

свойства показывают, что

$$(2.2.51a) \quad \bar{F}(n+m) = \begin{cases} 2\bar{F}_R(n+m), & m = n + 2p - 1, \\ 0, & m = n + 2p, \end{cases} \quad p \geq 1,$$

$$(2.2.51b) \quad \bar{F}_R(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{\bar{b}}{\bar{a}} z^{n-1} dz - \sum_1^{N/2} \bar{c}_j \bar{z}_j^{n-1},$$

где контур C_R проходит по правой половине единичной окружности. Мы возьмем

$$(2.2.51c) \quad \kappa_1(n, m) = \begin{cases} \kappa_{1R}(n, m), & m = n + 2p - 1, \\ 0, & m = n + 2p, \end{cases} \quad p \geq 1,$$

и для $m = n + 2p - 1$ получим из (2.2.50), (2.2.51)

$$(2.2.52) \quad \kappa_{1R}(n, m) - 2\bar{F}_R(n+m) \pm$$

$$\pm 4 \sum_{n''=n+1}^{\infty} \sum_{n'=n+1}^{\infty} \kappa_{1R}(n, n'') \bar{F}_R^*(n''+n') \bar{F}_R(n'+m) = 0,$$

где

$$\begin{aligned} n'' &= n + 2p'' - 1, & n' &= n + 2p', \\ p'' &= 1, 2, \dots, & p' &= 1, 2, \dots. \end{aligned}$$

Ядро $\kappa_2(n, m)$ в этом случае также обладает свойствами симметрии:

$$(2.2.53) \quad \kappa_2(n, m) = \begin{cases} \kappa_{2R}(n, m), & m = n + 2p, \\ 0, & m = n + 2p - 1. \end{cases}$$

При $m = n + 2p$, $p = 1, 2, \dots$ из (2.2.50), (2.2.51) получим

$$(2.2.54) \quad \kappa_{2R}(n, m) \pm 2 \sum_{n'=n+1}^{\infty} \kappa_{1R}^*(n, n') \bar{F}_R(n'+m) = 0,$$

где

$$n' = n + 2p' - 1, \quad p' = 1, 2, \dots.$$

Имеется следующая связь с потенциалами:

$$(2.2.55a) \quad Q_n = -\kappa_{1R}(n, n+1),$$

$$(2.2.55b) \quad S_n = 0.$$

Одна и та же обратная (пространственная) задача рассеяния связана с дифференциальными-разностными и конечно-разностными уравнениями. Единственное различие состоит в анализе зависимости данных рассеяния от времени.

(1) *Дифференциально-разностный случай.* Уравнение (2.2.23) задает эволюцию по времени. Предположим, что при $n \rightarrow \pm \infty$

$A_n \rightarrow A_{\pm}$, $D_n \rightarrow D_{\pm}$, B_n , $C_n \rightarrow 0$. Собственные функции, удовлетворяющие одновременно (2.2.22) и (2.2.23), имеют вид

$$(2.2.56) \quad \begin{aligned} \varphi_n^{(t)} &= \varphi_n e^{A_- t}, & \psi_n^{(t)} &= \psi_n e^{D_+ t}, \\ \bar{\varphi}_n^{(t)} &= \bar{\varphi}_n e^{D_- t}, & \bar{\psi}_n^{(t)} &= \bar{\psi}_n e^{A_+ t}. \end{aligned}$$

Действуя так же, как в разд. 1.4 (непрерывный случай), получим

$$(2.2.57a) \quad \begin{aligned} a &= a_0 e^{(A_+ - A_-) t}, & b &= b_0 e^{(D_+ - D_-) t}, \\ \bar{a} &= \bar{a}_0 e^{(D_- - D_+) t}, & \bar{b} &= \bar{b}_0 e^{(A_+ - A_-) t}, \end{aligned}$$

поэтому

$$(2.2.57b) \quad \begin{aligned} \frac{b}{a}(t) &= \left(\frac{b}{a}\right)_0 e^{(D_+ - A_+) t}, \\ \frac{\bar{b}}{\bar{a}}(t) &= \left(\frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right)_0 e^{(A_+ - D_+) t} \end{aligned}$$

и аналогично

$$(2.2.57c) \quad \begin{aligned} c_j &= c_{j,0} e^{(D_+ - A_+) (z_j) t}, \\ \bar{c}_j &= \bar{c}_{j,0} e^{(A_+ - D_+) (\bar{z}_j) t}. \end{aligned}$$

Дисперсионное соотношение линеаризованной задачи имеет вид
(2.2.57d) $-i\omega(z^2) = (A_+ - D_+)(z)$.

(2) *Конечно-разностный случай.* Теперь эволюция задается уравнением (2.2.32). Мы опять предположим, что $A_n^m \rightarrow A_{\pm}$, $D_n^m \rightarrow D_{\pm}$, $B_n^m \rightarrow 0$, $C_n^m \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \pm \infty$. Собственные функции, одновременно удовлетворяющие уравнениям (2.2.22) и (2.2.32), задаются соотношениями

$$(2.2.58) \quad \begin{aligned} \varphi_n^{m(t)} &= \varphi_n^m (1 + A_-)^m, & \psi_n^{m(t)} &= \psi_n^m (1 + D_+)^m, \\ \bar{\varphi}_n^{m(t)} &= \bar{\varphi}_n^m (1 + D_-)^m, & \bar{\psi}_n^{m(t)} &= \bar{\psi}_n^m (1 + A_+)^m. \end{aligned}$$

Как и прежде, можно получить

$$(2.2.59a) \quad \begin{aligned} a &= a_0 \left(\frac{1 + A_+}{1 + A_-}\right)^m, & \bar{a} &= \bar{a}_0 \left(\frac{1 + D_+}{1 + D_-}\right)^m, \\ b &= b_0 \left(\frac{1 + D_+}{1 + A_-}\right)^m, & \bar{b} &= \bar{b}_0 \left(\frac{1 + A_+}{1 + D_-}\right)^m, \end{aligned}$$

$$(2.2.59b) \quad \frac{b}{a} = \left(\frac{b}{a}\right)_0 \left(\frac{1 + D_+}{1 + A_+}\right)^m, \quad \frac{\bar{b}}{\bar{a}} = \left(\frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right)_0 \left(\frac{1 + A_+}{1 + D_+}\right)^m$$

и

$$(2.2.59c) \quad c_j = c_{j,0} \left(\frac{1 + D_+}{1 + A_+}\right)^m (z_j), \quad \bar{c}_j = \bar{c}_{j,0} \left(\frac{1 + A_+}{1 + D_+}\right)^m (\bar{z}_j).$$

Здесь $a_0, \dots, \bar{c}_{j,0}$ отвечают данным рассеяния при $t = 0$. Дисперсионное соотношение линеаризованного уравнения ($Q_n^m = z^n \omega^m$) имеет вид

$$(2.2.59d) \quad \omega(z^2) = \frac{1 + A_+}{1 + D_+}.$$

Схема построения решений дифференциально-разностных и конечно-разностных уравнений описана полностью. Теперь можно вычислить частные солитонные решения. Например, в случае единственного дискретного собственного значения и отсутствия вклада от непрерывного спектра ($\bar{F}(n) = -\bar{c}\bar{z}_j^{n-1}, S_n T_n \neq 0$) для нахождения решения определим

$$\hat{\chi}_1(n) = \sum_m \chi_1(n, m) \bar{z}^{m*}$$

и сведем процедуру решения бесконечной системы алгебраических уравнений к нахождению $\hat{\chi}_1(n)$. Для этого подействуем оператором $\sum_m \bar{z}^{m*}$ на уравнения (2.2.50). В дифференциально-разностной задаче односолитонное решение имеет вид

$$(2.2.60a) \quad Q_n = \left(\frac{\bar{c}_0}{\bar{c}_0^*} \right)^{1/2} \exp \left(-\left(\frac{i}{2} \right) (\omega + \omega^*) t + 2in\theta \right) \times \\ \times \operatorname{sh} W / \operatorname{ch} \left(2nW - \frac{i}{2} (\omega^* - \omega) t + \varphi_0 \right),$$

$$(2.2.60b) \quad T_n = - \left(\frac{\bar{c}_0}{\bar{c}_0^*} \right)^{1/2} \exp \left(-\left(\frac{i}{2} \right) (\omega + \omega^*) t - (2n + 1) i\theta \right) \times \\ \times \operatorname{sh} W / \operatorname{ch} \left(2nW - \frac{i}{2} (\omega^* - \omega) t + \varphi_0 + W \right),$$

где

$$(2.2.60c) \quad \omega = \omega(\bar{z}^2), \quad \bar{z} = e^{-W+i\theta}, \quad \varphi_0 = -\ln \left(\frac{|c_0|}{2 \operatorname{ch} W} \right).$$

(Например, в случае автодуальной решетки $\omega = \pm i(z - z^{-1})$).
Если $S_n = T_n = 0$, то

$$(2.2.61a) \quad Q_n = \left(\frac{\bar{c}_0}{\bar{c}_0^*} \right)^{1/2} \operatorname{sh}(2W) \exp \left(2in\theta - \frac{i}{2} (\omega + \omega^*) t \right) \times \\ \times 1/\operatorname{ch} \left(2nW - \frac{i}{2} (\omega^* - \omega) t + \varphi_0 \right),$$

где

$$(2.2.61b) \quad \varphi_0 = -\ln \left(\frac{|c_0|}{\operatorname{sh} 2W} \right).$$

Например, для разностного нелинейного уравнения Шрёдингера $\omega(z^2) = z^2 + z^{-2} - 2$.

В конечно-разностном случае с $T_n = S_n = 0$ мы запишем ($Q_n^m = \Delta x q_n^m$)

$$(2.2.62) \quad Q_n^m = e^{i2n\theta + 2im(\operatorname{Arg} \omega) + i\theta_0} \operatorname{sh} 2W/\operatorname{ch}(2nw - nm|\omega| - \varphi_0).$$

В случае конечно-разностного нелинейного уравнения Шрёдингера (2.2.37) следует воспользоваться дисперсионным соотношением линеаризованного уравнения

$$\omega = \frac{1 + i\sigma(z^2 - 2 + z^{-2})}{1 - i\sigma(z^2 - 2 + z^{-2})},$$

где $\sigma = \Delta t/(\Delta x)^2$.

Так же как в разд. 1.6, можно вычислить интегралы движения. Например, при $S_n = T_n = 0$ можно показать, что

$$(2.2.63a) \quad \ln \bar{a}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln g_n(z^2),$$

где g_n удовлетворяет

$$(2.2.63b) \quad g_{n+1}(g_{n+2} - 1) - z^2 \frac{R_{n+1}}{R_n}(g_{n+1} - 1) = z^2 R_{n+1} Q_n.$$

Из (2.2.63b) при $z \rightarrow 0$ следует разложение для $g_n(z^2)$

$$g_n = \sum_{j=0}^{\infty} g_n^{(j)} z^{2j},$$

причем

$$(2.2.64a) \quad g_n \sim 1 + z^2 R_{n-1} Q_{n-2} + z^4 R_{n-1} Q_{n-3} (1 - R_{n-2} Q_{n-2} + \dots).$$

Таким образом, $\bar{a}(z)$ является аналитической функцией при $z \rightarrow 0$ и имеет разложение

$$(2.2.64b) \quad \ln \bar{a}(z) \sim \sum_0^{\infty} C_j z^{2j},$$

причем C_j являются интегралами движения, поскольку $a(z)$ не зависит от времени. Из (2.2.64a, b) получим (2.2.65)

$$(2.2.65) \quad C_1 = \sum_{-\infty}^{\infty} R_k Q_{k-1},$$

$$C_2 = \sum_{-\infty}^{\infty} \left[R_k Q_{k-2} (1 - R_{k-1} Q_{k-1}) - \frac{1}{2} R_k^2 Q_{k-1}^2 \right].$$

Величины C_j , $j = 1, 2, \dots$, представляют собой интегралы движения. Для того чтобы вывести (2.2.63a, b), следует воспользо-

ваться задачей рассеяния и связью $\bar{a}(z)$ с собственной функцией $\bar{\Phi}_{2n}$

$$\bar{a}(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\bar{\Phi}_{2n} z^n),$$

а уравнение для g_k следует из

$$\bar{\Phi}_{2n} z^n = \sum_{-\infty}^n g_k.$$

Еще раз отметим, что программа решения аналогична линейному фурье-анализу, хотя на первый взгляд кажется, что в процессе решения мы пользуемся запрещенными приемами. В нелинейной задаче имеются дополнительные трудности: приходится решать либо интегральные уравнения (в непрерывном случае), либо бесконечную систему линейных алгебраических уравнений (в конечно-разностном случае).

Теперь мы приведем (для полноты картины) результаты, относящиеся к задаче рассеяния для разностного оператора Шрёдингера (2.2.7), имея в виду приложения к цепочке Тоды (Флашка [155, 156]; см. также [97, 93, 347, 387]).

Мы предположим, что $(a_n - \frac{1}{2})$ и b_n быстро убывают при $|n| \rightarrow \infty$. Положим $\lambda = (z + z^{-1})/2$ и определим решения φ_n , ψ_n асимптотическими условиями

$$(2.2.66) \quad \begin{aligned} \varphi_n &\sim z^n, & n \rightarrow +\infty, \\ \psi_n &\sim z^{-n}, & n \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

для $|z| = 1$ (это дискретный аналог функций Йоста). Из линейной независимости функций $\varphi_n(z)$ и $\varphi_n(z^{-1})$ следует

$$(2.2.67) \quad \psi_n(z) = \beta(z) \varphi_n(z) + \alpha(z) \varphi_n(z^{-1}),$$

где $|\alpha|^2 = 1 + |\beta|^2$. Функцию $R(z) = \beta(z)/\alpha(z)$ называют коэффициентом отражения. Собственным значениям отвечает конечное множество вещественных точек z , принадлежащих интервалу $(-1, 1)$. Если $\lambda_i = (z_i + z_i^{-1})/2$ является вещественным собственным значением, то нормированной собственной функцией $\xi_n(z_i)$ мы будем называть собственную функцию, удовлетворяющую условию

$$(2.2.68) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n^2(z_i) = 1,$$

и при $n \rightarrow \infty$ она стремится к $\xi_n(z_i) \sim c_0 z_i^n$. Обратную задачу можно решить, вычислив

$$(2.2.69a) \quad F(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint R(z) z^{n-1} dz + \sum_{l=0}^N c_l^2 z_l^n$$

и решив при $m > n$ уравнение

$$(2.2.69b) \quad \kappa(n, m) + F(n+m) + \sum_{n'=n+1}^{\infty} \kappa(n, n') F(n'+m) = 0$$

относительно $\kappa(n, m)$. Определим

$$(2.2.70a) \quad (\kappa(n, n))^{-2} = 1 + F(2n) + \sum_{n'=n+1}^{\infty} \kappa(n, n') F(n'+n)$$

и найдем

$$(2.2.70b) \quad a_n = \frac{1}{2} \frac{\kappa(n+1, n+1)}{\kappa(n, n)}$$

и

$$(2.2.70c) \quad b_n = -\frac{1}{2} \frac{\kappa(n, n) \kappa(n-1, n) - \kappa(n, n+1) \kappa(n-1, n-1)}{\kappa(n-1, n-1) \kappa(n, n)}.$$

Для цепочки Тоды (2.2.1), связанной с (2.2.7) посредством (2.2.13), (2.2.14), зависимость данных рассеяния от времени имеет вид

$$(2.2.71) \quad R(z, t) = R(z, 0) e^{(z-z^{-1})t},$$

$$c_j(t) = c_j(0) e^{t(z_j-z_j^{-1})t}.$$

В случае чисто дискретного спектра $R(z, 0) = 0$, и решение можно вычислить в замкнутой форме. Односолитонное решение, отвечающее единственному собственному значению z_1 , имеет вид

$$(2.2.72a) \quad e^{-(Q_n - Q_{n-1})} - 1 = \frac{z_1^2 + z_1^{-2} - 2}{Az_1^n + (Az_1^n)^{-1}},$$

где $A = c_1 \exp((z_1 - z_1^{-1})t/2)$. Положив $z = \sigma e^{-\psi}$, $\sigma = \pm 1$, приведем его к виду

$$(2.2.72b) \quad e^{-(Q_n - Q_{n-1})} = 1 + \operatorname{sh}^2 W / \operatorname{ch}^2(W(n-n_0) + \sigma \operatorname{sh} W t),$$

где n_0 является константой, зависящей только от c_1 , z_1 . Отметим, что это солитонное решение может двигаться как в положительном, так и в отрицательном направлении.

2.3. Периодические граничные условия для уравнения Кортевега — де Фриза. Чрезвычайно интересной является задача с периодическими граничными условиями для нелинейных эволюционных уравнений, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния. К первым публикациям на эту тему относятся работы Лакса (1975) [320], Новикова (1974) [401], Каца и Ван Мёрбеке (1975) [250, 251], Дубровина и Новикова (1975) [144], Итса и Матвеева (1975) [240], Мак-Кина и Ван Мёрбеке (1975)

[369], Мак-Кина и Грубовица (1976) [368], Дейта и Танаки (1976) [129, 130]. Кроме здесь перечисленных, по этому вопросу было еще опубликовано много других работ, содержащих важные результаты. Обсуждение можно найти в обзорных статьях Матвеева [355] и Дубровина, Матвеева, Новикова [143]. В этой главе мы ограничимся рассмотрением задачи интегрирования уравнения КdФ в классе так называемых конечнозонных потенциалов с периодическими граничными условиями. Решение будет условно перидическим, или квазипериодическим, т. е. волной, зависящей от N фазовых переменных $\theta_i = \kappa_i x - \omega_i t$, периодической по каждому θ_i , но, вообще говоря, с несоизмеримыми частотами ω_i . Волны, обсуждаемые в этом разделе, являются периодическими по x и почти-периодическими по t . (Грубо говоря, функция $f(t)$ является почти-периодической, если существует такой период $T(\epsilon)$, что для любого ϵ имеет место неравенство $|f(t+T) - f(t)| < \epsilon$ при всех t . Строгое определение можно найти в книге Немыцкого и Степанова [394] или в каком-нибудь другом учебнике.) Мы сведем уравнение КdФ к конечномерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которую можно проинтегрировать. Интегрирование потребует привлечения некоторых понятий из алгебраической геометрии и теории гиперэллиптических функций, однако здесь мы не будем вдаваться в подробности. В этом разделе мы будем следовать работе Дубровина и Новикова [144]. Изучались и другие нелинейные уравнения с периодическими граничными условиями: нелинейное уравнение Шрёдингера (Абловиц и Ма [20]¹), уравнение sin-Гордон (Мак-Кин [367]²), уравнение Кадомцева — Петвиашвили (Новиков, Кричевер [402]).

Говоря математически, мы рассматриваем вопрос о построении решения уравнения КdФ

$$(2.3.1a) \quad u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

с периодическими (периода \tilde{T}) граничными условиями

$$(2.3.1b) \quad u(x, t) = u(x + T, t)$$

и заданными начальными условиями $g(x)$

$$(2.3.1c) \quad u(x, 0) = g(x).$$

Впоследствии определение функции $g(x)$ будет уточнено (т. е. $g(x)$ будет N -зонным потенциалом).

2.3. а. Прямая задача рассеяния. С уравнением (2.3.1) связана задача рассеяния для оператора Шрёдингера (см. также

¹⁾ См. также [6*, 7*]. — Прим. перев.

²⁾ См. также [8*, 9*]. — Прим. перев.

гл. 1; обратите внимание на изменение знака)

$$(2.3.2) \quad v_{xx} + (E - u)v = 0, \quad E = k^2.$$

Определим два решения уравнения (2.3.2), $\varphi(x; x_0, k)$ и $\varphi^*(x; x_0, k)$ (φ^* комплексно сопряжено с φ), таких что при $x = x_0$ (x_0 — произвольная точка внутри интервала $0 \leq x_0 \leq T$)

$$(2.3.3) \quad \begin{aligned} \varphi(x_0; x_0, k) &= 1, & \varphi^*(x_0; x_0, k) &= 1, \\ \varphi_x(x_0; x_0, k) &= ik, & \varphi_x^*(x_0; x_0, k) &= -ik. \end{aligned}$$

Если $\varphi(x_0; x_0, k)$ является решением (2.3.2), то решением является и $\varphi(x + T; x_0, k)$. Поскольку φ, φ^* образуют полный линейно независимый набор решений, то составленная из них матрица фундаментального решения удовлетворяет соотношению

$$(2.3.4a) \quad \Phi(x + T; x_0, k) = \hat{T}(x_0, k) \Phi(x; x_0, k),$$

где

$$(2.3.4b)$$

$$\Phi(x; x_0, k) = \begin{pmatrix} \varphi & \varphi_x \\ \varphi^* & \varphi_x^* \end{pmatrix} (x; x_0, k), \quad \hat{T}(x_0, k) = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & a^* \end{pmatrix} (x_0, k).$$

При этом \hat{T} часто называют *матрицей монодромии* (см. разд. 3.7). В периодической задаче она играет роль матрицы рассеяния. Вронскиан двух решений (2.3.2) не зависит от x , т. е. $W(u, v) = uv_x - vu_x = \text{const}$. Так как $W(\varphi, \varphi^*) = -2ik$, то, вычислив определители (2.3.4), получим

$$(2.3.4c) \quad |a|^2 - |b|^2 = 1.$$

Так называемые функции Блоха $\psi_{\pm}(x; x_0, k)$ определяются как решения (2.3.2) при дополнительном условии

$$(2.3.5) \quad \psi_{\pm}(x_0; x_0, k) = 1, \quad \psi_{\pm}(x + T; x_0, k) = \lambda \psi_{\pm}(x; x_0, k).$$

Так как ψ_{\pm} удовлетворяют уравнению (2.3.2), то они являются линейными комбинациями функций φ, φ^* :

$$(2.3.6) \quad \psi_{\pm}(x) = C\varphi(x) + D\varphi^*(x)$$

(остальные аргументы подразумеваются; C, D константы). Из определений (2.3.4a), (2.3.5) получим, что C, D удовлетворяют соотношениям

$$(2.3.7) \quad \begin{aligned} (a - \lambda)C + Db^* &= 0, \\ bC + (a^* - \lambda)D &= 0. \end{aligned}$$

Для существования нетривиального решения (C, D) для λ должно выполняться соотношение

$$(2.3.8a) \quad \lambda^2 - \lambda(a + a^*) + |a|^2 - |b|^2 = 0,$$

или

$$(2.3.8b) \quad \lambda^2 - 2a_R\lambda + 1 = 0,$$

где a_R — вещественная часть a . Для вещественных E ($E = k^2$) возможны следующие случаи.

(1) Если $|a_R| > 1$, то одно из собственных значений $|\lambda|$ больше единицы, а другое меньше единицы. Поэтому функция Блоха неограничена.

(2) Если $|a_R| < 1$, то $|\lambda| = 1$ и функция Блоха ограничена. В данном случае мы обозначим $a_R(k) = \cos p(k)$ и, следовательно, $\lambda = \exp(\pm ip(k))$.

(3) Если $|a_R| = 1$, то $\lambda = \pm 1$ и функция Блоха является либо периодической, либо антiperиодической.

Теперь мы определим два спектра, которые позволяют восстановить потенциал u .

Основной спектр. Основной спектр состоит из собственных значений $E_i = k^2$, для которых по крайней мере одна из собственных функций является периодической или антiperиодической. Точки E_i являются корнями уравнения $|a_R| = 1$. *Разрешенными зонами* являются (открытые) сегменты, расположенные между соседними E_i , в которых $|a_R| < 1$. *Запрещенными зонами* называются открытые сегменты между соседними E_i , в которых $|a_R| > 1$. Точки E_i называют границами зон. Типичная функция $a_R = a_R(E)$ показана на рис. 2.1.

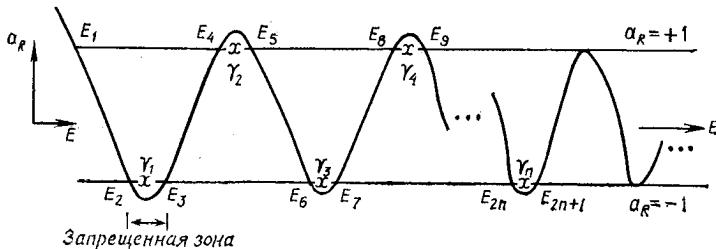


Рис. 2.1. Типичный вид функции $a_R = a_R(E)$.

На рисунке видно, что запрещенным зонам отвечают интервалы между E_{2j} и E_{2j+1} . Зависимость $a_R(E)$ иногда называют диаграммой (определителем) Флока. Многие свойства спектра, которые мы будем обсуждать в этой главе, были тщательно рассмотрены с другой точки зрения в книге Магнуса и Уинклера [341].

Вспомогательный спектр γ_i . Определим γ_i — такие значения E , в которых

$$(2.3.9) \quad a_i + b_i = 0.$$

Поскольку выполняется условие $|a|^2 - |b|^2 = 1$, соотношение (2.3.9) означает, что $a_R^2 = 1 + b_R^2$. Таким образом, собствен-

ные значения ψ_i лежат в запрещенных зонах или на границах зон.

Вспомогательный спектр можно определить также другим способом, потребовав, чтобы собственная функция, удовлетворяющая уравнению (2.3.2) (мы будем обозначать ее $y(x; x_0, k)$) удовлетворяла фиксированным граничным условиям. Например, в этом случае

$$(2.3.10) \quad y(x_0) = 0, \quad y(x_0 + T) = 0.$$

Тогда из разложения $y = A\varphi + B\varphi^*$ с некоторыми ненулевыми A, B и с помощью (2.3.10) и (2.3.4) можно вывести (2.3.9).

Теперь мы перечислим спектральные свойства E_i и ψ_i . Они доказываются стандартным применением в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. (Методы доказательства читатель при желании может найти в [341] или в [368].)

Спектральные свойства.

(1) Основной спектр состоит из счетного множества вещественных собственных значений. Разделим его на два множества: невырожденные границы зон E_i и вырожденные границы зон \hat{E}_i . В невырожденном случае $da_R/\partial E|_{E=E_i} \neq 0$ (т. е. E_i является простым корнем уравнения $a_R^2 - 1 = 0$); равенство $da_R/\partial E|_{E=\hat{E}_i} = 0$ выполняется для вырожденных границ зон. Каждое \hat{E}_i представляет собой двойной корень уравнения $a_R^2 - 1 = 0$, корни кратности больше двух отсутствуют. $a'_R(E) \neq 0$ при $|a_R(E)| < 1$.

(2) Вспомогательный спектр также состоит из счетного множества вещественных собственных значений. Они могут лежать либо внутри запрещенных зон, либо на границах зон. Все эти собственные значения являются простыми корнями уравнения $a_i + b_i = 0$. Далее мы разделим вспомогательный спектр на два подмножества ψ_i и $\hat{\psi}_i$. Спектр $\hat{\psi}_i$ совпадает с \hat{E}_i , и существует одна и только одна точка ψ_i в каждой запрещенной зоне. (Эти спектральные свойства являются следствиями осцилляционных теорем в теории обыкновенных дифференциальных уравнений.)

Конечнозонные потенциалы. Произвольный периодический потенциал может иметь бесконечное число невырожденных собственных значений основного спектра (простых корней уравнения $a_R^2 = 1$). Здесь мы рассмотрим конечнозонные потенциалы, т. е. потенциалы, имеющие только конечное число невырожденных собственных значений $E_i, i = 1, 2, \dots, 2n + 1$, а остальные собственные значения вырождены.

В общем случае имеется бесконечное число невырожденных собственных значений. Эта теория была распространена и на общий случай Мак-Кином и Трубовицем (1976) [368], но обобщение весьма нетривиально.

Здесь нам удобно ввести в рассмотрение функцию $\chi = -i\psi_{\pm}/\psi_{\pm}$. Так как ψ_{\pm} удовлетворяет уравнению (2.3.2), то χ удовлетворяет уравнению Риккати

$$(2.3.11a) \quad -i\chi' + \chi^2 + u = E.$$

Таким образом, если $\chi = \chi_R + i\chi_I$, то имеем

$$(2.3.11b) \quad \chi_I = \frac{1}{2} (\ln \chi_R)_x$$

и представление

$$(2.3.11c) \quad \Psi_{\pm}(x; x_0, E) = \left(\frac{\chi_R(x_0; x_0, E)}{\chi_R(x; x_0, E)} \right)^{1/2} \exp \left(i \int_{x_0}^x \chi_R(y; x_0, k) dy \right).$$

Ниже мы будем пользоваться следующими асимптотическими формулами (при $|E| \rightarrow \infty$, $E = k^2$):

$$(2.3.12a) \quad \Psi_{\pm} \sim \exp(ik(x - x_0)),$$

$$(2.3.12b) \quad \chi_{\pm} \sim k\chi_1 + \chi_0 + \frac{1}{k}\chi_{-1} + \frac{1}{k^2}\chi_{-2} + \dots$$

с

$$\chi_1 = \pm 1, \quad \chi_0 = 0, \quad \chi_{-1} = \mp u/2,$$

$$\chi_{-2} = \mp \left(\frac{i}{2} \right) u_x, \quad \chi_{-3} = \pm (2u_{xx} - u^2), \dots;$$

то есть,

$$(2.3.13) \quad \chi_{\pm} \sim \pm \left(k - \frac{u}{2k} - \frac{2iu_x}{(2k)^2} + \frac{1}{2k^3} (2u_{xx} - u^2) + \dots \right).$$

Отметим, что, вообще говоря, уравнение КdФ и его высшие аналоги могут быть представлены в виде (см. Захаров, Фаддеев [532] или разд. 1.6)

$$(2.3.14) \quad u_t = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta \sum_{m=0}^N C_m I_{2m+1}}{\delta u(x)},$$

где $I_{2m+1} = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{-(2m+1)}(x) dx$ и $\delta I / \delta u$ — производная Фреше от I .

2.3. б. Обратная задача рассеяния. Функцию χ можно выразить через данные рассеяния a , b . Для этого мы воспользуемся (2.3.6). Исходя из равенств $\psi(x = x_0) = 1$, и $\psi'(x = x_0) = i\chi'(x = x_0)$ (последнее следует из определения χ), получим

$$(2.3.15a) \quad \psi = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\chi_0}{k} \right) \varphi + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\chi_0}{k} \right) \varphi^*,$$

где $\chi_0 = \chi(x = x_0) = \chi(x_0; x_0, k)$ ¹⁾. Теперь, воспользовавшись соотношениями (2.3.5) при $x = x_0$ и (2.3.8b), получим

$$(2.3.15b) \quad \chi_{0\pm} = \frac{k(\pm\sqrt{1-a_R^2} + ib_R)}{a_I + b_I} = \chi_{0R\pm} + i\chi_{0I\pm}.$$

Поэтому

$$(2.3.15c) \quad \chi_{0R\pm} = \frac{\pm k\sqrt{1-a_R^2}}{a_I + b_I}.$$

Теперь введем другой базис функций, удобный для анализа свойств *аналитичности* данных рассеяния. Мы определим собственные функции $c(x; x_0, E)$, $s(x; x_0, E)$, такие что при $x = x_0$

$$(2.3.16a) \quad c(x_0; x_0, E) = 1, \quad c_x(x_0; x_0, E) = 0,$$

$$(2.3.16b) \quad s(x_0; x_0, E) = 0, \quad s_x(x_0; x_0, E) = 1.$$

Оператор трансляции можно записать в виде

$$(2.3.17a) \quad c(x + T; x_0, E) = a_{11}c(x; x_0, E) + a_{12}s(x; x_0, E),$$

$$(2.3.17b) \quad s(x + T; x_0, E) = a_{21}c(x; x_0, E) + a_{22}s(x; x_0, E).$$

Имеется следующая связь между базисами (2.3.3, 4) и (2.3.16, 17):

$$(2.3.18) \quad \begin{aligned} a_{11} &= a_R + b_R, & a_{22} &= a_R - b_R, \\ a_{12} &= -k(a_I - b_I), & a_{21} &= \frac{a_I + b_I}{k}. \end{aligned}$$

Преобразовав уравнение Шрёдингера (2.3.2) в интегральное уравнение Вольтерры (интегрирование проводится от x_0 до x), можно показать, что собственные функции c , s суть целые функции переменной E . Это означает, что коэффициенты a_{ij} также являются целыми функциями переменной E . В теории функций комплексного переменного доказывается, что целую функцию можно представить в виде произведения ее нулей и целой функции, не имеющей нулей. В частности,

$$(2.3.19a) \quad 1 - a_R^2(E) = g_1(E) \sum_{i=1}^{2N+1} (E - E_i) \prod_{j=1}^{\infty} (E - \hat{E}_j)^2,$$

$$(2.3.19b) \quad \frac{(a_I + b_I)^2}{E} = g_2(E) \prod_{i=1}^N (E - \gamma_i)^2 \prod_{j=1}^{\infty} (E - \hat{E}_j)^2.$$

Отметим, что $g_i(E)$, $i = 1, 2$, суть целые функции, не имеющие нулей, E_i — простые корни уравнения $1 - a_R^2 = 0$, \hat{E}_i — дву-

¹⁾ В предыдущем пункте буква χ_0 обозначала совсем другую величину.—
Прим. перев.

кратные корни уравнения $1 - a_R^2 = 0$ и простые корни уравнения $a_l + b_l = 0$, γ_i — это простые корни уравнения $a_l + b_l = 0$, расположенные *внутри* запрещенных зон. Таким образом, χ_{0R}^2 представляется в виде

$$(2.3.20) \quad \chi_{0R}^2 = \frac{E(1 - a_R^2)}{(a_l + b_l)^2} = \frac{\prod_{i=1}^{2N+1} (E - E_i)}{\prod_{i=1}^N (E - \gamma_i)^2} g(E),$$

где функция $g(E) = g_1(E)/g_2(E)$ является целой и не имеет нулей. Асимптотика $g(E)$ при $E \rightarrow \infty$ определяется по известной из (2.3.13) асимптотике χ_R :

$$(2.3.21) \quad \chi_R^2 = E - u + O\left(\frac{1}{E}\right).$$

Сравнив (2.3.20) и (2.3.21), мы видим, что $\lim_{E \rightarrow \infty} g(E) = 1$. Поэтому из теоремы Лнувиля следует, что

$$(2.3.22) \quad g(E) = \frac{g_1(E)}{g_2(E)} = 1.$$

Используя (2.3.22), разлагая (2.3.20) и сравнивая с (2.3.21), получим формулу восстановления потенциала u (в точке $x = x_0$):

$$(2.3.23) \quad u = \sum_{i=1}^{2N+1} E_i - 2 \sum_{i=1}^N \gamma_i.$$

Теперь мы установим, что E_i не зависят от точки x_0 , тогда как γ_i зависят от x_0 . Кроме того, мы выведем уравнения для $\gamma_i(x_0)$. При этом потенциал u в *произвольной* точке x_0 можно будет восстановить по формуле (2.3.23).

Рассмотрим малый сдвиг точки x_0 в $x_0 + dx_0$. Матрицу фундаментального решения $\Phi(x; x_0 + dx_0, k)$ можно разложить в ряд Тейлора:

$$(2.3.24) \quad \Phi(x; x_0 + dx_0, k) \sim \Phi(x; x_0, k) + \Phi_{x_0}(x; x_0, k) dx_0 \equiv \\ \equiv (I + Q dx_0) \Phi(x; x_0, k).$$

Так как $\Phi(x; x_0 + dx_0, k)$ и $\Phi(x; x_0, k)$ являются матрицами фундаментального решения, то, как легко понять, $I + Q dx_0$ не зависит от x . Теперь из (2.3.4) и (2.3.24) получим

$$(2.3.25) \quad \Phi(x + T; x_0 + dx_0, k) = \hat{T}(x_0 + dx_0, k) \Phi(x; x_0 + dx_0, k) = \\ = (I + Q dx_0) \hat{T}(x_0, k) \bar{\Phi}(x; x_0, k).$$

Таким образом,

$$(2.3.26a) \quad \hat{T}(x_0 + dx_0, k)(I + Qdx_0) = (I + Qdx_0)T(x_0, k),$$

и в пределе $dx_0 \rightarrow 0$

$$(2.3.26b) \quad \frac{\partial \hat{T}}{\partial x_0} = [Q, \hat{T}],$$

где $[Q, \hat{T}] = Q\hat{T} - \hat{T}Q$. (Читатель может отметить аналогию с (1.2.4c).)

Теперь мы вычислим $Q(x_0)$, воспользовавшись

$$(2.3.27) \quad Q(x_0) = \Phi_{x_0}(x; x_0, k)\Phi^{-1}(x; x_0, k).$$

Нам удобно выбрать x равным x_0 , поскольку правая часть (2.3.27) не зависит от x . Из граничных условий получим

$$(2.3.28a) \quad \Phi(x_0; x_0, k) = \begin{bmatrix} 1 & ik \\ 1 & -ik \end{bmatrix}.$$

Аналогично, матрица

$$(2.3.28b) \quad \Phi_{x_0} = \begin{bmatrix} \Phi_{x_0} & \Phi_{xx_0} \\ * & * \\ \Phi_x & \Phi_{xx_0} \end{bmatrix}$$

равна

$$(2.3.28c) \quad \Phi_{x_0} = \begin{bmatrix} -ik & E - u(x_0) \\ ik & E - u(x_0) \end{bmatrix}.$$

При выводе (2.3.28c) мы воспользовались граничными условиями:

(a) $\varphi(x_0; x_0, E) = 1$, поэтому $(d/dx_0)\varphi(x_0; x_0, E) = 0$ и

$$\varphi_{x_0}(x_0; x_0, E) = -\varphi_x(x_0; x_0, E) = -ik;$$

(b) $\varphi_x(x_0; x_0, E) = ik$, поэтому $(d/dx_0)\varphi_x(x_0; x_0, E) = 0$ и

$$\varphi_{xx}(x_0; x_0, E) = -\varphi_{xx}(x_0; x_0, E) = (E - u(x_0))\varphi(x_0; x_0, E) = E - u(x_0).$$

Из (2.3.27), (2.3.28) следует

$$(2.2.29) \quad Q(x_0) = -ik \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \frac{iu(x_0)}{2k} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

И наконец, подставляя (2.3.4b) в (2.3.26b) и используя (2.3.29), получим

$$(2.3.30a) \quad \frac{\partial a}{\partial x_0} = -ika - \frac{iu}{2k}(a - b^*) + ika - \frac{iu}{2k}(a + b),$$

$$(2.3.30b) \quad \frac{\partial b}{\partial x_0} = -ikb + \frac{iu}{2k}(b - a^*) - ikb + \frac{iu}{2k}(a + b)$$

и комплексно сопряженные к ним выражения (мы предполагаем потенциал u вещественным). Из (2.3.20) следует, что $a_R = (a + a^*)/2$ удовлетворяет уравнению

$$(2.3.31a) \quad \frac{\partial a_R}{\partial x_0} = 0,$$

которое означает, что корни (E_i) уравнения $a_R^2 = 1$ не зависят от x_0 . Кроме того, теперь мы можем найти уравнения для $\gamma_i(x_0)$. Из (2.3.30) имеем

$$(2.3.31b) \quad \frac{\partial}{\partial x_0} (a_I + b_I) = -2kb_R.$$

Из равенства $|a|^2 - |b|^2 = 1$, взятого в точках $E = \gamma_j$, где $(a_I + b_I)(E = \gamma_j) = 0$ (по определению γ_j (2.3.9)), следует, что

$$(2.3.31c) \quad b_R = i\sigma_j \sqrt{1 - a_R^2}, \quad \sigma_j = \pm 1.$$

Воспользовавшись (2.3.19), (2.3.22) и вычислив (2.3.31) в точках $E = \gamma_j$, получим

$$(2.3.32) \quad - \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \frac{d\gamma_j}{dx_0} = -2i\sigma_j \prod_{i=1}^{2N+1} (\gamma_j - E_i)^{1/2}, \quad j = 1, \dots, N,$$

или, определив

$$(2.3.33) \quad R(E) = \prod_{i=1}^{2N+1} (E - E_i),$$

из (2.3.32) выведем

$$(2.3.34) \quad \frac{d\gamma_j}{dx_0} = \frac{2i\sigma_j R^{1/2}(\gamma_j)}{\prod_{k=1, k \neq j}^N (\gamma_j - \gamma_k)}, \quad \sigma = \pm 1, \quad j = 1, \dots, N.$$

Система уравнений (2.3.34) задает зависимости точек γ_j от x_0 , которые в свою очередь определяют $u(x_0)$ при всех x_0 . Величины γ_j и знаки σ_j считаются заданными в некоторой начальной точке x_0 . При прохождении γ_j через границу запрещенной зоны величина σ_j будет менять знак. Точки E_i , $i = 1, 2, \dots, 2N+1$, являются точками ветвления. Для корня $R^{1/2}(E)$ мы сделаем разрезы вдоль запрещенных зон между E_{2j} и $E_{2j+1, j=1, \dots, N}$ от $E = -\infty$ до E_1 . Так возникает риманова поверхность корня $R^{1/2}(E)$.

Замечательно, что существует преобразование, позволяющее проинтегрировать систему N нелинейных дифференциальных уравнений (2.3.34). Перед тем как перейти к этому вопросу, мы вначале покажем, как вспомогательный спектр зависит от времени, если потенциал удовлетворяет уравнению КdФ. Эта

зависимость, как будет показано, также может быть представлена в виде системы N обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений.

2.3. с. Зависимость от времени. Зависимость собственных функций от времени для (2.3.1), (2.3.2), как было показано в разд. 1.4, имеет вид

$$(2.3.35) \quad v_t = M_v, \quad M = (4E + 2u) \frac{\partial}{\partial x} - u_x.$$

В любой заданный момент t имеются две линейно независимые функции v_1, v_2 , удовлетворяющие (2.3.2), (2.3.35). Мы можем разложить их по φ, φ^* следующим образом:

$$(2.3.36) \quad v_i = f_i(t) \varphi + g_i(t) \varphi^*, \quad i = 1, 2.$$

Подставив (2.3.36) в (2.3.35), получим, что φ удовлетворяет уравнению

$$(2.3.37) \quad \varphi_t - M\varphi = \lambda\varphi + \mu\varphi^*,$$

где λ, μ зависят только от t . (Аналогично φ^* удовлетворяет комплексно сопряженным уравнениям.) Теперь мы определим λ, μ . При $x = x_0$

$$(2.3.38) \quad \varphi = 1, \quad \varphi_t = 0, \quad \varphi_x = ik, \quad \varphi_{xt} = 0$$

(для φ^* аналогично). Таким образом, из (2.3.37) получим ($x = x_0$)

$$(2.3.39a) \quad 0 = ik(4E + 2u(x_0)) - u_x(x_0) + \lambda + \mu.$$

Вычислив ∂_x от (2.3.37) в точке $x = x_0$, получим

$$(2.3.39b)$$

$$0 = iku_x(x_0) - u_{xx}(x_0) + (4E + 2u(x_0))(u(x_0) - E) + ik(\lambda - \mu).$$

Разрешив (2.3.39a, b) относительно λ, μ , найдем

$$(2.3.40a) \quad \lambda = \frac{-i}{2k} u_{xx}(x_0) - 4ik^3 + i \frac{u^2}{k},$$

$$(2.3.40b) \quad \mu = u_x(x_0) - 2iku(x_0) + \frac{i}{2k} u_{xx}(x_0) - \frac{i}{k} u^2.$$

Эти результаты можно записать в матричной форме

$$(2.3.41a) \quad \Phi_t = Q\Phi + \Lambda\Phi + V,$$

где Φ определено в (2.3.4b), Q — в (2.3.27), а Λ и V имеют вид

$$(2.3.41b) \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \mu^* & \lambda^* \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} 0 & Q\varphi_x \\ 0 & Q\varphi_x^* \end{pmatrix}.$$

Вычислив (2.3.41) в точке $x = x_0 + T$ и воспользовавшись (2.3.4), получим уравнение

$$(2.3.42a) \quad \hat{T}_t \Phi(x_0) + \hat{T} \Phi_t(x_0) = Q \hat{T} \Phi(x_0) + \Lambda \hat{T}(x_0) + V(x_0 + T),$$

которое приводится к виду

$$(2.3.42b) \quad \hat{T}_t = [\Lambda, \hat{T}],$$

где $[\Lambda, \hat{T}] = \Lambda \hat{T} - \hat{T} \Lambda$. (Опять отметим соответствие с (1.2.4c).) В терминах a, b уравнение (2.3.42b) имеет вид

$$(2.3.43) \quad \begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial t} &= \mu b^* - \mu^* b, \\ \frac{\partial b}{\partial t} &= (\lambda - \lambda^*) b + \mu (a^* - a). \end{aligned}$$

Отсюда нетрудно вывести, что a_R и $a_I + b_I$ (напомним, что $a_R = (a + a^*)/2$ и т. д.) удовлетворяют уравнениям

$$(2.3.44a) \quad \frac{\partial a_R}{\partial t} = 0,$$

$$(2.3.44b) \quad \frac{\partial}{\partial t} (a_I + b_I) = -2\mu_R (a_I + b_I) + 2(\mu_I + \lambda_I) b_R.$$

Из (2.3.44) немедленно получаем, что собственные значения E_i (корни уравнения $a_R^2 = 1$) не зависят от времени. А из (2.3.44b) можно найти движение вспомогательного спектра γ_j . Воспользуемся (2.3.19) и равенством $b_R^2 = a_R^2 - 1 + a_I^2 - b_I^2$. В точках $E = \gamma_j$ получим

$$(2.3.45) \quad \begin{aligned} - \prod_{k=1}^{\infty} (\gamma_k - \hat{E}_k) \gamma_j^{1/2} g_2^{1/2}(\gamma_j) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N (\gamma_j - \gamma_k) \frac{\partial \gamma_j}{\partial t} &= \\ &= -2i(\lambda_I + \mu_I) \sigma'_j g_1^{1/2}(\gamma_j) R^{1/2}(\gamma_j) \prod_{k=1}^{\infty} (\gamma_j - \hat{E}_k), \end{aligned}$$

где $\sigma'_j = \pm 1$ и $R(E)$ дается формулой (2.3.33). Воспользовавшись (2.3.40) и равенством $g_1(E)/g_2(E) = 1$, получим

$$(2.3.46) \quad \frac{d\gamma_j}{dt} = \frac{4i\sigma'_j}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N (\gamma_j - \gamma_k)} (2\gamma_j + u(x_0)) R^{1/2}(\gamma_j), \quad j = 1, \dots, N.$$

И наконец, воспользовавшись формулой обращения (2.3.23), преобразуем (2.3.46) к виду

$$(2.3.47) \quad \frac{d\gamma_j}{dt} = \frac{8i\sigma'_j}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N (\gamma_j - \gamma_k)} \left(\sum_{k=1}^N \gamma_k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2N+1} E_k \right) R^{1/2}(\gamma_j).$$

Уравнения (2.3.34) и (2.3.47) определяют функции $\gamma(x_0, t)$, по которым мы можем восстановить потенциал $u(x_0, t)$ (2.3.23), являющийся решением уравнения КдФ. Эти системы обыкновенных дифференциальных уравнений могут быть проинтегрированы при помощи подходящего преобразования (преобразования Абеля). По заданным в некоторой точке x_0 значениям γ_i и знакам σ_i мы определим γ_j во всех точках интервала, решив систему (2.3.34). После этого мы имеем начальные данные для системы (2.3.47), которую тоже можно решить.

При $N = 1$ полином $R(E)$ (2.3.33) имеет третий порядок, поэтому решение γ_j уравнений (2.3.34) и (2.3.37) является эллиптической функцией от x и t . Интегрируя, получим хорошо известную кноидальную волну:

$$\begin{aligned} u = & -2(E_3 - E_2) \operatorname{cn}^2(\sqrt{E_3 - E_1}(x - 2(E_1 + E_2 + E_3)t) + \\ & + \eta_0|m|) + E_1 + E_3, \\ m = & \frac{E_3 - E_2}{E_3 - E_1} \end{aligned}$$

($\operatorname{cn}(u|m)$ — эллиптическая функция Якоби с модулем m). Эта теория позволяет расширить класс периодических по x решений уравнения КдФ и включить в него решения, выражющиеся через гиперэллиптические функции.

Геометрически мы можем представить себе γ_j движущимися вдоль невырожденных запрещенных зон $l_j = \{E; E_{2j} \leq E \leq E_{2j+1}, j = 1, \dots, N\}$ в комплексной плоскости E . Отождествив соответствующим образом границы разрезов, проведенных вдоль запрещенных зон двух экземпляров комплексной плоскости, получим риманову поверхность R корня $R(E)$ (2.3.33). Точка γ_j пробегает путь, состоящий из двух участков $[l_j, +1]$ и $[l_j, -1]$. Первый отвечает верхней границе разреза с $\sigma_j = 1$, второй нижней границе с $\sigma_j = -1$. Точка переходит с одной границы разреза на другую в момент прохода через концы зоны (рис. 2.2).

Теперь мы опишем процедуру интегрирования уравнений (2.3.34) и (2.3.47). Определим координаты

$$(2.3.48a) \quad P_j = (\gamma_j, \sigma_j),$$

т. е. γ_j с учетом знака σ_j , и преобразование (Абеля)

$$(2.3.48b) \quad \Omega_m(E) = \sum_{k=0}^{N-1} C_{km} \frac{E^k dE}{R^{1/2}(E)},$$

$$(2.3.48c) \quad \eta_m(P_1, \dots, P_N) = \sum_{i=1}^N \oint_{E_{2j}} \Omega_m(E).$$

Обычно коэффициенты C_{km} нормируют условие (α_j — цикл, обходящий соответствующую запрещенную зону l_j)

$$(2.3.48d) \quad \oint_{\alpha_j} \Omega_m(E) = 2\pi i \delta_{jm},$$

которое приводит к N уравнениям для N неизвестных. Из (2.3.48d) следует, что коэффициенты C_{km} вещественные (так

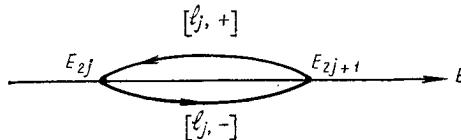


Рис. 2.2. Разрез на комплексной плоскости; движение точек γ_j .

как $R^{1/2}(E)$ является чисто мнимым для E , лежащих в запрещенной зоне). Отметим, что преобразование (2.3.48c) определено неоднозначно (к η_m можно добавлять кратные $\oint_{\alpha_i} \Omega_m$). В любом случае вычисление $d\eta_m/dx_0$ с помощью (2.3.48c), (2.3.34) после некоторых преобразований дает

$$(2.3.49) \quad \begin{aligned} \frac{d\eta_m}{dx_0} &= \sum_{j=1}^N \Omega_m(Q_j) \frac{d\gamma_j}{dx_0} = \\ &= 2i \sum_{k=0}^{N-1} C_{km} \left(\sum_{j=1}^N \frac{\gamma_j^k}{\prod_{\substack{n=1 \\ n \neq j}}^N (\gamma_j - \gamma_n)} \right). \end{aligned}$$

Однако имеет место тождество

$$(2.3.50) \quad \sum_{j=1}^N \frac{\gamma_j^k}{\prod_{\substack{n=1 \\ n \neq j}}^N (\gamma_j - \gamma_n)} = \delta_{k, N-1},$$

где $\delta_{k,m}$ — символ Кронекера. (Это можно доказать, вычислив интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\gamma^k d\gamma}{\prod_{n=1, n \neq j}^N (\gamma - \gamma_n)} d\gamma$$

по контуру, охватывающему все точки γ_n .) Учитывая (2.3.50), мы из (2.3.49) немедленно получим

$$(2.3.51) \quad \frac{d\eta_m}{dx_0} = 2iC_{N-1, m}.$$

Итак, мы показали, что (2.3.34) сводится к интегрируемой системе (2.3.51) с помощью преобразования (2.3.48).

Аналогичным образом мы можем определить зависимость переменных η_m от времени (воспользовавшись (2.3.50)):

$$(2.3.52) \quad \begin{aligned} \frac{d\eta_m}{dt} &= \sum_{j=1}^N \Omega_m(Q_j) \frac{d\gamma_j}{dt} = \\ &= 8i \sum_{k=0}^{N-1} C_{km} \sum_{j=1}^N \frac{\gamma_j^k}{\prod_{\substack{n=1 \\ n \neq j}}^N (\gamma_j - \gamma_n)} \left(\sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^N \gamma_s - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{2N+1} E_s \right) = \\ &= 8i \left(\sum_{s=1}^N \gamma_s - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{2N+1} E_s \right) C_{N-1, m} - \\ &\quad - 8i \sum_{k=0}^{N-1} C_{km} \sum_{j=1}^N \frac{\gamma_j^{k+1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^N (\gamma_j - \gamma_s)}. \end{aligned}$$

Имеет место следующее тождество:

$$(2.3.53) \quad \sum_{j=1}^N \frac{\gamma_j^{k+1}}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N (\gamma_i - \gamma_j)} = \begin{cases} 0, & k = 0, 1, \dots, N-3, \\ 1, & k = N-2, \\ \sum_{i=1}^N \gamma_i, & k = N-1. \end{cases}$$

Первые два равенства в (2.3.53) ($k \leq N-2$) следуют из (2.3.50), а последнее можно доказать по индукции. С учетом (2.3.53) уравнение (2.3.52) приводится к виду

$$(2.3.54) \quad \frac{d\eta_m}{dt} = -8iC_{N-2, m} - 4iC_{N-1, m} \sum_{j=1}^{2N+1} E_j.$$

Таким образом, получаем из (2.3.51), (2.3.54):

$$(2.3.55a) \quad \eta_m = i(\alpha_m x - \omega_{mt} + \eta_m^0),$$

$$(2.3.55b) \quad \alpha_m = 2C_{N-1, m},$$

$$(2.3.55c) \quad \omega_m = 8C_{N-2, m} + 4C_{N-1, m} \sum_{j=1}^{2N+1} E_j.$$

Волновые числа α_m и частоты ω_m в (2.3.55) вещественные (мы уже отмечали, что C_{jk} , определенные из (2.3.48d), суть вещественные коэффициенты).

Преобразование (2.3.48) обратимо (см. [144, 143]), поэтому мы можем записать

$$(2.3.56) \quad P_j = P_j(\eta_1, \dots, \eta_N).$$

Теперь из (2.3.23) и (2.3.48a) следует, что u имеет вид

$$(2.3.57) \quad u(x) = f(\eta_1, \dots, \eta_N) + \text{const}$$

(т. е. u является функцией η_1, \dots, η_N). Этот результат означает, что частное решение уравнения КдФ, отвечающее N -зонному потенциалу, имеет в точности N фаз, и это решение является в общем случае условно периодическим по времени. Каждое γ_i «движется» внутри своей запрещенной зоны с неким определенным периодом. Поскольку мы с самого начала наложили условие периодичности по x , то все γ_i являются периодическими (с периодом T) функциями x .

Можно показать (см., например, [143]), что решение (2.3.57) уравнения КдФ можно выразить через подходящую алгебраическую функцию на $2N$ -мерном торе, а именно

$$(2.3.58a) \quad u = -2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \Theta_W(\eta_1, \dots, \eta_N) + \text{const},$$

где Θ — тэта-функция Римана,

$$(2.3.58b) \quad \Theta(\eta_1, \dots, \eta_N) = \\ = \sum_{M=M_1, \dots, M_N=-\infty}^{\infty} \exp \left(\frac{1}{2} \sum_{j, k=1}^N B_{jk} M_j M_k + \sum_{k=1}^N M_k \eta_k \right),$$

а матрица B_{jk} определяется следующим образом:

$$(2.3.58c) \quad B_{jk} = \oint_{\beta_k} \Omega_j(E).$$

Циклы β_k на римановой поверхности R не пересекают циклов α_j при $j \neq k$, а α_j, β_j пересекаются в одной точке E_{2j} (рис. 2.3).

Циклы α_i , β_j представляют собой циклы на деформированной N -зонной римановой поверхности. Константу в (2.3.58а) и фазы $\eta_m^{(0)}$ в (2.3.55а) также можно представить в явном виде на этой римановой поверхности. Заинтересованный читатель может обратиться к работам Итса и Матвеева [240], Матвеева [355], Дубровина, Матвеева, Новикова [143]. В действительности Итс и Матвеев [240] построили довольно общее решение (2.3.58) непосредственно (т. е. не обращаясь к описанной конструкции). Их решение является почти-периодической функцией как по x , так и по t .

Здесь мы не будем детальнее обсуждать результаты, относящиеся к периодической задаче. Однако мы должны отметить,

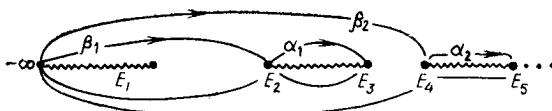


Рис. 2.3.

что в этом направлении было получено много важных результатов. В дополнение к уже перечисленным работам мы рекомендуем заинтересовавшимся читателям следующие статьи: Кричевер [292], Марченко [352], Флашка и Мак-Лафлин [159], Мейман [373], Чередник [106].

Пока эта теория не имеет широких приложений. Недавно Флашка, Форест и Мак-Лафлин [158] рассмотрели медленные модуляции этих N -зонных потенциалов. Задолго до этого Уизем [505] разработал теорию однофазных волн, а Абловиц и Бенни [4] и Абловиц [1, 2] — многофазных волн. В последней работе численное интегрирование использовалось с целью показать существование многопериодических мод (несмотря на присутствие малых знаменателей). Преимущество настоящей теории состоит в возможности построения явного аналитического представления решения.

Упражнения

Раздел 2.1

1. (а) Доказать, что функции $\phi^{(1)}e^{-i\zeta d_1 x}$ и $\psi^{(3)}e^{-i\zeta d_3 x}$ являются аналитическими в нижней полуплоскости, а $\phi^{(1)}e^{-i\zeta d_1 x}$ и $\phi^{(3)}e^{-i\zeta d_3 x}$ — в верхней полуплоскости.

(б) Перейти к пределу $x \rightarrow \infty$ и получить аналогичные результаты для $a_{11}, b_{33}, a_{33}, b_{11}$.

2. В (2.1.1) положить

$$N_{12} = N_{21}^* = \begin{cases} iQ = \text{const}, & |x| < L_1, \\ 0, & |x| > L_1, \end{cases}$$

$$N_{13} = N_{31}^* = \begin{cases} iR = \text{const}, & |x| < L_2, \\ 0, & |x| > L_2, \end{cases}$$

остальные $N_{ij} = 0$. Вычислить данные рассеяния.

3. Показать, что каждый из не зависящих от времени коэффициентов a_{11} и a_{33} дает бесконечную серию законов сохранения. Отличаются ли эти серии? Вычислите три первые плотности в каждой из серий. Имеется ли рекуррентное соотношение для вычисления n -й плотности? Разложение a_{22} также дает серию законов сохранения.

4. (а) Какие условия следует наложить, чтобы нули функций $\tilde{a}_0^{(3)}$ в (2.1.46) соответствовали нулям функций $\tilde{a}_0^{(3)}$?

(б) Показать, что в этом случае имеются солитоны Q_{2f} . Что происходит с Q_{1f} , Q_{3f} ?

5. Обсудить различие между связанными состояниями (отвечающими дискретным собственным значениям) в задачах рассеяния 2×2 и 3×3 .

Раздел 2.2

1. Аикава и Тода [34] показали, что

$$\begin{aligned} (*) \quad & \{\partial_t + (a - a^{-1}) \partial_x\}^2 \ln(1 + au) = \\ & = a^{-2} \{u(x + \sqrt{a}) + u(x - \sqrt{a}) - 2u(x)\} \end{aligned}$$

представляет собой интегрируемое уравнение, которое содержит в себе в качестве частных случаев и цепочку Тоды, и уравнение КdФ.

(а) Показать, что преобразование

$$a_n - a_{n-1} = -\ln(1 + au_n)$$

переводит цепочку Тоды (2.2.1) в

$$(**) \quad \partial_t^2 \ln(1 + au_n) = a(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n).$$

(б) Показать, что (*) сводится к КdФ при $a \rightarrow 0$

(с) Показать, что преобразование

$$x = \sqrt{a} \eta + \left(a - \frac{1}{a}\right)t, \quad \tau = a^{3/2}t$$

переводит (*) в (**). Так как уравнение (**) интегрируемо, а преобразование является простой обратимой заменой координат, то и уравнение (*) тоже интегрируемо. Какая задача рассеяния связана с ним?

2. Найти дискретизацию уравнения sin-Гордон в конусных координатах. Более сложная задача — найти дискретизацию в лабораторных координатах. Интегрируемая дискретизация этого уравнения в лабораторных координатах до сих пор не найдена. (См. [11*, 12*]. — Перев.)

3. Докажите разрешимость (2.2.48). См. разд. 1.3, (1.3.30) и далее.

4. (а) По аналогии с (2.2.63) — (2.2.65) найти рекуррентные формулы для бесконечной последовательности законов сохранения, если $S_n, T_n \not\equiv 0$ (см. (2.2.22)). Вычислить три первых закона сохранения. При каком выборе Q, R, S, T имеются положительно определенные плотности законов сохранения (т. е. «энергия»)? Как это связано с разрешимостью уравнения (2.2.48) в упр. 3?

(б) Найти «формулы следов» для цепочки Тоды. Как они связаны с интегралами Хенона [207]?

(с) Найти переменные действие — угол для цепочки Тоды. Дифференциально-разностные уравнения возникают как модели одномерных кристаллических решеток. Эти модели являются естественными кандидатами для квантования. Квантовомеханические эффекты часто оказываются существенными в решеточной динамике. Формулировка этой проблемы в терминах переменных действие — угол может оказаться необходимым шагом в процессе квантования (см. также разд. 4.5).

5. Имеются ли случаи, когда данные рассеяния можно вычислить явно? Если да, то попытайтесь их вычислить.

Раздел 2.3

Возможно, упражнения к этому разделу следовало бы назвать «нерешенные задачи».

1. Слово «солитон» означает ныне точное решение вполне интегрируемого эволюционного уравнения на оси $-\infty < x < \infty$, отвечающее единственному дискретному собственному значению в спектре соответствующей задачи рассеяния. Однако первоначально этот термин употреблялся Забужским и Краскалом [523] для обозначения локальной волны в их численных экспериментах с уравнением КdФ при *периодических* граничных условиях. Описать на языке (чисто дискретного) спектра периодической задачи, чем отличаются «солитоны», которые наблюдали Краскал и Забужский. Если известны оба спектра для некоторого начального условия периодической задачи для уравнения КdФ, то можно ли предсказать, сколько «солитонов» будет наблюдаться в численном эксперименте?

2. (а) Определить время возвращения N -зонного решения уравнения КdФ.

(b) Основываясь на численных экспериментах для уравнения

$$u_t + uu_x + \delta^2 u_{xxx} = 0$$

при $0 < x < L$ с периодическими граничными условиями и начальными условиями вида

$$u(x, 0) = \sin \frac{2\pi x}{L}.$$

Забужский [521] нашел эмпирическую формулу для времени возвращения

$$T_r = \frac{0,71}{\delta} T_b,$$

где T_b — время опрокидывания решения в уравнении с $\delta = 0$. Можно ли эту формулу вывести аналитически? При каких условиях она применима? Имеется ли какое-нибудь обобщение этой формулы для более широкого класса начальных условий?

Глава 3.

Различные перспективы

Краткий обзор. В предыдущих двух главах мы видели, что некоторые нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных при определенных граничных и начальных условиях можно точно проинтегрировать методом обратной задачи рассеяния (МОЗР). Стоит отметить, что этим способом мы получаем общее решение задачи, которое пока невозможно получить никаким другим методом. Тем не менее МОЗР не является единственным возможным подходом к этим задачам. В настоящей главе мы обсудим некоторые другие точки зрения на этот круг задач.

Довольно богатое многообразие имеющихся методов мы разобьем на группы в соответствии с тем, на какие из вопросов они позволяют дать ответ. Ниже представлена попытка такого разбиения, охватывающая различные подходы, в том числе и не рассматриваемые в этой главе.

Описание задач, интегрируемых при помощи МОЗР. Задачи, которые можно решить при помощи МОЗР, обладают целым рядом уникальных свойств, к которым относятся солитоны, бесконечная серия законов сохранения, полный набор переменных типа действие — угол. В общем случае уравнения не обладают такими свойствами и, по-видимому, не могут быть решены при помощи МОЗР. Поэтому возникает естественная задача *описать множество нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния*. С практической точки зрения важно, существует ли относительно простой тест, который применим непосредственно к данному уравнению и позволяет ответить на вопрос, можно ли это уравнение решить при помощи какой-нибудь модификации МОЗР. Это относится к уравнениям в частных производных, дифференциально-разностным уравнениям, конечно-разностным и т. д. В этой главе, однако, мы остановимся исключительно на уравнениях в частных производных.

В настоящее время принято считать, что к $1+1$ -мерному уравнению применим МОЗР, если оно обладает либо преобразованием Бэкунда (разд. 3.1), либо неабелевым псевдопотен-

циалом (разд. 3.2), либо точным N -солитонным решением (вероятно, $N \geq 3$ является достаточным, а $N = 2$ еще нет [223], разд. 3.3.6), т. е. эти условия считаются достаточными для применимости МОЗР. С другой стороны, требование, чтобы дифференциальное уравнение в частных производных обладало «свойством Пенлеве» (разд. 3.7), предложено в качестве необходимого условия интегрируемости методом обратной задачи рассеяния. Условия, являющиеся необходимыми и достаточными, не известны¹⁾.

В многомерном случае (с размерностью большей $1 + 1$) Захаров и Шульман (1980) [548] предложили метод, основанный на анализе дисперсионного соотношения линеаризованного уравнения. Гипотезу о свойстве Пенлеве (разд. 3.7) можно распространить на случай большего числа измерений. В настоящее время неизвестно, связаны ли эти два подхода.

Поиск задачи рассеяния. Пусть дана система, структура которой в принципе позволяет применить метод обратной задачи. Существует ли регулярная процедура нахождения соответствующей спектральной проблемы? Иначе говоря, существует ли метод поиска спектральной проблемы, настолько эффективный, что его неуспех гарантирует отсутствие существования такой проблемы?

Исторически наиболее успешным методом поиска задач рассеяния было угадывание операторов, иногда с использованием

¹⁾ В настоящее время проблему, сформулированную авторами в этом разделе для $1 + 1$ -мерных дифференциальных уравнений, можно считать в основном решенной. В работах А. Б. Шабата, его соавторов и учеников получены условия интегрируемости — необходимые условия существования симметрии высокого порядка или по крайней мере двух локальных законов сохранения высокого порядка (см. оригинальные работы [1*] (1979), [2*] (1980), [3*] (1983), [4*] (1985) и обзор [5*] (1984)). Условия интегрируемости являются настолько эффективными, что их можно использовать не только для проверки заданного уравнения, но и для описания всех интегрируемых систем уравнений определенного вида. Эта программа впервые была полностью реализована в работе [1*], посвященной описанию нелинейных уравнений типа Клейна—Гордона, обладающих симметриями высокого порядка. Для квазилинейных уравнений третьего порядка аналогичная задача решена в [6*], [7*]. В работе [8*] дано исчерпывающее описание уравнений вида $u_t = F(x, u, u_x, u_{xx})$, обладающих симметрией порядка три или больше. Описание всех дифференциально-разностных эволюционных уравнений вида $u_n = f(u_{n-1}, u_n, u_{n+1})$, обладающих локальными законами сохранения высокого порядка, можно найти в [3*]. Описание систем уравнений является более сложной задачей. Сейчас она полностью решена только для систем двух уравнений вида $u_t = A(u)u_{xx} + F(u, u_x)$ (условия интегрируемости получены в работе [4*], описания систем в [9*], [10*], скоро будут опубликованы исчерпывающий список и классификация этих систем). Во всех этих случаях удалось доказать, что несколько первых условий интегрируемости являются не только необходимыми, но и достаточными для описания систем с богатым набором симметрий или локальных законов сохранения высокого порядка. — Прим. перев.

наводящих соображений, почерпнутых из заранее известного преобразования Бэклунда (разд. 3.1). Псевдопотенциалы (разд. 3.2) представляют другой подход, опирающийся на меньшее число гипотез и в ряде случаев являющийся исчерпывающим. Чень, Ли и Ли (1979) [104] предложили метод, основанный на линеаризации, который позволяет проверить эволюционное уравнение на интегрируемость и одновременно приводит к задаче рассеяния, если таковая существует. Сатсума (1979) [446] предложил использовать солитонные решения и билинейные формы для построения преобразований Бэклунда и задач рассеяния. Геометрические и теоретико-групповые методы также использовались в ряде частных случаев.

Частные решения. Одна из привлекательных точек зрения состоит в том, чтобы отказаться от исследования общего решения и ограничиться изучением точных частных решений задачи (т. е. N -солитонных на бесконечном интервале и N -зонных потенциалов для периодической задачи). «Прямые» методы поиска этих частных решений развиты в разд. 3.3 и 3.6. Они обычно более просты, чем МОЗР, и позволяют избежать некоторых деликатных аналитических вопросов, возникающих при изучении задачи рассеяния. Прямые методы позволяют к тому же получить решения вне класса функций, в котором традиционно применяют МОЗР. Этот более широкий класс содержит рациональные решения (разд. 3.4), многомерные солитоны и лампы (разд. 3.6) и автомодельные решения, содержащие, в частности, трансценденты Пенлеве (разд. 3.7).

Что происходит? Ряд работ в этой области ставит целью не расширение класса уравнений, интегрируемых при помощи МОЗР, а выяснение вопроса, почему это «чудо» происходит. В некоторых работах предполагается, что теория групп лежит в основе этого удивительного метода (см., например, [122], [271], [60], [208]). Сходные точки зрения исходят из дифференциальной геометрии (Эстабрук (1981) [150]) и из алгебраической структуры гамильтоновых операторов (Гельфанд, Дикий (1977) [181], Адлер (1979) [31], Лебедев, Манин (1978) [322], Дикий, Дорфман, Гельфанд (1979) [140]). Дейфт и Трубовиц (1980) [137] рассматривают задачи, решаемые при помощи МОЗР, в терминах бесконечного числа связанных осцилляторов, лежащих на поверхности гиперсферы. Это описание применимо как в случае периодической задачи, так и для задачи на бесконечном интервале.

Исследование структуры Другая точка зрения — просто принять, что рассматриваемые задачи обладают богатой структурой, последовательное изучение которой расширит нам арсенал

математических приемов и объектов. Примерами могут служить развитая Мак-Кином и Трубовицем (1976) [368] теория гиперэллиптических функций с бесконечным числом точек ветвления и работа Новикова и Кричевера (1980) [402] об обобщенных гиперэллиптических функциях.

Итак, имеется довольно много различных подходов к задачам, решаемым с помощью МОЗР. Некоторые из них мы обсудим в этой главе.

3.1. Преобразования Бэклунда. Этот раздел посвящен преобразованиям локально определенных решений уравнений в частных производных. Может случиться, что эти локальные решения допускают продолжение до глобальных решений, обсуждающихся в предыдущих главах, но эта возможность здесь не существенна. В настоящем разделе и в разд. 3.2 под решениями дифференциального уравнения в частных производных следует понимать локальные решения, определенные в некоторой открытой односвязной области, которые не обязаны удовлетворять каким-то конкретным граничным и начальным условиям. Кроме этого, считается, что решение классическое (т. е. в сильной топологии). Например, если $u(x, t)$ является решением уравнения КdФ, тогда $(u, u_t, u_x, u_{xx}, u_{xxx})$ должны быть все определены поточечно в некоторой области и

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0.$$

Для простоты мы ограничимся рассмотрением систем дифференциальных уравнений в частных производных в двумерном пространстве-времени (x, t) . Различия между временной и пространственной переменными отсутствуют, так как анализ является локальным. Для обозначения дифференциальных уравнений в частных производных мы будем использовать выражения

$$D(u) = 0 \quad \text{и} \quad E(v) = 0.$$

В зависимости от контекста это могут быть одно и то же или разные уравнения.

Мы начнем с некоторых определений.

Определение. Говорят, что соотношение

$$L(u, v, u_x, v_x, u_t, v_t, \dots; x, t) = 0$$

(или набор таких соотношений) отображает $E(v) = 0$ в $D(u) = 0$, если любое (локальное) решение уравнения $E(v) = 0$ однозначно определяет некоторое (локальное) решение уравнения $D(u) = 0$.

Пример. Из преобразования Миуры

$$(3.1.1) \quad u = -v_x - v^2$$

следует, что

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = - \left(\frac{\partial}{\partial x} + 2v \right) (v_t - 6v_x^2 + v_{xxx}).$$

Поэтому каждое решение уравнения мКдФ отображается с помощью (3.1.1) в некоторое решение уравнения КдФ.

Пример. Преобразование Коула [114] и Хопфа [234]

$$(3.1.2) \quad u = -2v \frac{\theta_x}{\theta}$$

отображает решения уравнения теплопроводности в решения уравнения Бюргерса [81], так как (3.1.2) означает, что

$$(3.1.3) \quad u_t + uu_x - vu_{xx} = - \frac{2v}{\theta} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\theta_x}{\theta} \right) (\theta_t - v\theta_{xx}).$$

Отметим два момента. Во-первых, это обычное определение отображения, и нет никакой необходимости вводить новую терминологию для описания замен (3.1.1), (3.1.2). Во-вторых, эти отображения не определяют однозначно ни $D(u)=0$, ни $E(v)=0$. Так, уравнение

$$(3.1.4) \quad u_t + cu_x = 0$$

отображается в себя и преобразованием (3.1.1), и (3.1.2). Фактически преобразование (3.1.1) отображает последовательность «высших» уравнений мКдФ в последовательность «высших уравнений» КдФ; аналогичное утверждение можно сделать и относительно преобразования (3.1.2) (упр. 1, 2).

Определение. Набор соотношений, включающих $\{x, t, u(x, t)\}$, $\{X, T, V(X, T)\}$ и производные u и V , является преобразованием Бэклунда (ПБ) между $D(u; x, t)$ и $E(V; X, T)$, если:

(i) ПБ является интегрируемым для V , если и только если $D(u)=0$;

(ii) ПБ является интегрируемым для u , если и только если $E(V)=0$;

(iii) по заданному u , такому, что $D(u)=0$, ПБ позволяет определить V с точностью до конечного числа констант, причем $E(V)=0$;

(iv) по заданному V , такому, что $E(V)=0$, ПБ позволяет определить u с точностью до конечного числа констант, причем $D(u)=0$.

(Напомним, что $v_x = f(x, t)$ и $v_t = g(x, t)$ называются интегрируемыми относительно v , если и только если $v_{xt} = v_{tx}$, т. е. они должны быть совместными.)

Пример. В теории комплексного переменного соотношения Коши — Римана

$$(3.1.5) \quad u_x = v_y, \quad v_x = -u_y$$

являются ПБ для уравнения Лапласа в себя. Чтобы убедиться в этом, исключим u из (3.1.5) и получим

$$(3.1.6) \quad v_{xx} + v_{yy} = 0.$$

По заданному v , удовлетворяющему (3.1.6), (3.1.5), можно определить u с точностью до одной константы $u_0 = u(x_0, y_0)$. Так, если соотношения (3.1.5) симметричны, то функция u также должна удовлетворять уравнению (3.1.6).

Пример. Преобразование, обсуждавшееся Бэклундом (1880) [46], имеет вид

$$(3.1.7) \quad \left(\frac{u+v}{2}\right)_x = a \sin\left(\frac{u-v}{2}\right), \quad \left(\frac{u-v}{2}\right)_t = \frac{1}{a} \sin\left(\frac{u+v}{2}\right).$$

Оно отображает решения уравнения sin-Гордон

$$(3.1.8) \quad \varphi_{xt} = \sin \varphi$$

в себя. Этот факт легко проверить перекрестным дифференцированием (3.1.7).

Пример. Задачей рассеяния для уравнения КdФ является

$$(3.1.9a) \quad \psi_{xx} + (\zeta^2 + u) \psi = 0,$$

$$(3.1.9b) \quad \psi_t = (\alpha(\zeta) + u_x) \psi + (4\zeta^2 - 2u) \psi_x.$$

Эти соотношения также являются преобразованиями Бэклунда между КdФ и уравнением

$$(3.1.10) \quad \psi_t + \psi_{xxx} - \alpha\psi - 6\zeta^2\psi_x - \frac{3\psi_x\psi_{xx}}{\psi} = 0.$$

В этом случае (3.1.10) получается исключением u при помощи (3.1.9a). Уравнение КdФ получается как условие совместности ($\psi_{xxt} = \psi_{txx}$). Отметим, что u однозначно определяется по ψ (за исключением точек, в которых ψ равно нулю), при этом ψ определяется по u с точностью до двух постоянных (ψ и ψ_x при $\{x_0, t_0\}$).

Разница между преобразованием Бэклунда и отображением состоит в следующем. При заданном v отображение однозначно определяет u , но не конкретизирует ни уравнения $D(u) = 0$, ни $E(v) = 0$. Преобразование Бэклунда не обязательно определяет u однозначно даже при заданном v , но конкретизирует и $D(u) = 0$, и $E(v) = 0$. Часто ПБ можно построить из отображения, задав подходящее эволюционное уравнение.

Пример.

$$(3.1.11a) \quad v_x = -u - v^2,$$

$$(3.1.11b) \quad u_t = 6v^2v_x - v_{xxx}$$

являются ПБ между уравнениями КdФ и мКdФ. Отметим, что (3.1.11a) есть в точности (3.1.1). При желании (3.1.11b) можно

переписать в виде, не содержащем производных по x от v , воспользовавшись несколько раз соотношением (3.1.11а).

Аналогично (3.1.9а) представляет собой отображение из ψ в u (в области, где $\psi \neq 0$).

Для сравнения приведем несколько других возможных типов преобразований.

(i) Простейшими являются точечные преобразования

$$(3.1.12) \quad u = u(v; x, t).$$

Если задана двумерная поверхность, определяемая с помощью $v(x, t)$, то соотношение (3.1.12) определяет новую поверхность. При этом никаких свойств дифференцируемости не предполагается. Примером служит (3.1.1)¹⁾.

(ii) *Контактные преобразования* (или касательные преобразования, или преобразования Ли) характеризуются следующим геометрическим свойством: поверхности, в одном пространстве имеющие общую касательную в некоторой точке, отображаются в поверхности другого пространства с общей касательной в соответствующей точке. Если $v(x, t)$ отображается в $u(X, T)$, то преобразование является контактным, если

$$(3.1.13) \quad du - u_x dX - u_T dT = (dv - v_x dx - v_t dt)\rho,$$

где ρ — функция от $(v, v_x, v_t; x, t)$, не имеющая нулей. Теория таких преобразований была развита в работах Ли; можно также сослаться на книгу [166]. Примером может служить преобразование годографа, используемое в газовой динамике, которое меняет роли зависимых и независимых переменных²⁾. Однако эти преобразования отличаются от ПБ, поскольку в (3.1.13) не требуется, чтобы u, v удовлетворяли какому-нибудь конкретному уравнению в частных производных.

(iii) Контактные преобразования можно обобщить, потребовав сохранение контактной структуры более высокого порядка. Такие преобразования были названы *преобразованиями Ли — Бэклунда* (Андерсен, Ибрагимов [41]). Наименование может сбить с толку читателя, ибо приведенное здесь преобразование не имеет очевидной связи с определенным в этом разделе преобразованием Бэклунда (см., однако, [164], [237]).

¹⁾ Здесь авторы привели неудачный пример, так как отображение (3.1.1) содержит производную v_x . Точечное преобразование обычно определяют как отображение вида $u = u(v, x, t)$, $X = X(v, x, t)$, $T = T(v, x, t)$, причем функции u , X , T не зависят от производных v_x, \dots , и якобиан преобразования отличен от нуля. В этом случае преобразование является локально обратимым по теореме о неявной функции. — *Прим. перев.*

²⁾ Указанное здесь преобразование годографа относится к точечным преобразованиям (см. предыдущее примечание). Примером контактного преобразования является хорошо известное преобразование Лежандра. — *Прим. перев.*

(iv) Пирани (1979) [423] дал другое определение ПБ на языке локальных расслоений джетов.

Сейчас мы перейдем к главному вопросу. Какое отношение имеют преобразования Бэклунда к солитонам и МОЗР? Существует много ответов на этот вопрос, но наиболее фундаментальным нам кажется следующий: задача рассеяния и связанная с ней эволюция по времени, образующие в совокупности метод обратной задачи рассеяния, являются также преобразованием Бэклунда. В действительности это соответствие можно доказать довольно легко для широкого класса задач.

Теорема. Пусть

$$(3.1.14) \quad v_{1x} + i\zeta v_1 = qv_2, \quad v_{2x} - i\zeta v_2 = rv_1,$$

$$(3.1.15) \quad v_{1t} = Av_1 + Bv_2, \quad v_{2t} = Cv_1 - Av_2,$$

и пусть $\mathbf{u} = (q, r)$ удовлетворяет системе эволюционных уравнений $D(\mathbf{u}) = 0$ совместно с (3.1.14) и (3.1.15) с полиномиальным законом дисперсии. Тогда для всех ζ соотношения (3.1.14) и (3.1.15) представляют собой преобразование Бэклунда между $D(\mathbf{u}) = 0$ и $E(\mathbf{v}, \zeta) = 0$, где $E(\mathbf{v}, \zeta) = 0$ — это некоторая система двух дифференциальных уравнений на $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, зависящая от ζ и не зависящая от \mathbf{u} .

Доказательство. По предположению условие интегрируемости системы (3.1.14), (3.1.15) для \mathbf{v} — это $D(\mathbf{u}) = 0$; это есть условие (i) в определении ПБ. Затем при заданном \mathbf{u} , удовлетворяющем уравнению $D(\mathbf{u}) = 0$, решение задачи рассеяния определяет \mathbf{v} с точностью до двух констант (в гл. 1 они были зафиксированы, скажем, выбором граничных условий при $x \rightarrow +\infty$). Таким образом, выполнено условие (iii) в определении. При любом заданном \mathbf{v} , причем ни v_1 , ни v_2 не обращаются в нуль в некоторой области, вектор \mathbf{u} однозначно определяется с помощью (3.1.14); это условие (ii). И наконец, так как дисперсионное соотношение линеаризованного уравнения $D(\mathbf{u}) = 0$ является полиномиальным, то коэффициенты (A, B, C) можно выразить через \mathbf{u} и производные по x конечного порядка (см. разд. 1.2). Затем, воспользовавшись соотношениями (3.1.14), можно выразить (A, B, C) в терминах ζ , v_1 , v_2 и производных по x конечного порядка. Подставив результат в (3.1.15), получим систему $E(\mathbf{v}, \zeta) = 0$, которой должен удовлетворять вектор \mathbf{v} . Итак, мы продемонстрировали выполнение условия (iv) и завершили доказательство теоремы. \square

Возможность представления задачи рассеяния как ПБ не ограничивается случаем эволюционных уравнений с полиномиальным дисперсионным соотношением или данным частным случаем задачи рассеяния. Мы не будем здесь пытаться доказывать более общую теорему, а некоторые примеры, выходящие за рамки этих ограничений, даны в упражнениях,

Теперь у нас имеются три различные интерпретации МОЗР:

(1) МОЗР — это обобщение преобразования Фурье, применяемое для некоторых нелинейных уравнений.

(2) МОЗР — это каноническое преобразование к переменным типа действие — угол вполне интегрируемой гамильтоновой системы.

(3) МОЗР — это преобразование Бэклунда.

Справедлива каждая из этих интерпретаций, но подчеркивают они разные аспекты МОЗР. Дает ли какая-нибудь из них удовлетворительный ответ на вопрос «почему же работает МОЗР?» — это до некоторой степени зависит от вкуса читателя.

Если известно, что данное дифференциальное уравнение имеет однопараметрическое семейство ПБ (т. е. определена задача рассеяния), связывающих его с семейством других уравнений, то нет ничего удивительного в том, что можно построить ПБ этого уравнения в себя. Простейший способ сделать это предложил Чень [101, 102]. Чтобы проиллюстрировать его метод, выведем ПБ уравнения КдФ в себя, исходя из задачи рассеяния для КдФ. Если определить $v = \psi_x/\psi$, тогда (3.1.9a) дает

$$(3.1.16a) \quad v_x = -\zeta^2 - u - v^2,$$

а (3.1.10) эквивалентно

$$(3.1.16b) \quad v_t = 6(v^2 + \zeta^2)v_x - x_{xxx}.$$

Это преобразование является простым обобщением (3.1.11) и сводится к нему при $\zeta^2 = 0$. Существенным в методе Ченя является следующий момент: если v — решение уравнения (3.1.16b), то получим два различных решения u и u' уравнения КдФ из «одного и того же» v :

$$(3.1.17) \quad \begin{aligned} v_x &= -\zeta^2 - u - v^2, \\ (-v)_x &= -\zeta^2 - u' - (-v)^2. \end{aligned}$$

Складывая и вычитая, получим

$$(3.1.18) \quad -\frac{u + u'}{2} = \zeta^2 + v^2, \quad \frac{u - u'}{2} = -v_x.$$

Определим потенциальную функцию w , такую, что $u = w_x$; при этом из (3.1.18) следует, что

$$(3.1.19) \quad \begin{aligned} \frac{w - w'}{2} &- v, \\ -\left(\frac{w + w'}{2}\right)_x &= \zeta^2 + \left(\frac{w - w'}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Эта « x -часть» преобразования Бэклунда уравнения КдФ в себя была найдена первоначально Уолквистом и Эстабруком [496].

Вторая компонента находится подстановкой (3.1.19) в (3.1.16b):

$$(3.1.20) \left(\frac{w - w'}{2} \right)_t + 6 \left(\frac{w + w'}{2} \right)_x \left(\frac{w - w'}{2} \right)_x + \left(\frac{w - w'}{2} \right)_{xxx} = 0.$$

Равенства (3.1.19), (3.1.20) определяют ПБ уравнения

$$(3.1.21) \quad w_t + 3w_x^2 + w_{xxx} = 0$$

в себя. Решение уравнения КдФ находится по формуле $u = w_x$.

Важный момент здесь состоит в том, что u' можно построить из u , поскольку замена $v \rightarrow (-v)$ сохраняет (3.1.16b), но изменяет (3.1.16a). Непосредственно воспользоваться этим трюком в задаче рассеяния нельзя, поскольку замена $\psi \rightarrow (-\psi)$ не меняет ни (3.1.10), ни (3.1.9a). В этом случае можно воспользоваться симметрией $\psi \rightarrow 1/\psi$, не меняющей соотношение (3.1.10), но изменяющей (3.1.9a). Уравнения, соответствующие (3.1.17), в этом случае имеют вид

$$(3.1.22) \quad u = -\zeta^2 - \frac{\Psi_{xx}}{\Psi},$$

$$u' = -\zeta^2 + \frac{\Psi_{xx}}{\Psi} - 2 \left(\frac{\Psi_x}{\Psi} \right)^2.$$

Преобразовывая эти выражения, мы опять приедем к (3.1.19).

Следует подчеркнуть, что (3.1.19) сохраняется для всех высших уравнений КдФ, которые порождены той же самой (пространственной) задачей рассеяния (3.1.9a). Компонента t преобразования, т. е. (3.1.10), определяет, какое конкретное уравнение преобразуется.

Вывод ПБ уравнения в себя, основанный на подходящей задаче рассеяния, обсуждался также в работах Абловица, Каупа, Ньюэлла и Сигура (1974) [12] и Коно, Вадати (1975) [288]. Исторически преобразования Бэкунда использовались не только для отыскания соответствующих задач рассеяния, но и для построения частных решений задач (например, солитонов). Мы видели, каким образом ПБ часто приводили к задачам рассеяния. Теперь давайте обсудим, как строить частные решения при помощи ПБ. В частности, рассмотрим однопараметрические семейства ПБ уравнений в себя, скажем (3.1.7) для уравнения sin-Гордон и (3.1.19), (3.1.20) для уравнения КдФ. Если известно одно решение уравнения, то интегрирование преобразования Бэкунда позволяет построить другое решение. В каждом изученном случае, однако, даже без этого единственного интегрирования можно обойтись, доказав «теорему о суперпозиции» (см. [311, 312]). Эту теорему впервые доказал Бьянки (1902) [64] для уравнения sin-Гордон (3.1.8). Из (3.1.7) он

вывел, что четыре решения уравнения (3.1.8) связаны формулой

$$(3.1.23) \quad \operatorname{tg} \left(\frac{\Phi_4 - \Phi_1}{4} \right) = \frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} \operatorname{tg} \left(\frac{\Phi_2 - \Phi_3}{4} \right),$$

где (a_1, a_2) — произвольные постоянные. Этот результат, как показал Лэм [309], можно использовать для получения точного N -солитонного решения. При известном ПБ уравнения в себя нетрудно найти формулу, аналогичную (3.1.23), но доказательство ее справедливости весьма утомительно. Подробности можно найти в [311, 312] (см. также разд. 3.3, где ПБ обсуждаются с точки зрения билинейных уравнений Хироты).

Грубо говоря, действие ПБ на заданное решение уравнения (скажем, КдФ) сводится к тому, что добавляется или уничтожается один солитон. Если до преобразования решение (u_0) , удовлетворяло неравенству

$$(3.1.24) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |u_0|(1+|x|) dx < \infty,$$

то можно сформулировать более точное утверждение. Мы покажем, что в результате действия на u_0 преобразованием Бэк-лунда порождается решение u_1 , также удовлетворяющее (3.1.24), причем его спектр (как потенциала в (3.1.9а)) отличается от спектра u_0 в точности на одно дискретное собственное значение. Приведенное здесь изложение основывается на работах Дейфта и Трубовица [136] (см. также [382], в особенности статью Уолквиста), Вадати, Сануки и Коно [494], Калоджера [89]. Отметим, что зависимость от времени никак не отражается на наших рассуждениях, и поэтому мы ее опускаем. По этой же причине полученные результаты справедливы для любого уравнения КдФ высшего порядка, связанного с задачей рассеяния (3.1.9а).

Пусть $u_0(x)$ является вещественной функцией, удовлетворяющей условию (3.1.24), и

$$\Psi_{xx} + u_0 \Psi = -\lambda \Psi, \quad -\infty < x < \infty$$

в точках дискретных вещественных собственных значений $\lambda = -\kappa_n^2 < \dots < -\kappa_1^2$. Возможность $n=0$ не исключается, и, кроме того, эта задача может иметь непрерывный спектр. Пусть $\xi^2 > \kappa_n^2$ и пусть $g(x)$ удовлетворяет уравнению

$$(3.1.25) \quad g_{xx} + u_0 g = \xi^2 g,$$

причем $g(x) > \varepsilon > 0$ при всех x . Дейфт и Трубовиц [136], обобщив теорему Крума [127], показали, что если определить u_1 выражением

$$(3.1.26) \quad u_1 = u_0 + 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln g,$$

то u_1 удовлетворяет (3.1.34), а спектр задачи

$$(3.1.27) \quad \psi_{xx} + u_1 \psi = -\lambda \psi$$

имеет $n+1$ дискретных собственных значений $\lambda = -\xi^2 < -\xi_n^2 < \dots < -\xi_1^2$. При этом собственная функция, отвечающая $(-\xi^2)$, имеет вид $1/g(x)$, в чем можно убедиться непосредственной подстановкой в (3.1.27).

Чтобы связать (3.1.26) с (3.1.19), положим $v = g_x/g$. Так как $g > \varepsilon > 0$, то v определено всюду. Из (3.1.25) следует, что

$$v_x = \frac{g_{xx}}{g} - \left(\frac{g_x}{g}\right)^2,$$

т.е.

$$(3.1.28) \quad v_x = -u_0 - (-\xi^2) - v^2,$$

что является преобразованием Миуры. Если положить $w_x = u$, то (3.1.26) превращается в

$$(w_1)_x = (w_0)_x + 2v_x,$$

так что

$$v = \frac{w_1 - w_0}{2},$$

а из (3.1.28) получим

$$\left(\frac{w_1 + w_0}{2}\right)_x = \xi^2 - \left(\frac{w_1 - w_0}{2}\right)^2.$$

Последнее совпадает с (3.1.19) после замены $\xi^2 \rightarrow -\xi^2$. Если функции u_0 и u_1 удовлетворяют (3.1.19), а каждая из них уравнению КдФ, то соотношение (3.1.20) удовлетворяется автоматически.

В рассмотренном случае мы показали, что ПБ добавляет одно собственное значение к спектру, т. е. добавляет один солитон. Напротив, если бы мы взяли u_1 в качестве заданной функции, то функция u_0 определилась бы из соотношений (3.1.19, 20) и требования $u_{0 \rightarrow 0}$ при $x \rightarrow \infty$. Функция u_0 также удовлетворила бы уравнению КдФ, а спектры задач рассеяния с потенциалами u_1 и u_0 отличались бы ровно на одно собственное значение. Таким образом, ПБ может добавлять или уничтожать солитоны. Дейфт и Трубовиц [136] вывели N -солитонную формулу для уравнения КдФ, воспользовавшись теоремой Крума.

С целью упростить изложение в этом разделе мы ограничились рассмотрением ПБ только для дифференциальных уравнений в частных производных. Однако близкая аналогия между непрерывными и дискретными задачами, обсуждавшаяся в разд. 2.2, наводит на мысль, что дискретные ПБ должны бы

иметь то же значение для конечно-разностных уравнений, какое непрерывные ПБ имеют для уравнений в частных производных. Работа по дискретным ПБ началась совсем недавно, но уже имеется несколько примеров дискретных ПБ уравнений в себя, построенных Ченем [101] и Хиротой [221, 224].

Мы не задавались вопросом, как определить, имеет ли наперед заданное уравнение преобразование Бэклунда в себя или в какое-нибудь другое уравнение? Этот вопрос предложил Клерен (1903) [111], но мы отложим обсуждение его метода до следующего раздела.

3.2. Псевдопотенциалы и структуры продолжения. Как и в предыдущем разделе, здесь мы интересуемся локальными решениями дифференциальных уравнений в частных производных в двумерном пространстве. Псевдопотенциалы, впервые обсуждавшиеся Уолквистом и Эстабруком [496, 497], тесно связаны с преобразованиями Бэклунда и МОЗР. Обычно теория псевдопотенциалов излагается на отличающемся от принятого в этой книге языке внешних дифференциальных форм (см., например, [384] и приведенные там ссылки), но, как отмечали Коронес [121] и Кауп [264], в этом нет большой необходимости. Изложение, принятое в этом разделе, не требует знания теории дифференциальных форм.

3.2. а. Основные концепции. В основе первой работы Уолквиста и Эстабрука лежит тот факт, что уравнение КdФ имеет бесконечный набор локальных законов сохранения

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial x} = 0, \quad i = 1, 2, \dots,$$

где $\{T_i, F_i\}$ — известные функции $u(x, t)$ производных по x конечного порядка x и t . Каждый такой закон сохранения определяет потенциальную функцию w_i :

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} = F_i, \quad \frac{\partial w_i}{\partial x} = -T_i,$$

т. е.

$$(3.2.1) \quad dw_i = F_i dt - T_i dx$$

является полным дифференциалом. При заданной функции u и ее производных функцию w_i можно определить интегрированием (3.2.1). Например, записав уравнение КdФ в виде

$$u_t + (3u^2 + u_{xx})_x = 0,$$

мы получим простейший потенциал

$$(3.2.2) \quad w_t = 3u^2 + v_{xx}, \quad w_x = -u,$$

т. е.

$$(3.2.3) \quad w(x, t) = - \int^x u(\tilde{x}, t) d\tilde{x}.$$

При подходящих ограничениях ($-w$) удовлетворяет (3.1.21). Таким образом, для заданного решения уравнения КdФ w является функцией от $\{x, t\}$, определенной по формуле (3.2.3). С другой стороны, рассматривая всевозможные локальные решения уравнения КdФ, функцию w можно представлять себе зависящей от пяти независимых переменных $\{x, t, u, u_x, u_{xx}\}$; при этом w определяется соотношениями (3.2.2) с точностью до аддитивной константы.

Когда w зафиксировано (выбором константы), можно расширить пространство независимых переменных до $\{x, t, u, u_x, u_{xx}, w\}$ и попытаться искать новые потенциалы, определенные в этом расширенном пространстве. Это называется «продолжением» первоначального набора переменных, а последовательность потенциалов, полученных повторением продолжений, определяет *структурку продолжения* рассматриваемой задачи.

Следующий потенциал w_1 (если он существует) подчиняется уравнению вида

$$(3.2.4) \quad \begin{aligned} (w_1)_x &= A(x, t, u, u_x, u_{xx}, w), \\ (w_1)_t &= B(x, t, u, u_x, u_{xx}; w), \end{aligned}$$

где A, B должны определяться из условия $(w_1)_{xt} = (w_1)_{tx}$ (условия интегрируемости) и того факта, что u является решением уравнения КdФ. Продвигаясь по этому пути, найдем последовательность уравнений вида (3.2.4), причем на каждом шаге функции A, B в правой части зависят от первоначального набора переменных и всех новых уже найденных потенциалов. Когда A и B известны, уравнения можно решить, взяв интегралы по известным функциям.

С другой стороны, если допустить, что неизвестные потенциалы входят также в правую часть, то последовательность уравнений типа (3.2.4) заменится на систему уравнений вида

$$(3.2.5) \quad \left. \begin{aligned} \partial_x(w_i) &= A_i(x, t, u, u_x, u_{xx}; w) \\ \partial_t(w_i) &= B_i(x, t, u, u_x, u_{xx}; w) \end{aligned} \right\} \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

где $w = (w_1, w_2, \dots, w_N)$. При заданном N и известных \mathbf{A} и \mathbf{B} найти решение системы (3.2.5) означает решить систему дифференциальных уравнений в противоположность предыдущему случаю, когда решение получалось последовательным вычислением интегралов. Таким образом, решения системы (3.2.5) не обязательно ограничиваются обсуждавшейся выше последовательностью потенциалов. Уолквист и Эстабрук [496] назвали реше-

ния системы (3.2.5) псевдопотенциалами. По причинам, которые будут объяснены ниже, псевдопотенциалы, не являющиеся эквивалентными последовательности потенциалов, называются *неабелевыми*.

Примеры. (1) Преобразование Бэкунда (3.1.11) между уравнениями КдФ и мКдФ является *псевдопотенциалом*, так как его можно привести к виду (3.2.4), т. е. (3.2.5) с $N = 1$:

$$\begin{aligned} v_x &= -u - v^2, \\ v_t &= u_{xx} + 2u^2 + 2uv^2 - 2u_xv. \end{aligned}$$

(2) Задачу рассеяния для уравнения КдФ (3.1.9) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \Psi_x &= \varphi, \quad \Psi_t = (a + u_x)\psi + (4\zeta^2 - u)\varphi, \\ \varphi_x &= -(\zeta^2 + u)\psi, \quad \varphi_t = [u_{xx} - (4\zeta^2 - 2u)(\zeta^2 + u)]\psi + (a - u_x)\varphi \end{aligned}$$

Таким образом, собственная функция для (3.1.9) также является псевдопотенциалом с $N = 2$.

(3) Обобщенная задача рассеяния Захарова — Шабата (1.2.7) с A, B, C , представленными конечными рядами, также имеет вид (3.2.5) с $N = 2$. Все эти примеры неабелевы, последние два линейны по псевдопотенциалам. Следует иметь в виду, что псевдопотенциалы, преобразования Бэкунда и МОЗР являются весьма тесно внутренне связанными лежащей в их основе концепцией совместности ∂_x и ∂_t . В частности, линейная задача рассеяния (без граничных условий) для заданного дифференциального уравнения частных производных является по определению тоже псевдопотенциалом. Поэтому если доказано, что некоторое уравнение не обладает псевдопотенциалами (независимо от того, линейны они или нет), тогда отсутствует задача рассеяния, и это уравнение не может быть решено при помощи МОЗР.

Таким образом мы пришли к одной из нерешенных фундаментальных проблем:

Имеется ли систематический метод, позволяющий для заданного дифференциального уравнения в частных производных найти псевдопотенциал, если он существует, либо сделать заключение о его несуществовании?

Этот вопрос относится к системам с любым числом независимых переменных, но мы ограничимся только двумя.

3.2. б. Задачи с полиномиальным дисперсионным соотношением. Наиболее простые результаты относятся к уравнениям первого порядка по t и конечного порядка по x . В этом случае дисперсионное соотношение линеаризованного уравнения $\omega(k)$ является полиномом. Ниже мы покажем, что с учетом некоторых

ограничений на вид уравнения вопрос о нахождении псевдопотенциала всегда можно свести к некоторому вопросу из теории алгебр Ли. Важным следствием этого сведения, как мы покажем, является следующий факт: если заданное уравнение не имеет линейного псевдопотенциала, то оно не имеет никакого псевдопотенциала.

Метод Уолквиста и Эстабрука [496, 497] для нахождения псевдопотенциалов также использовался в работах [121], [123] и [264]. Он имеет много общего с существенно более старым методом Клерена (1903) [111], который использовался в работах [311], [312] и других. Для иллюстрации метода мы рассмотрим уравнение Бюргерса

$$(3.2.6) \quad u_t + uu_x = u_{xx}.$$

Мы интересуемся всевозможными (локальными) решениями уравнения (3.2.6), так что все u , u_x , u_{xx} , ... могут быть заданы независимо в некоторой точке, а их производные по t находятся с помощью (3.2.6). Если допускаются комплексные решения, то производные по x от u^* также будут независимы. Мы попытаемся найти псевдопотенциал, который зависит от u и его производных, имеющих меньший порядок, чем уравнение. Для (3.2.6) это означает

$$(3.2.7) \quad \begin{cases} \partial_x(q_i) = A_i(u, u_x, \mathbf{q}) \\ \partial_t(q_i) = B_i(u, u_x, \mathbf{q}) \end{cases}, \quad i = 1, \dots, N,$$

где $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_N)$ для некоторого конечного N .

(i) Если $N = 1$, то q — скалярная функция, и (3.2.7) имеет вид ПБ.

(ii) Если A_i и B_i линейны по \mathbf{q} , то

$$(3.2.8) \quad \begin{cases} \partial_x(q_i) = A_{ij}q_j \\ \partial_t(q_i) = B_{ij}q_j \end{cases},$$

где $A_{ij}(i, u_x)$ и $B_{ij}(u, u_x)$ являются $N \times N$ -матрицами (в (3.2.8) подразумевается суммирование по повторяющимся индексам). Если A_{ij} , B_{ij} к тому же содержат свободный параметр (т. е. «спектральный параметр»), то (3.2.8) является кандидатом в задачи рассеяния. Ниже мы увидим, что если существует какой-нибудь псевдопотенциал, то существует линейный псевдопотенциал (с некоторой конечной размерностью).

При фиксированных \mathbf{A} , \mathbf{B} система (3.2.7) является совместной, если

$$(3.2.9) \quad (\mathbf{q})_{xt} = (\mathbf{q})_{tx}.$$

Это основное требование на псевдопотенциал. Важно отметить, что в гл. 1 основные уравнения (1.2.8) были получены из того же требования (интегрируемости (1.2.7)).

Для уравнения Бюргерса (3.2.6)

$$(3.2.10) \quad \begin{aligned} \mathbf{q}_{xt} &= (u_{xx} - uu_x) \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial u} + (u_{xxx} - (uu_x)_x) \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial u_x} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A}, \\ \mathbf{q}_{tx} &= u_x \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial u} + u_{xx} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial u_x} + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}, \end{aligned}$$

где $(\mathbf{A} \cdot \nabla) = \sum_i A_i \partial / \partial q_i$. Так как u_{xxx} (локально) не зависит от u , u_x , u_{xx} , то необходимым условием выполнения (3.2.9) является

$$(3.2.11) \quad \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial u_x} = 0.$$

Поэтому же должны быть равны коэффициенты при u_{xx} :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial u_x} (u, u_x, \mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial u} (u, \mathbf{q}),$$

так что

$$(3.2.12) \quad \mathbf{B} (u, u_x, \mathbf{q}) = u_x \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial u} (u, \mathbf{q}) + \mathbf{C} (u, \mathbf{q}).$$

Таким образом, (3.2.9) сводится к

$$(3.2.13) \quad u_x^2 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial u^2} + u_x \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial u} + uu_x \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial u} + u_x \left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial u}, \mathbf{A} \right] + [\mathbf{C}, \mathbf{A}] = 0,$$

где

$$(3.2.14) \quad [\mathbf{A}, \mathbf{B}] \equiv (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}.$$

Для $N = 1$

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = B \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q} - A \frac{\partial B}{\partial q} = B^2 \frac{\partial}{\partial q} \frac{A}{B},$$

при этом для линейных псевдопотенциалов $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ пропорционален обычному коммутатору матриц:

$$(3.2.15) \quad [\mathbf{A}, \mathbf{B}] = (A_{ij}B_{jk} - B_{ij}A_{jk}) q_k$$

(доказывается вычислением).

В (3.2.13) зависимость от u_x теперь является явной. Коэффициент при u_x^2 (т. е. $\partial^2 \mathbf{A} / \partial u^2$) должен быть равным нулю, поэтому

$$(3.2.16) \quad \mathbf{A} = u \alpha(\mathbf{q}) + \beta(\mathbf{q}).$$

Приравнивая в (3.2.13) нуль коэффициент при u_x , получим

$$\frac{\partial}{\partial u} \mathbf{C} (u, \mathbf{q}) + \alpha(\mathbf{q}) u + [\alpha, \beta] = 0,$$

и после интегрирования по u

$$(3.2.17) \quad \mathbf{C} = -\frac{u^2}{2} \alpha - u [\alpha, \beta] + \delta(\mathbf{q}).$$

Определим

$$(3.2.18) \quad \gamma(q) = [\alpha, \beta]$$

и подставим (3.2.16) — (3.2.18) в (3.3.13). Коэффициенты при u^2 , u и 1 вместе с (3.2.18) дадут

$$(3.2.19) \quad \begin{aligned} [\alpha, \gamma] + \frac{1}{2}\gamma &= 0, \\ [\alpha, \delta] - [\beta, \gamma] &= 0, \\ [\delta, \beta] &= 0, \\ [\alpha, \beta] - \gamma &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (3.2.6) имеет псевдопотенциалы вида (3.2.7) тогда и только тогда, когда система (3.2.19) имеет нетривиальное решение. Для эволюционных уравнений первого порядка по времени и конечного порядка по x вопрос о существовании псевдопотенциалов всегда сводится к решению конечного набора соотношений типа (3.2.19). Например, читатель может проверить, что если бы мы начали с уравнения Фишера (1937) [154] (популярная модель динамики популяций; см., например, [235])

$$(3.2.20) \quad u_t = u_{xx} + u - u^2$$

вместо уравнения (3.2.6), то аналогичные вычисления привели бы к

$$(3.2.21a, b, c, d) \quad \begin{aligned} [\alpha, \gamma] + \alpha &= 0, \\ [\alpha, \delta] + [\beta, \gamma] - \alpha &= 0, \\ [\delta, \beta] &= 0, \\ [\alpha, \beta] - \gamma &= 0 \end{aligned}$$

вместо (3.2.19). Вычисления для уравнения КdФ проводятся по такой же схеме [497].

Нетрудно найти решение (3.2.19) при $N = 1$. Одно довольно простое решение имеет вид

$$(3.2.22) \quad N = 1, \quad \alpha = -q/2, \quad \beta = \gamma = \delta = 0,$$

так что (3.2.7) принимает вид

$$(3.2.23a, b) \quad q_x = -\frac{u}{2}q, \quad q_t = -\frac{1}{2}\left(u_x - \frac{u^2}{2}\right)q.$$

Читатель без труда узнает в (3.2.23a) преобразование Коула — Хопфа (3.1.2), а (3.1.23b) переходит в уравнение теплопроводности после исключения u . Отметим также, что $(\ln q)$ является потенциалом, соответствующим закону сохранения (3.2.6).

Более сложное решение системы (3.2.19) для $N = 1$ имеет вид

$$(3.2.24) \quad \begin{aligned} \alpha &= -q/2, \\ \beta &= C_1 q^2 - \frac{C_2}{2} q, \\ \gamma &= \frac{C_1}{2} q^2, \\ \delta &= \frac{C_1 C_2}{2} q^2 - \frac{C_2^2}{4} q, \end{aligned}$$

так что (3.2.7) приводится к виду

$$(3.2.25) \quad \begin{aligned} q_x &= -\frac{u + C_2}{2} q + C_1 q^2, \\ q_t &= -\frac{1}{2} \left(u_x - \frac{u^2}{2} + \frac{C_2^2}{2} \right) q - \frac{C_1}{2} (u - C_2) q^2. \end{aligned}$$

В частном случае ($C_1 = 1/2$, $C_2 = 0$) соотношения (3.2.25) являются ПБ уравнения (3.2.6) в себя. Таким образом, уравнение Бюргерса имеет ПБ (в себя) и может быть точно решено (при помощи преобразования Коула — Хопфа) (см. упр. 2). Оно имеет решения типа бегущих волн, но не имеет солитонов и обладает (очевидно) только одним полиномиальным законом сохранения, не зависящим от x, t .

В случае (3.2.21) эта процедура не проходит, так как нет нетривиальных решений системы (3.2.21) при $N = 1$ (см. упр. 4). В общем случае ($N \neq 1$) полезно воспользоваться некоторыми понятиями из теории алгебр Ли. (Более подробные сведения об алгебрах Ли можно найти, например, в книгах [241] или [441].)

3.2. с. Алгебры Ли. Пусть (v_1, \dots, v_n) — элементы линейного векторного пространства V размерности $m \leq n$. Векторное пространство можно превратить в *алгебру*, определив в нем операцию «умножение», которая сопоставляет каждой паре векторов $\{v_1, v_2\}$ их произведение $(v_1 v_2) \in V$. Операция умножения должна удовлетворять условиям билинейности

$$(3.2.26) \quad \begin{aligned} (i) \quad (v_1 + v_2) v_3 &= v_1 v_3 + v_2 v_3, & v_1 (v_2 + v_3) &= v_1 v_2 + v_1 v_3, \\ (ii) \quad c (v_1 v_2) &= (cv_1) v_2 = v_1 (cv_2) \end{aligned}$$

для любого скаляра c .

Так как пространство имеет конечную размерность m , то эта операция полностью определяется набором m базисных векторов и $(m \times m)$ -таблицей умножения этих векторов. Алгебра является *алгеброй Ли*, если операция умножения подчиняется так-

же соотношениям

$$(3.2.27) \quad \begin{aligned} & \text{(i)} \quad (v_1 v_1) = 0, \\ & \text{(ii)} \quad (v_1 v_2) v_3 + (v_2 v_3) v_1 + (v_3 v_1) v_2 = 0. \end{aligned}$$

Уравнение (ii) называется тождеством Якоби. Алгебра Ли называется *абелевой*, если

$$(3.2.28) \quad v_1 v_2 = 0$$

для любых $v_1, v_2 \in V$, и *неабелевой*, если какие-нибудь два элемента из V имеют ненулевое произведение.

Примеры. (1) Решение (3.2.22) системы (3.2.19) является алгеброй Ли в одномерном векторном пространстве с базисным вектором α .

(2) «Специальная унитарная алгебра Ли» $\text{su}(2)$ состоит из всех комплекснозначных (2×2) -матриц с нулевым следом¹⁾, где «умножение» двух матриц задается их коммутатором

$$(3.2.29) \quad [A, B] = AB - BA.$$

Базисными элементами этого векторного пространства служат

$$s_x = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_z = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

и легко проверить, что

$$[s_x, s_y] = s_z, \quad [s_y, s_z] = s_x, \quad [s_z, s_x] = s_y,$$

так что $\text{su}(2)$ является неабелевой. Отметим, что задача рассеяния, рассмотренная в гл. 1 (1.2.7а), имеет вид

$$\mathbf{v}_x = X \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}_t = T \mathbf{v},$$

где X и T являются элементами $\text{su}(2)$.

Какое отношение все это имеет к псевдопотенциалам? По предположению векторы $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ из (3.2.19) или (3.2.21) являются элементами некоторого N -мерного пространства. Нетрудно показать, что билинейная операция $[A, B]$, определенная в (3.2.14), удовлетворяет соотношениям (3.2.26, 27). Таким образом, набор соотношений, подобных (3.2.19, 21), имеет решение, если и только если эти соотношения совместны с некоторой (конечномерной) алгеброй Ли. Еще важнее то, что поставленная задача имеет псевдопотенциал (определенного вида) тогда и только тогда, когда существует соответствующая алгебра Ли.

В настоящее время не решена следующая общая задача: можно ли частично заполненную таблицу умножения продолжить до какой-нибудь конечномерной алгебры Ли? Если это сделать удаётся, то можно воспользоваться теоремой Адо.

¹⁾ Кроме этого матрицы должны быть антиэрмитовыми. — Прим. перев.

Определения. Представлением абстрактной алгебры Ли называется отождествление каждого элемента алгебры с $(N \times N)$ -матрицей, при котором выполнена таблица умножения. Представление называется *точным*, если единственный элемент, отождествленный с нулевой матрицей, является нулевым элементом исходного векторного пространства.

Теорема Адо. Каждая конечномерная алгебра Ли имеет точное конечномерное представление.

Доказательство можно найти в книге Джекобсона [241, с. 202]. Эта теорема означает, что всегда достаточно ограничиться поиском линейных псевдопотенциалов типа (3.2.8) и матричных решений систем соотношений типа (3.2.21). (Это относится к системам уравнений первого порядка по t и конечного порядка по x .)

Системы типа (3.2.21) всегда имеют тривиальные решения ($\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$) и почти тривиальное абелево решение

$$\alpha = \gamma = 0, \quad [\beta, \delta] = 0.$$

Теперь мы покажем, что любая абелева алгебра Ли соответствует последовательности потенциальных функций, которая в свою очередь соответствует (в лучшем случае) последовательности законов сохранения исходного уравнения. Если дано эволюционное уравнение для u (первого порядка по t и p -го порядка по x), то мы ищем (линейный) псевдопотенциал вида (3.2.8). Произведя вычисления, аналогичные проделанным выше, мы еще больше ограничим псевдопотенциал до вида

$$(3.2.30) \quad \underline{q}_x = \sum_j^m a_j \underline{a}_j \underline{\mathbf{q}}, \quad \underline{\mathbf{q}}_t = \sum_l^m b_l \underline{a} \underline{\mathbf{q}},$$

где a_j, b_l — известные скалярные функции от $(u, u_x, \dots, u_{(p-1)x})$, а \underline{a}_j — постоянные $(N \times N)$ -матрицы (элементы алгебры Ли). Система является абелевой, если (3.2.31)

$$[\underline{a}_j, \underline{a}_k] = 0 \text{ для всех } j, k.$$

Пусть λ_1 является простым собственным значением матрицы \underline{a}_1 и v — соответствующий собственный вектор, т. е.

$$\underline{a}_1 v = \lambda_1 v.$$

Если $[\underline{a}_1, \underline{a}_2] = 0$, то

$$\underline{a}_1 (\underline{a}_2 v) = \underline{a}_2 \underline{a}_1 v = \underline{a}_2 (\lambda_1 v) = \lambda_1 (\underline{a}_2 v);$$

поэтому вектор $\underline{a}_2 v$ должен быть кратным v , т. е.

$$\underline{a}_2 v = \lambda_2 v,$$

и v является собственным вектором матрицы \underline{a}_2 . Таким образом, две коммутирующие матрицы имеют общий собственный

вектор. Если (скажем) $\underline{\alpha}_1$ является диагонализуемой матрицей и имеет полный набор собственных векторов, то, как следует из (3.2.31), каждая из $\underline{\alpha}_i$ имеет те же самые собственные векторы. Поэтому существует система координат для \mathbf{q} , в которой правая часть (3.2.30) является диагональной и каждая компонента \mathbf{q} удовлетворяет двум скалярным уравнениям следующего вида:

$$q_x = \sum_j^m a_j \lambda_j q, \quad q_t = \sum_j^m b_j \lambda_j q.$$

Поэтому $\ln q$ является потенциальной функцией, соответствующей закону сохранения

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\sum a_j \lambda_j \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(- \sum b_j \lambda_j \right) = 0.$$

Разные компоненты \mathbf{q} , отвечающие разным собственным значениям, приводят к разным законам сохранения. Можно показать, что абелева алгебра Ли приводит к законам сохранения даже в том случае, когда матрицы $\underline{\alpha}_j$ являются недиагонализуемыми (см. упр. 5).

Часто утверждается, что интерес представляют лишь неабелевые псевдопотенциалы, поскольку абелевы приводят только к законам сохранения. И это правильно, если смотреть на проблему с точки зрения МОЗР, но абелевы псевдопотенциалы не следует полностью игнорировать; из них, например, следует преобразование Коула — Хопфа.

Вернемся теперь к уравнению Фишера (3.2.20). Оно имеет нетривиальный псевдопотенциал вида (3.2.7), если (3.2.21) имеет матричное неабелево решение. Но система (3.2.21) не имеет такого решения (доказательство этого факта довольно громоздко и дано в упр. 7). Поэтому (3.2.20) не имеет ни псевдопотенциалов, ни ПБ, ни линейной задачи рассеяния, зависящей только от u , u_x , т. е. вида (3.2.7). Однако совершенно неясно, в чем кроется причина неудачи: является ли она следствием внутренней структуры уравнения или же связана с выбором псевдопотенциала в форме (2.2.9). Неизвестен способ обобщить этот метод до такой степени, чтобы полученный из него отрицательный результат гарантировал, что и любой другой метод, обсуждавшийся в этой главе, также должен привести к отрицательному результату.

3.2. d. Более общие задачи. До сих пор мы ограничивались уравнениями с полиномиальными линеаризованными дисперсионными соотношениями. Для уравнений более высокого порядка псевдопотенциальный метод имеет точно такое же начало, но задача не обязательно сводится к чисто алгебраической, и может оказаться недостаточным ограничивать поиск только ли-

нейными псевдопотенциалами. Для иллюстрации рассмотрим уравнение второго порядка

$$(3.2.32) \quad u_{xt} = f(u),$$

содержащее в качестве частного случая уравнение sin-Гордон. При различных упрощающих предположениях Краскал [297], Мак-Лафлин и Скотт [371] и Рунд [436] показали, что уравнение (3.2.32) обладает особой структурой (дополнительными законами сохранения, или ПБ) тогда и только тогда, когда

$$(3.2.33) \quad f'' = kf$$

для некоторого k . Однако Михайлов [374] показал¹⁾, что существуют другие функции, для которых уравнение (3.2.32) принадлежат к классу интегрируемых при помощи МОЗР (см. упр. 8 разд. 3.7). Новое уравнение связано с задачей рассеяния для оператора третьего порядка, в то время как уравнения, подчиняющиеся соотношению (3.2.33), связаны с оператором второго порядка.

Попытаемся найти псевдопотенциал для (3.2.32), чтобы выяснить, можно ли обобщить условие (3.2.33). Следуя обычным правилам, рассмотрим

$$(3.2.34) \quad \mathbf{q}_x = \mathbf{A}(u, u_x, u_t, \mathbf{q}), \quad \mathbf{q}_t = \mathbf{B}(u, u_x, u_t, \mathbf{q}).$$

Условие интегрируемости ($\mathbf{q}_{xt} = \mathbf{q}_{tx}$) приводит к

$$(3.2.35) \quad \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial u_t} = 0 = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial u_x}$$

и

$$(3.2.36) \quad [\mathbf{A}, \mathbf{B}] + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial u} u_t - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial u} u_x + \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial u_x} - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial u_t} \right) f = 0.$$

В этом месте появляется существенное различие между уравнениями первого (по t) порядка и уравнениями более высокого порядка: независимые переменные u , u_x , u_t , \mathbf{q} не входят в соотношение (3.2.36) явно. Поэтому если случай (3.2.13) удавалось свести к изучению чисто алгебраической задачи (3.2.19), то в случае (3.2.36) такое сведение неизвестно. Решение можно получить, наложив дополнительные ограничения на структуру функций \mathbf{A} , \mathbf{B} (см., например, [166], [312] или [41]). С учетом этих дополнительных ограничений (3.2.32) имеет псевдопотенциал, если выполнено (3.2.33). Но ответ на общий вопрос пока отсутствует.

3.2. е. Заключение. Перечислим вкратце, что же известно о псевдопотенциалах.

¹⁾ См. примечание на стр. 305. — Прим. перев.

(i) Приведенный здесь метод позволяет найти псевдопотенциалы для некоторых уравнений. Если найден неабелев псевдопотенциал, то обычно из него можно получить ПБ. Если он к тому же линейный и зависит от параметра, то очень вероятно, что его можно использовать для МОЗР.

(ii) Отрицательный результат, полученный для конкретного уравнения, наводит на мысль (и только), что никакой другой метод, обсуждавшийся в этой главе, также не будет работать. То же самое и для «прямых» методов построения N -солитонных формул, описанных в разд. 3.5, 3.6.

(iii) Если рассматриваемое уравнение имеет первый порядок по t и конечный порядок по x , то достаточно ограничиться поиском линейных псевдопотенциалов. Затем задачу можно свести к алгебраической, т. е. к поиску алгебры Ли определенной структуры. Представляется, что в каждом конкретном случае задача может быть решена, но пока что, по-видимому, нет никаких общих результатов.

Ситуация становится еще более запутанной, если допустить, что псевдопотенциал зависит от производных более высокого порядка или уравнение имеет более высокий порядок. В этих случаях вопрос о существовании псевдопотенциала приводит к системе дифференциально-алгебраических соотношений, причем неизвестно, можно ли без потери общности ограничиться поиском линейных псевдопотенциалов.

3.3. Прямые методы построения солитонных решений — метод Хироты. Одной из интересных областей в теории распространения нелинейных волн является развитие методов построения точных частных решений определяющих их уравнений. Хирота получил много значительных результатов в теории уравнений, допускающих солитонные решения (обзоры некоторых его работ см. в [218], [224] и [226], [227]). Следует отметить, что прямые методы практически всегда срабатывают для уравнений, интегрируемых при помощи МОЗР, а иногда даже в тех случаях, когда соответствующие задачи рассеяния неизвестны. На практике прямые методы часто побуждали к поиску соответствующих задач рассеяния и иногда приводили к таким задачам (см. [450], [393], [449] и т. д.). Прямой метод основан на следующих идеях:

(i) Произвести замену зависимой переменной (это может потребовать некоторой изобретательности, хотя имеются стандартные формы). Преобразование должно привести эволюционное уравнение к так называемой билинейной форме, квадратичной по зависимым переменным. Хирота разработал новый подход, очень удобный на этом этапе.

(ii) Рассмотреть формальные ряды теории возмущений для

этого билинейного уравнения. В случае солитонных решений эти ряды обрываются.

(iii) Использовать метод полной математической индукции для доказательства того факта, что предполагаемая солитонная формула действительно является решением.

В этом разделе мы тщательно проанализируем случай уравнения КdФ. Затем кратко приведем результаты, касающиеся других хорошо известных нелинейных волновых уравнений, и обсудим другие задачи, в которых этот метод результативен.

3.3. а. Уравнение КdФ в качестве примера. Рассмотрим уравнение КdФ

$$(3.3.1) \quad u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0.$$

В разд. 1.4 мы видели, что N -солитонное решение имеет вид

$$(3.3.2) \quad u = 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln F,$$

где F — определитель некоторой матрицы. Этот вид подсказывает преобразование уравнения (3.3.1). Подставляя (3.3.2) в (3.3.1), один раз интегрируя и полагая константу интегрирования равной нулю, получим

$$(3.3.3) \quad F_{xt}F - F_xF_t + F_{xxxx}F - 4F_{xxx}F_x + 3F_{xx}^2 = 0.$$

Уравнение (3.3.3) является квадратичной формой (Хирота обычно называет уравнения такого вида билинейными); такие формы обычно возникают при правильном выборе замены зависимой переменной. Для дальнейшего анализа удобно ввести оператор

$$(3.3.4) \quad D_x^m D_t^n a \cdot b = (\partial_x - \partial_{x'})^m (\partial_x - \partial_{x'})^n a(x, t) b(x', t') \Big|_{\substack{x' = x \\ t' = t}}.$$

Воспользовавшись этим определением, уравнение (3.3.3) можно переписать в виде

$$(3.3.5) \quad (D_x D_t + D_x^4) F \cdot F = 0.$$

При работе с этим оператором полезны следующие легко проверяемые свойства:

$$(3.3.6a) \quad D_x^m a \cdot 1 = \partial_x^m a,$$

$$(3.3.6b) \quad D_x^m a \cdot b = (-1)^m D_x^m b \cdot a,$$

$$(3.3.6c) \quad D_x^m a \cdot a = 0, \quad m \text{ — нечетное число},$$

$$(3.3.6d) \quad D_x^m D_t^n e^{(k_1 x - \omega_1 t)} \cdot e^{(k_2 x - \omega_2 t)} = \\ = (k_1 - k_2)^m (-\omega_1 + \omega_2)^n e^{(k_1 + k_2)x - (\omega_1 + \omega_2)t}.$$

Имеется много других соотношений, содержащих оператор D .