

((1.4.29) можно получить из (1.4.28), положив $v = i \sqrt{\omega^2/(1 - \omega^2)}$ и $T_0 = \pi$). Решение, отвечающее двойному собственному значению, можно получить, переходя к пределу $v \rightarrow 0$:

$$(1.4.30) \quad u(X, T) = 4 \operatorname{arctg}(-T/\operatorname{ch}(X - X_0))$$

(рис. 1.4). На спектральном языке (1.4.29) представляет собой решение, отвечающее двум собственным значениям η_1, η_2 , расположенным по разные стороны от точки $\eta = 1/2$. Они сливаются в двойной нуль $\eta_1 = \eta_2 = 1/2$ (этому соответствует решение

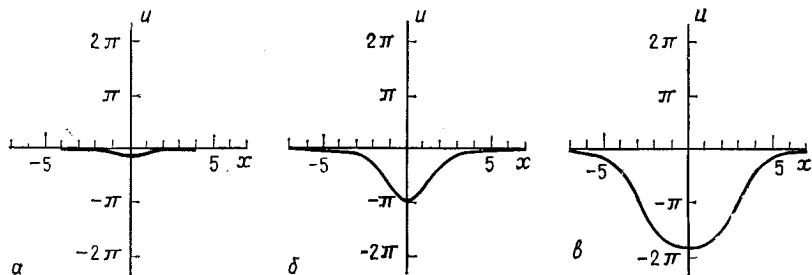


Рис. 1.4. Типичное двухполюсное решение (1.4.30): (a) $T = 0.1$; (б) $T = 1.0$; (в) $T = 10.0$.

(1.4.30)) и затем расщепляются в пару собственных значений $\zeta, -\zeta^*$ (этому случаю отвечает решение (1.4.28)). Функционал энергии

$$(1.4.31a) \quad E = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} (u_T^2 + u_X^2) + 1 - \cos u \right) dx$$

в случае кинка — антикинка, двигающихся в лабораторной системе координат со скоростью v (1.4.29), принимает значение

$$(1.4.31b) \quad E = \frac{2E_0}{\sqrt{1 - v^2}},$$

а в случае бризера (1.4.28), осциллирующего в лабораторной системе координат с частотой ω , имеем

$$(1.4.31c) \quad E = 2E_0 \sqrt{1 - \omega^2},$$

где E_0 — энергия кинка (1.4.26) с $v = 0$.

В этом месте, вероятно, следует еще раз подчеркнуть, что круг задач, обладающих такими солитонными решениями, весьма ограничен. Часто хорошей проверкой на интегрируемость заданного уравнения при помощи МОЗР является изучение взаимодействия двух уединенных волн. Если они взаимодействуют

неупруго, то обычно полагают, что уравнение не может быть решено методом обратной задачи рассеяния. Например, Абловиц, Краскал и Ладик [15] изучали уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} + F(u) = 0$$

для различных функций $F(u)$, а именно:

$$F_1(u) = \sin u + \lambda \sin 2u,$$

$$F_2(u) = \begin{cases} \pi/4, & 2\pi n < u < (2n+1)\pi, \\ 0, & u = \pi n, \\ -\pi/4, & (2n+1)\pi < u < 2(n+1)\pi, \end{cases}$$

$$F_3(u) = -u + \frac{u^3}{\pi^2}.$$

Каждое из этих уравнений имеет частное решение в виде уединенной волны. Но только в случае $F_1(u)$ с $\lambda = 0$ (т. е. уравнения sin-Гордон) уединенные волны взаимодействуют упруго. Хотя при больших относительных скоростях казалось, что взаимодействие ($\lambda \neq 0$) является упругим, тем не менее при малых относительных скоростях взаимодействие становилось очень существенным. При достаточно малых относительных скоростях уединенные волны в результате взаимодействия образовывали связанные состояния — квазибризеры.

Многие авторы численно изучали такие задачи (ранние работы сделали Забужский и Краскал [523], Хардин и Тапперт [198]. Обзор по этим работам можно найти у Элбека [146]. К этому направлению относятся также работы Кудрявцева [303] и Маханькова [344]).

По сравнению с обобщенной задачей для оператора Захарова — Шабата многосолитонные решения для оператора Шредингера существенно менее разнообразны. В этом случае отсутствуют связанные многосолитонные решения, так как оператор является самосопряженным.

Далее мы получим N -солитонные решения для уравнения КdФ. Мы будем следовать работе [172]. Для этого рассмотрим (1.3.37b), положив коэффициент отражения $\rho(k)$ равным нулю. Воспользовавшись (1.4.16), мы получим, что $K(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$(1.4.32) \quad K(x, y) + \sum_{m=1}^N c_m^2 e^{-\kappa_m(x+y)} + \sum_{m=1}^N c_m^2 e^{-\kappa_m y} \times \\ \times \int_x^\infty e^{-\kappa_m z} K(x, z) dz = 0.$$

Представим $K(x, y)$ в виде

$$(1.4.33) \quad K(x, y) = - \sum_{m=1}^N c_m \psi_m(x) e^{-\kappa_m y}.$$

Подставляя (1.4.33) в (1.4.32), производя интегрирование и приравнивая нулю коэффициенты при $e^{-\kappa_m y}$, получим

$$(1.4.34a) \quad \psi_m(x) + \sum_{m=1}^N c_m c_n \psi_n(x) \frac{e^{-(\kappa_n + \kappa_m)x}}{(\kappa_n + \kappa_m)} = c_m e^{-\kappa_n x}.$$

Пусть E , ψ — вектор-столбцы с элементами $c_m e^{-\kappa_m x}$ и ψ_m соответственно, а C является $N \times N$ -матрицей с элементами

$$c_{mn} = \frac{c_m c_n e^{-(\kappa_m + \kappa_n)x}}{\kappa_n + \kappa_m}.$$

Перепишем уравнение (1.4.34a) в матричной форме

$$(1.4.34b) \quad (I + C)\psi = E$$

(I — единичная $N \times N$ -матрица). Мы можем быть уверены в том, что уравнение (1.4.34b) имеет решение ψ , поскольку матрица C является положительно определенной, т. е.

$$\begin{aligned} P^T C P &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N P_m c_m c_n P_n \frac{e^{-(\kappa_m + \kappa_n)x}}{(\kappa_m + \kappa_n)} = \int_x^\infty \left(\sum_{m=1}^N P_m c_m e^{-\kappa_m z} \right)^2 dz \geqslant \\ &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Решая уравнение (1.4.34b) по правилу Крамера, получим

$$(1.4.35a) \quad \psi_n(x) = \Delta^{-1} \sum_{m=1}^N c_m e^{-\kappa_m x} Q_{m,n},$$

где $\Delta = \det(I + C)$, а Q_{nm} обозначают алгебраические дополнения элементов матрицы $(I + C)$. Для Δ существует представление

$$(1.4.35b) \quad \Delta = \sum_{m=1}^N \left(\delta_{nm} + c_m c_n \frac{\exp(-(\kappa_m + \kappa_n)x)}{(\kappa_m + \kappa_n)} \right) Q_{mn}.$$

Из (1.4.33) следует, что на характеристике $x = y$ функция $K(x, y)$ имеет вид

$$(1.4.36) \quad K(x, x) = -\Delta^{-1} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N c_m c_n e^{-(\kappa_m + \kappa_n)x} Q_{nm}.$$

Из того факта, что производная определителя является суммой определителей матриц, у которых проинтегрирован один из столбцов, имеем

$$\frac{d\Delta}{dx} = - \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N c_m c_n e^{-(\kappa_m + \kappa_n) x} Q_{mn}.$$

Таким образом, окончательный результат имеет вид

$$(1.4.37) \quad K(x, x) = \Delta^{-1} \frac{d}{dx} \Delta,$$

и, следовательно, потенциал

$$(1.4.38) \quad q(x) = 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \Delta.$$

Такая форма представления потенциала была обнаружена многими исследователями (см., например, [270, 525, 211, 495]). Отметим, что такое представление справедливо и для более широкого круга задач, даже включающих вклады от непрерывного спектра [433]. Автомодельные решения также могут быть представлены в этой форме [22]. Кроме того, при некоторых дополнительных предположениях аналогичную форму можно придать решениям нелинейного уравнения Шредингера (см., например, Захаров, Шабат [544]).

Структура N -солитонного решения весьма проста; этот факт лежит в основании других, более прямых подходов, позволяющих строить частные решения, которые будут описаны в гл. 3 (см. метод Хироты в разд. 3.3). Но следует отметить, что эти методы в отличие от МОЗР не позволяют решать задачу с произвольными начальными данными.

Обсудим теперь сдвиги фаз солитонов уравнения КdФ в двухсолитонном решении. Мы видели, что нормировочные константы в этом случае имеют следующую зависимость от времени:

$$(1.4.39) \quad c_m^2(t) = c_{m,0}^2 e^{8\kappa_m^3 t}$$

(напомним, что $\lambda_m = -\kappa_m^2 < 0$ являются собственными значениями). Из этого решения непосредственным вычислением получаем

$$(1.4.40) \quad \Delta = \det(I + C) = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_1 + \eta_2 + A_{12}},$$

где

$$\eta_m = -2\kappa_m(x - 4\kappa_m^2 t) + \eta_{m,0},$$

$$\eta_{m,0} = \ln c_{m,0}^2,$$

$$e^{A_{12}} = \left(\frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} \right)^2$$

(отметим, что здесь определение η отличается от данного в предыдущем разделе). Теперь сдвинемся вдоль траектории $\eta_1 = \text{const}$, предполагая для определенности, что $x_1 > x_2$. Тогда при $t \rightarrow -\infty \eta_2 \rightarrow -\infty$, и мы имеем

$$(1.4.41) \quad \Delta \sim 1 + e^{\eta_1},$$

а при $t \rightarrow +\infty \eta_2 \rightarrow +\infty$ и

$$(1.4.42) \quad \Delta \sim (1 + e^{\eta_1 + A_{12}}) e^{\eta_2}.$$

Из (1.4.38) следует теперь, что вблизи характеристики $\eta_1 = \text{const}$ решение $q(x, t)$ при $t \rightarrow \pm\infty$ представляется в виде

$$(1.4.43a) \quad q(x, t) \sim 2x_1^2/\text{ch}^2(\eta_1 + \varphi_{\pm}),$$

$\varphi_+ = A_{12}$, $\varphi_- = 0$, фиксировано, $t \rightarrow \pm\infty$. Таким образом, взаимодействие не изменяет скорости и амплитуды солитона. Сдвиг фазы — это все, что происходит в результате взаимодействия. Из полученной формулы следует, что траектория солитона сдвигается на A_{12} , или, точнее,

$$(1.4.43b) \quad \Delta\varphi = \varphi_+ - \varphi_- = \ln \left(\frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2} \right)^2.$$

Вообще для уравнения КdФ с каждым собственным значением $\lambda_p = -x_p^2$; $x_1 > x_2 > \dots > x_N > 0$ связан солитон, стремящийся при $t \rightarrow \pm\infty$ асимптотически к

$$q \sim 2x_p/\text{ch}^2(\eta_p + \varphi_{\pm}).$$

Сдвиг фазы $\Delta\varphi$ солитона дается формулой

$$(1.4.44) \quad \Delta\varphi = \varphi_+ - \varphi_- = \sum_{m=p+1}^N \ln \left(\frac{x_p - x_m}{x_p + x_m} \right)^2 - \sum_{m=1}^{p-1} \ln \left(\frac{x_m - x_p}{x_m + x_p} \right)^2.$$

Теперь совершенно очевидно, что общий сдвиг фазы есть сумма всех сдвигов, как если бы солитон p парно провзаимодействовал с каждым солитоном по отдельности (см. [525, 495, 474]). В общем случае вопрос о взаимодействии солитонов с решениями, отвечающими непрерывному спектру, изучался в работе [13].

В последней работе для общего сдвига фазы p -го солитона, возникающего в результате взаимодействия с другими солитонами и непрерывным спектром, получена формула

$$(1.4.45) \quad \varphi_+ - \varphi_- = \ln \left\{ \left(\frac{c_p^+ c_p^-}{2x_p} \right)^2 \prod_{m=1}^{p-1} \left(\frac{x_m - x_p}{x_m + x_p} \right)^4 \right\}.$$

В (1.4.45) c_p^+ обозначают „правые“, а c_p^- — „левые“ нормировочные коэффициенты; имеется в виду, что собственная функция определена следующим образом:

$$(1.4.46) \quad \begin{aligned} \Psi_{xx} + (u(x, 0) - \kappa_p^2) \Psi = 0, \\ \Psi \sim \begin{cases} c_p^+ e^{-\kappa_p x}, & x \rightarrow +\infty, \\ c_p^- e^{\kappa_p x}, & x \rightarrow -\infty, \end{cases} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^2 dx = 1. \end{aligned}$$

Когда отсутствует непрерывный спектр, сдвиг (1.4.45) сводится к N -солитонной формуле, так как в случае чистого N -солитонного решения мы имеем

$$(1.4.47) \quad (c_p^+)^2 (c_p^-)^2 = (2\kappa_p)^2 \prod_{m \neq p}^N \left(\frac{\kappa_p + \kappa_m}{\kappa_p - \kappa_m} \right)^2.$$

Если имеется только одно собственное значение и непрерывный спектр, то

$$(1.4.48) \quad \Phi_+ - \Phi_- = \ln \left(\frac{c_1^+ c_1^-}{2\kappa_1} \right)^2.$$

Эта формула была найдена Абловицем и Сигуром [26].

1.5. Общий эволюционный оператор. В этом разделе мы найдем общий класс нелинейных эволюционных уравнений, связанных с обобщенной задачей рассеяния Захарова — Шабата. Оказывается, что при некоторых условиях удается установить общие соотношения, позволяющие непосредственно описать класс интегрируемых нелинейных эволюционных уравнений. Эти соотношения зависят от закона дисперсии линеаризованной задачи и от некоторого интегро-дифференциального оператора. При выводе мы будем основываться на работе Абловица, Каупа, Ньюэлла и Сигура [12].

1.5.а. Вывод общих эволюционных уравнений. Мы будем работать с уравнениями (1.2.7), (1.2.8) и с собственными функциями Φ , $\bar{\Phi}$, имеющими граничные условия (1.3.1). Умножив первое и второе уравнения (1.2.7а) (с заменой v на Φ) соответственно на Φ_1 и Φ_2 , мы обнаружим, что квадраты собственных функций удовлетворяют соотношениям

$$(1.5.1) \quad \begin{aligned} (\Phi_1^2)_x + 2i\zeta\Phi_1^2 &= 2q\Phi_1\Phi_2, \\ (\Phi_2^2)_x - 2i\zeta\Phi_2^2 &= 2r\Phi_1\Phi_2, \\ (\Phi_1\Phi_2)_x &= q\Phi_2^2 + r\Phi_1^2. \end{aligned}$$

Сравнивая, обнаруживаем, что квадраты собственных функций удовлетворяют однородной части (1.2.8), т. е.

$$(1.5.2) \quad A_x = qC - rB, \quad B_x + 2i\xi B = -2Aq, \quad C_x - 2i\xi C = 2Ar.$$

Таким образом, одно из решений однородной системы (1.2.8) имеет вид

$$(1.5.3a) \quad \begin{pmatrix} \Phi_1\Phi_2 \\ -\Phi_1^2 \\ \Phi_2^2 \end{pmatrix}.$$

Оставшиеся два решения находятся аналогично и имеют вид

$$(1.5.3b) \quad \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_1\bar{\Phi}_2 \\ -\bar{\Phi}_1^2 \\ \bar{\Phi}_2^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\Phi_1\bar{\Phi}_2 + \Phi_2\bar{\Phi}_1) \\ -\Phi_1\bar{\Phi}_1 \\ \Phi_2\bar{\Phi}_2 \end{pmatrix}.$$

Когда известны все решения однородного уравнения, то можно найти (методом вариации постоянной) общее решение неоднородных уравнений (1.2.8) (где q_t, r_t являются неоднородными членами). По причинам, которые были описаны в разд. 1.2, мы возьмем граничное условие для A, B, C в виде

$$(1.5.4) \quad A \rightarrow A_-(\xi), \quad B, C \rightarrow 0 \text{ при } |x| \rightarrow \infty.$$

Можно было бы наложить более общие граничные условия, но здесь мы выберем именно эти, поскольку все эволюционные уравнения, выведенные в разд. 1.2 (при условии $r, q \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$), удовлетворяют (1.5.4). Здесь мы изложим центральные идеи построения, лежащие в основании многих обобщений.

Так как мы потребовали выполнения (1.5.4) при $x = \pm\infty$, то система (1.2.8) не будет иметь решения, если не выполнены некоторые условия «ортогональности». Здесь мы только сформулируем результаты, а позже в этом же разделе приведем их вывод. С учетом того, что $r, q \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, должны выполняться следующие условия ортогональности:

$$(1.5.5) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left[\begin{pmatrix} r \\ -q \end{pmatrix}_t + 2A_-(\xi) \begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix} \right] \cdot \Phi_i dx = 0 \quad i = 1, 2,$$

где

$$(1.5.6) \quad \Phi_1 = \begin{pmatrix} \Phi_1^2 \\ \Phi_2^2 \end{pmatrix}, \quad \Phi_2 = \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_1^2 \\ \bar{\Phi}_2^2 \end{pmatrix}$$

и $\mathbf{u} \cdot \Phi_1 \equiv r\Phi_1^2 + q\Phi_2^2$ при $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix}$ и т. д. Условия ортогональности (1.5.5) определяют эволюционное уравнение. Чтобы это

показать, выведем вначале эволюционное уравнение для Φ_1 (для Φ_2 анализ проводится аналогично). Из (1.5.1) мы имеем

$$(1.5.7) \quad \Phi_1 \Phi_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (q\Phi_2^2 + r\Phi_1^2) dx.$$

Отсюда

$$(1.5.8) \quad \begin{aligned} (\Phi_1^2)_x &= -2i\zeta\Phi_1^2 + 2qI_- (q\Phi_2^2 + r\Phi_1^2), \\ (\Phi_2^2)_x &= 2i\zeta\Phi_2^2 + 2rI_- (q\Phi_2^2 + r\Phi_1^2), \end{aligned}$$

где введено обозначение

$$(1.5.9) \quad I_- = \int_{-\infty}^x dy.$$

Систему (1.5.8) можно переписать как операторное соотношение

$$(1.5.10) \quad \zeta \begin{pmatrix} \Phi_1^2 \\ \Phi_2^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} -\partial_x + 2qI_- r & 2qI_- q \\ -2rI_- r & \partial_x - 2rI_- q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1^2 \\ \Phi_2^2 \end{pmatrix},$$

или просто

$$(1.5.11) \quad \zeta \Phi_i = \mathcal{L} \Phi_i, \quad i = 1, 2$$

((1.5.11) верно также и для Φ_2), где

$$(1.5.12) \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} -\partial_x + 2qI_- r & 2qI_- q \\ -2rI_- r & \partial_x - 2rI_- q \end{pmatrix}.$$

Здесь \mathcal{L} — интегро-дифференциальный оператор, действующий на Φ . Если $A_-(\zeta)$ — аналитическая функция, то

$$(1.5.13) \quad A_-(\zeta) \Phi_i = A_-(\mathcal{L}) \Phi_i$$

внутри радиуса сходимости. В этом случае условия ортогональности (1.5.5) немедленно дают

$$(1.5.14) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left[\begin{pmatrix} r \\ -q \end{pmatrix}_t \cdot \Phi_i + 2 \begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix} A_-(\mathcal{L}) \cdot \Phi_i \right] dx = 0, \quad i = 1, 2.$$

Теперь задача состоит в том, чтобы заменить оператор $A_-(\mathcal{L})$, действующий на Φ_i , сопряженным оператором, который действует на вектор $(r, q)^T$ (T обозначает транспонирование).

Для этого определим скалярное произведение обычным образом: $\langle u, v \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u \cdot v dx$. Оператор \mathcal{L}^A , сопряженный к \mathcal{L}

(это не эрмитово сопряжение), определяется соотношением $\langle \mathcal{L}^A \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathcal{L}\mathbf{v} \rangle$. Типичными примерами служат: (i) сопряженным к ∂_x является $-\partial_x$ (при убывающих граничных условиях для \mathbf{u} , \mathbf{v}); (ii) для квадратной матрицы $M = [m_{ij}]$ сопряженной является транспонированная матрица $M^A = [m_{ji}^A]$. Найдем оператор, являющийся сопряженным к скалярному оператору $\hat{L} = \alpha(x)I - \beta(x)$. Действуя по определению и изменения порядок интегрирования, получим

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \alpha I - \beta \mathbf{v} \rangle &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx u(x) \alpha(x) \int_{-\infty}^x dy \beta(y) v(y) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy \beta(y) v(y) \int_y^{\infty} dx \alpha(x) u(x). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что

$$\hat{L}^A = \beta I + \alpha = \beta(x) \int_x^{\infty} dy \cdot \alpha(y).$$

Используя этот результат и (1.5.14), получим

$$(1.5.15a) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left[\binom{r}{-q} + 2A_-(\mathcal{L}^A) \binom{r}{q} \right] \cdot \Phi_i dx = 0, \quad i = 1, 2,$$

где

$$(1.5.15b) \quad \mathcal{L}^A = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} \partial_x + 2rI + q & -2rI + r \\ 2qI + q & -\partial_x - 2qI + r \end{pmatrix}$$

и $A_-(\mathcal{L}^A)$ действует только на $\binom{r}{q}$. Таким образом, достаточными условиями разрешимости (1.2.8) с граничными условиями $A \rightarrow A_-(\zeta)$, $B, C \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$ являются уравнения

$$(1.5.16a) \quad \binom{r}{-q}_t + 2A_-(\mathcal{L}^A) \binom{r}{q} = 0,$$

или в матричной форме

$$(1.5.16b) \quad \sigma_3 \mathbf{u}_t + 2A_-(\mathcal{L}^A) \mathbf{u} = 0,$$

где

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \binom{r}{q}.$$

Итак, мы пока что лишь показали, что условия (1.5.16) являются достаточными для выполнения условий ортогональности

(1.5.5). Они являются также и необходимыми, так что (1.5.16) представляет собой наиболее общую систему эволюционных уравнений, интегрируемую посредством представления (1.2.7) при следующих условиях: (i) $q \rightarrow 0$, $A \rightarrow A_-(\zeta)$, $B \rightarrow 0$, $C \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$; (ii) $r = \pm q^*$; (iii) $A_-(\zeta)$ — целая функция. Это утверждение вытекает из того факта, что любое эволюционное уравнение имеет решения с произвольно малой нормой $\int |q| dx$. Если

интеграл $\int |q| dx$ достаточно мал, то из (1.3.16) следует отсутствие связанных состояний. Кауп [258] показал, что при отсутствии связанных состояний функции Φ_1 , Φ_2 образуют полный набор. Поэтому из (1.5.15) следует уравнение (1.5.16), которое является наиболее общим эволюционным уравнением, что и утверждалось. Аналогичное рассуждение применимо в случае, когда функция $A_-(\zeta)$ является отношением целых функций, но при этом эволюционные уравнения содержат дополнительные связи (см. [12]).

Важно, что $A_-(\zeta)$ можно связать с дисперсионным соотношением соответствующей линеаризованной задачи. В пределе

$x \rightarrow \infty$, $I_+ \rightarrow 0$ (напомним, что $I_+ = \int_x^\infty dy$) и

$$\mathcal{L}^A \sim \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & -\partial_x \end{pmatrix}.$$

Следовательно, в этом пределе мы получаем распадающуюся систему

$$(1.5.17) \quad \begin{aligned} r_t + 2A_- \left(\frac{1}{2i} \partial_x \right) r &= 0, \\ -q_t + 2A_- \left(\frac{1}{2i} \partial_x \right) q &= 0. \end{aligned}$$

Система (1.5.17) является линейной, и ее можно решить при помощи преобразования Фурье. Волновое решение $q = \exp(i(kx - \omega_q(k)t))$, $r = \exp(i(kx - \omega_r(k)t))$ приводит к условиям

$$(1.5.18) \quad A_-(\zeta) = \frac{1}{2i} \omega_q(-2\zeta) = -\frac{1}{2i} \omega_r(2\zeta).$$

а) Это означает, что установлена связь между $A_-(\zeta)$ и дисперсионным соотношением соответствующей линеаризованной задачи (1.5.17). Таким образом, общее эволюционное уравнение (1.5.16) выражается через дисперсионное соотношение линеаризованного уравнения и оператор \mathcal{L}^A (см. (1.5.15)).

б) Существует требование, которое необходимо наложить на вид линеаризованной системы уравнений (на r, q), чтобы ее можно было решить посредством МОЗР.

С учетом этих результатов общее эволюционное уравнение (1.5.16) принимает вид

$$(1.5.19) \quad \sigma_3 u_t - i\omega (-2\mathcal{L}^A) u = 0,$$

где $\omega(k)$ определяется из линеаризованной задачи. Примером является нелинейное уравнение Шрёдингера $iq_t = q_{xx} \pm 2q^2q^*$, линеаризация которого имеет вид $iq_t = q_{xx}$. Полагая $q = \exp(ikx - i\omega t)$, мы найдем $\omega(k) = -k^2$. Из (1.5.19) следует

$$(1.5.20) \quad \begin{pmatrix} r \\ -q \end{pmatrix}_t = -4i(\mathcal{L}^A)^2 \begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix} = -2\mathcal{L}^A \begin{pmatrix} r_x \\ -q_x \end{pmatrix} = \\ = i \begin{pmatrix} r_{xx} - 2r^2q \\ q_{xx} - 2q^2r \end{pmatrix}.$$

Когда $r = \pm q^*$, эта система совпадает с нелинейным уравнением Шрёдингера (1.2.11).

Вывод соотношения (1.5.19) требует условия $r, q \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. Мы не можем просто положить $r = -1$, чтобы получить аналогичный результат для оператора Шрёдингера (1.2.20). В этом случае общее эволюционное уравнение, которое нашли Абловиц, Кауп, Ньюэлл и Сигур [12, приложение 3], имеет вид

$$(1.5.21a) \quad q_t = \gamma(\mathcal{L}_s) q_x = 0,$$

где

$$(1.5.21b) \quad \mathcal{L}_s = -\frac{1}{4}\partial_x^2 - q + \frac{1}{2}q_x I_+,$$

$$(1.5.21c) \quad \gamma(k^2) = \frac{\omega(2k)}{2k}.$$

Здесь $\omega(k)$ является дисперсионным соотношением линеаризованной задачи ($q = \exp(ikx - i\omega(k)t)$). Например, в случае уравнения КdФ $q_t + 6qq_x + q_{xxx} = 0$ линеаризованная задача имеет вид $q_t + q_{xxx} = 0$, что приводит к дисперсионному соотношению $\omega = -k^3$. Поэтому $\gamma(k^2) = -4k^2$ и, таким образом, $\gamma(\mathcal{L}_s) = -4\mathcal{L}_s$. Из (1.5.21) немедленно следует, что

$$\begin{aligned} q_t - 4\mathcal{L}_s q_x &= 0 \Rightarrow q_t - 4 \left(-\frac{1}{4}\partial_x^2 - q + \frac{1}{2}q_x I_+ \right) q_x = 0 \\ &\Rightarrow q_t + q_{xxx} + 4qq_x + 2qq_x = 0. \end{aligned}$$

Из приведенного анализа видно, что квадраты собственных функций играют важную роль. В частности, они эволюционируют во времени довольно простым образом. Например, в случае

уравнения КдФ из (1.2.24) и (1.2.20а) мы находим, что квадрат любой собственной функции подчиняется эволюционному уравнению (см. [172])

$$(1.5.22) \quad (v^2)_t + (v^2)_{xxx} + 6u(v^2)_x = 0,$$

которое представляет собой линеаризацию уравнения КдФ.

1.5.b. Нелинейный фурье-анализ — метод обратной задачи рассеяния. Весьма поразительна замечательная аналогия с фурье-анализом (ср. с разд. П.1). В линейной теории уравнения также определяются дисперсионным соотношением:

$$(1.5.23a) \quad q_t = -i\omega(-i\partial_x)q.$$

Например, $iq_t = q_{xx} \Rightarrow \omega(k) = -k^2$. Процедура решения начальной задачи на бесконечном интервале $(-\infty, \infty)$ в предположении достаточно быстрого убывания $q(x, 0) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$ сводится к преобразованиям Фурье:

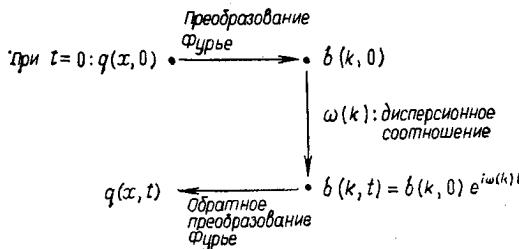
$$(1.5.23b) \quad q(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b(k, t) e^{ikx} dk,$$

причем

$$(1.2.23c) \quad b(k, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} q(x, 0) e^{-ikx} dx,$$

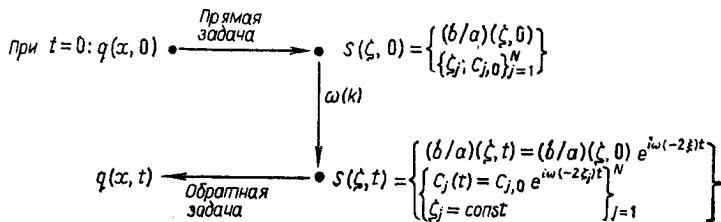
$$(1.2.23d) \quad b(k, t) = b(k, 0) e^{-i\omega(k)t}.$$

Таким образом, по заданному в момент $t = 0$ начальному условию $q(x, 0)$ мы при помощи преобразования Фурье находим $b(k, 0)$. Функция $b(k, t)$ просто зависит от времени, и $q(x, t)$ получается обратным преобразованием Фурье. Схематически это можно изобразить следующим образом:



Близкая аналогия между методом обратной задачи рассеяния и методом преобразования Фурье побудила Абловица, Каупа, Ньюэлла и Сигура [12] назвать их процедуру решения Inverse Scattering Transform. Так и в линейной теории вид каждого эволюционного уравнения можно охарактеризовать некоторым дисперсионным соотношением, а именно дисперсионным соотноше-

нием соответствующего линеаризованного уравнения, например (1.5.19). Глубокая аналогия видна и в схеме решения эволюционных уравнений методом обратной задачи рассеяния. Для удобства примем $r = \pm q^*$. Пусть при $t = 0$ задана функция $q(x, 0)$. Следует решить прямую задачу рассеяния и найти данные рассеяния (разд. 1.3). Эволюция данных рассеяния во времени задается сравнительно простыми уравнениями (разд. 1.4), зависящими от дисперсионного соотношения линеаризованной задачи. Для восстановления потенциала следует решить уравнение обратной задачи (разд. 1.3). Схематически это можно изобразить так:



Обратная задача сводится к уравнению

$$(1.5.24a) \quad K(x, y; t) \mp F^*(x + y; t) \pm$$

$$\pm \int_x^\infty \int_x^\infty K(x, z; t) F^*(z + s; t) F(s + y; t) ds dz = 0,$$

где

$$(1.5.24b) \quad F(x; t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{b}{a}(\xi, t) e^{-i\xi x} d\xi - i \sum_{j=1}^N C_j(t) e^{i\xi_j x}$$

определяется по начальным данным, а решение $q(x, t)$ можно найти из

$$(1.5.24c) \quad q(x, t) = -2K(x, x; t).$$

1.5. с. Условия ортогональности. Здесь мы вернемся к выводу интегральных условий (1.5.5), следуя работе [12, приложение 1]. Рассмотрим задачу на собственные значения и временную зависимость в матричной форме:

$$(1.5.25a) \quad \mathbf{v}_x = i\xi D\mathbf{v} + N\mathbf{v},$$

$$(1.5.25b) \quad \mathbf{v}_t = Q\mathbf{v},$$

где

$$(1.5.25c) \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix},$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix}.$$

При помощи перекрестного дифференцирования с учетом $\zeta_t = 0$ получим

$$(1.5.26) \quad N_t = Q_x + i\zeta [Q, D] + [Q, N],$$

где $[A, B] = AB - BA$. Сформируем матрицу фундаментального решения

$$(1.5.27a) \quad P = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \bar{\Phi}_1 \\ \Phi_2 & \bar{\Phi}_2 \end{bmatrix}.$$

Обратную матрицу P^{-1} можно представить в виде

$$(1.5.27b) \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} -\bar{\Phi}_2 & \bar{\Phi}_1 \\ \Phi_2 & -\Phi_1 \end{bmatrix}.$$

Удобно определить матрицу S формулой $Q = PSP^{-1}$ (с S работать легче, чем с Q). Таким образом,

$$Q_x = P_x SP^{-1} + PS_x P^{-1} - PSP^{-1}P_x P^{-1}.$$

Подставляя это соотношение в (1.5.26) с учетом (1.5.25), мы получим простую формулу $N_t = PS_x P^{-1}$, или

$$(1.5.28) \quad S = S(-\infty) + \int_{-\infty}^x P^{-1} N_t P dx.$$

Границное условие при $x = -\infty$ имеет вид

$$S(-\infty) = A_-(\zeta) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Из (1.5.28) мы можем при желании построить решения для A , B , C . Однако здесь мы выведем только интегральные условия, необходимые для существования решения.

Данные рассеяния (a, b, \bar{a}, \bar{b}) определяются соотношениями

$$(1.5.29a) \quad \varphi = a\bar{\psi} + b\psi, \quad \bar{\varphi} = -\bar{a}\psi + \bar{b}\bar{\psi},$$

где при $x \rightarrow \infty$

$$(1.5.29b) \quad \varphi \sim \begin{pmatrix} ae^{-i\zeta x} \\ be^{i\zeta x} \end{pmatrix}, \quad \bar{\varphi} \sim \begin{pmatrix} \bar{b}e^{-i\zeta x} \\ -\bar{a}e^{i\zeta x} \end{pmatrix}.$$

Отсюда и из $S = P^{-1}QP$ мы с легкостью находим

$$(1.5.30) \quad S(+\infty) \begin{pmatrix} a\bar{a} - b\bar{b} & 2\bar{a}\bar{b} \\ 2ab & -(a\bar{a} - b\bar{b}) \end{pmatrix} A_-(\zeta).$$

Переходя в (1.5.28) к $x = +\infty$ и подставляя (1.5.20) в (1.5.28), получим

$$(1.5.31) \quad \begin{aligned} A_-(\xi)(a\bar{a} - b\bar{b} - 1) &= \int_{-\infty}^{\infty} (\Phi_1 \bar{\Phi}_1 r_t - \Phi_2 \bar{\Phi}_2 q_t) dx, \\ A_-(\xi) 2\bar{a}\bar{b} &= \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{\Phi}_1^2 r_t + \bar{\Phi}_2^2 q_t) dx, \\ A_-(\xi) 2ab &= \int_{-\infty}^{\infty} (-\Phi_1^2 r_t + \bar{\Phi}_2^2 q_t) dx. \end{aligned}$$

Из определений данных рассеяния и из задачи рассеяния можно установить равенства

$$(1.5.32) \quad \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (\Phi_1 \Phi_2)_x dx &= \int_{-\infty}^{\infty} (q\Phi_2^2 + r\Phi_1^2) dx = ab, \\ \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{\Phi}_1 \bar{\Phi}_2)_x dx &= \int_{-\infty}^{\infty} (q\bar{\Phi}_2^2 + r\bar{\Phi}_1^2) dx = -\bar{a}\bar{b}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} (\Phi_1 \bar{\Phi}_2 + \Phi_2 \bar{\Phi}_1)_x dx &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} (q\Phi_2 \bar{\Phi}_2 + r\Phi_1 \bar{\Phi}_1) dx = a\bar{a} - b\bar{b} - 1, \end{aligned}$$

воспользовавшись которыми с учетом (1.5.31) получим

$$(1.5.33) \quad \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (\Phi_1^2 r_t - \Phi_2^2 q_t) dx &= -2A_-(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} (q\Phi_2^2 + r\Phi_1^2) dx, \\ \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{\Phi}_1^2 r_t - \bar{\Phi}_2^2 q_t) dx &= -2A_-(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} (q\bar{\Phi}_2^2 + r\bar{\Phi}_1^2) dx, \\ \int_{-\infty}^{\infty} (\Phi_1 \bar{\Phi}_1 r_t - \Phi_2 \bar{\Phi}_2 q_t) dx &= -2A_-(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} (q\Phi_2 \bar{\Phi}_2 + r\Phi_1 \bar{\Phi}_1) dx. \end{aligned}$$

Таким образом, определяя квадраты собственных функций

$$(1.5.34) \quad \Phi_1 = \begin{pmatrix} \Phi_1^2 \\ \Phi_2^2 \end{pmatrix}, \quad \Phi_2 = \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_1^2 \\ \bar{\Phi}_2^2 \end{pmatrix}, \quad \Phi_3 = \begin{pmatrix} \Phi_1 \bar{\Phi}_1 \\ \Phi_2 \bar{\Phi}_2 \end{pmatrix},$$

мы получим, что (1.5.33) сводится к

$$(1.5.35) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{r}{-q} \right)_t + 2A_-(\xi) \left(\frac{r}{q} \right) \right] \Phi_i dx = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

т. е. к (1.5.5). Это соотношение было по существу от правным пунктом нашего построения общего эволюционного оператора.

Следует отметить, что вместо квадратичных комбинаций Φ_i , $\bar{\Phi}_i$ в (1.5.35) мы могли бы найти аналогичные выражения через переменные Ψ_i , $\bar{\Psi}_i$, проинтегрировав (1.5.28) от $+\infty$ до x и воспользовавшись соответствующими равенствами при $x = +\infty$. Мы бы получили

$$(1.5.36a) \quad \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_3 u_t + 2A_-(\xi) u) \Psi_i dx = 0,$$

где

$$(1.5.36b) \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix},$$

$$(1.5.36c) \quad \Psi_1 = \begin{pmatrix} \Psi_1^2 \\ \Psi_2^2 \end{pmatrix}, \quad \Psi_2 = \begin{pmatrix} \bar{\Psi}_1^2 \\ \bar{\Psi}_2^2 \end{pmatrix}, \quad \Psi_3 = \begin{pmatrix} \Psi_1 \bar{\Psi}_1 \\ \Psi_2 \bar{\Psi}_2 \end{pmatrix}.$$

Перейдем теперь к краткому обсуждению вопроса о полноте квадратов собственных функций. Кауп [258] показал, что набор Ψ_1 , $\bar{\Psi}_2$, определенный в (1.5.36c), не является полным. Для того чтобы получить полноту, к нему следует добавить два вектора Ψ_3 , взятых в точках дискретного спектра $\zeta_n \}_{n=1}^N$, $\bar{\zeta}_k \}_{k=1}^{\bar{N}}$.¹⁾

Эти результаты позволяют построить разложения некоторых комбинаций исходных потенциалов и получить ряд простых выражений. В частности, используя Ψ_i , получим

$$(1.5.37) \quad \begin{pmatrix} q \\ -r \end{pmatrix} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{b}{a}(\xi) \Psi_2(x, \xi) + \frac{\bar{b}}{\bar{a}}(\xi) \Psi_2(x, \xi) \right\} d\xi + \\ + 2i \sum_1^N \frac{b_k}{a'_k} \Psi_1(x, \zeta_k) - 2i \sum_1^{\bar{N}} \frac{\bar{b}_k}{\bar{a}'_k} \Psi_2(x, \bar{\zeta}_k).$$

Точно так же, воспользовавшись присоединенными собственными функциями, можно показать, что

$$(1.5.38) \quad \begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\bar{b}}{\bar{a}}(\xi) \begin{pmatrix} \Psi_2^2 \\ -\bar{\Psi}_1^2 \end{pmatrix}(x, \xi) + \frac{\bar{b}}{\bar{a}}(\xi) \Psi_2(x, \xi) \right\} d\xi, \\ - 2i \sum_1^N \frac{2}{b_k a'_k} \begin{pmatrix} \Psi_2^2 \\ -\bar{\Psi}_1^2 \end{pmatrix}(x, \zeta_k) + 2i \sum_1^{\bar{N}} \frac{1}{\bar{b}_k \bar{a}'_k} \begin{pmatrix} \bar{\Psi}_2^2 \\ -\bar{\Psi}_1^2 \end{pmatrix}(x, \bar{\zeta}_k).$$

¹⁾ Полноту квадратов собственных функций впервые обнаружил и использовал Кауп (1976а) [258]. В [2*] дано строгое доказательство теоремы о полноте квадратов собственных функций и построена спектральная теория оператора L . Другие приложения и дальнейшее развитие этого подхода заинтересованный читатель может найти в работах [3*—5*]. — Прим. перев.

Отметим также, что аналогичную теорию можно построить и для оператора Шрёдингера (см. [267, 285]). В этом случае разложение потенциала по квадратам собственных функций имеет вид

$$(1.5.39) \quad q(x, t) = \frac{2}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k \rho(k) \psi^2(x, k) dk - 4 \sum_{i=1}^N \gamma_i \kappa_i \psi^2(x, \kappa_i),$$

где $\gamma_i = b_i/a'_i$ и κ_i является i -м дискретным собственным значением. Уравнения (1.5.37—39) явились отправной точкой работы Дейфта, Лунда и Трубовица [135], которые рассматривали уравнения обратной задачи как задачу о бесконечном наборе осцилляторов, лежащих на поверхности бесконечномерной сферы.

Отметим, что другой вывод общего эволюционного уравнения (1.5.16, 21) был дан Калоджеро и Дегасперисом в серии работ (см., например, работу Калоджеро [89] и приведенные в ней ссылки). Задачу рассеяния для оператора Шрёдингера (так же как и в случае оператора Захарова — Шабата из разд. 1.3) можно переписать в виде интегрального уравнения и выразить коэффициент отражения через интеграл от потенциала и собственной функции:

$$(1.5.40) \quad 2ik\rho(k) = \int_{-\infty}^{\infty} q(x) \psi(x, k) e^{-ikx} dx.$$

Более общая формула для двух потенциалов $q_1(x)$ и $q_2(x)$ имеет вид

$$(1.5.41) \quad 2ik [\rho_1(k) - \rho_2(k)] = \int \psi_1(x, k) [q_1(x) - q_2(x)] \psi_2(x, k) dx,$$

она сводится к (1.5.40) при $q_2 \equiv 0$. Калоджеро и Дегасперис получили различные обобщения формулы (1.5.41). Важно отметить, что $q_1(x)$ и $q_2(x)$ являются независимыми.

Если $q(x, t)$ удовлетворяет некоторому эволюционному уравнению, мы можем положить $q_1(x) = q(x, t_0)$, $q_2(x) = q(x, t_0 + \Delta t)$ и устремить $\Delta t \rightarrow 0$. Тогда (1.5.41) свяжет $\partial_t \rho$ и $\partial_t q$, а соотношения типа (1.5.41) позволят вывести (1.5.21), т. е. общее эволюционное уравнение для (1.2.20). Этот подход не имеет заметных преимуществ по сравнению с уже описанным. Калоджеро и Дегасперис получили следующие обобщения: (i) (1.2.20) изучалась для матричных $N \times N$ уравнений; (ii) предполагая $q = q(x, t, y)$, можно получить многомерные эволюционные уравнения. Кроме того, используя этот подход, Чью и Ладик [109] получили общее эволюционное уравнение для дискретной задачи рассеяния, которая будет обсуждаться в разд. 2.2.

1.6. Законы сохранения и полная интегрируемость. Одной из наиболее важных удач на ранней стадии развития МОЗР было открытие бесконечного набора локальных законов сохранения у уравнения КдФ (Миура, Гарднер, Краскал (1968) [383]). Это открытие вместе с аналогичными результатами для мКдФ привело к преобразованию Миуры, связывающему решения этих двух уравнений и в конце концов к задаче рассеяния для оператора Шредингера (1.2.20). В этом разделе мы покажем, что существование бесконечного набора сохраняющихся величин является прямым следствием того факта, что $a(k)$ (коэффициент прохождения в минус первой степени) не зависит от времени. Сохраняющиеся величины возникают как коэффициенты асимптотического разложения по k^{-1} выражения $\ln a(k)$ при $k \rightarrow \infty$. Кроме того, их просто выразить через данные рассеяния (формулы следов); это будет использоваться в разд. 1.7 и 4.5. И наконец, мы покажем, что нелинейные эволюционные уравнения, для которых $\ln a$ не зависит от времени, являются вполне интегрируемыми гамильтоновыми системами и что МОЗР является каноническим преобразованием к переменным типа действия — угол, причем $\ln |a|$ является переменной типа действия. Для удобства изложения мы в основном будем изучать системы вида (1.5.16), связанные с задачей (1.2.7). Вычисления аналогичны проделанным для систем, связанных с (1.2.20), поэтому мы ограничимся формулировкой результатов.

1.6. а. Законы сохранения. Вначале построим бесконечный набор сохраняющихся величин для нелинейного уравнения Шредингера и всех остальных уравнений, связанных с задачей (1.2.7); при этом мы воспользуемся методом, предложенным Захаровым и Шабатом [544]. Напомним, что если (φ_1, φ_2) является решением уравнения (1.2.7а), удовлетворяющим граничному условию (1.3.1), то при $\operatorname{Im} \xi \geqslant 0$ функция $\varphi_1 e^{i\xi x}$ аналитична и стремится к 1 при $|\xi| \rightarrow \infty$. Кроме того, существует предел

$$(1.6.1) \quad a(\xi) = \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi_1 e^{i\xi x},$$

обладающий этими двумя свойствами и не зависящий от времени. Исключим φ_2 из (1.2.7а) и подставим

$$(1.6.2) \quad \varphi_1 = \exp \{-i\xi x + \hat{\phi}\}$$

в уравнение. В результате мы получим уравнение Риккати для $\mu = \hat{\phi}_x$:

$$(1.6.3) \quad 2i\xi\mu = \mu^2 - qr + q \left(\frac{\mu}{q} \right)_x.$$

Поскольку ϕ стремится к нулю при $|\zeta| \rightarrow \infty$ ($\operatorname{Im} \zeta > 0$), мы можем представить

$$(1.6.4) \quad \mu = (2i\zeta)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n(x, t)}{(2i\zeta)^n}.$$

Подставляя (1.6.4) в (1.6.3), получим

$$(1.6.5) \quad \begin{aligned} \mu_0 &= -qr, & \mu_1 &= -qr_x, \\ \mu_{n+1} &= q \left(\frac{\mu_n}{q} \right)_x + \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k \mu_{n-k-1}, & n &\geq 1. \end{aligned}$$

Из (1.6.1) и того факта, что ϕ стремится к нулю при $x \rightarrow -\infty$, следует, что

$$(1.6.6a) \quad \ln a(\zeta) = \hat{\phi}(x = +\infty) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{(2i\zeta)^{n+1}},$$

где

$$(1.6.6b) \quad C_n = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_n dx.$$

Но $\ln a(\zeta)$ не зависит от времени (при *всех* ζ , $\operatorname{Im} \zeta > 0$), так что C_n также должны быть независимы от времени. Таким образом, несколько первых (глобальных) интегралов движения имеют вид

$$(1.6.7) \quad \begin{aligned} C_0 &= \int \{-qr\} dx, & C_1 &= \int \{-qr_x\} dx, \\ C_2 &= \int \{-qr_{xx} + (qr)^2\} dx, \\ C_3 &= \int \{-qr_{xxx} + 4q^2rr_x + r^2qq_x\} dx. \end{aligned}$$

Если r пропорционально q , то по индукции легко получить, что $C_{2n+1} \equiv 0$. Отметим, что при выводе мы не использовали (1.2.7b), поэтому эти интегралы являются сохраняющимися для любого уравнения, разрешимого посредством (1.2.7), т. е. для любого уравнения вида (1.5.16).

В локальной форме законы сохранения (и плотности, и потоки) можно получить родственным методом, предложенным в работе [287], используя оба уравнения (1.2.7a) и (1.2.7b) (см. также [494, 193]). В этом методе после исключения Φ_2 подстав-

ляем (1.6.2) в оба уравнения (1.2.7a, b). В результате получим

$$(1.6.8a) \quad 2i\xi\hat{\Phi}_x = \hat{\Phi}_x^2 - qr + q \left(\frac{\hat{\Phi}_x}{q} \right)_x,$$

$$(1.6.8b) \quad \hat{\Phi}_t = A + \frac{B}{q} \hat{\Phi}_x.$$

Определив $\mu = \hat{\Phi}_x$, мы увидим, что (1.6.8a) совпадает с (1.6.3) и можно вновь воспользоваться (1.6.4), (1.6.5). Подставляя (1.6.4) в проинтегрированное по x равенство (1.6.8b), получим

$$(1.6.9) \quad \partial_t \left\{ \sum_0^{\infty} \frac{\mu_n}{(2i\xi)^{n+1}} \right\} = \partial_x \left\{ A + \frac{B}{q} \sum_0^{\infty} \frac{\mu_n}{(2i\xi)^{n+1}} \right\}.$$

Конкретное эволюционное уравнение задается подходящим выбором A и B . После этого законы сохранения следуют из (1.6.9); для их получения следует приравнять коэффициенты при $(2i\xi)^{-n}$ и воспользоваться (1.6.5).

Например, если

$$(1.6.10) \quad r = \sigma q^*, \quad \sigma = \pm 1, \\ A = -2i\xi^2 - i\sigma|q|^2, \quad B = 2\xi q + iq_x,$$

эволюционное уравнение имеет вид

$$(1.6.11) \quad iq_t + q_{xx} - 2\sigma|q|^2q = 0,$$

и (1.6.9) превращается в

$$(1.6.12) \quad \partial_t \left\{ \sum_0^{\infty} \frac{\mu_n}{(2i\xi)^{n+1}} \right\} + i\partial_x \left\{ 2\xi^2 + \sigma|q|^2 + \right. \\ \left. + \left(2i\xi - \frac{q_x}{q} \right) \sum_0^{\infty} \frac{\mu_n}{(2i\xi)^{n+1}} \right\} = 0.$$

При $n \leq -1$ коэффициенты при $(2i\xi)^{-n}$ равны нулю; при $n \geq 0$ находим

$$(1.6.13) \quad n=0, \quad \partial_t \{|q|^2\} + i\partial_x \{qq_x^* - q^*q_x\} = 0, \\ n=1, \quad \partial_t \{-qq_x^*\} + i\partial_x \{|q_x|^2 - qq_{xx}^* + \sigma|q|^4\} = 0$$

и т. д. Сохраняющиеся плотности совпадают для всех уравнений вида (1.5.16), но соответствующие им потоки зависят от рассматриваемого уравнения.

Отметим, что этот вывод законов сохранения применим как в случае бесконечного (по x) интервала, так и в периодическом (см. разд. 2.3) случае. Это означает, что локальные законы со-

хранения справедливы при любых граничных условиях. При этом подходе совсем не использовалась задача рассеяния.

Законы сохранения, связанные с задачей рассеяния для оператора Шрёдингера (1.2.20), можно получить аналогичным образом [383, 532]. Подстановка $v = \exp(\varphi + ikx)$ превращает (1.2.20a) в уравнение Риккати для φ_x

$$(1.6.14a) \quad (\varphi_x)_x + (\varphi_x)^2 + q + 2ik\varphi_x = 0,$$

а (1.2.20b) переходит в

$$(1.6.14b) \quad \varphi_t = A + (\varphi_x + ik)B.$$

После разложения $\mu = \varphi_x$ по обратным степеням $(2ik)$,

$$(1.6.15) \quad \mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{(2ik)^n},$$

мы обнаружим (из (1.6.14a)), что μ_{2n} являются полными производными и что

$$(1.6.16) \quad \begin{aligned} \mu_1 &= -q, \quad \mu_3 = -(q^2 + q_{xx}), \dots, \\ \mu_{n+1} &= \sum_{p=1}^{n-1} \mu_p \mu_{n-p} + \partial_x(\mu_n), \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Последние величины являются плотностями законов сохранения. В локальной форме законы сохранения для уравнения КdФ можно получить, подставив

$$A = q_x, \quad B = 4k^2 - 2q$$

в выражение (1.6.14b), продифференцированное по x . Воспользовавшись (1.6.15, 16), получим

$$(1.6.17a) \quad \partial_t \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{(2ik)^n} \right\} = \partial_x \left\{ q_x + (4k^2 - 2q) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{(2ik)^n} - ik \right) \right\}.$$

Нетривиальные законы сохранения представляют собой коэффициенты при нечетных степенях k :

$$(1.6.17b) \quad \begin{aligned} k^{-1}: \partial_t \{q\} &= -\partial_x \{3q^2 + q_{xx}\}, \\ k^{-3}: \partial_t \{q^2 + q_{xx}\} &= -\partial_x \{4q^3 + 8qq_x - 5q_x^{(5)} - q_{xxxx}\}. \end{aligned}$$

Из (1.6.6) видно, что при известных интегралах движения функция $\ln a(\xi)$ также является известной при $\operatorname{Im} \xi > 0$. Теперь мы выведем формулы следов, появившиеся впервые в работе Захарова и Фаддеева (1971) [532] для уравнения КdФ. Они позволяют выразить интегралы движения через $a(\xi)$ и будут использоваться в этом разделе и в разд. 1.7. При выводе мы будем

дем следовать работе Захарова и Манакова [534]; см. также [162, 281].

Напомним, что $a(\xi)$ является аналитической функцией при $\operatorname{Im} \xi > 0$, имеющей конечное число нулей (при $\xi = \xi_m, m=1, \dots, N$), и $a(\xi) \rightarrow 1$ при $|\xi| \rightarrow \infty$, $\operatorname{Im} \xi > 0$. Мы также предполагаем, что (i) нули являются простыми, (ii) они не лежат на вещественной оси, (iii) при вещественных ξ функция $\xi^n \ln a(\xi) \rightarrow 0$ при $|\xi| \rightarrow \infty$ для любого $n \geq 0$. Пусть

$$(1.6.18a) \quad a(\xi) = a(\xi) \prod_{m=1}^N \frac{\xi - \xi_m^*}{\xi - \xi_m};$$

$a(\xi)$ обладает теми же свойствами, что и $a(\xi)$, но не имеет нулей в верхней полуплоскости. Функция $\bar{a}(\xi)$ аналитична в нижней полуплоскости, а

$$(1.6.18b) \quad \bar{a}(\xi) = \bar{a}(\xi) \prod_{l=1}^{\bar{N}} \frac{\xi - \bar{\xi}_l^*}{\xi - \bar{\xi}_l},$$

аналитична и не имеет нулей при $\operatorname{Im} \xi \leq 0$, и в этой области $\bar{a} \rightarrow 1$ при $|\xi| \rightarrow \infty$. Согласно теореме об интеграле Коши, имеем (для $\operatorname{Im} \xi > 0$)

$$\begin{aligned} \ln a(\xi) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln a(\xi)}{\xi - \zeta} d\xi, \\ 0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \bar{a}(\xi)}{\xi - \zeta} d\xi. \end{aligned}$$

Складывая эти равенства, получим при $\operatorname{Im} \xi > 0$

$$(1.6.19) \quad \ln a(\xi) = \sum_{m=1}^N \ln \left\{ \frac{\xi - \xi_m}{\xi - \xi_m^*} \right\} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln a \bar{a}}{\xi - \zeta} d\xi.$$

Если далее предположить, что $r = \pm q^*$, то выражение упростится:

$$\ln a(\xi) = \sum_{m=1}^N \ln \left\{ \frac{\xi - \xi_m}{\xi - \xi_m^*} \right\} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |a(\xi)|^2}{\xi - \zeta} d\xi.$$

Теперь перейдем к пределу $|\xi| \rightarrow \infty$ (оставаясь в верхней полуплоскости) и разложим правую часть (1.6.19) по обратным степеням

пеням ξ . В результате получим

$$(1.6.20) \quad \ln a(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^{-(n+1)} \left\{ \sum_{m=1}^N (n+1)^{-1} [(\xi_m^*)^{n+1} - (\xi_m)^{n+1}] - \right. \\ \left. - (2\pi i)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \xi^n \left[\ln a\bar{a}(\xi) + \sum_1^N \ln \frac{\xi - \xi_m^*}{\xi - \xi_m} + \sum_1^N \ln \frac{\xi - \xi_l^*}{\xi - \xi_l} \right] \right\}.$$

Это разложение должно совпадать с (1.6.6). Приравнивая коэффициенты при степенях ξ , получим ($n = 0, 1, 2 \dots$)

$$(1.6.21a) \quad C_n = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (2i\xi)^n \left[\ln a\bar{a}(\xi) + \sum_1^N \ln \frac{\xi - \xi_m^*}{\xi - \xi_m} + \right. \\ \left. + \sum_1^N \ln \frac{\xi - \xi_l^*}{\xi - \xi_l} \right] d\xi + \sum_{m=1}^N (n+1)^{-1} [(2i\xi_m^*)^{n+1} - (2i\xi_m)^{n+1}]$$

Если $r = \pm q^*$, то выражение для C_n упростится:

$$(1.6.21b) \quad C_n = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (2i\xi)^n \ln |a(\xi)|^2 d\xi + \\ + \sum_{m=1}^N (n+1)^{-1} [(2i\xi_m^*)^{n+1} - (2i\xi_m)^{n+1}].$$

Кроме того, $N = 0$, если $r = +q^*$ и $q \in L_1$. Мы получили так называемые «формулы следов» для (1.2.7) при $r = \pm q^*$. Они связывают бесконечную серию интегралов движения C_n с моментами $\ln |a(\xi)|$ и степенями дискретных собственных значений оператора. Еще раз подчеркнем, что эти формулы справедливы для любого уравнения (1.5.16) при $r = \pm q^*$.

Для оператора Шредингера данные рассеяния состоят из $\{\rho(k), k \text{ вещественно}, \kappa_n, C_n, n = 1, \dots, N\}$. Соответствующие формулы следов могут быть представлены следующим образом [532]. Определим $C_m = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_m dx$, где μ_m определено в (1.6.15).

Тогда

$$(1.6.22) \quad C_{2m+1} = \frac{2}{2m+1} \sum_{n=1}^N (2\kappa_n)^{2m+1} + \\ + \frac{(-1)^m}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (2k)^{2m} \ln \{1 - |\rho(k)|^2\} dk, \\ C_{2m} = 0.$$

1.6. б. Полная интегрируемость. Рассмотрим теперь одно из наиболее фундаментальных описаний МОЗР: уравнения, которые можно решить при помощи МОЗР (например, (1.5.16)), являются вполне интегрируемыми гамильтоновыми системами, и МОЗР позволяет построить каноническое преобразование от физических переменных к бесконечному набору переменных типа действие — угол. Основной вопрос этого раздела состоит не в том, какие новые задачи можно решить с помощью МОЗР, а скорее его можно сформулировать так: «Почему же МОЗР работает?»

Описание МОЗР как канонического преобразования к переменным действие — угол было впервые дано для уравнения КdФ в работе Захарова и Фаддеева (1971) [532], последовавшей вскоре после работы Гарднера (1971) [171]. Для нелинейного уравнения Шрёдингера аналогичные результаты получили Тахтаджян [471] и Захаров и Манаков [534]. Результаты последней работы послужили основой для обобщений, полученных многими авторами (см., например, [162, 281, 370, 160]). Приведенный здесь вывод опирается на все эти работы, несмотря на небольшие расхождения полученных в них результатов.

Мы начнем с рассмотрения основных понятий и обозначений гамильтоновой механики, которые потребуются для формального обобщения на бесконечномерный случай. (Читатель, не знакомый с гамильтоновой механикой, может для справок обратиться к книгам Голдстейна [188] или Арнольда [44].) Пусть $p(x, t, \alpha)$, $q(x, t, \beta)$ будут аналитическими по x функциями ($-\infty < x < \infty$), быстро убывающим при $|x| \rightarrow \infty$ при любых значениях (t, α, β) из области определения. Пусть

$$H(p, q, t) = \int_{-\infty}^{\infty} h\{p(x, t, \alpha), q(x, t, \beta)\} dx$$

будет комплекснозначным функционалом от p , q и их производных по x . Его функциональная (Фреше или вариационная) производная $\delta H / \delta p$ определяется формулой

$$(1.6.23) \quad \frac{\partial H}{\partial \alpha} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta H}{\delta p} \frac{\partial p}{\partial \alpha} dx;$$

$\delta H / \delta q$ имеет аналогичное определение.

Пример. Из тождества

$$p(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - y) p(x) dx$$

следует, что

$$\frac{\delta p(y)}{\delta p(x)} = \delta(x - y),$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

В рассматриваемых нами случаях h (в (1.6.23) будет бесконечно дифференцируемой функцией от (p, q) и их x -производных. Прямым вычислением получим

$$(1.6.24) \quad \frac{\delta H}{\delta p} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} \frac{\partial h}{\partial p_n}, \quad p_n \equiv \frac{\partial^n p}{\partial x^n}.$$

Для некоторых приложений удобно определить $p = \varphi_x$; тогда тождество

$$(1.6.25) \quad \frac{\delta H}{\delta \varphi} = - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta p}$$

следует из того факта, что h зависит только от производных φ и не содержит самой φ .

Определение. Динамическая система является *гамильтоновой*, если возможно ввести координаты $[q]$, импульсы $[p]$ и гамильтониан $[H(p, q, t)]$ таким образом, что уравнения движения системы могут быть записаны в виде

$$(1.6.26a, b) \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\delta H}{\delta p}, \quad \frac{dp}{dt} = - \frac{\delta H}{\delta q}.$$

Уравнения (1.6.26) являются уравнениями Гамильтона, а переменные (p, q) называются *сопряженными*. Имеются обобщения (1.6.26), но для наших целей этого определения вполне достаточно; см. также (1.6.31).

Пример. Система

$$(1.6.27) \quad \begin{aligned} iq_t + q_{xx} - 2qr^2 &= 0, \\ ir_t - r_{xx} + 2qr^2 &= 0 \end{aligned}$$

является гамильтоновой. Это можно увидеть, отождествляя:

координаты (q) с $q(x, t)$,

импульсы (p) с $r(x, t)$,

гамильтониан (H) с $-i \int_{-\infty}^{\infty} \{q_x r_x + (qr)^2\} dx$.

Если при $t = 0$ $r(x, 0) = \pm q^*(x, 0)$, то из уравнений (1.6.27) следует, что это соотношение справедливо при любых t , и мы

приходим к нелинейному уравнению Шрёдингера

$$(1.6.28) \quad iq_t + q_{xx} \mp |q|^2 q = 0.$$

Иначе говоря (1.6.28) является гамильтоновой системой с координатами $[q(x, t)]$, импульсами $[q^*(x, t)]$ и гамильтонианом $\left[-i \int_{-\infty}^{\infty} \{ \pm |q_x|^2 + |q|^4 \} dx \right]$. Это справедливо, если определить

независимые вариации переменных q и p . В этом разделе мы будем рассматривать (1.6.28) как частный случай (1.6.27), в котором на начальные данные наложено дополнительное ограничение ($r = \pm q^*$).

Многие уравнения, интегрируемые МОЗР, имеют первый порядок по времени. В этом случае удобно пользоваться другой формой гамильтоновых уравнений.

Лемма. Пусть $H(p, q, t)$ — гамильтониан динамической системы. Предположим, что он не содержит координаты q явно, хотя может содержать производные от q по x . Тогда соотношение

$$p = q_x$$

совместно с (1.6.26), и оба уравнения сводятся к

$$(1.6.29) \quad \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta P} \Big|_{q_x=p}.$$

Доказательство. Выражение (1.6.29) является производной по x от (1.6.26a). Сведение (1.6.26b) к этому виду следует из (1.6.25) и того факта, что $\delta h / \delta q$ обращается в нуль. \square

Пример.

$$H = - \int \{ pq_x^2 + p^2 q_x - p_x q_{xx} \} dx.$$

Динамические уравнения имеют вид

$$(1.6.30) \quad \begin{aligned} q_t &= -q_x^2 - 2pq_x - q_{xxx}, \\ p_t &= -(2pq)_x - (p^2)_x - p_{xxx}. \end{aligned}$$

Если при $t = 0$ $p(x, 0) = q_x(x, 0)$, то это справедливо при всех t , так как эволюционные уравнения для p и q_x совпадают. Кроме того, оба уравнения превращаются в уравнение КдФ (1.2.2) для $p(x, t)$.

Таким образом, динамическая система является гамильтоновой либо когда ее можно представить в виде (1.6.26) для гамильтониана $H(p, q, t)$, либо если она представима в виде

$$(1.6.31) \quad \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta \hat{H}}{\delta p}$$

для гамильтониана $\hat{H}(p, t)$ ¹⁾. Читатель должен помнить, что $\hat{H}(p, t) \neq H(p, q)|_{q_x=p}$, хотя между ними имеется очевидная связь.

Пример. Уравнение КdФ имеет вид (1.6.31) с гамильтонианом

$$(1.6.32) \quad \hat{H} = - \int \left(p^3 - \frac{1}{2} p_x^2 \right) dx.$$

Здесь \hat{H} отличается от $H|_{q_x=p}$ из предыдущего примера на множитель 2.

Далее для того, чтобы определить замены переменных от (p, q) к другому набору сопряженных величин (P, Q) , мы определим скобки Пуассона:

$$(1.6.33) \quad \langle A, B \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\delta A}{\delta q} \frac{\delta B}{\delta p} - \frac{\delta A}{\delta p} \frac{\delta B}{\delta q} \right\} dx.$$

Если гамильтониан H содержит только производные от q по x и не содержит q_x , то возможно отождествление $q_x = p$. В этом случае (1.6.33) следует заменить на

$$(1.6.34) \quad \langle A, B \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\delta A}{\delta p} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta B}{\delta p} \right\} dx.$$

Преобразование от (p, q) к (P, Q) по определению является каноническим, если

$$(1.6.35) \quad \begin{aligned} \langle Q(x), Q(y) \rangle &= 0, & \langle P(x), P(y) \rangle &= 0, \\ \langle Q(x), P(y) \rangle &= \delta(x - y). \end{aligned}$$

Из (1.6.35) следует, что объем фазового пространства при этих преобразованиях не изменяется. Вопрос о том, является ли преобразование к новым переменным каноническим, аналогичен вопросу о полноте нового базиса в линейном векторном пространстве.

Пример. Тождественное преобразование

$$P(x, t) = p(x, t), \quad Q(x, t) = q(x, t)$$

является каноническим.

Имея теперь необходимый набор сведений, мы перейдем к главному: покажем, что МОЗР представляет собой каноническое преобразование к переменным типа действие — угол. Для того

¹⁾ На самом деле существует гораздо более общее определение гамильтоновой системы, так что (1.6.24) и (1.6.31) являются весьма частными примерами (см., например, [44]). — Прим. ред.

чтобы изложение было по возможности простым, мы здесь обсудим только уравнения вида (1.5.16) и лишь сформулируем результаты для (1.5.21). Перечислим наиболее важные моменты при этом исследовании:

1. Эволюционные уравнения вида (1.5.16) представляют собой (бесконечномерные) гамильтоновы динамические системы, в которых (q, r) играют роль сопряженных переменных.

2. Имеется подмножество S данных рассеяния, по которому все остальные данные рассеяния могут быть восстановлены.

3. Отображение $(q, r) \rightarrow S$ является каноническим.

4. Сопряженные переменные в $S (= P, Q)$ являются переменными типа действие — угол, т. е. $H = H(P)$, так что из (1.6.26) получим

$$(1.6.36) \quad \frac{\partial P}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta P} = \text{const}.$$

Существование бесконечного набора законов сохранения непосредственно следует из выражения (1.6.36a) и эквивалентно ему, если на начальные данные (q, r) наложено достаточное количество ограничений.

В разд. 1.5 для любого дисперсионного соотношения, вещественного при вещественных k и являющегося целой функцией, было построено нелинейное эволюционное уравнение вида

$$(1.5.16) \quad \begin{pmatrix} r \\ -q \end{pmatrix}_t + 2A_-(\mathcal{L}^A) \begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix} = 0,$$

к которому применим МОЗР. Оператор \mathcal{L}^A был определен в (1.5.15), A_- связано с дисперсионным соотношением посредством (1.5.18), и задача рассеяния рассматривается для оператора (1.2.7a).

Теорема. Пусть A_- является целой функцией от ξ и имеет вид

$$(1.6.37) \quad A_-(\xi) = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} (-2\xi)^n a_n,$$

где все a_n вещественны. Тогда система уравнений (1.5.16) является гамильтоновой, $q(x, t)$ и $r(x, t)$ служат сопряженными переменными, и гамильтониан имеет вид

$$(1.6.38) \quad H(q, r) = i \sum_{n=0}^{\infty} a_n (i)^n C_n(q, r),$$

где C_n определены в (1.6.6).

Отметим, что утверждение теоремы легко проверяется в случае любой конкретной системы (например, такой, как (1.6.28)); для этого достаточно выписать гамильтониан и обобщенные пере-

менные. Доказательство того факта, что любое уравнение вида (1.5.16) является гамильтоновым, требует более длинных рассуждений.

Доказательство.

(i) Из (1.2.7а) при вещественных ξ имеем

$$\varphi_1(x, \xi) e^{i\xi x} = 1 + \int_{-\infty}^x q(y) \varphi_2(y, \xi) e^{i\xi y} dy;$$

таким образом,

$$\frac{\delta \varphi_1(x, \xi)}{\delta q(y)} = \theta(x - y) \varphi_2(y, \xi) e^{i\xi(y-x)},$$

где $\theta(x)$ — функция Хевисайда.

(ii) Для любой функции $A(x)$, дифференцируемой всюду, за исключением, быть может, конечного числа точек, можно определить

$$\frac{\delta A(x)}{\delta q(x)} = \lim_{y \uparrow x} \frac{\delta A(x)}{\delta q(y)},$$

так что

$$\frac{\delta \varphi_1(x, \xi)}{\delta q(x)} = \varphi_2(x, \xi).$$

Аналогично

$$\frac{\delta \varphi_2(x, \xi)}{\delta r(x)} = \varphi_1(x, \xi)$$

и

$$0 = \frac{\delta \varphi_1}{\delta r} = \frac{\delta \varphi_2}{\delta q} = \frac{\delta \psi_{1,2}}{\delta q} = \frac{\delta \psi_{1,2}}{\delta r}.$$

Поэтому

$$(1.6.39) \quad \begin{aligned} \frac{\delta a(\xi)}{\delta q(x)} &= \frac{\delta}{\delta q} \{ \varphi_1 \psi_2 - \varphi_2 \psi_1 \} = \varphi_2(x, \xi) \psi_2(x, \xi), \\ \frac{\delta a(\xi)}{\delta r(x)} &= -\varphi_1(x, \xi) \psi_1(x, \xi). \end{aligned}$$

Все эти величины определены в верхней полуплоскости ξ (см. разд. 1.3), и полученные соотношения могут быть туда продолжены.

(iii) При вещественных ξ из (1.2.7а) имеем

$$(\varphi_1 \psi_1)_x + 2i\xi \varphi_1 \psi_1 = q (\varphi_1 \psi_2 + \varphi_2 \psi_1),$$

$$(\varphi_2 \psi_2)_x - 2i\xi \varphi_2 \psi_2 = r (\varphi_1 \psi_2 + \varphi_2 \psi_1),$$

$$(\varphi_1 \psi_2 + \varphi_2 \psi_1)_x = 2q \varphi_2 \psi_2 + 2r \varphi_1 \psi_1.$$

Используя граничное условие при $x \rightarrow +\infty$, получим

$$\varphi_1 \psi_2 + \varphi_2 \psi_1 = a - 2 \int_x^{\infty} \{q \varphi_2 \psi_2 + r \varphi_1 \psi_1\} dx;$$

таким образом,

$$\xi \left(-\frac{\varphi_2 \psi_2}{\varphi_1 \psi_1} \right) = \mathcal{L}^A \left(-\frac{\varphi_2 \psi_2}{\varphi_1 \psi_1} \right) - \frac{a}{2i} \binom{r}{q}.$$

Это соотношение также можно продолжить в верхнюю полуплоскость.

(iv) Устремим $|\xi| \rightarrow \infty$, $\operatorname{Im} \xi > 0$; в результате получим

$$(1.6.40) \quad \left(-\frac{\varphi_2 \psi_2}{\varphi_1 \psi_1} \right) = -\frac{a}{2i\xi} \left(1 - \frac{\mathcal{L}^A}{\xi} \right)^{-1} \binom{r}{q} = \\ = -\frac{a}{2i\xi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mathcal{L}^A}{\xi} \right)^n \binom{r}{q}.$$

(v) Вариационные производные от $\ln a$ вычисляются при помощи (1.6.39), (1.6.40):

$$\frac{\delta \ln a}{\delta q} = -(2i\xi)^{-1} \sum_0^{\infty} \left(\frac{\mathcal{L}^A}{\xi} \right)^n r,$$

$$\frac{\delta \ln a}{\delta r} = -(2i\xi)^{-1} \sum_0^{\infty} \left(\frac{\mathcal{L}^A}{\xi} \right)^n q.$$

(vi) Теперь из (1.6.6) следует, что (1.5.19) можно переписать в виде

$$q_t = \frac{\delta H}{\delta r}, \quad r_i = -\frac{\delta H}{\delta q},$$

где

$$H(q, r) = i \sum_{n=0}^{\infty} a_n C_n(q, r) (i)^n.$$

Это и есть желаемый результат. \square

Таким образом, мы можем рассматривать эволюционные уравнения вида (1.5.19) как гамильтоновы системы; при этом дисперсионное соотношение линеаризованной системы имеет вид (1.6.37). (Отметим, что (1.6.27) служит примером для этой теоремы при $\omega = k^2$.) Естественно ожидать, что аналогичные результаты получатся и для эволюционных уравнений вида (1.5.21), связанных с (1.2.20) (подробности приведены, напри-

мер, в работе [162]). Их можно сформулировать следующим образом.

Пусть

$$\gamma(k^2) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (k^2)^n$$

будет целой функцией. Нелинейное эволюционное уравнение (1.5.21) является гамильтоновым вида (1.6.31); при этом гамильтониан задается формулой

$$(1.6.41) \quad H = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n C_{2n+3} (-4)^n,$$

где C_n определены как в (1.6.22). Примером является гамильтониан уравнения КdФ.

Далее мы ограничимся гамильтоновыми системами вида (1.5.19) и определим для них скобки Пуассона

$$(1.6.42) \quad \langle A, B \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\delta A}{\delta q} \frac{\delta B}{\delta r} - \frac{\delta A}{\delta r} \frac{\delta B}{\delta q} \right\} dx.$$

Определение. Для заданной гамильтоновой системы говорят, что два функционала A, B , зависящие от сопряженных переменных, находятся в *инволюции*, если

$$\langle A, B \rangle = 0.$$

Для конечномерных гамильтоновых систем (с N координатами и N импульсами) теорема Лиувилля утверждает, что если существует N функционалов с линейно независимыми градиентами, находящимися в инволюции, то уравнения движения интегрируемы в квадратурах (см. [45]).

Лемма. *Интегралы движения C_n , бесконечная последовательность которых была определена соотношениями (1.6.6), находятся в инволюции для любой системы уравнений (1.5.19), соответствующей некоторой $\omega(k)$.*

Доказательство. Прямым вычислением получим

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dC_n}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\delta C_n}{\delta q} \frac{\delta q}{\delta t} + \frac{\delta C_n}{\delta r} \frac{\delta r}{\delta t} \right\} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\delta C_n}{\delta q} \frac{\delta H}{\delta r} - \frac{\delta C_n}{\delta r} \frac{\delta H}{\delta q} \right\} dx = \langle C_n, H \rangle. \end{aligned}$$

В частности, это справедливо для $H = C_n$. \square

Таким образом, существование бесконечного набора интегралов движения, находящихся в инволюции, для любой бесконечно-

мерной системы вида (1.5.19) наводит на мысль, что эти системы могут также оказаться вполне интегрируемыми. Эта догадка является верной, но для ее обоснования недостаточно наличия бесконечного набора инволютивных интегралов движения. Для бесконечномерных гамильтоновых систем совсем не очевидно, «сколько же» функционалов, находящихся в инволюции, требуется для того, чтобы гарантировать полную интегрируемость.

Определим теперь подмножество S данных рассеяния, по которому остальные данные рассеяния могут быть восстановлены. Здесь мы будем предполагать, что функции $a(\xi)$, $\bar{a}(\xi)$ имеют только простые нули в соответствующих полуплоскостях, причем они не лежат на вещественной оси. Тогда для вещественных ξ определим

$$(1.6.43a) \quad P(\xi) = \ln \{a(\xi) \bar{a}(\xi)\}, \quad Q(\xi) = -\frac{1}{\pi} \ln b(\xi).$$

Может случиться, что имеются дискретные собственные значения при $\operatorname{Im} \xi > 0$,

$$a(\zeta_m) = 0, \quad c_m = \frac{b}{a'} \Big|_{\zeta=\zeta_m}, \quad m = 1, \dots, N,$$

и при $\operatorname{Im} \xi < 0$

$$\bar{a}(\zeta_l) = 0, \quad \bar{c}_l = \frac{\bar{b}}{\bar{a}'} \Big|_{\zeta=\zeta_l}, \quad l = 1, \dots, \bar{N}.$$

Положим

$$(1.6.43b) \quad P_m = \zeta_m, \quad Q_m = -2i \ln c_m,$$

$$(1.6.43c) \quad \bar{P}_l = \bar{\zeta}_l, \quad \bar{Q}_l = -2i \ln \bar{c}_l.$$

Через S обозначим величины, определенные в (1.6.36).

Легко видеть, что остальные данные рассеяния легко восстанавливаются по S . При $\operatorname{Im} \xi > 0$ функция $\ln a(\xi)$ может быть восстановлена по S при помощи (1.6.20). Совершенно аналогично находятся $\ln \bar{a}$ при $\operatorname{Im} \xi = 0$ и $\ln \bar{a}(\xi)$ при $\operatorname{Im} \xi \leqslant 0$. Функцию $b(\xi)$ можно найти по $Q(\xi)$, а для нахождения $\bar{b}(\xi)$ можно воспользоваться соотношением $a\bar{a} + b\bar{b} = 1$. Если $r = \pm q^*$, то при вещественных ξ $\bar{a}(\xi) = a^*(\xi)$, поэтому функция $P(\xi)$ принимает вещественные значения, $|b(\xi)|$ определяется по $P(\xi)$, $Q(\xi)$ можно заменить на ее мнимую часть, а (1.6.43c) является излишним.

Итак, все данные рассеяния определяются по S . Согласно результатам разд. 1.3, потенциалы (q, r) также восстанавливаются по S . В этом смысле набор S является «полным». Для того чтобы показать, что отображение $(q, r) \rightarrow S$ является каноническим, нужно проверить условие (1.6.35). Это весьма утоми-

тельное вычисление, схематически описанное в упр. 1 к этому разделу. Его результаты, однако, принципиально важны.

Отображение $(q, r) \rightarrow S$ является каноническим преобразованием. Поэтому динамику любой системы вида (1.5.19) можно описать как через (q, r) , так и через S .

Остается записать гамильтониан в терминах S . Это легко сделать, подставляя (1.6.21а) в (1.6.38) и группируя подходящим образом члены. В результате (для заданного дисперсионного соотношения (1.6.27) линеаризованной задачи) получим

$$(1.6.44a) \quad H = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_-(\xi) \left[\ln a \bar{a}(\xi) + \sum_{m=1}^N \ln \frac{\xi - \xi_m^*}{\xi - \xi_m} + \right. \\ \left. + \sum_{l=1}^N \ln \frac{\xi - \xi_l^*}{\xi - \xi_l} \right] d\xi + 4i \sum_{m=1}^N \int_{\xi_m^*}^{\xi_m} A_-(\zeta) d\zeta.$$

Если $r = \pm q^*$, то

$$(1.6.44b) \quad H = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_-(\xi) \ln |a(\xi)|^2 d\xi + 4i \sum_{m=1}^N \int_{\xi_m^*}^{\xi_m} A_-(\zeta) d\zeta.$$

Теперь очевидно, что H зависит только от обобщенных импульсов ($P(\xi), P_m, \bar{P}_l$ в (1.6.43)) и не зависит от координат ($Q(\xi), Q_m, \bar{Q}_l$). Это является определяющим свойством переменных типа действие — угол. Также совершенно очевидно, что гамильтоновы уравнения теперь принимают вид

$$(1.6.45) \quad \frac{\partial P}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta P}.$$

Таким образом, переменные P не зависят от времени, а Q изменяются во времени линейно, т. е. движение в этих переменных равномерно.

Запишем (1.6.45) в явной форме, воспользовавшись (1.6.43). Для вещественных ξ

$$\frac{\partial}{\partial t} \{\ln a \bar{a}(\xi)\} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \{\ln b(\xi)\} = -2A_-(\xi);$$

для $m = 1, \dots, N$

$$(1.6.46) \quad \frac{\partial}{\partial t} \xi_m = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \{\ln c_m\} = -2A_-(\xi_m);$$

для $l = 1, \dots, \bar{N}$

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\xi}_l = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \{\ln \bar{c}_l\} = 2A_-(\bar{\xi}_l).$$

(Вычисление $\delta H/\delta\xi_m$ и $\delta H/\delta\xi_l$ по (1.6.44a) не столь очевидно, его набросок содержится в упр. 2 к этому разделу.) Это в точности совпадает с результатами разд. 1.4.

Теперь сформулируем соответствующие результаты для эволюционных уравнений вида (1.5.21), и в частности для уравнения КdФ [532, 162]. При вещественных k определим

$$(1.6.47a) \quad P(k) = \frac{k}{\pi} \ln |a(k)|^2 = -\frac{k}{\pi} \ln \{1 - |\rho(k)|^2\},$$

$$Q(k) = \arg \rho(k)$$

и для дискретных собственных значений

$$(1.6.47b) \quad P_n = -2\kappa_n^2, \quad Q_n = \ln c_n$$

(см. обозначения в разд. 1.3). Тогда можно показать, что отображение

$$q \rightarrow \{P(k), Q(k), P_n, Q_n\}$$

является каноническим, т. е. скобки Пуассона (1.6.24) для новых переменных удовлетворяют условиям (1.6.35). Кроме того, легко понять (см. (1.6.22), (1.6.41)), что переменные (1.6.47) являются переменными типа действие — угол. Гамильтоновы уравнения для КdФ в этих переменных эквивалентны (1.4.10).

Итак, мы можем рассматривать МОЗР как вполне конкретный метод построения канонического преобразования к переменным типа действие — угол. Динамика системы в этих переменных очень проста. Сравнительно простая картина поведения решений, возникающая в физических переменных (солитоны, их парное взаимодействие и т. д.), является прямым следствием существования переменных типа действие — угол. В частности, в задачах, интегрируемых МОЗР, невозможно стохастическое поведение.

Но это отнюдь не означает, что вся проблема стала тривиальной. Обратная задача рассеяния нетривиальна, и для нее нет уверенности даже в том, что решения обладают хорошими свойствами. Например, при $r \neq q^*$ точное 1-солитонное решение уравнений (1.6.27) может взорваться за конечное время (см. с (1.4.24)). Таким образом, сингулярности могут возникать даже в полностью интегрируемых системах, если при этом, конечно, не нарушаются законы сохранения. С этой точки зрения причина нашего интереса к случаю $r = \pm q^*$ состоит в том, что становится возможным определить интеграл $C_0 = \int r q dx$, который теперь служит в качестве нормы (не зависящей от времени).

1.7. Поведение решений на больших временах. Этот раздел посвящен описанию метода нахождения основного вклада в асимптотику решений вполне интегрируемых задач (при $t \rightarrow$

$\rightarrow \infty$). Помимо всего прочего, полученная информация может оказаться полезной, если соответствующие уравнения используются в качестве модели физического явления.

Нетрудно показать, что если решение задачи с начальными условиями, заданными на $-\infty < x < \infty$, содержит солитоны, то при $t \rightarrow \infty$ солитоны вносят вклад порядка $O(1)$, тогда как несолитонная часть (т. е. «излучение», соответствующее непрерывному спектру) медленно расплывается и исчезает. В этом смысле основной вклад в асимптотику вносят солитоны (см., например, [477]). Однако это описание справедливо не везде, т. е. существуют большие области пространства, в которых солитонный вклад пренебрежимо мал и доминирует излучение. Кроме того, может случиться, что солитонный вклад пренебрежимо мал для таких физически важных сохраняющихся величин, как импульс и энергия волнового пакета.

В разд. 1.4 обсуждалось N -солитонное решение. Здесь мы остановимся на таких задачах, когда из начального условия солитоны не возникают. Эти задачи представляют самостоятельный интерес.

(i) Солитоны отсутствуют, если $r = +q^*$ в (1.5.16) и $|q| \rightarrow 0$ достаточно быстро при $|x| \rightarrow \infty$.

(ii) При $r = -q^*$ в (1.5.16) солитоны могут появиться, но они не возникают для достаточно малых начальных данных (см. (1.3.16e)).

$$(1.7.1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |q(x, 0)| dx < 0,904.$$

(iii) В (1.5.21) солитоны отсутствуют, если $q(x, 0) < 0$.

Этим задачам посвящено довольно много работ (Абловиц, Ньюэлл (1973) [21], Шабат (1973) [459], Манаков (1974) [345], Сигур, Абловиц (1976) [456], Захаров, Манаков (1976) [536], Абловиц, Сигур (1977) [26], Майлз (1979) [377], Абловиц, Краскал, Сигур (1979) [16], Сигур, Абловиц (1981) [457]). После того как мы узнаем поведение солигонов и излучения по отдельности, мы рассмотрим их взаимодействие.

Перед тем как перейти к описанию, мы сделаем два предостережения. Первое связано с тем, что в этом разделе почти нет результатов, имеющих строгое обоснование. Результаты носят формальный характер и имеют весьма важное значение для приложений, но еще требуется доказывать их асимптотичность. Второе (родственное) предостережение связано с тем, что в литературе по этому вопросу встречаются ошибки¹⁾.

¹⁾ Строгие результаты и обоснования асимптотических разложений при $t \rightarrow \infty$ можно найти в работах [6*—11*]. Причем в работах [7*, 8*] дано строгое математическое обоснование подхода Захарова — Манакова. — Прим. перев.

В соответствии с качественным асимптотическим поведением решений эволюционные уравнения можно разделить на три группы:

- (а) уравнения вида (1.5.16) с четным дисперсионным соотношением линеаризованной задачи (например, нелинейное уравнение Шрёдингера);
- (б) уравнения вида (1.5.16) с нечетным дисперсионным соотношением линеаризованной задачи (например, модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза);
- (с) уравнения вида (1.5.21) (например, уравнение Кортевега — де Фриза).

1.7. а. Нелинейное уравнение Шрёдингера. Мы начнем с уравнения

$$(1.7.2) \quad iq_t + q_{xx} - 2\sigma |q|^2 q = 0,$$

где $\sigma = \pm 1$ и $q \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. Его (формальное) асимптотическое решение устроено сравнительно просто, поэтому здесь можно без особого труда пояснить некоторые детали метода. Чтобы исключить солитоны, мы потребуем для начальных данных выполнения условия (1.7.1) при $\sigma = -1$. Мы также будем предполагать, что начальные данные являются гладкими и убывающими достаточно быстро при $|x| \rightarrow \infty$.

Имеется точное автомодельное решение уравнения (1.7.2):

$$(1.7.3) \quad q(x, t) = t^{-1/2} A \exp \left\{ i \left[\frac{1}{4} \left(\frac{x}{t} \right)^2 - 2\sigma A^2 \frac{\ln t}{t} + \frac{\Phi}{t} \right] \right\}.$$

Отправляемся от него, мы будем искать решение с медленно меняющимися параметрами A, Φ (см. разд. П.1). При $t \rightarrow \infty$ разложение имеет вид

$$(1.7.4a) \quad q(x, t) \sim t^{-1/2} R e^{it\theta},$$

$$(1.7.4b) \quad R = f + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(\ln t)^k}{t^n} f_{n,k} \left(\frac{x}{t} \right) = \\ = f \left(\frac{x}{t} \right) + \frac{1}{t} \left(\ln t f_{1,1} \left(\frac{x}{t} \right) + f_{1,0} \left(\frac{x}{t} \right) \right) + O \left(\left(\frac{\ln t}{t} \right)^2 \right),$$

$$(1.7.4c) \quad \theta = \frac{1}{4} \left(\frac{x}{t} \right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(\ln t)^k}{t^n} \theta_{n,k} \left(\frac{x}{t} \right) = \\ = \frac{1}{4} \left(\frac{x}{t} \right)^2 + \frac{1}{4} \left[\ln t \theta_{1,1} \left(\frac{x}{t} \right) + \theta_{1,0} \left(\frac{x}{t} \right) \right] + O \left(\left(\frac{\ln t}{t} \right)^2 \right),$$

где

$f = f\left(\frac{x}{t}\right)$ — это произвольная вещественная неотрицательная функция,

$$\theta_{1,1} = -2\sigma f^2,$$

$\theta_{1,0} = g = g\left(\frac{x}{t}\right)$ — это произвольная вещественная функция,

$$f_{1,1} = -4\sigma f(3(f')^2 + ff''),$$

$$f_{1,0} = fg'' + 2g'f' - 4\sigma f(2(f')^2 + ff'') \text{ и т. д.}$$

Это разложение можно продолжить до любой степени n . Все коэффициенты разложения можно выразить через две произвольные функции $f(x/t)$ и $g(x/t)$; для этого следует подставить (1.7.4) в (1.7.2) и привести подобные члены. Уравнение (1.7.2) не налагает ограничений на функции f и g ; мы покажем, что они определяются по начальным данным.

Теперь мы *предположим*, что при $t \rightarrow \infty$ решение уравнения (1.7.2), развивающееся из некоторых начальных данных, стремится к виду (1.7.4). Тогда асимптотическое решение (1.7.2) будет определено, если функции f , g выражены через начальные данные. Это можно сделать несколькими способами; здесь мы обсудим два из них.

Вначале мы покажем, что законы сохранения однозначно определяют f , но не налагают ограничений на g . Это находится в соответствии с формулировкой разд. 1.6 в том смысле, что сохраняющиеся величины связаны в переменных действие — угол с действием и поэтому несут лишь «половину» информации, необходимой для описания динамической системы.

Напомним, что в разд. 1.6 интегралы движения уравнения (1.7.2) были получены в виде

$$C_n = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_n(x, t) dx,$$

где

$$\mu_0 = -\sigma |q|^2, \quad \mu_1 = -\sigma q q_x^*,$$

и для $n > 1$

$$(1.7.5) \quad \mu_{n+1} = q \left(\frac{\mu_n}{q} \right)_x + \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k \mu_{n-k-1}.$$

Подставив (1.7.4) в (1.7.5), получим

$$C_0 = -\sigma \int_{-\infty}^{\infty} f^2(X) dX, \quad \left(X \equiv \frac{x}{t} \right),$$

$$C_1 = -\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{X}{2i} \right) f^2(X) dX,$$

$$C_3 = -\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{X}{2i} \right)^2 f^2(X) dX.$$

По индукции можно доказать, что

$$\mu_n(x, t) = -\sigma \left(\frac{X}{2i} \right)^n f^2(X) + O\left(\frac{\ln t}{t}\right),$$

так что при $t \rightarrow \infty$

$$(1.7.6) \quad C_n = -\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{X}{2i} \right)^n f^2(X) dX, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Формулы следов (1.6.17) выражают интегралы движения через данные рассеяния:

$$(1.7.7) \quad C_n = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (2i\xi)^n \ln |a(\xi)|^2 d\xi.$$

Если все эти интегралы сходятся, то бесконечная последовательность уравнений движения, возникающая при приравнивании (1.7.6) и (1.7.7), имеет в точности одно решение:

$$(1.7.8) \quad \begin{aligned} X &= \frac{x}{t} = -4\xi, \\ f^2(X) &= \frac{\sigma}{4\pi} \ln |a(\xi)|^2 = -\frac{\sigma}{4\pi} \ln \left\{ 1 - \sigma \left| \frac{b}{a}(\xi) \right|^2 \right\}. \end{aligned}$$

Главный вклад в асимптотику решения уравнения (1.7.2) дается формулой (1.7.4) с учетом (1.7.8), хотя при этом функция $g(x/t)$ осталась неопределенной. Во многих прикладных задачах изменить фазу бывает существенно труднее, чем «интенсивность» ($=|f|^2$) волны. Для практических целей в таких задачах нет необходимости знать функцию g .

Приведенным методом формула (1.7.8) была получена в работе Сигура и Абловица (1976) [456]. Манаков (1974) [345, 346] и Захаров, Манаков (1976) [535, 536] получили ее, используя два других метода. В дополнение к методу, основанному на законах сохранения, мы кратко приведем (несколько видоизме-

ненный) метод Захарова и Манакова, поскольку он позволяет определить обе функции f и g в терминах данных рассеяния. Для вещественных ξ определим

$$w_1(x, t; \xi) = \varphi_1(x, t; \xi) \exp(i\xi x), \quad w_2 = \varphi_2(x, t; \xi) \exp(-i\xi x),$$

при этом задача рассеяния (1.2.7а) превращается в

$$(1.7.9) \quad (w_1)_x = q w_2 e^{2i\xi x}, \quad (w_2)_x = -\sigma q^* w_1 e^{-2i\xi x}$$

с граничными условиями

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ при } x \rightarrow -\infty, \quad \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a(\xi) \\ b(\xi, t) \end{pmatrix} \text{ при } x \rightarrow +\infty.$$

Если q удовлетворяет (1.7.2), то

$$(1.7.10) \quad b(\xi, t) = b(\xi, 0) \exp(4i\xi^2 t) = b(\xi) \exp(4i\xi^2 t).$$

Опять мы предположим, что при $t \rightarrow \infty$ решение уравнения (1.7.2) стремится к виду (1.7.4). Подставим (1.7.4) в (1.7.9), при этом в основном порядке

$$(1.7.11) \quad \begin{aligned} (w_1)_x &\sim t^{-1/2} f\left(\frac{x}{t}\right) w_1 \exp\{-i\theta - 2i\xi x\}, \\ (w_2)_x &\sim \sigma t^{-1/2} f\left(\frac{x}{t}\right) w_1 \exp\{-i\theta - 2i\xi x\} \end{aligned}$$

с этими же граничными условиями. Далее мы будем предполагать, что $x/t \leq O(1)$ при $t \rightarrow \infty$, и пренебрегать членами порядка $O(\ln t/t)$ в (1.7.11). Для фиксированного и достаточно большого t (1.7.11) представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений с быстрым ($i\theta + 2\xi x$) и медленным (x/t) масштабами. Мы воспользуемся методом ВКБ. Итак, мы ищем решение (1.7.11) в виде

$$(1.7.12) \quad w_i(x, t; \xi) = w_{i,0}(\psi, X) + t^{-1/2} w_{i,1}(\psi, X) + O\left(\frac{\ln t}{t}, t^{-1}\right),$$

где

$$X = \frac{x}{t}, \quad \psi = i\theta + 2\xi x, \quad i = 1, 2, \quad \theta \text{ дается формулой (1.7.4)}.$$

Таким образом,

$$\partial_x \rightarrow \psi_x \partial_\psi + X_x \partial_X \sim \left(\frac{1}{2}X + 2\xi\right) \partial_\psi + t^{-1} \partial_X.$$

Если $(X/2 + 2\xi) \neq 0$, то, переходя в (1.7.11) к главному порядку, получим

$$\partial_\psi(w_{1,0}) \sim 0, \quad \partial_\psi(w_{2,0}) \sim 0,$$

так что для $i = 1, 2$

$$(1.7.13) \quad w_{i,0} = w_{i,0}(X).$$

В порядке $t^{-1/2}$ имеем

$$\left(\frac{1}{2}X + 2\xi \right) \partial_\psi(w_{1,1}) \sim f(X) w_{2,0}(X) e^{i\psi},$$

$$\left(\frac{1}{2}X + 2\xi \right) \partial_\psi(w_{2,1}) \sim \sigma f(X) w_{1,0}(X) e^{-i\psi}.$$

Опуская однородные члены, мы получим

$$(1.7.14) \quad w_{1,1}(\psi, X) \sim \frac{i f(X) w_{2,0}(X)}{\left(\frac{1}{2}X + 2\xi \right)} e^{i\psi},$$

$$w_{2,1}(\psi, X) \sim \frac{i \sigma f(X) w_{1,0}(X)}{\left(\frac{1}{2}X + 2\xi \right)} e^{-i\psi}.$$

Секулярные члены возникают в порядке $O(t^{-1})$, где (1.7.9) приводит к

$$(X/2 + 2\xi) \partial_\psi(w_{1,2}) \sim f w_{2,1} e^{i\psi} - \partial_X(w_{1,0}),$$

$$(X/2 + 2\xi) \partial_\psi(w_{2,2}) \sim \sigma f w_{1,1} e^{-i\psi} - \partial_X(w_{2,0}).$$

Подстановка (1.7.14) в эти соотношения показывает, что исключение секулярных членов в этом порядке требует (при $X/2 + 2\xi \neq 0$)

$$\partial_X(w_{1,0}) \sim \frac{i \sigma f^2 w_{1,0}}{\frac{1}{2}X + 2\xi}, \quad \partial_X(w_{2,0}) \sim -\frac{i \sigma f^2 w_{2,0}}{X/2 + 2\xi}.$$

Эти соотношения можно проинтегрировать и определить константы интегрирования из граничных условий для w_1, w_2 . Таким образом, при $(X/2 + 2\xi) < 0$

$$(1.7.15a) \quad w_{1,0}(X) = \exp \left\{ i \sigma \int_{-\infty}^X \frac{f^2(y)}{\frac{1}{2}y + 2\xi} dy \right\}, \quad w_{2,0} \sim 0,$$

а при $X/2 + 2\xi > 0$

$$(1.7.15b) \quad w_{1,0}(X) = a(\xi) \exp \left\{ -i \sigma \int_X^\infty \frac{f^2(y)}{y/2 + 2\xi} dy \right\},$$

$$(1.7.15c) \quad w_{2,0}(X) = b(\xi, t) \exp \left\{ i \sigma \int_X^\infty \frac{f^2(y)}{y/2 + 2\xi} dy \right\}.$$

Эти формулы несправедливы в окрестности $X/2 + 2\xi = 0$, в которой требуется разложение, отличающееся от (1.7.12). Из (1.7.15) при $X \uparrow (-4\xi)$

$$(1.7.16) \quad w_{1,0}(X) \sim |X + 4\xi|^{2i\sigma f_0^2} \exp \left\{ -2i\sigma \int_{-\infty}^{-4\xi} (f^2)_y \ln |y + 4\xi| dy \right\},$$

$$w_{2,0}(X) \sim 0,$$

а при $X \downarrow (-4\xi)$

$$(1.7.17) \quad \begin{aligned} w_{1,0}(X) &\sim a(\xi) (X + 4\xi)^{2i\sigma f_0^2} \exp \left\{ -2i\sigma \int_{-4\xi}^{\infty} (f^2)_y \ln (y + 4\xi) dy \right\}, \\ w_{2,0}(X) &\sim b(\xi, t) (X + 4\xi)^{-2i\sigma f_0^2} \exp \left\{ -2i\sigma \int_{-4\xi}^{\infty} (f^2)_y \ln (y + 4\xi) dy \right\}, \end{aligned}$$

где $f_0 = f(-4\xi)$.

При $(X/2 + 2\xi) = 0$ положим

$$(1.7.18) \quad \begin{aligned} x_0 &= 4\xi t, \\ \psi_0 &= t\theta + 2\xi x \Big|_{x=x_0} \sim \frac{x_0^2}{4t} + 2\xi x_0 - 2\sigma f_0^2 \ln t + g(-4\xi) \end{aligned}$$

(отметим, что g появилось впервые в этом месте). Вблизи $X/2 + 2\xi = 0$, воспользовавшись разложением в ряд Тейлора, получим

$$\psi(x, t) \sim \psi_0 + \frac{(x - x_0)^2}{4t}.$$

В этой области мы определим

$$Z = \frac{x - x_0}{\sqrt{2t}}, \quad w_i = w_i(Z; t),$$

так что (1.7.9) превращается в

$$(1.7.19) \quad \begin{aligned} (w_1)_Z &\sim \sqrt{2} f_0 w_2 \exp \left\{ i\psi_0 + \frac{iZ^2}{2} \right\}, \\ (w_2)_Z &\sim \sqrt{2} \sigma f_0 w_1 \exp \left\{ -i\psi_0 - \frac{iZ^2}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Общее решение уравнений (1.7.19) можно выразить через функции параболического цилиндра. Оно должно переходить в (1.7.16) при $Z \rightarrow -\infty$ и в (1.7.17) при $Z \rightarrow +\infty$. Опуская детали

вычисления, мы приведем результат:

$$\begin{aligned}
 X &= \frac{x}{t} = -4\xi, \\
 f^2\left(\frac{x}{t}\right) &= \frac{\sigma}{4\pi} \ln |a(\xi)|^2 = f_0^2, \\
 g\left(\frac{x}{t}\right) &= -\arg \{-\sigma b(\xi, 0)\} + \frac{3\pi}{4} - \arg \{\Gamma(1 - 2i\sigma f_0^2)\} + \\
 (1.7.20) \quad &+ 2\sigma f_0^2 \ln 2 - 2\sigma \int_{-\infty}^{-4\xi} \ln |y + 4\xi| (f^2)_y dy + \\
 &+ 2\sigma \int_{-4\xi}^{\infty} \ln (y + 4\xi) (f^2)_y dy.
 \end{aligned}$$

Эти формулы вместе с (1.7.4) дают асимптотическое разложение решения уравнения (1.7.2) в пределе $t \rightarrow \infty$. Их можно переписать, выразив через $(b/a)(\xi)$: при $x/t = -4\xi$

$$\begin{aligned}
 f^2\left(\frac{x}{t}\right) &= -\frac{\sigma}{4\pi} \ln \left\{ 1 - \sigma \left| \frac{b}{a}(\xi) \right|^2 \right\}, \\
 g\left(\frac{x}{t}\right) &= -\arg \left\{ -\sigma \frac{b}{a}(\xi) \right\} + \frac{3\pi}{4} - \\
 (1.7.21) \quad &- \arg \left\{ \Gamma \left(1 - 2i\sigma f^2 \left(\frac{x}{t} \right) \right) \right\} + 2\sigma f^2 \left(\frac{x}{t} \right) \ln 2 + \\
 &+ 4\sigma \int_{-4\xi}^{\infty} \ln (y + 4\xi) (f^2)_y dy.
 \end{aligned}$$

Мы видели (в разд. 1.4), что солитоны несомненно являются нелинейными образованиями, их невозможно линеаризовать. С другой стороны, часто можно слышать утверждения, что несолитонная часть решения, которую мы только что рассматривали, качественно ведет себя так же, как решения линеаризованной задачи. Теперь мы можем проверить это утверждение, основываясь на асимптотических решениях линеаризованной задачи (П.1.39) и (1.7.4) с учетом (1.7.20). Во-первых, отметим тот факт, что в обоих случаях наиболее важные свойства решений следующие:

- (i) огибающая убывает по закону $t^{-1/2}$,
- (ii) информация распространяется с групповой скоростью, вычисленной по закону дисперсии линейного уравнения $\omega = k^2 = (-2\xi)^2$.

Во-вторых, в пределе малых амплитуд (в (1.7.20) $f \rightarrow 0$ равномерно по x) можно показать, что $b^*(\xi) \rightarrow \sigma \hat{q}(-2\xi)$ и что асимптотическое решение нелинейной задачи в точности сводится к решению линейной (см. упр. 1). Таким образом, для решений

уравнения (1.7.2) два предела ($t \rightarrow \infty$ и $\int |q(x, 0)| dx \rightarrow 0$) коммутируют между собой. Нелинейность приводит лишь к тому, что фаза содержит члены порядка $\ln t$, а g глобально зависит от данных рассеяния.

Общее решение уравнения (1.7.2) при $\sigma = -1$ содержит и солитоны, и несолитонную часть. В случае нелинейного уравнения Шредингера солитоны движутся на фоне излучения, и их взаимодействие с фоном может оказаться важным. Используя законы сохранения, Сигур [454] нашел асимптотическое (при $t \rightarrow \infty$) решение уравнения (1.7.2) с $\sigma = -1$ в простейшем случае, когда данные рассеяния содержат лишь одно дискретное собственное значение и непрерывный спектр. Главный вклад имеет вид

$$(1.7.22) \quad q(x, t) \sim 2\eta \exp(i\varphi) / \operatorname{ch} \psi + \\ + t^{-1/2} f\left(\frac{x}{t}\right) \left[\exp(i\theta) \frac{(\xi + x/4t + i\eta \operatorname{th} \psi)^2}{(\xi + x/4t)^2 + \eta^2} + \right. \\ \left. + \exp(2i\varphi - i\theta) \frac{\eta^2}{\operatorname{ch}^2 \psi \cdot ((\xi + x/4t)^2 + \eta^2)} \right] + o(t^{-1/2}),$$

где $(\xi + i\eta)$ — дискретное собственное значение,

$$\varphi = -2[\xi x + 2(\xi^2 - \eta^2)t] + \hat{\varphi},$$

$$\psi = 2\eta(x + 4\xi t) + \hat{\psi},$$

$$\theta = \frac{x^2}{4t} + O\left(\frac{\ln t}{t}\right),$$

$$f^2\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{1}{4\pi} \ln \left\{ 1 + \left| \frac{b}{a} - \frac{x}{4t} \right|^2 \right\}.$$

Первый член в (1.7.22) — это просто обычный солитон. Второй член представляет собой излучение (с поправками в окрестности солитона), а третий член можно рассматривать как результат взаимодействия между этими двумя компонентами. Этот результат был получен только при помощи законов сохранения, поэтому фазы (а точнее, функции $\hat{\varphi}$, $\hat{\psi}$) остались неопределенными. В частности, полный сдвиг фазы солитона (от $t = -\infty$ до $t = +\infty$) вследствие взаимодействия с излучением нельзя определить этим методом.

1.7. б. Модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза.
Для мКдФ

$$(1.7.23) \quad v_t - 6\sigma v^2 v_x + v_{xxx} = 0, \quad \sigma = \pm 1$$

дисперсионное соотношение линеаризованной задачи ($\omega = -k^3$) является нечетной функцией, так что групповая скорость $d\omega/dk = -3k^2$ имеет одинаковый знак для всех веществ-

венных k . Поэтому расплывающиеся осцилляции, покрывавшие всю ось x в случае асимптотического решения уравнения (1.7.2), теперь сосредоточены в области $x < 0$. Это вовсе не удивительно — аналогичный результат имеет место и для линеаризованного уравнения мКдФ (см. разд. П.1), но приводит к необходимости проведения отдельного анализа асимптотики при $x > 0$.

Для того чтобы исключить солитоны при $\sigma = -1$, мы снова потребуем выполнения условия (1.7.1) для начальных данных уравнения (1.7.23). Чтобы иметь возможность продолжить функцию $b(\xi, 0)$ с вещественной оси, мы потребуем в этой задаче достаточно быстрого убывания начальных данных при больших x .

Линейное интегральное уравнение для (1.7.23) можно записать в виде

$$(1.7.24) \quad K(x, y; t) + \sigma F(x + y; t) = \\ = \sigma \int_x^{\infty} \int_x^{\infty} K(x, z; t) F(z + s; t) F(s + y; t) dz ds, \quad y > x,$$

где

$$F(x; t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b}{a}(\xi) \exp\{i\xi x + 8i\xi^3 t\} d\xi$$

и

$$v(x, t) = -2K(x, x; t).$$

Функция $F(2x, t)$ удовлетворяет линеаризованному уравнению мКдФ, ее асимптотическое поведение (при $t \rightarrow \infty$) известно (см. разд. П.1).

В частности, при $x \gg (3t)^{1/3}$

$$(1.7.25) \quad F(x; t) \sim \frac{r(i k/2) k^{-1/2}}{4(3\pi t)^{1/2}} \exp(-2tk^3),$$

где $r(\xi) = (b/a)(\xi)$ и $k^2 = \chi/6t$. В этой области

$$K(x, y; t) \sim -\sigma F(x + y; t),$$

а интегральный член в (1.7.24) экспоненциально мал. Таким образом, при $x \gg (3t)^{1/3}$

$$(1.7.26) \quad v(x, t) \sim \frac{\sigma r(i k/2) k^{-1/2}}{2(3\pi t)^{1/2}} \exp(-2tk^3).$$

Это представление становится несправедливым при $x/t \rightarrow 0$. Для того чтобы найти представление в этой области, мы запишем

$$F(x; t) = \frac{1}{4\pi(3t)^{1/3}} \int_{-\infty}^{\infty} r\left(\frac{\kappa}{2(3t)^{1/3}}\right) \exp\{i\kappa\tilde{Z}/2 + i\kappa^3/3\} d\kappa,$$

где $\tilde{Z} = \chi/(3t)^{1/3}$. Разложив $r(\xi)$ в ряд Тейлора вблизи $\xi = 0$ и переходя к пределу $t \rightarrow \infty$, $x/t \rightarrow 0$, причем $Z = x/(3t)^{1/3} \rightarrow \infty$, получим

$$(1.7.27) \quad \sigma v(x, t) \sim (3t)^{-1/3} r(0) \operatorname{Ai}(Z) - (3t)^{-2/3} i \frac{r'(0)}{2} \operatorname{Ai}'(Z) + O\left(\frac{1}{3t}\right),$$

где $\operatorname{Ai}(Z)$ — функция Эйри. Это наводит на мысль, что в области $|x| \leq O((3t)^{1/3})$ нам следует искать приближенное решение уравнения (1.7.23) в виде

$$(1.7.28) \quad v(x, t) \sim (3t)^{1/3} w(Z) + (3t)^{2/3} w_1(Z) + \dots,$$

где $w(t)$ удовлетворяет второму уравнению Пенлеве (см. разд. 3.7)

$$(1.7.29) \quad \frac{d^2w}{dz^2} = Z w + 2\sigma w^3$$

с граничным условием

$$(1.7.30) \quad w(Z) \rightarrow \sigma r(0) \operatorname{Ai}(Z) \text{ при } Z \rightarrow +\infty.$$

Нелинейность уравнения (1.7.29) означает, что решение в промежуточной области $|x| \leq O((3t)^{1/3})$ остается нелинейным при $t \rightarrow \infty$, хотя его амплитуда стремится в этом пределе к нулю. Такая нелинейная область существует для любого решения уравнения мКдФ, если $r(0) \neq 0$.

В точке $\xi = 0$ можно найти явное решение задачи рассеяния (1.2.7а): при $\sigma = +1$

$$\varphi_1(x, 0) = \operatorname{ch}\left(\int_{-\infty}^{\infty} v dx\right), \quad \varphi_2 = \operatorname{sh}\left(\int_{-\infty}^{\infty} v dx\right),$$

так что

$$r(0) = \operatorname{th}\left(\int_{-\infty}^{\infty} v dx\right).$$

Аналогично получим для $\sigma = -1$

$$r(0) = -\operatorname{tg}\left(\int_{-\infty}^{\infty} v dx\right).$$

Однако функция v должна быть абсолютно интегрируемой (см. разд. 1.3), поэтому

$$(1.7.31) \quad |r(0)| < 1 \text{ для } \sigma = +1, \quad |r(0)| < \infty \text{ для } \sigma = -1.$$

В обоих случаях ограничения (1.7.31) гарантируют ограниченность решений уравнения (1.7.29) с граничным условием (1.7.30)

при всех вещественных Z (см. разд. 3.7). Таким образом, в области $|x| \leq O((3t)^{1/3})$ решение уравнения (1.7.23) приближенно является автомодельным и удовлетворяет уравнению (1.7.29) с граничным условием (1.7.30). Типичное решение приведено на рис. 3.2, с. 281.

Так же как и решение линеаризованной задачи, решение уравнения (1.7.23) быстро осциллирует при $-x \gg (3t)^{1/3}$. В этой области после некоторой модификации можно применять любой из методов, которые мы использовали для вычисления асимптотики уравнения (1.7.2). При этом удобно воспользоваться автомодельным решением уравнения МКДФ с медленно меняющимися параметрами. Общее решение уравнения (1.7.29) не может быть выписано в явном виде, но при $Z \rightarrow -\infty$ (т. е. в области осцилляций) формальное асимптотическое решение имеет вид

$$\omega(Z) \sim (-Z)^{-1/4} d \sin \theta + O(|Z|^{-7/4}),$$

$$\theta \sim \frac{2}{3}(-Z)^{3/2} - \frac{3}{4}\sigma d^2 \ln(-Z) + \bar{\theta} + O(|Z|^{3/2}),$$

где d и θ являются константами интегрирования; для удобства положим $d \geq 0$. Затем, считая d и θ зависящими от $X = -x/3t$, мы получим при $-x \gg (3t)^{1/3}$ интересующий нас вид решения:

$$(1.7.32) \quad v(x, t) \sim (3t)^{-1/2} X^{-1/4} d \sin \theta + O((3t)^{-1}),$$

$$\theta \sim 2tX^{3/2} - \frac{\sigma}{2} d^2 \ln 3t - \frac{3}{4}\sigma d^2 \ln X + \bar{\theta}.$$

Эта формула, взятая в главном порядке, аналогична (1.7.4).

Законы сохранения определяют $d(X)$. Следует сделать единственное изменение в методе из предыдущего раздела: чтобы показать, что только область $-x \gg (3t)^{1/3}$ вносит вклад в интегралы движения, нужно использовать (1.7.26) и (1.7.28). Окончательный результат состоит в том, что на линии

$$(1.7.33a) \quad X = -\frac{x}{3t} = \frac{\xi^2}{\xi}$$

$$(1.7.33b) \quad d^2(X) = \frac{\sigma}{\pi} \ln \left| a \left(\frac{\xi}{2} \right) \right|^2 = -\frac{\sigma}{\pi} \ln \left\{ 1 - \sigma \left| \frac{b}{a} \left(\frac{\xi}{2} \right) \right|^2 \right\}.$$

Отметим, что (1.7.33a) снова определяет групповую скорость, соответствующую дисперсионному соотношению линеаризованной задачи, как скорость, с которой информация передается при $t \rightarrow \infty$. Отметим также, что (1.7.33b) практически совпадает с (1.7.8b).

Для того чтобы одновременно найти и $d(X)$, и $\theta(X)$, подставим (1.7.32) в задачу рассеяния (1.2.7а). Аналогом (1.7.11) является

$$(1.7.34) \quad (\omega_1)_x \sim (3t)^{-1/2} X^{-1/4} d(X) \sin \theta \cdot e^{2i\xi x} w_2,$$

$$(\omega_2)_x \sim (3t)^{-1/2} X^{-1/4} d(X) \sin \theta \cdot e^{-2i\xi x} w_1$$

при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ при } x \rightarrow -\infty, \\ \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} a(\xi) \\ b(\xi, t) \end{pmatrix} \text{ при } x \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались (1.7.26) и (1.7.28), чтобы показать, что w_1, w_2 являются константами (в основном порядке) при $x > 0$.

Важное различие между (1.7.34) и (1.7.11) состоит в том, что при $t \rightarrow \infty$ и $X = O(1)$ (1.7.34) зависит от двух быстрых переменных $(\theta + 2\xi x)$ и $(\theta - 2\xi x)$ и одной медленной (X). Вычисления, аналогичные тем, которые привели к формулам (1.7.20), следует производить, учитывая это различие. Здесь мы опустим детали вычислений; их можно найти в работе [457]. Окончательный результат имеет вид (1.7.33), и (при $\xi \geq 0$)

$$(1.7.35) \quad \begin{aligned} \bar{\theta}(X) = & -\arg \left\{ -\sigma b \left(\frac{\xi}{2} \right) \right\} - \frac{3\pi}{4} - \arg \left\{ \Gamma \left(1 - \frac{i\sigma d_0^2}{2} \right) \right\} - \\ & - \frac{3}{2} \sigma d_0^2 \ln 2 - \frac{\sigma}{2} \int_0^{\xi} \ln \left(\frac{\xi - y}{\xi + y} \right) (d^2)_y dy + \\ & + \frac{\sigma}{2} \int_{\xi}^{\infty} \ln \left(\frac{y - \xi}{y + \xi} \right) (d^2)_y dy. \end{aligned}$$

В пределе $X = -x/3t \rightarrow 0$, а $Z = x/(3t)^{1/3} \rightarrow -\infty$, приближенное решение (1.7.32, 33, 35) уравнения мКдФ гладко переходит в решение (1.7.28, 30). Эта сшивка отчасти подтверждает правильность проделанных здесь вычислений и будет играть важную самостоятельную роль в разд. 3.7.

Обсудим результаты, полученные для (1.7.23). В отсутствие солитонов асимптотическое решение уравнения мКдФ, развившееся из подходящих начальных условий, дается формулами (1.7.26) при $x \gg (3t)^{1/3}$, (1.7.28, 29, 30) при $|x| \leq O((3t)^{1/3})$ и (1.7.23, 33, 35) при $(-x) \gg (3t)^{1/3}$. Если $r(0) \neq 0$, то решение носит нелинейный характер в промежуточной области, какой бы малой ни была его амплитуда. Тем не менее в этом случае можно показать, что асимптотическое решение переходит в решение линейной задачи, если амплитуду начального условия (в смысле нормы L_1) взять равной нулю. Таким образом, два предела ($t \rightarrow \infty$ начальная амплитуда $\rightarrow 0$) коммутируют для уравнения мКдФ, так же как в случае (1.7.2). Отметим, что, утверждая коммутативность пределов, мы не ограничили общности, исклю-

чив солитоны; они автоматически отсутствуют в пределе малых амплитуд в соответствии с (1.7.1).

1.7. с. Уравнение Кортевега — де Фриза. Каждое решение уравнения мКдФ при $\sigma = +1$ порождает решение уравнения КдФ

$$(1.7.36) \quad u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

с помощью преобразования Миуры [379]

$$(1.7.37) \quad u = -v^2 - v_x.$$

Таким образом, наши результаты об асимптотическом поведении решений уравнения мКдФ также определяют асимптотическое поведение бесконечного набора решений уравнения КдФ. Однако эти решения уравнения КдФ оказываются практически бесполезными. Дело в том, что почти для любого заданного начального условия, для которого уравнение КдФ может быть решено при помощи МОЗР, возникающее в результате эволюции решение *не может быть* получено по формуле (1.7.37) из быстро убывающего (по x) решения уравнения мКдФ.

Мы можем изучить это преобразование более детально. Пусть $v(x, 0)$ является гладким, быстро убывающим (по x) начальным условием уравнения (1.7.23) при $\sigma = +1$. Пусть $r(k)$ обозначает коэффициент отражения, соответствующий $v(x, 0)$. Из (1.7.31) следует, что $|r(0)| < 1$. Пусть теперь $\rho(k) = r(k)$, где $\rho(k)$ является коэффициентом отражения, соответствующим некоторому решению уравнения КдФ. Тогда $r(k)$ порождает некоторое решение уравнения мКдФ по формуле (1.7.24); при этом $\rho(k)$ порождает решение уравнения КдФ согласно (1.3.37). Сравнив эти два интегральных уравнения, нетрудно показать, что эти два решения связаны соотношением (1.7.37).

С другой стороны, Абловиц, Краскал и Сигур [16] показали, что почти для любого гладкого начального условия уравнения

КдФ, удовлетворяющего неравенству $\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|^2) |u| dx < \infty$,

$$(1.7.38) \quad \rho(0) = -1.$$

Таким образом, почти для всех начальных данных уравнения КдФ мы *не можем* приравнивать $\rho(k)$ к $r(k)$ и эффективно пользоваться преобразованием (1.7.37). Поэтому требуется отдельный анализ асимптотического поведения решений уравнения КдФ. Этот анализ вполне аналогичен проделанному нами для уравнения мКдФ, но из-за (1.7.38) возникает некоторое различие. Как обычно, мы предполагаем начальные условия быстро убывающими при $|x| \rightarrow \infty$ и гладкими, а также предполагаем

отсутствие солитонов. Здесь мы только сформулируем основные результаты; детальное рассмотрение можно найти в работе [26].

При $x \gg (3t)^{1/3}$ интегральный член в (1.3.37) является экспоненциально малым по сравнению с двумя оставшимися, и поэтому

$$(1.7.39) \quad u(x, t) \sim \frac{\rho(ik/2) k^{1/2}}{2(3\pi t)^{1/2}} \exp\{-2tk^3\},$$

где $k^2 = x/3t$. Другим представлением решения в этой области, которое остается справедливым при $x/3t \rightarrow 0$, служит

$$(1.7.40) \quad u(x, t) \sim -(3t)^{-2/3} \left[\rho(0) \text{Ai}'(Z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n \rho^{(n)}(0)}{2^n n! (3t)^{n/3}} \left(\frac{d}{dZ}\right)^n \text{Ai}(Z) \right],$$

где $Z = (x + x_0)/(3t)^{1/3}$, а константа $x_0 = -i\rho'(0)/2\rho(0)$ выбирается из соображений удобства.

В области $|x| \leq O((3t)^{1/3})$ мы ищем решение уравнения КдФ в виде

$$(1.7.41) \quad u(x, t) \sim (3t)^{-2/3} [f(Z) + (3t)^{-1/3} f_1(Z) + (3t)^{-2/3} f_2(Z) + \dots].$$

(Один из немногих строгих результатов этого раздела был получен Шабатом (1973) [459], доказавшим справедливость асимптотического представления (1.7.41) в основном порядке.) Функции f, f_1, \dots подчиняются обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$(1.7.42) \quad \begin{aligned} f''' + 6ff' - (2f + Zf') &= 0, \\ f_1''' + 6(f f_1)' - (3f_1 + Zf_1') &= 0, \\ f_2''' + 6(f f_2)' - (4f_2 + Zf_2') &= -3(f_1')' \\ \dots \end{aligned}$$

с граничными условиями, полученными из (1.7.40) при $Z \rightarrow +\infty$. Например,

$$(1.7.43) \quad f(Z) \sim -\rho(0) \text{Ai}'(Z) \quad \text{при } Z \rightarrow +\infty.$$

Теперь очевидна важность условия (1.7.38). Поведение решения (1.7.42a, 43) зависит от $\rho(0)$.

(i) Если $|\rho(0)| < 1$, то решение ограничено при всех конечных Z и осциллирует при $Z \rightarrow -\infty$. Такие решения уравнения (1.7.42) связаны с ограниченными решениями уравнения (1.7.29) формулой (1.7.37).

(ii) Решения, отвечающие $|\rho(0)| > 1$ или $\rho(0) = +1$, не представляют интереса.

(iii) Если $\rho(0) = -1$, то при $Z \rightarrow -\infty f(Z)$ асимптотически приближается к

$$(1.7.44) \quad f(Z) = \frac{Z}{2} - \frac{1}{2} (-2Z)^{-1/2} + \frac{1}{2} (-2Z)^{-2} + O((-2Z)^{-7/2}).$$

Таким образом, если $\rho(0) = -1$, то первый член в (1.7.42) линейно растет. При этом $f_2(Z)$ растет экспоненциально, а $f_4(Z)$ даже быстрее, т. е. разложение (1.7.41) становится беспорядочным. Можно показать, что ($Z \rightarrow -\infty, \rho(0) = -1$)

$$(1.7.45) \quad u(x, t) \sim \frac{-2Z}{(3t)^{2/3}} \left[-\frac{1}{4} + \right. \\ \left. + \left\{ (3t)^{-2/3} C (-2Z)^{-5/4} \exp\left(\frac{(-2Z)^{3/2}}{3}\right) \right\} - \right. \\ \left. - \left\{ (3t)^{-2/3} C (-2Z)^{-5/4} \exp\left(\frac{(-2Z)^{3/2}}{3}\right) \right\} + \dots \right],$$

где

$$C = 0,118 \{\rho''(0) + [\rho'(0)]^2\}.$$

Коэффициент 0,118 был определен численным интегрированием [26, 377]. Ясно, что (1.7.45) нарушается при $Z \rightarrow -\infty$. Это нарушение означает существование новой области, которая может быть названа «бесстолкновительной ударной волной», или переходным слоем. Существование этой новой переходной области является прямым следствием (1.7.38); в типичных асимптотических решениях уравнения мКdФ такая область отсутствует.

Для приложений бывает важно знать расположение и скорости распада минимума основной волны (см. рис. 4.4). Местоположение минимума можно найти, продифференцировав выражение (1.7.45). При очень больших временах

$$(1.7.46a) \quad (-2Z) \sim (2 \ln 3t)^{2/3},$$

и в окрестности этой (движущейся) точки

$$(1.7.46b) \quad u \sim -\frac{1}{2} \left(\frac{2 \ln 3t}{3t} \right)^{2/3}.$$

Эта асимптотическая скорость распада совершенно не зависит от начальных условий. Однако время, необходимое для выхода на асимптотику (1.7.46), является настолько большим, что во многих прикладных задачах эта заключительная стадия развития начального условия может не реализоваться.

Для определения структуры бесстолкновительной ударной волны необходим отдельный анализ. Подробности можно найти