

$$\mathrm{ch}_q\colon K^0(S^{2q}) \to H^{2q}_{\mathbb{Q}}(S^{2q})$$

инъективно и переводит $K^0(S^{2q})$ изоморфно на $H^{2q}(S^{2q}; \mathbb{Z}) \subseteq H^{2q}_{\mathbb{Q}}(S^{2q})$. Применяя ch_q к $\psi^k(a)$, по лемме 15 получаем

$$\mathrm{ch}_q(\Psi^k_a) = k^q \cdot \mathrm{ch}_q(a),$$

и теорема доказана, поскольку отображение ch_q инъективно.

Следствие. Если $\beta\colon \tilde{K}(X) \to \tilde{K}(S^2X)$ — *изоморфизм Ботта, то*

$$\Psi^k \circ \beta = k \circ (\beta \circ \Psi^k).$$

Доказательство. Пусть g — образующая в $\tilde{K}(S^2)$. По теореме 18

$$\Psi^k(g) = k \cdot g,$$

поэтому

$$\Psi^k \circ \beta(a) = \Psi^k(a \cdot g) = \Psi^k(a) \cdot \Psi^k(g) = \Psi^k(a) \cdot kg = \\ = k \cdot \beta \circ \Psi^k(a)$$

для любого $a \in \tilde{K}(X)$, и следствие доказано.

Глава X

ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ НА СФЕРАХ

В этой главе мы найдем максимальное число $M(n-1)$ линейно независимых векторных полей на сфере S^{n-1}. Представим целое число $n \geqslant 1$ в виде произведения нечетного числа и степени двойки:

$$n = (2a(n)+1) \cdot 2^{b(n)}.$$

Разделим $b(n)$ на 4:

$$b(n) = c(n) + 4d(n).$$

Таким образом, для каждого целого числа $n \geqslant 1$ определены неотрицательные целые числа $a(n)$, $b(n)$, $c(n)$, $d(n)$, причем $c(n) \leqslant 3$. Положим

$$\rho(n) = 2^{c(n)} + 8d(n).$$

В дальнейшем мы покажем, что справедлива

Теорема. $M(n-1) = \rho(n) - 1$.

Многообразие M^n называется *параллелизуемым*, если оно допускает n линейно независимых векторных полей. Как непосредственное приложение сформулированной теоремы получаем

Следствие. *Параллелизуемы только сферы* S^1, S^3, S^7.

Неравенство $M(n-1) \geqslant \rho(n) - 1$ устанавливается в части А этой главы. Доказательство непосредственно не затрагивает алгебраической топологии и принадлежит Гурвицу, Радону и Экману (см. Экман [1]).

Неравенство $M(n-1) \leqslant \rho(n) - 1$ устанавливается в части Б. Доказательство использует K-теорию, а также результаты работы Атьи [2], и принадлежит Адамсу [1].

A. $M(n-1) \geqslant \rho(n)-1$

Теорема 1. *Пусть G_p — абстрактная группа, образованная p элементами ε, $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$, удовлетворяющими соотношениям*

$$\varepsilon^2=1, \quad a_j^2=\varepsilon \quad (j=1, \ldots, p-1),$$
$$a_k a_l=\varepsilon a_l a_k \, (k \neq l, \ 1 \leqslant k, l \leqslant p-1).$$

Ортогональное представление

$$\varphi\colon G_p \to O_n,$$

для которого $\varphi(\varepsilon)=-I$, существует тогда и только тогда, когда $\rho \leqslant \rho(n)$.

Следствие. $M(n-1) \geqslant \rho(n)-1$.

Доказательство следствия. Пусть $\varphi\colon G_{\rho(n)} \to O_n$ удовлетворяет условиям теоремы. Положим $A_i=\varphi(a_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant \rho(n)-1)$. Очевидно, что $A_k^2=-I$, $A_k A_l=-A_l A_k$ $(k \neq l)$. Для того чтобы найти $\rho(n)-1$ линейно независимых векторных полей на S^{n-1}, достаточно определить такие отображения $V_i\colon S^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ $(1 \leqslant i \leqslant \rho(n)-1)$, что

a) $(V_i(x), x)=0$ $\left(1 \leqslant i \leqslant \rho(n)-1; \ x \in S^{n-1}\right)$,

b) $(V_i(x), V_j(x))=\delta_{ij}$ $\left(1 \leqslant i, j \leqslant \rho(n)-1; \ x \in S^{n-1}\right)$.

Положим $V_i(x)=A_i x$. Непосредственное вычисление, использующее свойства элементов A_i, показывает, что условия a) и b) выполняются.

Сформулируем в виде предложений ряд результатов из теории представлений конечных групп, которые понадобятся нам для доказательства теоремы. Предложения 1—3 и 5 обобщаются на произвольные компактные группы. Доказательства см. Холл [1] и Понтрягин [2].

Под *представлением* мы понимаем представление в группе $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ (или $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$). Предложения 4—7 и 9 справедливы только для комплексных представлений.

Предложение 1. *Каждое представление* ρ *группы* G *эквивалентно* ($\sim$) *прямой сумме неприводимых унитарных представлений, причем неприводимые слагаемые определены однозначно с точностью до эквивалентности.*

Предложение 2. *Если* ρ_1, ρ_2 — *представления группы* G *и отображение* χ_{ρ_i}: $G \to \mathbb{C}$ *задано равенством* $\chi_{\rho_i}(g) = \operatorname{tr}(\rho_i(g))$, *то* $\rho_1 \sim \rho_2$ *тогда и только тогда, когда* $\chi_{\rho_1} = \chi_{\rho_2}$. *Если, кроме того,* ρ_1 *и* ρ_2 *неприводимы, то* $\rho_1 \sim \rho_2$ *тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{g \in G} \chi_{\rho_1}(g)\bar{\chi}_{\rho_2}(g) \neq 0.$$

Предложение 3. *Если* $g \in G$ — *произвольный элемент, отличный от* 1, *то существует неприводимое представление* R_g *группы* G, *для которого* $R_g(g) \neq I$.

Предложение 4. *Число неэквивалентных неприводимых представлений группы* G *равно числу классов сопряженных элементов в* G.

Предложение 5. *Если группа* G *абелева, то все ее неприводимые представления одномерны.*

Предложение 6. $\sum_R \{\deg R\}^2 = \# G$, *где* $\# G$ — *порядок группы* G, *а суммирование производится по всем ее неэквивалентным неприводимым представлениям.*

Предложение 7. $\deg R$ *делит* $\# G$ *для любого неприводимого представления* R *группы* G.

Предложение 8 (критерий Шура). *Если* R — *неприводимое представление группы* G, *а* $\bar{R}$ — *представление группы* G, *заданное равенством* $\bar{R}(g) = \overline{R(g)}$ (*где* $\overline{R(g)}$ — *комплексно сопряженная матрица к матрице* $R(g)$), *то* a) R *эквивалентно вещественному представлению группы* G *тогда и только тогда, когда* $\sum_{g \in G} \chi_R(g^2) > 0$; b) $R \sim \bar{R}$, *но* R *не эквивалентно вещественному представлению тогда и только тогда, когда*

$\sum_{g\in G}\chi_R(g^2)<0$; c) *$R$ не эквивалентно $\bar{R}$ (а значит, и никакому вещественному представлению группы G) тогда и только тогда, когда* $\sum_{g\in G}\chi_R(g^2)=0$.

Предложение 9 (частный случай леммы Шура). *Если Ω — неприводимое множество $(r\times r)$-матриц и $(r\times r)$-матрица B коммутирует с каждой матрицей из Ω, то $B=\beta I$, где $\beta\in\mathbb{C}$.*

Теперь мы приступим к доказательству теоремы 1. Из соотношений

$$G_p=(\varepsilon,\ a_1,\ \ldots,\ a_{p-1});\ \varepsilon^2=1;\ a_j^2=\varepsilon,\quad a_ka_l=\varepsilon a_la_k\ (k\neq l)$$

видно, что каждый элемент группы G можно представить в виде $a_{i_1}\ldots a_{i_s}$ или $\varepsilon a_{i_1}\ldots a_{i_s}$ $(1\leqslant i_1<\ldots\ldots<i_s\leqslant p-1)$. В частности, $\#G=2^p$. Пусть H — подгруппа группы G_p, образованная элементом ε. Так как ε лежит в центре $\zeta(G_p)$ группы G_p, то H — нормальный делитель. Очевидно, что группа G_p/H равна прямой сумме $p-1$ экземпляров группы $\mathbb{Z}_2$, поэтому она абелева. Тогда H содержит коммутант $[G_p,\ G_p]$, откуда следует, что $ghg^{-1}h^{-1}=1$ или ε, т. е. ghg^{-1} равно h или εh для всех $g,h\in G$. Таким образом, класс сопряженности элемента h состоит из h и εh, если h не лежит в $\zeta(G_p)$.

Найдем $\zeta(G_p)$. Если $\{i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_s\}\neq\{1,\ 2,\ \ldots,\ p-1\}$, т. е. $s<p-1$ (напомним, что индексы $i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_s$ расположены в порядке возрастания), и индекс j не содержится в $\{i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_s\}$, то $a_j^{-1}(a_{i_1}\ldots a_{i_s})a_j=\varepsilon^s a_{i_1}\ldots a_{i_s}$. Если же индекс j содержится в $\{i_1,\ \ldots,\ i_s\}$, то $a_j^{-1}(a_{i_1}\ldots a_{i_s})a_j=\varepsilon^{s-1}a_{i_1}\ldots a_{i_s}$.

Таким образом, так как либо $\varepsilon^s\neq1$, либо $\varepsilon^{s-1}\neq1$, то элемент $a_{i_1}\ldots a_{i_s}$ не принадлежит $\zeta(G_p)$, если $\{i_1,\ \ldots,\ i_s\}\neq\{1,\ \ldots,\ p-1\}$. Так как

$$a_j(a_1a_2\ldots a_{p-1})a_j^{-1}=\varepsilon^{p-1}a_1a_2\ldots a_{p-1},$$

то элемент $a_1a_2 \ldots a_{p-1}$ принадлежит $\zeta(G_p)$ тогда и только тогда, когда p четно. Аналогично $\varepsilon a_{i_1} \ldots a_{i_s}$ лежит в $\zeta(G_p)$ тогда и только тогда, когда $\{i_1, \ldots, i_s\} = (1, \ldots, p-1)$ и p четно. Тем самым $\zeta(G_p) = \{1, \varepsilon\}$, если p нечетно, и $\zeta(G_p) = \{1, \varepsilon, a_1a_2 \ldots a_{p-1}, \varepsilon a_1 \ldots a_{p-1}\}$, если p четно.

Число классов сопряженности в G_p равно половине числа элементов, не принадлежащих $\zeta(G_p)$, плюс число элементов в $\zeta(G_p)$.

В силу предложения 4 число неэквивалентных неприводимых представлений группы G_p равно

$$(1_{\text{н}})\quad \frac{2^p-2}{2}+2=2^{p-1}+1, \text{ если } p \text{ нечетно,}$$

$$(1_{\text{ч}})\quad \frac{2^p-4}{2}+4=2^{p-1}+2, \text{ если } p \text{ четно.}$$

Согласно предложению 5, группа G_p/H имеет 2^{p-1} одномерных неприводимых представлений. В самом деле, если R: $G_p/H \to U_1$, то $R \circ \pi$: $G_p \to U_1$ (где π: $G_p \to G_p/H$ — естественное отображение) и $R \not\sim R'$ влечет $R \circ \pi \approx R' \circ \pi$. Таким образом, найдутся по крайней мере 2^{p-1} неприводимых представлений $R_1, \ldots, R_{2^{p-1}}$ группы G с $\varepsilon \to +I$.

Из $(1_{\text{н}})$ и $(1_{\text{ч}})$ следует, что

$(2_{\text{н}})$ для нечетного p существует одно и только одно неприводимое представление R^*, не включенное в семейство $R_1, \ldots, R_{2^{p-1}}$ (в силу предложения 6 тогда $2^{p-1} \cdot 1^2 + (\deg R^*)^2 = 2^p$, откуда $\deg R^* = 2^{(p-1)/2}$);

$(2_{\text{ч}})$ для четного p существуют ровно два неприводимых представления R_1^*, R_2^*, не включенных в семейство $R_1, \ldots, R_{2^{p-1}}$ (в силу предложения 6 тогда $2^{p-1} \cdot 1^2 + (\deg R_1^*)^2 + (\deg R_2^*)^2 = 2^p$, откуда $(\deg R_1^*)^2 + (\deg R_2^*)^2 = 2^{p-1}$, а так как, согласно предложению 7, $\deg R_i^* = 2^{\alpha_i}$, $\alpha_i \leqslant p$ $(i = 1, 2)$, и равенство $(2^{\alpha_1})^2 + (2^{\alpha_2})^2 = 2^{p-1}$ выполняется, если $\alpha_1 = \alpha_2$, то $\deg R_1^* = \deg R_2^* = 2^{(p-2)/2}$).

Из неприводимости представлений R^*, R_1^*, R_2^* и из предложений 1, 3, 9 получаем, что

($3_н$) R^* отображает ε в βI, где $\beta \in \mathbb{C}$, $|\beta| = 1$ и $\beta \neq 1$,

($3_ч$) хотя бы одно из представлений R_1^*, R_2^* отображает ε в βI, где β — то же, что и в ($3_н$). Для определенности будем считать, что $R_1^*(\varepsilon) = \beta I$.

Напомним, что теорема 1 утверждает существование *вещественных* ортогональных представлений группы G_p. Пока мы можем только утверждать (благодаря предложению 1), что R^*, R_1^* — унитарные представления группы G_p. Но вообще, если R — комплексное неприводимое представление конечной группы G, не эквивалентное вещественному представлению, то сумма $R \oplus \bar{R}$ эквивалентна вещественному неприводимому представлению. Таким образом, если необходимо, можно заменить R^* и R_1^* на $R^* \oplus \bar{R}^*$ и $R_1^* \oplus \bar{R}_1^*$ соответственно. С помощью предложения 8 найдем теперь значения числа p, для которых R^* и R_1^* эквивалентны вещественным представлениям.

Пусть g — любой элемент группы G_p. Тогда, как было замечено раньше, $g = a_{i_1} \ldots a_{i_r}$ или $g = \varepsilon a_{i_1} \ldots a_{i_r}$. В любом случае $g^2 = \varepsilon^r \varepsilon^{r-1} \ldots \varepsilon = \varepsilon^{r(r+1)/2}$, откуда $g^2 = 1$, если $r \equiv 0; 3 \pmod 4$, и $g^2 = \varepsilon$, если $r \equiv 1; 2 \pmod 4$. Пусть $R = R^*$, если p нечетно, $R = R_1^*$, если p четно, и пусть $d = \deg R^* = 2^{(p-1)/2}$, если p нечетно, и $d = \deg R_1^* = 2^{(p-2)/2}$, если p четно. Тогда $\chi_R(g^2) = d$, если $r \equiv 0; 3 \pmod 4$, и $\chi_R(g^2) = -d$, если $r \equiv 1; 2 \pmod 4$. Суммируя по элементам из G_p, получаем

$$\sum_{g \in G_p} \chi_R(g^2) = 2d \left\{ C_{p-1}^0 - C_{p-1}^1 - C_{p-1}^2 + C_{p-1}^3 - \ldots \right\}. \quad (*)$$

Положим $(1-i)^{p-1} = x + iy$. По формуле бинома величина $x + y$ равна выражению в скобках в правой части формулы (*). Остается определить знак этой величины для различных значений p. Легко проверить (с помощью тригонометрической записи $1 - i = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}$), что $x + y > 0$, если $p \equiv 0; 1; 7 \mod (8)$;

$x+y=0$, если $p\equiv 2;\ 6 \pmod 8$; $x+y<0$, если $p\equiv 3,\ 4,\ 5 \pmod 8$.

Положим $\hat{R}=R$, если p таково, что $x+y>0$, и $\hat{R}=R\oplus\bar{R}$ в противном случае. Зададим $k(p)$ равенством $\deg\hat{R}=2^{k(p)}$. Из утверждений ($2_н$), ($2_ч$) и результатов последнего абзаца следует, что

$$k(p)=\begin{cases}\frac{p-2}{2}, & \text{если } p\equiv 0 \pmod 8;\\ \frac{p-1}{2}, & \text{если } p\equiv 1,7 \pmod 8;\\ \frac{p}{2}, & \text{если } p\equiv 2,\ 4,\ 6 \pmod 8;\\ \frac{p+1}{2}, & \text{если } p\equiv 3,\ 5 \pmod 8.\end{cases}$$

Из утверждений ($3_н$), ($3_ч$) и предложения 8 вытекает, что $\hat{R}$ — (с точностью до эквивалентности) вещественное ортогональное представление группы G, переводящее ε в $-I$ (т. е. $\beta=-1$).

Теперь пусть $n\geqslant 1$. В силу предложения 1 и утверждений ($2_н$), ($2_ч$) вещественное ортогональное (не обязательно неприводимое) представление φ: $G_p\to O_n$ существует тогда и только тогда, когда $2^{k(p)}$ делит n. Представляя n в виде $(2a(n)+1)2^{b(n)}$, получаем, что $2^{k(p)}$ делит $2^{b(n)}$. Теорема 1 будет доказана, если мы покажем, что наибольшее значение p, удовлетворяющее неравенству $k(p)\leqslant b(n)$, равно $\rho(n)$. Другими словами, нам осталось найти наибольшее значение p, для которого

$$p\leqslant\begin{cases}2b(n)+2, & \text{если } p\equiv 0 \pmod 8;\\ 2b(n)+1, & \text{если } p\equiv 1,7 \pmod 8;\\ 2b(n), & \text{если } p\equiv 2,\ 4,\ 6 \pmod 8;\\ 2b(n)-1, & \text{если } p\equiv 3,\ 5 \pmod 8.\end{cases}$$

Очевидно, что это наибольшее значение равно $2b(n)+\delta$, где δ зависит только от вычета числа

$b(n) \bmod 4$ и находится с помощью таблицы

$b(n)$	$2b(n)+\delta$			
0	2	1	0	−1
1	4	3	**2**	1
2	6	5	**4**	3
3	**8**	7	6	5
	$p \equiv 0 \pmod 8$	$p \equiv 1, 7 \pmod 8$	$p \equiv 2, 4, 6 \pmod 8$	$p \equiv 3, 5 \pmod 8$

В каждой из четырех верхних строк таблицы жирным шрифтом выделено наибольшее число, согласованное с условием на p, указанным в последней строке. Например, в первой строке $2 > 1$, но $2 \not\equiv 0$, в то время как $1 \equiv 1 \pmod 8$. Из этой таблицы находим, что максимум числа p имеет вид

$$\begin{aligned} &2b(n)+1, \quad \text{если} \quad b(n) \equiv 0 \pmod 4;\\ &2b(n)+2, \quad \text{если} \quad b(n) \equiv 1 \pmod 4;\\ &2b(n)+4, \quad \text{если} \quad b(n) \equiv 2 \pmod 4;\\ &2b(n)+8, \quad \text{если} \quad b(n) \equiv 3 \pmod 4. \end{aligned}$$

Наконец, чтобы увидеть, что эти значения дают $\rho(n)$, вспомним, что $b(n) = c(n) + 4d(n)$, и заметим, что по определению $c(n) = k$ тогда и только тогда, когда $b(n) \equiv k \pmod 4$, $0 \leqslant k \leqslant 3$.

Б. $M(n-1) \leqslant \rho(n) - 1$

Мы дадим доказательство только в общих чертах; детали см. Адамс [1].

Отправным пунктом для исследования Адамса служит

Теорема 2. *Если существуют* $\rho(n)$, $n \geqslant 1$, *линейно независимых полей на сфере* S^{n-1}, *то найдутся такое целое число* $m \geqslant 1$, *что* $\rho(m) = \rho(n)$, *и такое отображение* f *усеченного вещественного проективного*

пространства $P^{\mathsf{R}}_{m+\rho(m)}/P^{\mathsf{R}}_{m-1}$ *в сферу* S^m, *что композиция отображений*

$$S^m = P^{\mathsf{R}}_m/P^{\mathsf{R}}_{m-1} \xrightarrow{i} P^{\mathsf{R}}_{m+\rho(m)}/P^{\mathsf{R}}_{m-1} \xrightarrow{f} S^m$$

имеет степень 1.

Примечание. Для любых целых чисел $p > q$ существует естественное вложение пространства P^{R}_q в P^{R}_p. Поэтому факторпространство $P^{\mathsf{R}}_p/P^{\mathsf{R}}_q$ корректно определено. Отображение i из теоремы 2 индуцировано отображением пар $(P^{\mathsf{R}}_m, P^{\mathsf{R}}_{m-1}) \to (P^{\mathsf{R}}_{m+\rho(m)}, P^{\mathsf{R}}_{m-1})$.

Адамс доказал теорему 2 с помощью всестороннего использования работы Джеймса [1] о гомотопиях многообразий Штифеля и работы Атьи [1] о так называемых комплексах Тома. Идеи доказательства этой теоремы требуют введения довольно многих понятий, включая S-теорию Спеньера — Уайтхеда. Мы не будем обсуждать здесь эти понятия, отсылая читателя к статьям Джеймса [1] и Атьи [2].

В силу теоремы 2 для доказательства неравенства $M(n-1) \leqslant \rho(n) - 1$ достаточно доказать, что справедлива

Теорема 3. *Не существует отображения*

$$f\colon P^{\mathsf{R}}_{m+\rho(m)}/P^{\mathsf{R}}_{m-1} \to S^m,$$

удовлетворяющего условию теоремы 2.

Тем самым задача доказательства несуществования определенного числа векторных полей сводится к задаче доказательства несуществования определенного отображения. В алгебраической топологии такие задачи решаются с помощью обычного метода, заключающегося в том, что если $g\colon X \to Y$ — предполагаемое отображение (существование которого мы хотим опровергнуть), то индуцируемое им отображение $g^*\colon H^*(Y) \to H^*(X)$ в когомологиях должно обладать некоторым алгебраическим свойством, несовместимым со свойствами колец $H^*(X)$, $H^*(Y)$ (поскольку g наделено некоторым топологическим свойством). Это противоречит существованию g^*, а

следовательно, и g. (Простые примеры, иллюстрирующие этот метод, см. Ху Сы-цзян [1, гл. I].) Если даже кольцевой структуры колец когомологий недостаточно для отрицания существования g^*, то можно получить противоречие, вводя когомологические операции в кольца когомологий пространств. Основы этой теории и некоторые приложения можно найти в книге Стинрода и Эпштейна [1].

Адамс [1] для доказательства несуществования отображения f (см. теорему 3) использует K-теорию вместо обычной теории когомологий. Итак, рассмотрим индуцированное отображение

$$f^*\colon K_{\mathbb{R}}(S^m) \to K_{\mathbb{R}}(P^{\mathbb{R}}_{m+\rho(m)}/P^{\mathbb{R}}_{m-1}).$$

Здесь $K_{\mathbb{R}}$ — функтор, аналогичный функтору K из гл. IX, с вещественными векторными расслоениями вместо комплексных. (Раньше следовало бы писать $K = K_{\mathbb{C}}$.) В обозначениях теоремы 2 композиция $f \circ i$ эквивалентна тождественному отображению (топологическое свойство отображения f). Тогда композиция $i^* \circ f^*$ равна тождественному отображению (алгебраическое свойство отображения f^*). Тем самым $K_{\mathbb{R}}(P^{\mathbb{R}}_{m+\rho(m)}/P^{\mathbb{R}}_{m-1})$ расщепляется в прямую сумму $\ker i^* \oplus \operatorname{Im} f^*$. Хотя кольцевая структура в $K_{\mathbb{R}}(P^{\mathbb{R}}_{m+\rho(m)}/P^{\mathbb{R}}_{m-1})$ допускает возможность такого расщепления, оно исключается, поскольку операции Ψ^k, изученные в гл. IX, делают его невозможным.

Таким образом, задача сводится к вычислению колец $K_{\mathbb{R}}(P^{\mathbb{R}}_p/P^{\mathbb{R}}_q)$ и операций Ψ^k: $K_{\mathbb{R}}(P^{\mathbb{R}}_p/P^{\mathbb{R}}_q) \to K_{\mathbb{R}}(P^{\mathbb{R}}_p/P^{\mathbb{R}}_q)$.

Адамс производит вычисление колец $K_\Lambda(X)$ в следующем порядке:

a) $\Lambda = \mathbb{C}$, $X = P^{\mathbb{C}}_p/P^{\mathbb{C}}_q$,

b) $\Lambda = \mathbb{C}$, $X = P^{\mathbb{R}}_p/P^{\mathbb{R}}_q$,

c) $\Lambda = \mathbb{R}$, $X = P^{\mathbb{R}}_p/P^{\mathbb{R}}_q$.

Так как факторпространства $P^{\Lambda}_p/P^{\Lambda}_q$ представляют собой совсем простые клеточные комплексы, то необходимые вычисления, использующие методы гл. IX,

вполне выполнимы. (В частности, обычные группы когомологий этих пространств можно вычислить почти механически методом гл. II.)

Просто с целью иллюстрации результатов гл. IX доведем до конца вычисления в случае а).

Введем сначала некоторые обозначения. Мы будем писать K, P_p вместо $K_{\mathbb{C}}$, $P_p^{\mathbb{C}}$. Далее, пусть η — каноническое линейное расслоение над P_p, т. е. над каждым проективным классом $[z_1, z_2, \ldots, z_{p+1}] \in P_p$, слоем которого служит комплексная прямая, состоящая из всех $(p+1)$-наборов $(\lambda z_1, \lambda z_2, \ldots, \lambda z_{p+1})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ (ср. гл. IX, теорема 2). Если 1 — тривиальное линейное расслоение над P_p, положим $\mu = \eta - 1$. Тогда $[\mu] \in \tilde{K}(P_p)$.

Заметим, что класс Чжэня $c_1(\eta)$ является образующей в группе когомологий $H^2(P_p; \mathbb{Z})$. В самом деле, стандартное вложение

$$i\colon P_p \to P_\infty$$

будет классифицирующим отображением расслоения η, и потому, если $c_1 \in H^2(P_\infty)$ представляет собой универсальный класс Чжэня, то

$$c_1(\eta) = i^*(c_1),$$

и наше утверждение доказано.

Теорема 4. *Кольцо $K(P_p)$ является усеченным кольцом полиномов с целыми коэффициентами, имеющим единственную образующую $[\mu]$ и единственное соотношение $[\mu]^{p+1} = 0$. Естественная проекция $P_p \to P_p/P_q$ переводит $\tilde{K}(P_p/P_q)$ изоморфно на идеал в $K(P_p)$, порожденный элементом $[\mu]^{q+1}$. Когомологические операции Ψ^k удовлетворяют соотношению $\Psi^k([\mu]^s) = ((1+[\mu])^k - 1)^s$.*

Доказательство. Аддитивная структура в $K(P_p)$ легко выводится из теоремы 13 и следствия из теоремы 14 гл. IX. Действительно, так как группа $H^*(P_p; \mathbb{Z})$ свободна от кручений, то (в обозначениях гл. IX) $K^r(P_p) \cong \mathbb{Z}^p$, если r четно, и $\cong 0$, если r нечетно ($\mathbb{Z}^p$ обозначает прямую сумму p экземпляров

группы $\mathbb{Z}$). В частности, $\tilde{K}(P_p) = K^0(P_p) \cong \mathbb{Z}^p$ и потому

$$K(P_p) \cong \tilde{K}(P_p) \oplus \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^{p+1}.$$

Мы утверждаем, что элементы 1, $[\mu]$, $[\mu]^2, \ldots, [\mu]^p$ составляют множество групповых образующих кольца $K(P_p)$ (отсюда следует, что $[\mu]$ — кольцевая образующая кольца $K(P_p)$). Покажем, что элементы 1, $[\mu]$, $[\mu]^2, \ldots, [\mu]^p$ образуют $\mathbb{Q}$-базис для $\mathbb{Q}$-линейного пространства $K(P_p) \otimes \mathbb{Q}$. Для этого заметим, что

$$\mathrm{ch}(\eta) = e^{c_1(\eta)},$$

и так как $c_1(\eta)$ можно отождествить с образующей y в $H^*(P_p; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[y]/(y^{p+1})$, то

$$\mathrm{ch}(\mu) = \mathrm{ch}(\eta) - 1 = e^y - 1 = y + \frac{y^2}{2!} + \ldots. \qquad (*)$$

Очевидно, достаточно показать, что элементы 1, $[\mu]$, $[\mu]^2, \ldots, [\mu]^p$ $\mathbb{Q}$-линейно независимы.

Предположим, что

$$a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot [\mu] + \ldots + a_p [\mu]^p = 0.$$

Применяя характер Чжэня к этому уравнению, получаем

$$a_0 + a_1\left(y + \frac{y^2}{2!} + \ldots\right) + a_2\left(y + \frac{y^2}{2!} + \ldots\right)^2 + \ldots = 0,$$

и в силу известного свойства элемента y

$$a_0 = a_1 = \ldots = a_p = 0.$$

Мы оставляем читателю проверить, что элементы 1, $[\mu]$, $[\mu]^2, \ldots, [\mu]^p$ образуют $\mathbb{Z}$-базис в $K(P_p)$ (ср. Атья и Хирцебрух [1, стр. 19]).

Так как $y^{p+1} = 0$, то очевидно, что

$$\mathrm{ch}(\mu^{p+1}) = 0,$$

откуда $\mu^{p+1} = 0$, поскольку отображение ch инъективно (теорема 13 гл. IX).

Итак, первое утверждение теоремы 4 доказано. Чтобы получить второе утверждение, рассмотрим точную последовательность пары (P_p, P_q)

$$\ldots \to K^{-1}(P_q) \xrightarrow{\delta} K^0(P_p, P_q) \xrightarrow{j^*} K^0(P_p) \xrightarrow{i^*} K^0(P_p)$$

(здесь i^* и j^* индуцированы стандартными вложениями). Так как $K^r(P_q) = 0$, если r нечетно, то j^* вкладывает $\tilde{K}(P_p/P_q) = K^0(P_p, P_q)$ в $K^0(P_p)$. В силу точности последовательности $\operatorname{Im} j^* = \ker i^*$, причем множество $\ker i^*$ образовано элементами $[\mu]^{q+1}, \ldots, [\mu]^p$. Отсюда получаем второе утверждение.

Наконец, вычислим операции Ψ^k в $K(P_p)$. Так как η — линейное расслоение, то

$$\Psi^k(\eta) = \eta^k$$

(см. первый абзац доказательства леммы 15 гл. IX). Из определения $[\mu]$ следует, что

$$\Psi^k(1 + [\mu]) = (1 + [\mu])^k.$$

Так как Ψ^k — групповой гомоморфизм, то

$$\Psi^k([\mu]) = (1 + [\mu])^k - 1,$$

а так как Ψ^k — кольцевой гомоморфизм, то

$$\Psi^k([\mu]^s) = ((1 + [\mu])^k - 1)^s.$$

ЛИТЕРАТУРА [1])

Адамс (Adams J. F.)

1. Vector fields on spheres, *Ann. of Math.*, **75** (1962).

Александров П. С.

1. Комбинаторная топология, Гостехиздат, М. — Л., 1947.

Атья М.

*1. Лекции по *K*-теории, «Мир», М., 1967.

2. Пространства Тома, сб. *Математика*, **10** : **5** (1966), 48—69.

Атья, Хирцебрух (Atiyah M., Hirzebruch F.)

1. Vector bundles and homogeneous spaces, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 3, Differential Geometry, 7—38, American Mathematical Society, 1961.

Буржен (Bourgin A.)

1. Modern algebraic topology, New York, 1963.

Вейль А.

1. Классические группы, их инварианты и представления ИЛ, М., 1947.

Гуревич У., Волмэн Г.

1. Теория размерности, ИЛ, М., 1948.

Джеймс (James I. M.)

1. The intrinsic join. A study of the homotopy groups of Stiefel manifolds, *Proc. London Math. Soc.*, **8** (3), (1958) 507—535.

Картан А., Эйленберг С.

1. Гомологическая алгебра, ИЛ, М., 1960.

Колмогоров А. Н., Фомин С. В.

*1. Элементы теории функций и функционального анализа «Наука», М., 1968.

Кук, Финрей (Cooke, Finrey)

1. Homology of cell complexes, Princeton Univ. Press, 196

Лефшец С.

1. Алгебраическая тологоия, ИЛ, М., 1949.

2. Геометрическая теория дифференциальных уравнени ИЛ, М., 1961.

Люмис Л.

1. Введение в абстрактный гармонический анализ, ИЛ, М 1956.

Милнор Дж.

1. Теория Морса, «Мир», М., 1965.

---

[1]) Литература, отмеченная звездочкой, добавлена при пер воде. — *Прим. перев.*

Понтрягин Л. С.
1. Некоторые топологические инварианты замкнутых римановых многообразий, *Изв. АН СССР, сер. мат.*, **13** (1949), 125—162.
2. Непрерывные группы, Физматгиз, М., 1954.
3. Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопии, *Труды МИАН*, **45** (1955).
4. Обыкновенные дифференциальные уравнения, Физматгиз, М., 1961.

де Рам Ж.
1. Дифференцируемые многообразия, ИЛ, М., 1956.

Стинрод Н.
1. Топология косых произведений, ИЛ, М., 1953.

Стинрод Н., Эйленберг С.
1. Основания алгебраической топологии, Физматгиз, М., 1958.

Стинрод, Эпштейн (Steenrod N., Epstein A.)
1. Cohomology operations, Princeton Univ. Press, 1962.

Фукс Д. В.
1. Спектральные последовательности расслоений, *УМН*, **21**, вып. 5 (131) (1966).

Хилтон Дж., Уайли С.
1. Теория гомологий, «Мир», М., 1966.

Хирцебрух (Hirzebruch F.)
1. Neue Topologische Methoden in der algebraischen Geometrie, Springer, 1962.

Холл М.
1. Теория групп, ИЛ, М., 1962.

Ху Сы-цзян
1. Теория гомотопий, «Мир», М., 1964.

Хусейни (Husseini S. Y.)
1. Topics in the algebraic topology of the classical groups, University of Wisconsin, lecture notes.

Шварц (Schwartz J.)
1. Lecture notes on nonlinear functional analysis, New York University, 1963/64.
2. De Rham's theorem for arbitrary spaces, *Amer. J. Math.*, **77**, № 1 (1955), 29—44.

Экман (Eckmann B.)
1. Gruppentheoretischer Beweis des Satzes von Hurwitz — Radon über die Komposition quadratischer Formen, *Comm. Math. Helv.*, **15**, № 4 (1942/3), 358—366.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ДЖ. ШВАРЦ

Дифференциальная геометрия и топология

Редактор *Л. Б. Штейнпресс* Художник *Н. А. Фильчагина*
Художественный редактор *Н. Г. Блинов*
Технический редактор *Н. Д. Толстякова*

Сдано в производство 30/IX 1969 г. Подписано к печати 17/II 1970 г.
Бум. № 2. $84 \times 108^1/_{32} = 3{,}50$ бум. л. Печ. усл. 11,76. Уч.-изд. л. 9,21.
Изд. № 1/5430. Цена 64 коп. Зак. 356.

ИЗДАТЕЛЬСТВО „МИР"
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР. Измайловский проспект, 29.