Читатель при желании может обратиться к одной из упоминавшихся обзорных статей.

Предположим, далее, что функция F может быть представлена в виде формального ряда по степеням ε:

(3.3.7a) $$F = 1 + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} + \ldots,$$

где

(3.3.7b) $$f^{(1)} = \sum_{i=1}^{N} e^{\eta_i}, \quad \eta_i = k_i x - \omega_i t + \eta_i^{(0)}$$

и k_i, ω_i, $\eta_i^{(0)}$ — константы. В случае уравнения КдФ (и на самом деле для всех задач, допускающих точное N-солитонное решение) этот формальный ряд обрывается. Действительно, подставив (3.3.7a) в (3.3.5), найдем

$$(D_x D_t + D_x^4)(1 + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} + \ldots) \cdot (1 + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} + \ldots) = 0$$

и, приравняв нулю коэффициенты при каждой степени ε, получим

(3.3.8a) $O(1)$: $0 = 0$,

(3.3.8b) $O(\varepsilon)$: $2(\partial_x \partial_t + \partial_x^4) f^{(1)} = 0$,

(3.3.8c) $O(\varepsilon^2)$: $2(\partial_x \partial_t + \partial_x^4) f^{(2)} = -(D_x D_t + D_x^4) f^{(1)} \cdot f^{(1)}$,

(3.3.8d) $O(\varepsilon^3)$: $2(\partial_x \partial_t + \partial_x^4) f^{(3)} = -2(D_x D_t + D_x^4) f^{(1)} \cdot f^{(2)}$.

Первое нетривиальное уравнение (3.3.8b) является однородным. В качестве решения мы взяли (3.3.7b). Если мы попытаемся продолжить вычисление членов ряда, начав с решения (3.3.7b) при произвольном N, то, к сожалению, столкнемся с аналитическими трудностями. Чаще всего можно получить решение для $N = 1, 2$ (и иногда для 3), а затем выдвинуть гипотезу о структуре решения при произвольном N и доказать ее по индукции. При $N = 1$ возьмем $f^{(1)} = e^{\eta_1}$. Тогда из (3.3.8b) следует, что $\omega_1 = -k_1^3$. Уравнение для $f^{(2)}$ следует из соотношения (3.3.8c), которое при помощи (3.3.6d) сводится к

(3.3.9a) $$(\partial_x \partial_t + \partial_x^4) f^{(2)} = 0.$$

Таким образом,

(3.3.9b) $$f^{(2)} = 0,$$

и ряд обрывается. Поэтому при $N = 1$ имеем

$$F_1 = 1 + e^{\eta_1}, \quad \omega_1 = -k_1^3$$

и

(3.3.10) $$u = \frac{k_1^2}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{1}{2}(k_1 x - k_1^3 t + \eta_1^{(0)}).$$

При $N = 2$ в качестве решения уравнения (3.3.8b) мы возьмем

(3.3.11) $$f^{(1)} = e^{\eta_1} + e^{\eta_2}, \qquad \eta_i = k_i x - k_i^3 t + \eta_i^{(0)}.$$

Тогда (3.3.8c) сводится к уравнению

(3.3.12a) $$2\left(\partial_x \partial_t + \partial_x^4\right) f^{(2)} = \\ = -2\left((k_1 - k_2)(-\omega_1 + \omega_2) + (k_1 - k_2)^4\right) e^{\eta_1 + \eta_2},$$

имеющему решение

(3.3.12b) $$f^{(2)} = e^{\eta_1 + \eta_2 + A_{12}},$$

(3.3.12c) $$e^{A_{ij}} = \left(\frac{k_i - k_j}{k_i + k_j}\right)^2$$

(отметим, что $k_1 \neq k_2$). Подставив $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ в (3.3.8d), убеждаемся, что правая часть (3.3.8d) равна нулю, поэтому возьмем $f^{(3)} = 0$. Таким образом, при $N = 2$

(3.3.13) $$F_2 = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_1 + \eta_2 + A_{12}}.$$

Функция $u = 2d^2(\ln F_2)/dx^2$ соответствует двухсолитонному решению уравнения КдФ. Произведя аналогичные вычисления при $N = 3$, получим

(3.3.14) $$F_3 = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_3} + e^{\eta_1 + \eta_2 + A_{12}} + e^{\eta_1 + \eta_3 + A_{13}} + \\ + e^{\eta_2 + \eta_3 + A_{23}} + e^{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + A_{12} + A_{13} + A_{23}},$$

где коэффициенты A_{ij} определены формулой (3.3.12c).

Основываясь на этих решениях, мы выдвигаем гипотезу о том, что структура общего N-солитонного решения имеет вид

(3.3.15) $$F_N = \sum_{\underline{\mu}=0,1} \exp\left(\sum_{i=1}^{N} \mu_i \eta_i + \sum_{1 \leqslant i < j}^{N} \mu_i \mu_j A_{ij}\right),$$

где сумма по $\underline{\mu}$ пробегает по всем наборам μ_i, $i = 1, \ldots, N$. Отметим, что A_{ij} связаны со сдвигами фаз солитонов при рассеянии. Рассмотрим двухсолитонный случай. Положим $0 < k_1 < k_2$ и определим

$$\xi_i = x - k_i^2 t, \qquad i = 1, 2.$$

Тогда

$$\xi_2 = -\left(k_2^2 - k_1^2\right) t + \xi_1.$$

В системе координат, связанной с первым солитоном, ξ_1 фиксировано, и мы вычислим пределы $t \to \pm\infty$. Рассмотрим вначале $t \to +\infty$, поэтому $\xi_2 \to -\infty$, $e^{\eta_2} \to 0$, $F_2 \sim 1 + e^{\eta_1}$; при этом

(3.3.16) $$u \sim \frac{k_1^2}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{\eta_1}{2}.$$

Аналогично при $t \to -\infty$, $\xi_2 \to +\infty$ и $e^{\eta_2} \to +\infty$

$$F_2 \to e^{\eta_2}\left(1 + e^{\eta_1 + A_{12}}\right).$$

Из (3.3.2) следует, что два решения могут отличаться на множитель

$$u \sim \frac{k_1^2}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\eta_1 + A_{12}}{2}\right). \tag{3.3.17}$$

Таким образом, сдвиг фаз в двухсолитонном решении в результате взаимодействия определяется коэффициентом A_{12} (отметим, что точно такой же результат был получен в разд. 1.4; см. (1.4.43)). Так же можно проанализировать N-солитонный случай.

Теперь вернемся к проверке справедливости N-солитонного решения (3.3.15) [211]. Читатель должен иметь в виду, что это доказательство довольно утомительно и можно, не теряя связности изложения, переходить прямо к примеру уравнения мКдФ (3.3.32).

Теорема. *Функция F_N вида* (3.3.15) *удовлетворяет уравнению* (3.3.5).

Доказательство. Подставив (3.3.15) в (3.3.5) и воспользовавшись соответствующими свойствами оператора D, получим

$$\begin{aligned} &\sum_{\underline{\mu}=0,1} \sum_{\underline{\nu}=0,1} \left\{ \left(\sum_i (\mu_i - \nu_i) k_i \right) \left(\sum_i (\mu_i - \nu_i)(-k_i)^3 \right) + \right. \\ &\left. + \left(\sum_{i=1}^N (\mu_i - \nu_i) k_i \right)^4 \right\} \cdot \exp\left(\sum_i (\mu_i + \nu_i) \eta_i + \right. \\ &\left. + \sum_{1 \leqslant i < j} (\mu_i \mu_j + \nu_i \nu_j) A_{ij} \right) = 0. \end{aligned} \tag{3.3.18}$$

Так как μ_i, $\nu_i = 0, 1$, то очевидно, что имеются экспоненциальные члены только вида

$$\exp\left(\sum_{i=1}^n \eta_i + \sum_{i=n+1}^m 2\eta_i \right), \quad 0 \leqslant n \leqslant N, \quad n \leqslant m \leqslant N$$

(с точностью до переобозначения индексов). Затем мы покажем, что коэффициент при этом общем экспоненциальном члене равен нулю. Этот коэффициент имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta = &\sum_{\underline{\mu}} \sum_{\underline{\nu}} \left\{ -\left(\sum_{i=1}^N (\mu_i - \nu_i) k_i \right) \left(\sum_{i=1}^N (\mu_i - \nu_i) k_i^3 \right) + \right. \\ &\left. + \left(\sum_{i=1}^N (\mu_i - \nu_i) k_i \right)^4 \right\} \cdot \exp\left(\sum_{i<j} (\mu_i \mu_j + \nu_i \nu_j) A_{ij} \right) \operatorname{cond}(\underline{\mu}, \underline{\nu}). \end{aligned} \tag{3.3.19a}$$

Здесь $\operatorname{cond}(\underline{\mu}, \underline{\nu})$ означает

$$\text{(3.3.19b)} \qquad \operatorname{cond}(\underline{\mu}, \underline{\nu}) = \begin{cases} \text{для } i=1, \ldots, n \text{ мы берем только} \\ \text{такие } \mu_i, \nu_i, \text{ что ①: } \mu_i+\nu_i=1, \\ 0 \leqslant n \leqslant N; \text{ для } i=n+1, \ldots, m \text{ мы} \\ \text{берем только такие } \mu_i, \nu_i, \text{ что ②:} \\ \mu_i=\nu_i=1,\ 0 \leqslant m \leqslant N; \text{ для } i=m+ \\ +1, \ldots, N \text{ мы берем только такие} \\ \mu_i, \nu_i, \text{ что ③: } \mu_i=\nu_i=0. \end{cases}$$

Обозначим

$$\text{(3.3.20)} \qquad \sigma_i = \mu_i - \nu_i, \qquad i=1, 2, \ldots, n.$$

При $i > n$ $\sigma_i = 0$ (так как либо $\mu_i = \nu_i = 1$, либо $\mu_i = \nu_i = 0$). Поскольку при $i = 1, \ldots, n$ мы имеем $\mu_i + \nu_i = 1$ (из (3.3.19b), то

$$\text{(3.3.21)} \qquad \mu_i = \frac{1+\sigma_i}{2}, \qquad \nu_i = \frac{1-\sigma_i}{2}.$$

С учетом (3.2.21) все члены в (3.3.19a), за исключением экспоненциального члена, без труда преобразуются.

Используя цифровые обозначения, принятые в (3.3.19b), мы оценим член

$$T = \exp\left(\sum_{i<j}^{N} (\mu_i\mu_j + \nu_i\nu_j) A_{ij}\right) =$$
$$= \exp\left(\sum_{①<①} + \sum_{①<②} + \sum_{①<③} + \sum_{②<②} + \sum_{②<③} + \sum_{③<③}\right) \times$$
$$\times (\mu_i\mu_j + \nu_i\nu_j) A_{ij}.$$

Единственный вклад в этот показатель, зависящий от $\sigma_i\sigma_j$, определяется членом „① < ①“. Поэтому T имеет вид

$$\text{(3.3.22a)} \qquad T = \text{const} \sum_{i<j}^{n} \left(\frac{k_i - k_j}{k_i + k_j}\right)^2 (1 + \sigma_i\sigma_j) =$$

$$\text{(3.3.22b)} \qquad = \text{const} \sum_{i<j}^{n} \left(\frac{\sigma_i k_i - \sigma_j k_j}{k_i + k_j}\right);$$

последнее равенство имеет место, так как $\sigma_i = \pm 1$. Все это означает, что коэффициент Δ имеет вид $\Delta = \text{const} \times \hat{\Delta}$, где

$$\text{(3.3.23)} \qquad \hat{\Delta} = \sum_{\sigma=1} \left\{ -\left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i k_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i k_i^3\right) + \left(\sum_{1}^{n} \sigma_i k_i\right)^4 \right\} \times$$
$$\times \prod_{i<j}^{n} (\sigma_i k_i - \sigma_j k_j)^2$$

(отметим, что член $\sum_{i<j}^{n} (1/(k_i+k_j)^2)$ мы перенесли в выделенную константу).

Докажем теперь по индукции, что $\hat{\Delta}=0$. Функция $\hat{\Delta}$ является полиномом по k_i, точнее $\hat{\Delta}=\hat{\Delta}(k_1, \ldots, k_n)$. Мы будем обозначать это так: $\hat{\Delta}=\hat{\Delta}_n$. Отметим также, что порядок полиномиального множителя $\sum_{i<j}^{n} (\sigma_i k_i - \sigma_j k_j)$ равен $\frac{1}{2}n(n-1)$, поэтому порядок $\hat{\Delta}$ такой, что выполнено неравенство

$$\operatorname{ord}(\hat{\Delta}_n) \leqslant n^2 - n + 4. \tag{3.3.24}$$

Отметим, что

$$\hat{\Delta}(k_1) = \hat{\Delta}_1 = \sum_{\sigma_1=1} \{-(\sigma_1 k_1)(\sigma_1 k_1^3) + \sigma_1^4 k_1^4\} = 0, \tag{3.3.25a}$$

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}(k_1, k_2) = \hat{\Delta}_2 = \sum_{\sigma_1, \sigma_2=\pm 1} \{&-(\sigma_1 k_1 + \sigma_2 k_2)(\sigma_1 k_1^3 + \sigma_2 k_2^3) + \\ &+ (\sigma_1 k_1 + \sigma_2 k_2)^4\} (\sigma_1 k_1 - \sigma_2 k_2)^2 = \\ &= 3k_1 k_2 (k_1^2 - k_2^2)(k_1 - k_2)^2 \sum_{\sigma_1, \sigma_2=\pm 1} \sigma_1 \sigma_2 = 0. \end{aligned} \tag{3.3.25b}$$

Функция $\hat{\Delta}(k_1, \ldots, k_n)$ обладает следующими свойствами:

(i) $\hat{\Delta}_n$ — четная функция k_i, т. е.

$$\hat{\Delta}_n(k_1, \ldots, k_i, \ldots, k_n) = \hat{\Delta}(k_1, \ldots, -k_i, \ldots, k_n). \tag{3.3.26a}$$

(ii) $\hat{\Delta}_n$ симметрична относительно перестановки k_j и k_i, т. е.

$$\begin{aligned} &\hat{\Delta}_n(k_1, \ldots, k_i, \ldots, k_j, \ldots, k_n) = \\ &= \hat{\Delta}_n(k_1, \ldots, k_j, \ldots, k_i, \ldots, k_n). \end{aligned} \tag{3.3.26b}$$

Соотношение (3.3.26a) легко получить, заменив $k_i \to -k_i$ и $\sigma_i \to -\sigma_i$ (немой индекс) в (3.3.23). Симметрию (3.3.26b) нужно проверить только для произведения. Но поскольку

$$\prod_{1\leqslant i<j}^{n} (\sigma_i k_i - \sigma_j k_j)^2 = (-1)^{(n^2-n)/2} \prod_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}} (\sigma_i k_i - \sigma_j k_j), \tag{3.3.27}$$

то ясно, что произведение симметрично относительно перемены мест k_p и k_q.

Вычислим $\widehat{\Delta}_n$ при $k_1 = 0$:

$$(3.3.28)\qquad \widehat{\Delta}_n\,|_{k_1=0} \equiv \widehat{\Delta}(k_1=0,\ k_2,\ \ldots,\ k_n) =$$

$$= \sum_{\sigma_1=\pm 1}\ \sum_{\substack{\text{осталь-}\\ \text{ные}\\ \sigma=\pm 1}} \left\{-\left(\sum_{i=2}^{n}\sigma_i k_i\right)\left(\sum_{i=2}^{n}\sigma_i k_i^3\right)+\left(\sum_{i=2}^{n}\sigma_i k_i\right)^4\right\}\times$$

$$\times\prod_{i=2}^{n} k_i^2 \sum_{2\leqslant i<j}^{n}(\sigma_i k_i-\sigma_j k_j)^2 = 2\left(\prod_{i=2}^{n} k_i^2\right)\widehat{\Delta}_{n-1}$$

(отметим, что здесь $\widehat{\Delta}_{n-1} = \widehat{\Delta}(k_2,\ k_3,\ \ldots,\ k_n)$). Аналогично вычисление $\widehat{\Delta}_n$ при $k_1 = k_2$ дает

$$(3.3.29a)\qquad \widehat{\Delta}_n\,|_{k_1=k_2} = \sum_{\sigma_1,\ \sigma_2=\pm 1}\ \sum_{\substack{\text{осталь-}\\ \text{ные}\\ \sigma=\pm 1}} \left\{-\left((\sigma_1+\sigma_2)\,k_1+\sum_{i=3}^{n}\sigma_i k_i\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left((\sigma_1+\sigma_2)\,k_1^3+\sum_{i=3}^{n}\sigma_i k_i\right)+\left((\sigma_1+\sigma_2)\,k_1+\sum_{i=3}^{n}\sigma_i k_i\right)^4\right\}\times$$

$$\times(\sigma_1-\sigma_2)^2\,k_1^2\prod_{i=3}^{n}(\sigma_1 k_1-\sigma_i k_i)^2(\sigma_2 k_2-\sigma_i k_i)^2\prod_{3\leqslant i<j}(\sigma_i k_i-\sigma_j k_j)^2.$$

Мы видим, что вклад возникает только при $\sigma_1 = -\sigma_2$, поэтому

$$(3.3.29b)\qquad \widehat{\Delta}_n\,|_{k_1=k_2} = 8k_1^2 \sum_{(\sigma_3,\ \ldots,\ \sigma_n)=\pm 1}\left\{-\left(\sum_{i=3}^{n}\sigma_i k_i\right)+\left(\sum_{i=3}^{n}\sigma_i k_i^3\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{i=3}^{n}\sigma_i k_i\right)^4\right\}\times\prod_{i=3}^{n}(k_1^2-k_i^2)^2\prod_{3\leqslant i<j}^{n}(\sigma_i k_i-\sigma_j k_j)^2 =$$

$$= 8k_1^2\prod_{3}^{n}(k_1^2-k_2^2)\,\widehat{\Delta}_{n-2},$$

где $\widehat{\Delta}_{n-2} = \widehat{\Delta}(k_3,\ k_4,\ \ldots,\ k_n)$. По индукции заключаем, что и $\widehat{\Delta}_n\,|_{k_1=0} = 0$, и $\widehat{\Delta}_n\,|_{k_i=k_2}$ при всех n. Поэтому $\widehat{\Delta}_n$ содержит множитель $k_1(k_1-k_2)$, но из свойств симметрии следует, что k_1 и k_2 можно заменить на любое k_i, откуда ясно, что при любых i, j

$$\widehat{\Delta}_n\,|_{k_i=0} = 0, \qquad \widehat{\Delta}_n\,|_{k_i=k_j} = 0,$$

и поэтому полином $\widehat{\Delta}_n$ должен иметь множитель

$$\prod_{i=1}^{n} k_i \prod_{\substack{i,\ j=1\\ i\neq j}}^{n}(k_i-k_j) \quad\text{или}\quad \prod_{i=1}^{n} k_i \prod_{1\leqslant i<j}^{n}(k_i-k_j)^2.$$

Но поскольку $\hat{\Delta}_n$ является четной функцией каждого k_i, то $\hat{\Delta}_n$ должен содержать множитель

$$\prod_{i=1}^{n} k_i^2 \prod_{1 \leqslant i < j}^{n} (k_i^2 - k_j^2)^2. \tag{3.3.30}$$

Это означает, что порядок полинома $\hat{\Delta}_n$ должен быть по крайней мере равен $2n^2$, т. е.

$$\operatorname{order}(\hat{\Delta}_n) \geqslant 2n^2.$$

Но поскольку $2n^2 > n^2 - n + 4$ при всех $n \geqslant 2$, то мы приходим к противоречию, т. е. $\hat{\Delta}_n$ не может одновременно удовлетворять неравенствам $\operatorname{order}(\hat{\Delta}_n) \leqslant n^2 - n + 4$ и $\operatorname{order}(\hat{\Delta}_n) \geqslant 2n^2$. Единственный выход состоит в том, что при $n \geqslant 2$

$$\hat{\Delta}_n = 0. \tag{3.3.31}$$

При $n = 1$ формула (3.3.31) также верна (см. (3.3.25a)). Таким образом мы доказали, что функция $\hat{\Delta}$ в (2.3.23) и поэтому Δ в (3.3.19a) равны нулю. Тем самым мы проверили, что N-солитонное решение $u = 2d^2(\ln F_N)/dx^2$ действительно удовлетворяет уравнению КдФ. □

3.3. b. Некоторые другие нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных. Обратимся теперь к другому аспекту прямого метода. Хирота [218] отмечал, что очень часто нужная замена зависимой переменной может быть выведена регулярным образом. Мы проиллюстрируем его подход на примере уравнения мКдФ

$$v_t + 6v^2 v_x + v_{xxx} = 0. \tag{3.3.32}$$

Подставив $v = F/G$ в (3.3.32) и воспользовавшись определением операторов D_x, D_t, мы получим

$$(D_t + D_x^3)\, G \cdot F + \frac{6}{F^2}(D_x G \cdot F)\left(\frac{1}{2} D_x^2 F \cdot F - G^2\right) = 0. \tag{3.3.33}$$

Так как обе функции F и G произвольны, мы можем расщепить уравнения следующим образом:

$$(D_t + D_x^3)\, G \cdot F = 0, \tag{3.3.34a}$$

$$D_x^2 F \cdot F = 2G^2. \tag{3.3.34b}$$

Такой выбор расщепления обусловлен дисперсионным соотношением линеаризованного уравнения. Следующее разложение

приводит к солитонным решениям (таким, что $v \to 0$ при $|x| \to \to \infty$):

$$F = 1 + \varepsilon^2 F_2 + \varepsilon^4 F_4 + \ldots, \qquad G = \varepsilon G_1 + \varepsilon^3 G_3 + \ldots. \tag{3.3.35}$$

Здесь каждое из разложений обрывается. Например, односолитонному решению отвечает

$$\begin{aligned} &(\partial_t + \partial_x^3) G_1 = 0, \\ &G_1 = e^{\eta_1}, \quad \eta_1 = k_1 x - k_1^3 t + \eta_1^{(0)}, \\ &\partial_x^2 F_2 = G_1^2 = e^{2\eta_1}, \\ &F_2 = \frac{1}{4k_i^2} e^{2\eta_1}, \\ &F_j = 0, \quad j \geqslant 4, \\ &G_j = 0, \quad j \geqslant 3. \end{aligned} \tag{3.3.36}$$

При $\varepsilon = 1$ с учетом (3.3.36) получим односолитонное решение уравнения мКдФ

$$v = \frac{e^{\eta_1}}{1 + e^{2\eta_1}/4k_1^2} = k_1 \operatorname{sech} \eta_1. \tag{3.3.37}$$

Функции G и F ($v = G/F$) для двухсолитонного решения можно представить в виде

$$\begin{aligned} G = {} & e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + \frac{1}{4k_2^2}\left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2 e^{\eta_1 + 2\eta_2} + \\ & + \frac{1}{4k_1^2}\left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2 e^{2\eta_1 + \eta_2}, \\ F = {} & 1 + \frac{1}{4k_1^2} e^{2\eta_1} + \frac{1}{4k_2^2} e^{2\eta_2} + \frac{2}{(k_1 + k_2)^2} e^{\eta_1 + \eta_2} + \\ & + \frac{(k_1 - k_2)^4}{16 k_1^2 k_2^2 (k_1 + k_2)^4} e^{2\eta_1 + 2\eta_2}. \end{aligned} \tag{3.3.38a}$$

Отметим, что F можно привести к виду

$$\begin{aligned} F = {} & \left(\frac{1}{2k_1} e^{\eta_1} + \frac{1}{2k_2} e^{\eta_2}\right) + \\ & + \left(1 - \frac{(k_1 - k_2)^2}{4k_1 k_2 (k_1 + k_2)^2} e^{\eta_1 - \eta_2}\right)^2 = \hat{g}^2 + \hat{f}^2. \end{aligned} \tag{3.3.38b}$$

При этом G можно переписать следующим образом:

$$G = 2 D_x \hat{g} \cdot \hat{f}. \tag{3.3.38c}$$

Таким образом, v имеет вид

(3.3.39a) $$v = 2\frac{D_x\hat{g}\cdot\hat{f}}{\hat{f}^2+\hat{g}^2} = 2\frac{\hat{g}_x\hat{f}-\hat{g}\hat{f}_x}{\hat{f}^2(1+(\hat{g}/\hat{f})^2)}$$

или

(3.3.39b) $$v = 2\left(\operatorname{arctg}\frac{\hat{g}}{\hat{f}}\right)_x \equiv i\left(\ln\frac{\hat{f}-i\hat{g}}{\hat{f}+i\hat{g}}\right)_x.$$

Если мы определим $f = \hat{f} + i\hat{g}$, то получим формулу замены зависимой переменной:

(3.3.40) $$v = i\left(\ln\frac{f^*}{f}\right)_x.$$

Перейдя к этой новой зависимой переменной, мы получим билинейные уравнения

(3.3.41a) $$(D_t + D_x^3)f^*\cdot f = 0,$$

(3.3.41b) $$D_x^2 f^* f = 0.$$

Чтобы получить N-солитонные решения, разложим f в ряд

$$f_N = 1 + \varepsilon f_N^{(1)} + \varepsilon^2 f_N^2 + \ldots,$$

подставим его в (3.3.41) и приравняем нулю коэффициенты при каждой степени ε. Одно- и двухсолитонные решения даются формулами ($\varepsilon = 1$)

(3.3.42) $$\begin{gathered} f_1 = 1 + e^{\eta_1 + i\pi/2}, \\ f_2 = 1 + e^{\eta_1+i\pi/2} + e^{\eta_2+i\pi/2} + e^{\eta_1+\eta_2+i\pi+A_{12}}, \\ \eta_i = k_i x - k_i^3 t + \eta_i^{(0)}, \quad e^{A_{ij}} = \left(\frac{k_i-k_j}{k_i+k_j}\right)^2. \end{gathered}$$

N-солитонное решение имеет следующую структуру:

(3.3.43) $$f_N = \sum_{\underline{\mu}=0,1} \exp\left(\sum_{i=1}^{N}\mu_i\left(\eta_i + i\frac{\pi}{2}\right) + \sum_{1\leqslant i<j}^{N}\mu_i\mu_j A_{ij}\right).$$

Для полноты мы приведем также результаты по уравнению sin-Гордон ([212]; см. также [99, 100]) и по нелинейному уравнению Шрёдингера [213]. Рассмотрим вначале замену зависимой переменной

(3.3.44) $$u = 2i\ln\left(\frac{f^*}{f}\right)$$

для уравнения sin-Гордон

(3.3.45) $$u_{xt} = \sin u.$$

(Читатель, вероятно, вспомнит результаты гл. 1, устанавливающие глубокую связь между уравнениями sin-Гордон и мКдФ.) Из (3.3.44) следует, что

$$\sin u = \frac{1}{2i}\left(\left(\frac{f}{f^*}\right)^2 - \left(\frac{f^*}{f}\right)^2\right), \tag{3.3.46}$$

откуда подстановкой (3.3.44) в (3.3.45) находим

$$D_x D_t f \cdot f = -\frac{1}{2}(f^{*2} - f^2) \tag{3.3.47}$$

и комплексно сопряженное уравнение. Односолитонное решение уравнения (3.3.47) получится, если взять

$$f_1 = 1 + e^{\eta_1 + i\pi/2}, \tag{3.3.48a}$$

а N-солитонное решение имеет вид

$$f_N = \sum_{\mu=0,1} \exp\left(\sum_{j=1}^{N} \mu_i \left(\eta_j + i\frac{\pi}{2}\right) + \sum_{1 \leqslant i < j}^{N} \mu_i \mu_j A_{ij}\right), \tag{3.3.48b}$$

где

$$\begin{aligned} \eta_i &= k_i x - \omega_i t + \eta_i^{(0)}, \\ \omega_i &= \frac{1}{k_i}, \\ e^{A_{ij}} &= -\frac{(k_1 - k_2)(\omega_1 - \omega_2)}{(k_1 + k_2)(\omega_1 + \omega_2)} = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}. \end{aligned} \tag{3.3.48c}$$

Отметим, что если

$$f = F + iG \qquad (F,\ G \text{ вещественны}),$$

то (3.3.47) можно переписать в виде

$$D_x D_t (F \cdot F - G \cdot G) = 0, \qquad D_x D_t F \cdot G = FG \tag{3.3.49a}$$

и

$$u = 2i \ln \frac{F - iG}{F + iG} = 4 \operatorname{arctg} \frac{G}{F}. \tag{3.3.49b}$$

В случае нелинейного уравнения Шрёдингера [99]

$$iu_t + u_{xx} + |u|^2 u = 0 \tag{3.3.50}$$

возникает более сложная структура N-солитонного решения. Подставив $u = G/F$ (F вещественно) в (3.3.50), получим

$$\frac{1}{F^2}(iD_t + D_x^2) G \cdot F - \frac{G}{F^3}(D_x^2 F \cdot F - GG^*) = 0; \tag{3.3.51}$$

при этом мы расщепим уравнения следующим образом:

$$(iD_t + D_x^2) G \cdot F = 0, \qquad D_x^2 F \cdot F = GG^*. \tag{3.3.52}$$

Поэтому

$$|u|^2 = \frac{GG^*}{F^2} = \frac{D_x^2 F \cdot F}{F^2} = 2(\ln F)_{xx}. \tag{3.3.53}$$

Односолитонному решению отвечают

$$\begin{aligned} G &= e^{\eta_1}, \\ F &= 1 + e^{\eta_1 + \eta_1^* + \varphi_{1,1}^*}, \\ \eta_1 &= p_1 x - \Omega_1 t + \eta_1^{(0)}, \quad \Omega_1 = -ip_1^2, \\ e^{\varphi_{1,1}^*} &= \frac{1}{2}(p_1 + p_1^*)^{-2}. \end{aligned} \tag{3.3.54}$$

N-солитонное решение имеет вид

$$F = \sum_{\underline{\mu}=0,1} D_1(\underline{\mu}) \exp\left(\sum_{i=1}^{2N} \mu_i \eta_i + \sum_{1 \leqslant i < j}^{2N} \varphi_{ij} \mu_i \mu_j\right),$$

$$G = \sum_{\underline{\mu}=0,1} D_2(\underline{\mu}) \exp\left(\sum_{i=1}^{2N} \mu_i \eta_i + \sum_{1 \leqslant i < j}^{2N} \varphi_{ij} \mu_i \mu_j\right),$$

$$\eta_i = p_i x - \Omega_i t + \eta_i^{(0)}, \quad p_{i+N} + p_i^*, \quad \Omega_{i+N} = \Omega_i^*, \quad i = 1, \ldots, N,$$

$$\eta_{i+N} = \eta_i^*, \quad \Omega_j = -ip_j^*,$$

$$e^{\varphi_{ij}} = \begin{cases} \frac{1}{2}(p_i + p_j)^{-2} & \text{для } i = 1, 2, \ldots, N \text{ и } j = N+1, \ldots, 2N, \\ \frac{1}{2}(p_i - p_j)^{-2} & \text{для } i = N+1, \ldots, 2N \text{ и } j = N+1, \ldots, 2N, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} D_1(\underline{\mu}) &= \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{i=1}^{N} \mu_i = \sum_{i=1}^{N} \mu_i + N, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \\ D_2(\underline{\mu}) &= \begin{cases} 1, & \text{если } 1 + \sum_{1}^{N} \mu_{i+N} = \sum_{1}^{N} \mu_i, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \end{aligned} \tag{3.3.55}$$

3.3. с. Дискретные эволюционные уравнения. Многие из вычислений, приведенных в предыдущих пунктах, можно распространить и на случай обсуждавшихся дискретных задач (см., например, [226, 227]). Здесь мы проанализируем случай цепочки Тоды

$$\frac{d^2 y_n}{dt^2} = e^{-(y_n - y_{n-1})} - e^{-(y_{n+1} - y_n)}. \tag{3.3.56}$$

Определим $r_n = y_n - y_{n-1}$, тогда из (4.3.56) следует

$$\frac{d^2 r_n}{dt^2} = 2e^{-r_n} - e^{-r_{n+1}} - e^{-r_{n-1}}. \tag{3.3.57}$$

Если определить

$$r_n = -\ln(1 + V_n), \tag{3.3.58}$$

то V подчиняется уравнению

$$\frac{d^2 \ln(1 + V_n)}{dt^2} = V_{n+1} - 2V_n + V_{n-1}. \tag{3.3.59}$$

С физической точки зрения уравнение (3.3.59) описывает нелинейную лестничную линию передачи, и V_n является потенциалом n-го узла [229].

Воспользуемся заменой переменных

$$V_n = \frac{d^2 \ln F_n}{dt^2} \tag{3.3.60}$$

(отметим, что индекс обозначает координату узла, а не число солитонов). Подставив (3.3.60) в (3.3.59), получим билинейное (квадратичное) уравнение

$$\frac{1}{2} D_t^2 F_n \cdot F_n = F_{ntt} F_n - F_{nt}^2 = F_{n+1} F_{n-1} - F_n^2. \tag{3.3.61}$$

Аналогом оператора D_x служит оператор D_n, удовлетворяющий соотношению

$$e^{D_n} a_n \cdot b_n = e^{\partial_n - \partial_{n'}} a_n b_{n'} |_{n=n'} = a_{n+1} b_{n-1}, \tag{3.3.62}$$

где $e^{\partial_n} a_n \equiv a_{n+1}$. Поэтому

$$\operatorname{ch} D_n a_n \cdot b_n = \frac{1}{2}(a_{n+1} b_{n-1} + a_{n-1} b_{n+1}). \tag{3.3.63}$$

Воспользовавшись (3.3.62), перепишем (3.3.61) в виде

$$\frac{1}{2} D_t^2 F_n \cdot F_n = (\operatorname{ch} D_n - 1) F_n F_n, \tag{3.3.64}$$

или

$$\frac{1}{2} D_t^2 F_n \cdot F_n = 2 \operatorname{sh}^2 \left(\frac{1}{2} D_n\right) F_n \cdot F_n. \tag{3.3.65}$$

Опять применима теория возмущений, т. е.

$$F_n = 1 + \varepsilon F_n^{(1)} + \varepsilon^2 F_n^{(2)} + \ldots.$$

Односолитонному решению отвечает $F_n^{(j)} = 0$, $j \geqslant 2$, $F_n^{(1)} = e^{\eta_1}$. Таким образом,

$$\begin{gathered} F_{n,1} = 1 + e^{\eta_1}, \qquad \eta_1 = k_1 n - \omega_1 t, \\ \omega_1^2 = \left(2 \operatorname{sh} \frac{k}{2}\right)^2; \end{gathered} \tag{3.3.66}$$

поэтому потенциал V_n имеет вид

$$V_n = \frac{\omega_1^2}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{1}{2} \eta_1.$$

(Односолитонное решение может распространяться как вправо, так и влево.) Можно показать, что N-солитонному решению отвечает

$$F_{n,N} = \sum_{\mu=0,1} \exp\left(\sum_{i=1}^{N} \mu_i \eta_i + \sum_{1 \leqslant i < j} A_{ij} \mu_i \mu_j\right), \tag{3.3.67a}$$

где

$$\eta_i = p_i n - \Omega_i t + \eta_i^{(0)},$$

$$\Omega_i = 2\varepsilon_i \operatorname{sh} \frac{1}{2} p_i, \qquad \varepsilon_i = \pm 1,$$

$$e^{A_{ij}} = -\frac{(\Omega_i - \Omega_j)^2 - \left(2 \operatorname{sh} \frac{1}{2}(p_i - p_j)\right)^2}{(\Omega_i + \Omega_j)^2 - \left(2 \operatorname{sh} \frac{1}{2}(p_i + p_j)\right)^2},$$

или

$$e^{A_{ij}} = \begin{cases} \left(\dfrac{\operatorname{sh} \frac{1}{4}(p_i - p_j)}{\operatorname{sh} \frac{1}{4}(p_i - p_j)}\right)^2, & \text{если} \quad \varepsilon_i \varepsilon_j > 0, \\ \left(\dfrac{\operatorname{ch} \frac{1}{4}(p_i - p_j)}{\operatorname{ch} \frac{1}{4}(p_i + p_j)}\right)^2, & \text{если} \quad \varepsilon_i \varepsilon_j < 0. \end{cases} \tag{3.3.67b}$$

3.3. d. Преобразование Бэклунда в билинейной форме. Интересно при помощи прямого метода вывести преобразования Бэклунда и перестановочные соотношения для уравнения КдФ. Мы начнем с $N(f_N)$- и $(N+1)(f_{N+1})$-солитонных решений (здесь индекс обозначает число солитонов) уравнения КдФ в билинейной форме:

$$D_x (D_t + D_x^3) f_N \cdot f_N = 0, \tag{3.3.68a}$$

$$D_x (D_t + D_x^3) f_{N+1} \cdot f_{N+1} = 0. \tag{3.3.68b}$$

Мы покажем, что при заданном f_N мы можем найти f_{N+1}, решив линейное уравнение [217].

Умножив (3.3.68a) на f_{N+1}^2 и вычтя из него (3.3.68b), умноженное на f_N^2, получим

$$\begin{aligned} P = {} & [D_x (D_t + D_x^3) f_N \cdot f_N] f_{N+1} f_{N+1} - \\ & - [D_x (D_t + D_x^3) f_{N+1} \cdot f_{N+1}] f_N f_N = 0. \end{aligned} \tag{3.3.69}$$

Воспользовавшись тождествами (которые можно легко проверить)

$$(3.3.70a)\qquad (D_xD_tf_N\cdot f_N)f_{N+1}f_{N+1}-f_Nf_ND_xD_tf_{N+1}\cdot f_{N+1}=$$
$$=2D_x[(D_tf_N\cdot f_{N+1})f_Nf_{N+1}],$$

$$(3.3.70b)\qquad f_{N+1}f_{N+1}(D_x^4f_N\cdot f_N)-f_Nf_ND_x^4f_{N+1}\cdot f_{N+1}=$$
$$=2D_x[(D_x^3f_N\cdot f_{N+1})f_Nf_{N+1}-3(D_x^2f_N\cdot f_{N+1})(D_xf_N\cdot f_{N+1})],$$

мы получим, что P сводится к

$$(3.3.71)\qquad P=2D_x[(D_t+D_x^3)f_N\cdot f_{N+1}-$$
$$-3(D_x^2f_N\cdot f_{N+1})(D_xf_N\cdot f_{N+1})]=0.$$

Преобразование Бэклунда в билинейной форме получится, если положить

$$(3.3.72a)\qquad D_x^2f_N\cdot f_{N+1}=\lambda f_Nf_{N+1},$$

$$(3.3.72b)\qquad (D_t+3\lambda D_x+D_x^3)f_N\cdot f_{N+1}=0;$$

при этом мы удовлетворим равенству (3.3.71) (новое солитонное решение содержит параметр λ). Уравнения (3.3.72) представляют собой билинейный вариант преобразования Бэклунда, полученного в разд. 3.1.

В качестве примера мы покажем, как вычислить односолитонное решение из вакуумного состояния. «Нулевому» солитонному решению отвечает $f_0=1$; при этом $u=0$. Функция f_1, как это следует из (3.3.72), удовлетворяет уравнениям

$$(3.3.73a)\qquad \partial_x^2f_1=\lambda f_1,$$

$$(3.3.73b)\qquad (\partial_t+3\lambda\partial_x+\partial_x^3)f_1=0.$$

Решение системы (3.3.73) имеет вид

$$(3.3.74)\qquad \begin{gathered} f_1=e^{\eta_1/2}+e^{-\eta_1/2},\\ \eta_1=k_1x-k_1^3t+\eta_1^{(0)},\qquad \lambda\equiv\frac{k_1^2}{4}. \end{gathered}$$

Так как $u=2\partial_x^2\ln f$, то ясно, что

$$(3.3.75)\qquad f_1=e^{-\eta_1/2}(1+e^{\eta_1})\simeq 1+e^{\eta_1}$$

(здесь $f\simeq g$ тогда и только тогда, когда $f=e^{\alpha x+\beta}g$, где α и β — константы, не зависящие от x). Два $\simeq$-эквивалентных решения f, g приводят к одному и тому же решению u; например, функция $\hat{f}_1=e^{-(1/2)\eta_1}$ эквивалентна $f_0=1$.

Легко проверить, что если мы возьмем f_1 вида (3.3.74), то преобразование Бэклунда приведет к решению

$$f_2 = (k_1 - k_2)\left(e^{(\eta_1+\eta_2)/2} + e^{-(\eta_1+\eta_2)/2}\right) + \\ + (k_1 + k_2)\left(e^{(\eta_1-\eta_2)/2} + e^{-(\eta_1-\eta_2)/2}\right), \tag{3.3.76}$$

где $\eta_i = k_i x - k_i^3 t + \eta_i^{(0)}$. Отметим, что

$$f_2 = (k_1 - k_2)\, e^{-(\eta_1+\eta_2)/2}\left[1 - \left(\frac{k_1+k_2}{k_1-k_2}\right) e^{\eta_1} - \left(\frac{k_1+k_2}{k_1-k_2}\right) e^{\eta_2} + e^{\eta_1+\eta_2}\right] \simeq \\ \simeq 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_1+\eta_2+A_{12}}$$

(обычное двухсолитонное решение), где $e^{A_{12}} = (k_1 - k_2)/(k_1 + k_2)^2$, если фазовые постоянные выбраны подходящим образом, т. е.

$$e^{\eta_i^{(0)}} \to -\left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right) e^{\eta_i^{(0)}}.$$

В общем случае N-солитонное решение, удовлетворяющее преобразованию Бэклунда, имеет вид

$$f_N = \sum_{\varepsilon=\pm 1} \frac{\prod\limits_{i<j}^{N} (\varepsilon_i k_i - \varepsilon_j k_j)}{\prod\limits_{i=1}^{N} \varepsilon_i k_i} \exp\left(\sum_1^N \frac{1}{2}\, \varepsilon_i \eta_i\right), \tag{3.3.77a}$$

что эквивалентно N-солитонной формуле (3.3.15). Это можно показать следующим образом. В (3.3.15) возьмем $\varepsilon_i = 2\mu_i - 1$, $i = 1, 2, \ldots, N$, и выберем удобным образом фазовые множители $\eta_i^{(0)} = \eta_i^{(1)} + \eta_i^{(2)}$, где $\exp \eta_i^{(1)} = -\prod_{j=1,\ j\neq i}^{N} (k_i + k_j)/(k_j - k_i)$. Обозначив $\xi_i = k_i x - k_i^3 t + \eta_i^{(2)}$, преобразуем (3.3.15) к виду

$$F_N = \sum_{\varepsilon=\pm 1} (-1)^{N(N+1)/2} \prod_{i=1}^{N} \varepsilon_i \prod_{i<j}^{N} \left(\frac{\varepsilon_i k_i - \varepsilon_j k_j}{k_i - k_j}\right) \times \\ \times \exp\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} (\varepsilon_i + 1)\, \xi_i\right). \tag{3.3.77b}$$

При этом мы воспользовались равенствами

$$(-1)^{\sum\limits_1^N (\varepsilon_i+1)/2} = (-1)^N \prod_{i=1}^{N} \varepsilon_i, \tag{3.3.77c}$$

$$(3.3.77\text{d})\qquad \prod_{1\leqslant i<j}^{N}\left(\frac{k_i-k_j}{k_i+k_j}\right)^{(\varepsilon_i+1)(\varepsilon_j+1)/2}\prod_{i,\,j=1}^{N}\left(\frac{k_i+k_j}{k_i-k_j}\right)^{(\varepsilon_i+1)/2}=$$

$$=(-1)^{N(N-1)/2}\prod_{1\leqslant i<j}^{N}\frac{(\varepsilon_i k_i-\varepsilon_j k_j)}{(k_i-k_j)},$$

$$(3.3.77\text{e})\qquad (-1)^{(\varepsilon_i+1)/2}\left(\frac{k_i-k_j}{k_i+k_j}\right)^{[(\varepsilon_i+1)(\varepsilon_j+1)/2-(\varepsilon_i+1)/2-(\varepsilon_j+1)/2]}=$$

$$=-\frac{(\varepsilon_i k_i-\varepsilon_j k_j)}{(k_i-k_j)}.$$

Применяя соотношение эквивалентности $f\simeq g$, получим

$$(3.3.78)\qquad F_N\simeq\sum_{\varepsilon=\pm1}\prod_{i<j}^{N}\left(\frac{\varepsilon_i k_i-\varepsilon_j k_j}{(k_i^2-k_j^2)}\right)\frac{1}{\prod\limits_{1}^{N}\varepsilon_i k_i}\exp\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}\varepsilon_i\eta_i\right).$$

Очевидно, что выражение (3.3.78) эквивалентно (3.3.77a), так как множитель $\prod_{i<j}^{N}1/(k_i^2-k_j^2)$ является константой.

Теперь мы воспользуемся преобразованием Бэклунда (3.3.72) для того, чтобы вывести формулу, описывающую суперпозицию солитонных решений [228]. Рассмотрим вначале четыре решения f_{N-1}, f_N, $\tilde{f}_N$ и f_{N+1}, зависящие от параметров следующим образом:

$$(3.3.79)\qquad \begin{aligned} &f_{N-1}=f_{N-1}(k_1,k_2,\ldots,k_{N-1}),\quad \tilde{f}_N=\tilde{f}_N(k_1,\ldots,k_{N-1},k_{N+1}),\\ &f_N=f_N(k_1,\ldots,k_{N-1},k_N),\quad f_{N+1}=f_{N+1}(k_1,\ldots,k_{N-1},k_N,k_{N+1}).\end{aligned}$$

Пусть к тому же эти решения удовлетворяют преобразованиям Бэклунда:

$$(3.3.80\text{a})\qquad \left(D_x^2-\frac{1}{4}k_N^2\right)f_{N-1}\cdot f_N=0,$$

$$(3.3.80\text{b})\qquad \left(D_x^2-\frac{1}{4}k_{N+1}^2\right)f_{N-1}\cdot \tilde{f}_N=0,$$

$$(3.3.80\text{c})\qquad \left(D_x^2-\frac{1}{4}k_{N+1}^2\right)f_N\cdot f_{N+1}=0,$$

$$(3.3.80\text{d})\qquad \left(D_x^2-\frac{1}{4}k_N^2\right)\tilde{f}_N\cdot f_{N+1}=0.$$

Умножая (3.3.80a) на $\tilde{f}_N f_{N+1}$ и вычитая (3.3.80b), умноженное на $f_{N-1}f_N$, получим

$$(3.3.81)\qquad \tilde{f}_N f_{N+1}(D_x^2 f_{N-1}\cdot f_N)-f_{N-1}f_N(D_x^2\tilde{f}_N\cdot f_{N+1})=0.$$

Для любых четырех гладких функций (a, b, c, d) от x выполняется тождество

(3.3.82) $$(D_x^2 a\cdot b)\,cd - abD_x^2(c\cdot d) = D_x((D_x a\cdot d)\cdot bc - (ad)\cdot(D_x c\cdot b)).$$

Это тождество позволяет привести (3.3.81) к виду

(3.3.83) $$D_x[(D_x f_{N-1}\cdot f_{N+1})\cdot \tilde{f}_N f_N + (f_{N-1}\cdot f_{N+1})\cdot(D_x\tilde{f}_N\cdot f_N)] = 0.$$

Аналогично из (3.3.80b) и (3.3.80c) следует

(3.3.84) $$D_x[(D_x f_N\cdot \tilde{f}_N)\cdot(f_{N-1}f_{N+1}) + (f_N\tilde{f}_N)\cdot(D_x f_{N-1}\cdot f_{N+1})] = 0.$$

Вычитая (3.3.84) из (3.3.83) и замечая, что $D_x a\cdot b = -D_x b\cdot a$, получим соотношение

(3.3.85) $$D_x(D_x f_{N-1}\cdot f_{N+1})\cdot(f_N\tilde{f}_N) = 0,$$

означающее, что величина $D_x f_{N-1}\cdot f_{N+1}$ пропорциональна $f_N\tilde{f}_N$, т. е.

(3.3.86) $$D_x f_{N-1}\cdot f_{N+1} = Cf_N\tilde{f}_N.$$

Постоянная C определяется любыми тремя солитонными решениями (при любом взаимном расположении солитонов). Выражение (3.3.86) называют формулой суперпозиции солитонов. По заданному $f_0 = 1$ мы, воспользовавшись преобразованием Бэклунда, вычислим f_1, а затем с помощью (3.3.86) найдем $f_N (N \geqq 2)$.

Весьма поучительно вывести задачу рассеяния и временну́ю зависимость для уравнения КдФ из преобразования Бэклунда в билинейной форме. Определим

(3.3.87a) $$u = 2(\log f_N)_{xx} = 2\,\frac{f_{Nxx}f_N - f_{Nx}^2}{f_N^2},$$

(3.3.87b) $$\psi = \frac{f_{N+1}}{f_N}$$

и заметим, что

(3.3.88a) $$\frac{D_x f_{N+1}\cdot f_N}{f_N^2} = \psi_x,$$

(3.3.88b) $$\frac{D_x^2 f_{N+1}\cdot f_N}{f_N^2} = \psi_{xx} + u\psi,$$

(3.3.88c) $$\frac{D_x^3 f_{N+1}\cdot f_N}{f_N^2} = \psi_{xxx} + u\psi.$$

Воспользовавшись (3.3.72), мы получим пару уравнений для одной функции ψ, необходимую для МОЗР:

(3.3.89a) $$\psi_{xx} + u\psi = \lambda\psi,$$

(3.3.89b) $$\psi_t + 3\lambda\psi_x + \psi_{xxx} + u\psi_x = 0$$

(отметим, что (3.3.89b), воспользовавшись (3.3.89a), можно привести к виду $\psi_t = A\psi + B\psi$). Таким образом, мы видим, что из уравнения и его N-солитонного решения можно вывести и преобразование Бэклунда, и пару операторов, необходимых для МОЗР.

3.3. е. Замечания о некоторых многомерных задачах. Наконец, мы хотим отметить, что описанный прямой метод нахождения солитонных решений применялся и к некоторым многомерным нелинейным уравнениям. Мы обсудим вкратце два примера.

Первым рассмотрим двумерный вариант уравнения КдФ, т. е. так называемое уравнение Кадомцева — Петвиашвили (КП):

$$(u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x + \alpha u_{yy} = 0, \qquad \alpha = \pm 1. \tag{3.3.90a}$$

Подставив $u = 2(\log f)_{xx}$ в (3.3.90a), получим

$$(D_x D_t + D_x^4 + \alpha D_y^2) f \cdot f = 0. \tag{3.3.90b}$$

Сатсума (1976) [445], воспользовавшись описанным выше методом, показал, что N-солитонное решение имеет вид

$$f = \sum_{\mu=0} \exp\left[\sum_{1 \leq i < j}^{N} \mu_i \mu_j A_{ij} + \sum_{i=1}^{N} \mu_i \eta_i\right], \tag{3.3.91a}$$

где

$$\eta_i = k_i (x + p_i y - C_i t), \quad C_i = k_i^2 + \alpha p_i^2,$$

$$e^{A_{ij}} = \frac{3(k_i - k_j)^2 - \alpha (p_i - p_j)^2}{3(k_i + k_j)^2 - \alpha (p_i - p_j)^2}. \tag{3.3.91b}$$

Это N-солитонное решение представляет собой набор N плоских взаимодействующих друг с другом волн.

Майлз [375, 376] исследовал некоторые условия, при которых две такие плоские волны резонансно порождают третью. Точнее говоря, он отметил, что сдвиг фаз, возникающий при взаимодействии двух солитонов, может быть произвольно большим. Идею Майлза можно легко понять на примере двухсолитонного решения (3.3.90) при $\alpha = +1$. Отметим, что $e^{A_{ij}} = 0$, если выбрать волновые векторы, удовлетворяющие соотношению

$$\sqrt{3}(k_1 - k_2) \pm (p_1 - p_2) = 0; \tag{3.3.92a}$$

при этом двухсолитонное решение принимает вид

$$f = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2}. \tag{3.3.92b}$$

Если предположить, что $k_i > 0$, $i = 1, 2$, то при $x \to -\infty$ решение может быть нетривиальным лишь в окрестности характери-

стик $\eta_1 = \text{const}$ или $\eta_2 = \text{const}$; при этом $u \sim (k_i^2/2)\,\text{sech}^2 \frac{1}{2}\eta_i$, т. е. имеем два плоских солитона. Однако при $x \to +\infty$ решение будет отличным от нуля лишь при $\eta_1 - \eta_2 = \text{const}$. (Отметим, что $f \sim e^{\eta_2}(1 + e^{\eta_1 - \eta_2}) \underset{\sim}{\sim} (1 + e^{\eta_1 - \eta_2})$.) Таким образом, в результате их взаимодействия возникает только одна плоская волна — солитон $u = (k_3^2/2)\,\text{sech}^2 \frac{1}{2}\eta_3$, где

$$\eta_3 = \eta_1 - \eta_2,$$

$$k_3 = k_1 - k_2, \qquad k_3 p_3 = k_1 p_1 - k_2 p_2, \qquad C_3 = \frac{k_1 C_1 - k_2 C_2}{k_1 - k_2}.$$

Если

$$\omega_i = k_i C_i$$

(дисперсионное соотношение), то можно проверить, что из (3.3.92a) получаем

$$\omega_3 = \omega_1 - \omega_2.$$

Таким образом, $k_3 = k_1 - k_2$ и $\omega_3 = \omega_1 - \omega_2$, т. е. мы имеем случай тройного резонанса, и два солитона при $x \to -\infty$ порождают третий при $x \to +\infty$! Отметим, что аналогичное резонансное взаимодействие возникает в бесстолкновительной плазме [514].

Интересно отметить, что метод Хироты в некотором ограниченном смысле срабатывает для уравнения sin-Гордон в $(2+1)$-пространстве-времени [1]):

$$u_{xx} + u_{yy} - u_{tt} = \sin u \tag{3.3.93}$$

[213]; (см. также [328], [82] и [506]). Произведя замену зависимой переменной

$$u = i \log\left(\frac{f^*}{f}\right) \tag{3.3.94a}$$

в уравнении (3.3.93), получим

$$(D_x^2 + D_y^2 - D_t^2) f \cdot f = \frac{1}{2}(f^2 - f^{*2}). \tag{3.3.94b}$$

Обнаружено, что формула

$$f = \sum_{\mu=0,1} \exp\left(\sum_{j=1}^{N}\left(\mu_j \eta_j + i\frac{\pi}{2}\right) + \sum_{1 \leq i < j} \mu_i \mu_j A_{ij}\right) \tag{3.3.95a}$$

---

[1]) На самом деле, двумерность пространственной переменной в найденных решениях является фиктивной и устраняется переходом в подходящую систему координат. — *Прим. ред.*

при

$$\eta_i = k_i x + p_i y - \omega_i t + \eta_i^{(0)}; \qquad k_i^2 + p_i^2 - \omega_i^2 = 1, \tag{3.3.95b}$$

$$e^{A_{ij}} = -\frac{(k_i - k_j)^2 + (p_i - p_j)^2 - (\omega_i - \omega_j)^2}{(k_i + k_j)^2 + (p_i + p_j)^2 - (\omega_i + \omega_j)^2} \tag{3.3.95c}$$

удовлетворяет уравнению (3.3.94b) для произвольных k_i, p_i при $N = 1, 2$. Однако при $N = 3$ на это решение следует наложить дополнительное ограничение

$$\det \begin{vmatrix} k_1 & p_1 & \omega_1 \\ k_2 & p_2 & \omega_2 \\ k_3 & p_3 & \omega_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.3.95d}$$

Случаи $N > 3$ были рассмотрены в работе [280].

В заключение отметим, что: а) Хирота и Вадати (1979) [231] показали, как можно вывести линейное интегральное уравнение Гельфанда — Левитана из прямого метода; б) Хирота (1979) [223] предъявил примеры уравнений, для которых можно построить двух- (но не более) «солитонные» решения в) Накамура [392, 393] воспользовался прямым методом для построения решений с одним и многими (двумя) периодами; г) Оиши (1979) [403] показал, как с точки зрения прямого подхода можно рассматривать детерминанты Фредгольма и «непрерывный спектр».

3.4. Рациональные решения нелинейных эволюционных уравнений. Оказывается, что дифференциальные уравнения, которым посвящена настоящая книга, допускают в качестве решений некоторый класс функций, рациональных по пространственной переменной x. Эти рациональные решения впервые были получены в работе Эро, Мак-Кина и Мозера [36] (последующие результаты можно найти, например, в работах Адлера и Мозера [32], Абловица и Сатсумы [24]). В этом разделе мы будем следовать методу Абловица и Сатсумы [24]. (i) Для уравнения КдФ рациональные решения можно получить, вычисляя длинноволновый предел одномерных солитонных решений, найденных прямыми методами (скажем, методом Хироты). В частности, мы проведем вычисления для небольшого числа первых солитонных решений, а затем покажем, как осуществить этот предельный переход на языке преобразования Бэклунда (в билинейной форме) для уравнения КдФ. В результате получим рекуррентную формулу, позволяющую получить весь класс рациональных решений уравнения КдФ. Эти рациональные решения имеют полюсы на вещественной оси x. (ii) Эту же конструкцию можно применить для построения (рациональных)

солитонов уравнений мКдФ, Буссинеска и Кадомцева — Петвиашвили (К—П). Для уравнения мКдФ существуют вещественные несингулярные рациональные решения, что согласуется с результатами работы Оно [409].

В последнем случае (уравнение К—П) имеется частное решение, являющееся вещественной несингулярной функцией, убывающей степенным образом во всех направлениях. Это решение обладает солитонными свойствами. Мы будем называть такой многомерный солитон *лампом*. Точное солитонное решение впервые получено в работе Манакова и др. [350]. Следует отметить, что приводимые здесь методы применимы и для многомерных задач [447], имеющих физические приложения.

Мы начнем с уравнения КдФ

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \tag{3.4.1}$$

Как было показано в разд. 3.3, уравнение (3.4.1) имеет N-солитонное решение вида

$$u = 2(\ln F_N)_{xx}, \tag{3.4.2}$$

где функция F_N удовлетворяет уравнению

$$D_x(D_t + D_x^3) F_N \cdot F_N = 0. \tag{3.4.3}$$

Напомним определение оператора D,

$$D_x^n D_t^m a \cdot b = (\partial_x - \partial_{x'})^n (\partial_t - \partial_{t'})^m a(x, t) b(x', t')\big|_{\substack{x'=x \\ t'=t}} \tag{3.4.4}$$

(см. также разд. 3.3) и то, что функцию F_N можно найти разложением в (формальный) ряд

$$F_N = 1 + \varepsilon F_N^{(1)} + \varepsilon^2 F_N^{(2)} + \ldots. \tag{3.4.5}$$

Подстановка (3.4.5) в (3.4.3) и приравнивание нулю коэффициентов при степенях ε дает систему уравнений на функции $F_N^{(k)}$. Это разложение обрывается, если $F_N^{(1)}$ выбрать в виде

$$F_N^{(1)} = \sum_{i=1}^{N} \exp(\eta_i), \quad \eta_i = k_i x - k_i^3 t + \eta_i^{(0)}, \tag{3.4.6}$$

где k_i, $\eta_i^{(0)}$ — произвольные константы (в конце мы положим $\varepsilon = 1$). В разд. 3.3 получены солитонные решения для $N = 1$, 2, 3:

$$F_1 = 1 + e^{\eta_1}, \tag{3.4.7a}$$

$$F_2 = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_1 + \eta_2 + A_{12}}, \tag{3.4.7b}$$

$$F_3 = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta} + e^{\eta_3} + e^{\eta_1 + \eta_2 + A_{12}} + e^{\eta_1 + \eta_3 + A_{12}} + e^{\eta_2 + \eta_3 + A_{23}} + e^{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + A_{12} + A_{23} + A_{13}}, \tag{3.4.7c}$$

$$\ldots$$

При произвольном N имеет место формула

$$F_N = \sum_{\underline{\mu}=0,1} \exp\left(\sum_{i<j}^{N} A_{ij}\mu_i\mu_j + \sum_{i=1}^{N} \mu_i\eta_i\right), \tag{3.4.8a}$$

где A_{ij} в (3.4.7) и (3.4.8a) удовлетворяют соотношению

$$\exp A_{ij} = \left(\frac{k_i - k_j}{k_i + k_j}\right)^2. \tag{3.4.8b}$$

Формулы (3.4.7a—c) являются частными случаями (3.4.8). Кроме того, отметим, что из (3.4.7a) и (3.4.2) получается обычное односолитонное решение, имеющее вид

$$u = \left(\frac{k_1^2}{2}\right) \operatorname{sech}^2 \frac{1}{2}\left(k_1 x - k_1^3 t + \eta_1^{(0)}\right). \tag{3.4.9}$$

К рациональным решениям можно перейти благодаря имеющемуся произволу выбора постоянных $\eta_i^{(0)}$. Например, если в (3.4.9) мы выберем $e^{\eta_i^{(0)}} = -1$, то получится сингулярное решение

$$u = -\left(\frac{k_1^2}{2}\right) \Big/ \operatorname{sh}^2 \frac{1}{2}\left(k_1 x - k_1^3 t\right). \tag{3.4.10}$$

Переходя к пределу $k_1 \to 0$ (т. е. к «длинноволновому» пределу), мы получим

$$u = -2/x^2. \tag{3.4.11}$$

Решение (3.4.11) является первым представителем класса рациональных решений. Оказывается, что при подходящем выборе фазовых постоянных можно получить нетривиальный предел для любой функции F_N.

Обсудим теперь приемы вычислений функций F_N. С этой целью вернемся к рассмотрению (3.4.7a). Обозначив $\alpha_i = \exp\left(\eta_i^{(0)}\right)$, перепишем (3.4.7a) в виде

$$F_1 = 1 + \alpha_1 e^{\xi_1}, \quad \xi_1 = k_1\left(x - k_1^2 t\right). \tag{3.4.12}$$

При $k_1 \to 0$ имеем

$$F_1 = 1 + \alpha_1(1 + \xi_1) + O\left(k_1^2\right).$$

Выбрав $\alpha_1 = -1$, получим

$$F_1 = -k_1\left(x + O(k_1)\right).$$

Так как u определяется по формуле (3.4.2), то

$$F_1 \simeq x + O(k_1)$$

(здесь, как и прежде, две функции f и g считаются эквивалентными, $f \simeq g$, тогда и только тогда, когда $f = e^{ax+b}g$, a, b не зависят от x).

В пределе $k_1 \to 0$, $F_1 \simeq \Theta_1$, где

$$\Theta_1 = x. \tag{3.4.13}$$

Отсюда по формуле (3.4.2) получается рациональное решение (3.4.11). Таким же образом можно преобразовать F_2 (и все высшие F_N).

При $N > 1$ будем считать, что все $k_i \to 0$ одинаково быстро (т. е. $k_i = \varepsilon \bar{k}_i$, $\bar{k}_i = O(1)$). Для F_2 получим

$$F_2 = 1 + \alpha_1 e^{\xi_1} + \alpha_2 e^{\xi_2} + \alpha_1\alpha_2 e^{\xi_1 + \xi_2 + A_{12}}. \tag{3.4.14}$$

При k_1, $k_2 \to 0$ мы потребуем равенства нулю коэффициентов при членах порядка $O(1)$ и $O(k)$ в F_2:

$$O(1): \quad 1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_1\alpha_2 e^{A_{12}} = 0.$$

$$O(k): \quad k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + (k_1 + k_2)\alpha_1\alpha_2 e^{A_{12}} = 0.$$

Решением этих уравнений служит

$$\alpha = -\alpha_2 = \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2}.$$

Оказывается, что при этом члены разложения порядка $O(k^2)$ также отсутствуют, и в результате получается

$$F_2 = -\frac{1}{6} k_1 k_2 (k_1 + k_2)[x^3 + 12t + O(k)]. \tag{3.4.15a}$$

Так как $k \to 0$, то F_2 эквивалентно Θ_2:

$$\Theta_2 = x^3 + 12t, \quad u = 2(\ln \Theta_2)_{xx}. \tag{3.4.15b}$$

Функция Θ_2 имеет три нуля, поэтому u имеет три полюса. В трехсолитонном случае, если мы выберем

$$\alpha_1 = \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} \cdot \frac{k_3 + k_1}{k_3 - k_1},$$

$$\alpha_2 = \frac{k_2 + k_3}{k_2 - k_3} \cdot \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2},$$

$$\alpha_3 = \frac{k_3 + k_1}{k_3 - k_1} \cdot \frac{k_2 + k_3}{k_2 - k_3},$$

то найдем функцию

$$F_3 = -\frac{1}{360} k_1 k_2 k_3 (k_1 + k_2)(k_2 + k_3)(k_3 + k_1)[(x^6 + 60x^3 t - 720t^2) + O(k)], \tag{3.4.16a}$$

которая в пределе $k \to 0$ эквивалентна функции Θ_3

$$\Theta_3 = x^6 + 60x^3 t - 720t^2, \tag{3.4.16b}$$

имеющей шесть нулей. В принципе этот прием срабатывает при любом количестве солитонов, но вычисления становятся весьма громоздкими. Поэтому мы воспользуемся преобразованием Бэклунда (в билинейной форме) для вывода рекуррентной формулы, порождающей рациональные решения.

Вначале мы слегка преобразуем формулу N-солитонного решения (3.4.8а). Напомним формулу (3.3.78) из разд. 3.3:

$$F_N \simeq \hat{F}_N = \sum_{\varepsilon=\pm 1} \prod_{i<j}^{N} \frac{(\varepsilon_i k_i - \varepsilon_j k_j)}{(k_i^2 - k_j^2)} \cdot \frac{\exp\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} \varepsilon_i \eta_i\right)}{\prod_{i=1}^{N} \varepsilon_i k_i}. \tag{3.4.17}$$

Так, например,

$$\hat{F}_1 = \frac{1}{k_1}\left(e^{\eta_1/2} - e^{-\eta_1/2}\right) = -\frac{1}{k_1} e^{-\eta_1/2}\left(1 - e^{\eta_1}\right),$$

что эквивалентно (3.4.17). Преимущество формулы (3.4.17) состоит в том, что в пределе $k_1 \to 0$ она непосредственно переходит в полином от x. Эту формулу можно переписать (здесь и далее мы опускаем крышку $\hat{}$ над $\hat{F}_N$) следующим образом:

$$F_N = \frac{g_N}{\prod_{i<j}^{N} (k_i^2 - k_j^2) \prod_{I=1}^{N} k_i}, \tag{3.4.18}$$

где

$$g_N = \sum_{\varepsilon=\pm 1} \prod_{i=j} (\varepsilon_i k_i - \varepsilon_j k_j) \prod_{i=1}^{N} \varepsilon_i \exp\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} \varepsilon_i \eta_i\right) \tag{3.4.19}$$

Отметим следующие важные свойства функции g:

(i) $$g_N(k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots, k_j, \ldots, k_N) = -g_N(k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots, k_j, \ldots k_N)$$

при $i < j$ (функция g_N антисимметрична по аргументам)

(ii) $g_N(k_1 = 0, k_2, \ldots, k_N) = 0$;

(iii) $g_N(k_1 = k_2, k_3, \ldots, k_N) = g_N(k_1 = -k_2, k_3, \ldots, k_N) = 0$.

Свойства (i)—(iii) означают, что функция g_N имеет в качестве множителя

$$\prod_{i<j}^{N} (k_i^2 - k_j^2) \prod_{i=1}^{N} k_i.$$

Таким образом, первый член разложения функции F_N при $k_i \to 0$ по крайней мере порядка $O(1)$, и

$$F_N = a_N \Theta_N(x) + O(k). \tag{3.4.20}$$

Ниже мы покажем, что $a_N \neq 0$. Кроме того, так как каждый k_i входит в фазовый множитель выражения (3.4.17) с множителем x, то для того, чтобы функция F_N имела по крайней мере первый порядок, нужно, чтобы полином $\Theta_N(x) = x^P + \ldots$ имел старшую степень

$$P = N + N\left(\frac{N-1}{2}\right) = \frac{N(N+1)}{2}.$$

Теперь мы выведем рекуррентную формулу для Θ_N. Мы воспользуемся формулой

$$D_x F_{N-1} \cdot F_{N+1} = C F_N \tilde{F}_N, \tag{3.4.21}$$

выведенной в разд. 3.3 из преобразования Бэклунда. Функции F_{N-1}, F_{N+1}, F_N и $\tilde{F}_N$, являющиеся многосолитонными решениями, зависят от параметров следующим образом:

$$\begin{aligned} F_{N-1} &= F_{N-1}(k_1, \ldots, k_{N-1}), \\ F_N &= F_N(k_1, \ldots, k_{N-1}, k_N), \\ \tilde{F}_N &= \tilde{F}_N(k_1, \ldots, k_{N-1}, k_{N+1}), \\ F_{N+1} &= F_{N+1}(k_1, \ldots, k_{N-1}, k_N, k_{N+1}). \end{aligned}$$

Константа C определяется любыми тремя солитонными решениями, заданными формулой (3.4.17). Например, если взять

$$\begin{aligned} F_0 &= 1, \\ F_1 &= \frac{1}{k_1}\left(e^{\eta_1/2} - e^{-\eta_1/2}\right), \\ F_2 &= \frac{1}{k_1 k_2 \left(k_1^2 - k_2^2\right)}\left[(k_1 - k_2)\left(e^{(\eta_1+\eta_2)/2} - e^{-(\eta_1+\eta_2)/2}\right) + \right. \\ &\qquad \left. + (k_1 + k_2)\left(e^{-(\eta_1-\eta_2)/2} - e^{(\eta_1-\eta_2)/2}\right)\right], \end{aligned}$$

то $C = -1/2$.

Далее будем пользоваться формулой суперпозиции

$$D_x F_{N+1} \cdot F_{N-1} = \frac{1}{2} F_N \tilde{F}_N. \tag{3.4.22}$$

Из (3.4.20) и (3.4.22) можно получить рекуррентную формулу для a_N и Θ_N. Подставив (3.4.20) в (3.4.22), получим

$$a_{N+1} a_{N-1} D_x \Theta_{N+1} \Theta_{N-1} = \frac{1}{2} a_N^2 \Theta_N^2. \tag{3.4.23}$$

Так как $\Theta_N(x)$ является полиномом по x, то соотношение (3.4.23) можно выполнять для каждой степени по отдельности, и в частности для старшей степени $x^{N(N+1)/2}$. Поэтому a_N удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$a_{N+1}a_{N-1}(4N+2)=a_N^2, \tag{3.4.24}$$

а Θ_N удовлетворяет

$$D_x\Theta_{N+1}\Theta_{N-1}=(2N+1)\Theta_N^2 \tag{3.4.25}$$

(см. также [32]). В наших предыдущих вычислениях для нескольких первых солитонов мы уже вывели

$$a_0=1,\quad a_1=1,\quad a_2=\frac{1}{6},\quad a_3=\frac{1}{360},$$

$$\Theta_0=1,\quad \Theta_1=x,\quad \Theta_2=x^3+12t,\quad \Theta_3=x^6+60x^3t-720t^2.$$

Из рекуррентной формулы следует, что коэффициент $a_N\neq 0$ при всех $N\geqslant 0$. Можно воспользоваться соотношением (3.4.25) и Θ_0, Θ_1 для вычисления Θ_2, Θ_3 и всех высших Q_N, если дополнить его уравнением эволюции по времени. Для этого можно использовать либо исходное нелинейное уравнение в частных производных (в нашем случае уравнение КдФ), либо уравнение временной зависимости (3.3.72b), найденное из преобразования Бэклунда (положив при этом $\lambda=(1/4)k_{N+1}^2$ и устремив $k\to 0$):

$$(D_t+D_x^3)\Theta_N\cdot\Theta_{N+1}=0. \tag{3.4.26}$$

К частному решению Θ_{N+1} можно добавить Θ_{N-1}, умноженное на произвольный множитель, но мы берем этот множитель равным нулю. В описанном предельном переходе для каждой фиксированной степени k полином является однородной функцией по (x^3) и t. Например, мы знаем, что старшим порядком Θ_3 является x^6. Таким образом, полином Θ_3 должен иметь следующий общий вид: $x^6+\alpha x^3t+\beta t^2$. Мы определяем коэффициенты $\alpha=60$, $\beta=-720$ при помощи (3.4.25), (3.4.26). Хотя, разумеется, можно добавить к Θ_3 член C_x и соотношения (3.4.25), (3.4.26) останутся при этом выполненными, но мы берем $C=0$, так как этот член не может возникнуть в результате предельного перехода.

Поскольку каждой степени x^3 соответствует степень t, то все решения удовлетворяют автомодельному уравнению для $w(z)$, где

$$u=\frac{1}{(3t)^{2/3}}w(z),\quad z=\frac{x}{(3t)^{1/3}},$$

$$w'''+6ww'-(2w+zw')=0.$$

Поэтому автомодельное решение также обладает классом рациональных решений. Итак, мы показали, что рациональные решения возникают в результате предельных переходов в солитонных решениях и что их можно вычислить при помощи преобразования Бэклунда, и получили непосредственную связь между солитонами и автомодельными решениями. Частные элементарные решения можно получить и для других уравнений, включая классические трансценденты Пенлеве [149] (обзор), [35], [72]. Эти авторы также вывели преобразования Бэклунда между решениями таких нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (см. также [165]).

Как мы уже отмечали, методы, которым мы пользовались, можно без труда распространить и на другие нелинейные эволюционные уравнения, обладающие солитонными решениями. Здесь мы лишь обсудим результаты, полученные при вычислении предельных переходов в солитонных решениях (i) уравнения К—П (двумерного уравнения КдФ); (ii) уравнения Буссинеска; (iii) уравнения мКдФ с ненулевыми граничными условиями.

Уравнение К—П имеет вид

$$\partial_x (u_t + 6uu_x + u_{xxx}) + \alpha u_{yy} = 0, \tag{3.4.27a}$$

где α — постоянная, зависящая от дисперсионных свойств системы. Мы ищем убывающие решения уравнения (3.4.27a) $u \to 0$ при $|x| \to \infty$ следующего вида [445]:

$$u = 2 (\ln F_N)_{xx}. \tag{3.4.27b}$$

Подстановка (3.4.27b) в (3.4.27a) дает

$$\left(D_x D_t + D_x^4 + \alpha D_y^2\right) F_N \cdot F_N = 0. \tag{3.4.28}$$

N-солитонное решение можно вычислить прямым методом (см. разд. 3.3). Здесь мы обсудим только случаи $N = 1, 2$. Одно- и двухсолитонные решения имеют вид

$$F_1 = 1 + e^{\eta_1}, \tag{3.4.29a}$$

$$F_2 = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_1 + \eta_2 + A_{12}}, \tag{3.4.29b}$$

где

$$\eta_i = k_i \left(x + P_i y - \left(k_i^2 + \alpha P_i^2\right) t\right) + \eta_i^{(0)}, \tag{3.4.29c}$$

$$\exp A_{ij} = \frac{3 (k_i - k_j)^2 - \alpha (P_i - P_j)^2}{3 (k_i + k_j)^2 - \alpha (P_i - P_j)^2}. \tag{3.4.29d}$$

Взяв $e^{\eta_i^{(0)}} = -1$, $k_i \to 0$ (причем $P_i = O(1)$, $k_1/k_2 = O(1)$), получим

(3.4.30a) $$F_1 = -k_1\theta_1 + O(k_1^2),$$

(3.4.30b) $$F_2 = k_1k_2(\theta_1\theta_2) + \frac{12}{\alpha(P_1 - P_2)^2} + O(k^3),$$

где

(3.4.30c) $$\theta_i = x + P_i y - \alpha P_i^2 t,$$

и мы воспользовались

(3.4.30d) $$\exp A_{12} \sim 1 + \frac{12k_1k_2}{\alpha(P_1 - P_2)^2}.$$

Итак, мы получили следующие рациональные решения (u определяется по формуле (3.4.27b)):

(3.4.31a) $$\hat{F}_1 = \theta_1,$$

(3.4.31b) $$\hat{F}_2 = \theta_1\theta_2 + B_{12}, \quad B_{12} = \frac{12}{\alpha(P_1 - P_2)^2}.$$

Хотя решения $\hat{F}_1$ и $\hat{F}_2$ имеют в общем случае сингулярности, но существует и несингулярное решение F_2, если $\alpha = -1$ и $P_2 = P_1^*$. В этом случае

(3.4.31c) $$\hat{F}_2 = \theta_1\theta_1^* - \frac{12}{(P_1 - P_1^*)^2}.$$

Положив $P_1 = P_R + iP_I$, получим

(3.4.32a) $$u = 2\partial_x^2 \ln\left[(x' + P_R y')^2 + P_I^2(y')^2 + \frac{3}{P_I^2}\right],$$

где

$$x' = x - (P_R^2 + P_I^2)t,$$
$$y' = y + 2P_R t.$$

Выражение (3.4.32a) можно переписать в виде

(3.4.32b) $$u = \frac{4\left(-(x' + P_R y')^2 + P_I^2(y')^2 + 3/P_I^2\right)}{\left((x' + P_R y')^2 + P_I^2(y')^2 + 3/P_I^2\right)^2}.$$

Итак, мы имеем решение, представляющее собой двумерный солитон (ламп), убывающее как $O(1/x^2, 1/y^2)$ при $|x|, |y| \to \infty$ и двигающееся со скоростью $v_x = P_R^2 + P_I^2$, $v_y = -2P_R$ (см. рис. 3.1). При $N = 4$ можно построить двухламповое решение.

Здесь мы приведем результаты вычислений для $N = 3, 4$:

(3.4.33a) $F_3 = \theta_1\theta_2\theta_3 + B_{12}\theta_3 + B_{23}\theta_1 + B_{31}\theta_2,$

(3.4.33b) $F_4 = \theta_1\theta_2\theta_3\theta_4 + B_{12}\theta_3\theta_4 + B_{13}\theta_2\theta_4 + B_{14}\theta_2\theta_3 + B_{23}\theta_1\theta_4 + B_{24}\theta_1\theta_3 + B_{34}\theta_1\theta_2 + B_{12}B_{34} + B_{13}B_{24} + B_{14}B_{23},$

где θ_i определены формулой (3.4.30c), $B_{ij} = 12/(\alpha(P_i - P_j)^2)$. Взяв $\alpha = -1$, $P_3 = P_1^*$, $P_4 = P_2^*$ в (3.4.33b), получим двухламповое решение. Отметим, что при этих предложениях F_4 является положительной функцией и приводит к решению u (3.4.27b), убывающему как $O(1/x^2, 1/y^2)$ при $|x|, |y| \to \infty$. В результате взаимодействия двух ламмов не происходит сдвига фаз. Эти результаты согласуются с ответами, полученными в работе Манакова

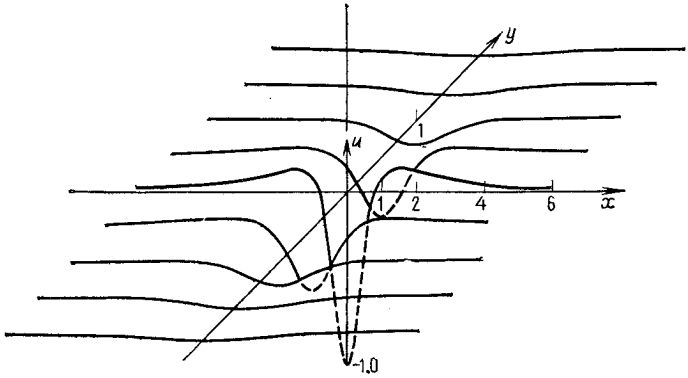

Рис. 3.1. Ламп — локализованный солитон (3.4.32). Пространственная картина в фиксированный момент времени, $P_R = 0$, $P_I = 1/8$, $\alpha = -1$.

и др. [350]. В общем случае, когда $N = 2M$, этот метод дает формулу для M-лампового решения (см. [447]). Конечно, используемый здесь метод не дает, к сожалению, ясного представления о роли этих решений в общей задаче с начальными условиями, т. е. о их типичности, устойчивости и т. д. Недавняя работа Захарова и Манакова [537] показала, однако, что для быстро убывающих начальных условий (быстрее чем $O(1/x^2, 1/y^2)$) уравнение К—П (3.4.27a) является интегрируемым при помощи МОЗР (см. также результаты Манакова, Сантини и Тахтаджяна [349] по вычислению асимптотик на большие времена). Постоянных солитонных решений обнаружено не было. Это, по-видимому, указывает на тот факт, что такие решения, вероятно, не играют сколько-нибудь важной роли для уравнения (3.4.27a) (в противоположность тому, как это было в одномерном случае, т. е. для уравнения КдФ).

Нашим вторым примером является уравнение Буссинеска

(3.4.34) $$u_{tt} - u_{xx} - 3(u^2)_{xx} - u_{xxxx} = 0.$$

Отметим, что уравнение (3.4.34) является частным случаем обсуждавшегося уравнения К—П. Тем не менее рациональные решения, которые будут вычислены, принадлежат другому классу.

Отметим, что используемый нами метод работает одинаково хорошо при обоих возможных знаках дисперсии. При положительном знаке последнего члена в уравнении (3.4.34) задача поставлена корректно на бесконечном интервале (несмотря на это, при изменении знака это уравнение остается изоспектральным потоком). Следует также отметить, что уравнение (3.4.34) возникает в различных физических задачах (например, волны на поверхности воды) как длинноволновое приближение. Таким образом, с учетом физического происхождения этого уравнения, задача поставлена вполне корректно.

Следуя Хироте [213], положим

(3.4.35) $$u = 2(\ln F_N)_{xx}$$

и найдем билинейное уравнение

(3.4.36) $$(D_t^2 - D_x^2 - D_x^4) F_N \cdot F_N = 0.$$

Первые два солитонных решения даются (как обычно) формулами

(3.4.37a) $$F_1 = 1 = e^{\eta_1},$$

(3.4.37b) $$F_2 = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_1 + \eta_2 + A_{12}},$$

где

(3.4.37c) $$\eta_i = k_i x + \varepsilon_i k_i \sqrt{1 + k_i^2}\, t + \eta_i^{(0)}, \quad \varepsilon_i = \pm 1,$$

и

(3.4.37d) $$e^{A_{12}} = \frac{3(k_1 - k_2)^2 + \left(\varepsilon_1 \sqrt{1 + k_1^2} - \varepsilon_2 \sqrt{1 + k_2^2}\right)^2}{3(k_1 + k_2)^2 + \left(\varepsilon_1 \sqrt{1 + k_1^2} - \varepsilon_2 \sqrt{1 + k_2^2}\right)^2}.$$

При $N = 1$, взяв $e^{\eta_1^{(0)}} = -1$ и устремив $k_1 \to 0$, получим

(3.4.38) $$F_1 \sim -k_1(x \pm t).$$

Для двухсолитонного решения

(3.4.39a) $$e^{A_{12}} \sim \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{3} k_1 k_2\right) \quad \text{при } \varepsilon_1 \varepsilon_2 = 1,$$

(3.4.39b) $$1 - 3k_1 k_2 \quad \text{при } \varepsilon_1 \varepsilon_2 = -1.$$

В случае $\varepsilon_1\varepsilon_2 = 1$ мы возьмем

(3.4.40a) $$e^{\eta_1^{(0)}} = \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} + \frac{1}{6} k_1 k_2,$$

(3.4.40b) $$e^{\eta_2^{(0)}} = \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} + \frac{1}{6} k_1 k_2$$

и найдем

(3.4.41) $$F_2 \sim -\frac{1}{6} k_1 k_2 (k_1 + k_2) \{(x \pm t)^3 + (x \pm t) \mp 6t\}.$$

Интересно отметить, что F_2 дает другое рациональное решение в случае $\varepsilon_1\varepsilon_2 = -1$. В этом случае возьмем $e^{\eta_1^{(0)}} = e^{\eta_2^{(0)}} = -1$ и, воспользовавшись (3.4.39), получим

(3.4.42) $$F_2 \sim k_1 k_2 (x^2 - t^2 - 3).$$

Таким образом, несколько первых рациональных решений уравнения Буссинеска получаются по формуле (3.4.35), где F_N — одна из следующих функций:

$$x \pm t, \quad x^2 - t^2 - 3, \quad (x \pm t)^3 + (x \pm t) \mp 6t.$$

Полиномы более высокого порядка можно получить, действуя таким же образом. Несомненно, что преобразование Бэклунда приведет к рекуррентной формуле между рациональными решениями, но никто таких вычислений до сих пор не проделал.

Рассмотрим, наконец, уравнение

(3.4.43) $$v_t + 6v^2 v_x + v_{xxx} = 0$$

с ненулевыми асимптотическими граничными условиями $v \to v_0$ при $|x| \to \infty$. Следуя [217] и [226], имеем

(3.4.44) $$v = v_0 + i \left(\ln \frac{G_N}{F_N} \right)_x.$$

Подставив (3.4.44) в (3.4.43) и расщепляя возникшее уравнение, получим

(3.4.45a) $$(D_t + 6v_0^2 D_x + D_x^3) F_N \cdot F_N = 0,$$

(3.4.45b) $$(D_x^2 - 2iv_0 D_x) G_N \cdot F_N = 0.$$

Чтобы найти солитонные решения, выпишем разложение

(3.4.46a) $$F_N = 1 + \varepsilon F_{N,1} + \varepsilon^2 F_{N,2} + \ldots,$$

(3.4.46b) $$G_N = 1 + \varepsilon G_{N,1} + \varepsilon^2 G_{N,2} + \ldots.$$

Подставим (3.4.46) в (3.4.45) и приравняем нулю коэффициенты при разных степенях ε. Начав в $F_{N,1} = e^{\eta_1 + \varphi_1}$, $G_{N,1} = e^{\eta_1 + \psi_1}$,

мы получим односолитонное решение

(3.4.47a) $$F_1 = 1 + e^{\eta_1 + \varphi_1},$$

(3.4.47b) $$G_1 = 1 + e^{\eta_1 + \psi_1},$$

где

(3.4.47c) $$\eta_i = k_i x - (6v_0^2 k_i + k_i^3)\, t + \eta_i^{(0)},$$

(3.4.47d) $$e^{\varphi_i} = 1 - ik_j/2v_0,$$

(3.4.47e) $$e^{\psi_i} = 1 - ik_j/2v_0.$$

Подставив (3.4.47) в (3.4.44), получим явную формулу односолитонного решения

(3.4.48) $$v = v_0 + \frac{k_1^2}{\left(\sqrt{4v_0^2 + k_1^2}\,\operatorname{ch}\eta_1 + 2v_0\right)},$$

которая была получена также в работе Оно [410]. Чтобы получить двухсолитонное решение, мы начнем с

$$F_{N,1} = \sum_{i=1}^{2} e^{\eta_i + \varphi_i}, \qquad G_{N,1} = \sum_{i=1}^{2} e^{\eta_i + \psi_i}$$

и найдем

(3.4.49a) $$F_2 = 1 + e^{\eta_1 + \varphi_1} + e^{\eta_2 + \varphi_2} + e^{\eta_1 + \eta_2 + \varphi_1 + \varphi_2 + A_{12}},$$

(3.4.49b) $$G_2 = 1 + e^{\eta_1 + \psi_1} + e^{\eta_2 + \psi_2} + e^{\eta_1 + \eta_2 + \psi_1 + \psi_2 + A_{12}},$$

где

(3.4.49c) $$e^{A_{12}} = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2.$$

Как и раньше, рациональные решения могут быть получены переходом к пределу $k_i \to 0$ при подходящем выборе фазовых постоянных. Для $N = 1$ выберем $e^{\eta_1^0} = -1$ и получим

(3.4.50a) $$F_1 \sim -k_1\left(x - 6v_0^2 t + \frac{i}{2v_0}\right),$$

(3.4.50b) $$G_1 \sim -k_1\left(x - 6v_0^2 t - \frac{i}{2v_0}\right),$$

что приводит к рациональному решению

(3.4.51) $$v = v_0 - \frac{4v_0}{4v_0^2\left(x - 6v_0^2 t\right)^2 + 1}.$$

Это решение также было получено в работе Оно [410] и представляет собой несингулярный одномерный алгебраический

солитон. Для $N = 2$, взяв

$$e^{\eta_1^{(0)}} = -e^{\eta_2^{(0)}} = \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2}\left(1 + \frac{k_1 k_2}{8v_0^2}\right)$$

и устремив $k_i \to 0$, мы получим, что

$$F_2,\ G_2 \sim -\frac{1}{6} k_1 k_2 (k_1 + k_2) \cdot \left[\xi^3 + 12t - \right. \tag{3.4.52a}$$

$$\left. - \frac{3}{4v_0^2}\xi \pm \frac{3i}{2v_0}\left(\xi^2 + \frac{1}{4v_0^2}\right)\right],$$

где

$$\xi = x - 6v_0^2 t, \tag{3.4.52b}$$

и верхний (нижний) знак относится к функции $F_2(G_2)$. Подставив (3.4.52a) в (3.4.44), видим, что это решение также представляет собой несингулярный алгебраический солитон

$$v = v_0 - \frac{12v_0\left(\xi^4 + \left(3/2v_0^2\right)\xi^2 - 3/16v_0^4 - 24\xi t\right)}{4v_0^2\left(\xi^3 + 12t - \left(3/4v_0^2\right)\xi\right)^2 + 3\left(\xi^2 + 1/4v_0^2\right)^2}. \tag{3.4.53}$$

3.5. Проблема N тел и нелинейные эволюционные уравнения. Взгляд, который мы часто излагаем в этой книге, состоит в том, что различные редукции «интегрируемых» нелинейных эволюционных уравнений также являются (в некотором смысле) «интегрируемыми». Например, автомодельная редукция приводит к уравнениям типа Пенлеве (см. разд. 3.7), решения которых выражаются либо через классические трансценденты Пенлеве, либо через специальные гиперэллиптические функции (см. разд. 2.3). Здесь мы обсудим другой пример проявления этого принципа. Занимаясь поиском (разложений по полюсам) алгебраических решений различных нелинейных эволюционных уравнений, мы получим конечномерные динамические системы — системы обыкновенных уравнений, т. е. задачи N тел. Эти динамические системы представляют самостоятельный интерес.

Идея исследовать движение полюсов решений нелинейных эволюционных уравнений весьма стара. Например, ее использовали при изучении движения точечных вихрей в гидродинамике (см., например, Онзагер (1949) [411]). Для уравнений, связанных с МОЗР, такой анализ впервые проделал Краскал (1974) [297] для уравнения КдФ. Он отметил, что любой солитон представим в виде конечного набора полюсов и поэтому взаимодействие солитонов можно было бы описывать как взаимодействие полюсов. Сикстан (1976) [482] дальше развил эти идеи, а Эро, Мак-Кин и Мозер (1977) [36] показали, как рациональные и эллиптические решения можно было бы

рассматривать с точки зрения разложений по конечным наборам полюсов (см. также [110]).

В этом разделе мы остановимся на разложении по полюсам (т. е. на рациональных решениях) трех нелинейных эволюционных уравнений: так называемом уравнении Бенджамина — Оно (Б—О), уравнении КдФ и промежуточном уравнении (промежуточном в том смысле, что уравнения КдФ и Б—О могут быть получены из него предельными переходами). Все эти уравнения возникают в теории длинных внутренних волн в стратифицированной жидкости. Следует отметить, что Мозер [386, 387] рассматривал интересную конечномерную систему, принадлежащую другому классу. Она получается из конечной цепочки Тоды (разд. 2.2) со свободными концами. Здесь мы не будем углубляться в эту задачу.

В каждом из перечисленных случаев мы выведем уравнение соответствующей динамической системы. Но только первый пример будет проинтегрирован нами в явном виде. Мы получим решение динамической системы, изучавшейся в работах Калоджеро [86, 87], Сазерленда [469] и Мозера [386, 387].

Хотя решения соответствующих нелинейных эволюционных уравнений являются рациональными функциями пространственной переменной x, мы выделили эту тему в отдельный раздел, так как в отличие от предыдущего здесь основная задача — получить и изучить некоторые интересующие нас динамические системы.

Мы начнем с уравнения Б—О, впервые предложенного Бенджамином [53] и позднее выведенного при помощи формального асимптотического разложения в работе Оно [409]; это — нелинейное сингулярное интегродифференциальное уравнение

$$u_t + 2uu_x + H(u_{xx}) = 0, \tag{3.5.1}$$

где $H(u)$ является преобразованием Гильберта

$$H(u) = \frac{1}{\pi} \fint_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x')}{x'-x}\, dx'. \tag{3.5.2}$$

Символ $\fint f(x)\,dx$ означает интеграл в смысле главного значения. Следуя [95] и [105], будем искать движение полюсов (разложение по полюсам) решения этого уравнения:

$$u = \sum_{j=1}^{N} \frac{i}{x - x_j(t)} + \sum_{j=1}^{N} \frac{-i}{x - x_j^*(t)}. \tag{3.5.3}$$

Такой подход отчасти мотивируется тем, что уравнение (3.5.1) имеет известное рациональное решение в виде уединенной

волны

$$u=\frac{2C}{1+[C(x-Ct-x_0)]^2}=iC\left[\frac{1}{C(x-Ct-x_0)+i}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{C(x-Ct-x_0)-i}\right], \tag{3.5.4}$$

найденное Бенджамином [53]. Отметим, что преобразование Гильберта переводит полюс в полюс, т. е.

$$H\left(\frac{1}{x-x_j}\right)=\frac{i}{x-x_j}, \quad \operatorname{Im} x_j>0.$$

Подставив (3.5.3) в (3.5.1), получим

$$\sum_j \frac{1}{(x-x_j)^2}\left\{i\overset{\circ}{x}_j+2\left(\sum_{k\neq j}\frac{1}{(x-x_k)}-\sum_k\frac{1}{(x-x_k^*)}\right)\right\}+$$
$$+\sum_j\frac{1}{(x-x_j^*)^2}\left\{-i\overset{\circ}{x}_j^*+2\left(\sum_{k\neq j}\frac{1}{(x-x_k^*)}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\sum_k\frac{1}{(x-x_k)}\right)\right\}=0, \tag{3.5.5}$$

где $\overset{\circ}{x}\equiv dx/dt$.

Имеется несколько способов получить уравнение движения полюсов. Рациональную функцию можно разложить на простые дроби, что дает

$$\frac{1}{(x-a)^2(x-b)}=\frac{A}{(x-a)^2}+\frac{B}{(x-a)}+\frac{C}{(x-b)}, \tag{3.5.6a}$$

где

$$A=\frac{1}{a-b}, \quad B=\frac{-A}{a-b}, \quad C=\frac{1}{(a-b)^2}. \tag{3.5.6b}$$

Затем, воспользовавшись (3.5.6), тождеством

$$\sum_j\sum_{k\neq j}\frac{1}{(x_k-x_j)(x-x_k)(x-x_j)}=0 \tag{3.5.7a}$$

и тождеством

$$\sum_j\sum_k\frac{1}{(x_k^*-x_j)(x-x_j)(x-x_k)}+$$
$$+\sum_j\sum_k\frac{1}{(x_k-x_j^*)(x-x_j^*)(x-x_k^*)}=0, \tag{3.5.7b}$$

получим

$$(3.5.8)\quad \sum_j \frac{1}{(x-x_j)^2}\left\{i\overset{\circ}{x}_j + 2\left(\sum_{k\neq j}\frac{1}{x_j-x_k} - \sum_k \frac{1}{x_j-x_k^*}\right)\right\} + \sum_j \frac{1}{(x-x_j^*)^2}\left\{-i\overset{\circ *}{x}_j + 2\left(\sum_{k\neq j}\frac{1}{x_j^*-x_k^*} - \sum_k \frac{1}{x_j^*-x_k}\right)\right\} = 0.$$

В результате мы имеем динамическую систему (задачу N тел)

$$(3.5.9)\qquad i\overset{\circ}{x}_j + 2\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N}\frac{1}{x_j-x_k} - \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{x_j-x_k^*}\right) = 0$$

и комплексно-сопряженную систему уравнений. Отметим, что систему (3.5.9) можно вывести из (3.5.5), положив $x = x_j + \varepsilon$ и вычислив разложение по $\varepsilon \to 0$.

Замечательно, что система (3.5.9) может быть преобразована к гамильтоновой форме. Вычислив вторую производную по времени от (3.5.9) и перегруппировав члены, получим

$$(3.5.10)\quad -\frac{1}{4}\overset{\circ\circ}{x}_j = -2\left(\sum_{k\neq j}\frac{1}{(x_j-x_k)^3} - \sum_{k\neq j}\sum_{l\neq k,\,j}\frac{1}{(x_k-x_j)(x_k-x_l)(x_j-x_l)} - \sum_k\sum_{l\neq k}\frac{1}{(x_k^*-x_j)(x_j-x_l^*)(x_k^*-x_l^*)} + \sum_{k\neq j}\sum_l\frac{1}{(x_k-x_j)(x_k-x_l^*)(x_j-x_l^*)} + \sum_k\sum_{l\neq k}\frac{1}{(x_k^*-x_j)(x_j-x_l)(x_k^*-x_l)} - \sum_k\frac{1}{(x_k^*-x_j)^3} + \sum_k\frac{1}{(x_k^*-x_j)^3}\right).$$

Можно проверить, что второй и третий члены в правой части равны *нулю*, а члены с четвертого по седьмой в сумме также дают нуль. Остается гамильтонова задача N тел с парным взаимодействием

$$(3.5.11)\qquad \overset{\circ\circ}{x}_j = 8\sum_{k\neq j}\frac{1}{(x_j-x_k)^3}$$

и гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \sum_j \overset{\circ}{x}{}_j^2 + 2 \sum_j \sum_{k \neq j} \frac{1}{(x_k - x_j)^2}.$$

Систему (3.5.11) изучали многие авторы: Калоджеро [86, 87], Сазерленд [469], Мозер [386, 387], Ольшанецкий и Переломов [405, 406, 407], Каждан, Костант и Стернберг [271]. В связи с уравнением Б—О см. работы Кэйса [95, 96] и Чена, Ли и Перейры [105].

Далее нам удобно будет изменить масштаб времени по формуле $t \to 2t$; при этом

$$\overset{\circ\circ}{x}_j = 2 \sum_{k \neq j} \frac{1}{(x_j - x_k)^3}. \tag{3.5.12}$$

Интегрирование задачи N тел более общего вида было дано Мозером [386, 387]. Рассмотрим $L - A$ пару

$$L\psi = \lambda\psi, \tag{3.5.13a}$$

$$\psi_t = A\psi, \tag{3.5.13b}$$

где L, A — матрицы

$$L_{kj} = \delta_{kj} \overset{\circ}{x}_j + \frac{i(1 - \delta_{kj})}{x_k - x_j}, \tag{3.5.14a}$$

$$A_{kj} = -i\delta_{kj} \sum_{l \neq k} \frac{1}{(x_k - x_l)^2} + \frac{i(1 - \delta_{kj})}{(x_k - x_j)^2}. \tag{3.5.14b}$$

Предположив $\lambda_t = 0$, мы получим эволюционное решение $L_t = [L, A]$, или, после некоторых вычислений,

$$\delta_{kj} \overset{\circ\circ}{x}_j = \frac{(1 - \delta_{kj})}{x_k - x_j} \left(\sum_{l \neq j} (x_k - x_l)^{-2} - \sum_{l \neq j} (x_j - x_l)^{-2} \right) + \\ + \sum_l \frac{(1 - \delta_{kl})(1 - \delta_{lj})}{(x_k - x_l)(x_l - x_j)} \left(\frac{-1}{(x_k - x_l)} + \frac{1}{(x_l - x_j)} \right). \tag{3.5.15}$$

При $k = j$ эта система уравнений совпадает с (3.5.11); при $k \neq j$ и правая, и левая части (3.5.15) равны нулю.

Таким образом, динамическая система (3.5.12) является *изоспектральной*. Отсюда немедленно следует наличие N интегралов движения (переменных действия). Чтобы в этом убедиться, обозначим

$$I_n = \operatorname{tr}(L^n), \qquad n = 1, \ldots, N; \tag{3.5.16a}$$

тогда

$$\frac{dI_n}{dt} = 0, \tag{3.5.16b}$$

так как следы (tr) от L^n выражаются через собственные значения матрицы L. Дополнительный набор N величин (угловые переменные) также может быть найден [405, 406, 407]. Непосредственным вычислением убеждаемся, что уравнения движения можно записать в виде

$$X_t = [AX] + L, \tag{3.5.17}$$

где $X_{kj} = \delta_{kj} x_j$, а матрицы L, A определены в (3.5.14). Отметим, что $[AX] = i(1-\delta_{kj})/(x_j - x_k)$.

Далее по индукции можно проверить, что

$$\frac{d}{dt}(XL^{n-1}) = [A,\ XL^{n-1}] + L^n. \tag{3.5.18}$$

Обозначив

$$J_n = \operatorname{tr}(XL^{n-1}), \tag{3.5.19}$$

мы получим

$$\frac{dJ}{dt} = I_n. \tag{3.5.20}$$

При этом мы воспользовались равенством $\operatorname{tr}[A, B] = 0$ для любых A, B. Таким образом,

$$J_n(t) = I_n + J_n(0). \tag{3.5.21}$$

Итак, мы имеем два набора из N переменных, каждый заданный в явном виде в любой момент времени. Это полностью определяет движение полюсов.

Например, рассмотрим случай $N = 2$:

$$\operatorname{tr} L = I_1 = \mathring{x}_1 + \mathring{x}_2, \tag{3.5.22a}$$

$$\operatorname{tr} L^2 = I_2 = \mathring{x}_1^2 + \mathring{x}_2^2 + \frac{2}{(x_1 - x_2)^2}, \tag{3.5.22b}$$

$$\operatorname{tr} X = J_1 = x_1 + x_2 = I_1 t + J_1(0), \tag{3.5.22c}$$

$$\operatorname{tr} LX = J_2 = x_1\mathring{x}_1 + x_2\mathring{x}_2 = I_2 t + J_2(0). \tag{3.5.22d}$$

Из (3.5.22d) получим

$$\frac{d}{dt}(x_1^2 + x_2^2) = 2(x_1\mathring{x}_1 + x_2\mathring{x}_2) = 2I_2 t + 2J_2(0). \tag{3.5.23a}$$

Таким образом,

$$x_1^2 + x_2^2 = I_2 t^2 + 2J_2(0)\,t + x_1^2(0) + x_2^2(0). \tag{3.5.23b}$$

С помощью (3.5.22c) мы приходим к алгебраическому уравнению для $x_1(t)$ или для $x_2(t)$ (Z равно либо x_1, либо x_2):

$$2Z^2 - 2J_1(t)\,Z + J_1^2(t) = I_2 t^2 + 2J_2(0)\,t + x_1^2(0) + x_2^2(0). \tag{3.5.23c}$$

Мы не будем здесь заниматься более тщательным анализом его решения. Вместо этого покажем, что собственные значения оператора

$$M(t, t_0) = X(t_0) + (t - t_0) L(t_0) \tag{3.5.24}$$

совпадают с полюсами $x_i(t)$, $i = 1, \ldots, N$. Приводя матрицу (3.5.24) к диагональному виду, получим расположения полюсов в каждый момент времени t. Рассмотрим

$$K(t) = U^{-1}(t) X(t) U(t), \tag{3.5.25}$$

где $U(t_0) = I$. Так как A является антиэрмитовой матрицей, т. е. $A^{\dagger} \equiv (A^*)^T = -A$, то матрица $U(t)$, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{dU}{dt} = AU, \tag{3.5.26a}$$

является унитарной:

$$U^{\dagger} U = I.$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dt}(U^{-1}) = \frac{d}{dt} U^{\dagger} = -U^{-1} A, \tag{3.5.26b}$$

и прямое вычисление приводит к

$$\frac{dK}{dt} = U^{-1}(\mathring{X} + [X, A]) U. \tag{3.5.27}$$

Из (3.5.17) следует

$$\frac{dK}{dt} = U^{-1} L U. \tag{3.5.28}$$

Продифференцируем это равенство еще раз по времени и воспользуемся соотношениями (3.5.26) и $L_t = [AL]$. В результате получим

$$\frac{d^2K}{dt^2} = 0. \tag{3.5.29a}$$

Поэтому

$$K(t) = C_1 + (t - t_0) C_2, \tag{3.5.29b}$$

где C_1, C_2 — постоянные интегрирования. Из (3.5.25) и (3.5.28), учитывая равенство $U(t_0) = I$, мы получим

$$K(t_0) = U^{-1}(t_0) X(t_0) U(t_0) = X(t_0) = C_1, \tag{3.5.29c}$$

$$\frac{dK}{dt}(t_0) = U^{-1}(t_0) L(t_0) U(t_0) = L(t_0) = C_2. \tag{3.5.29d}$$

Таким образом,

$$K(t) = X(t_0) + (t - t_0) L(t_0) \equiv M(t, t_0). \tag{3.5.29e}$$

Соотношение (3.5.25) позволяет выразить $X(t)$ через $K(t)$:

(3.5.29f) $$X(t) = UM(t, t_0)U^{-1}.$$

Собственные значения матриц $X(t)$ и $M(t, t_0)$ совпадают, так как

(3.5.30a) $$0 = \det(\lambda I - X(t)) = \det(U(\lambda I - M(t, t_0))U^{-1}).$$

Матрица $X_{kj}(t)$ имеет вид $X_{kj}(t) = \delta_{kj}x_k(t)$, поэтому

(3.5.30b) $$\det(\lambda I - X(t)) = \prod_{k=1}^{N}(\lambda - x_k(t)).$$

Это доказывает, что собственные значения матрицы $M(t, t_0)$ совпадают с положениями полюсов, т. е. с $x_k(t)$. При этом, заметив, что

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln\det(\lambda I - X(t))|_{\lambda=x} = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{x - x_i(t)},$$

можно представить многополюсное решение уравнения Бенджамина — Оно в виде

(3.5.31) $$u = i\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln\det(I\lambda - M(2t, 2t_0))|_{\lambda=x} - \\ - i\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln\det(I\lambda + M^*(2t, 2t_0))|_{\lambda=x}.$$

(Отметим, что в последней формуле мы изменили масштаб времени, чтобы полученное решение удовлетворяло уравнению Б—О, записанному в виде (3.5.1).) Итак, мы описали динамику полюсов в решении уравнения Б—О. Эти решения представляют взаимодействия солитонов, что наводит на мысль о возможности решения уравнения Б—О методом обратной задачи рассеяния. Ниже в этом разделе мы кратко обсудим некоторые результаты и опишем линейный аналог задачи рассеяния, связанный с уравнением Б—О.

Для уравнения КдФ (см. [36])

(3.5.32) $$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

конечнополюсное решение имеет вид

(3.5.33) $$u = -2\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{(x - x_i(t))^2}.$$

Подстановка (3.5.33) в (3.5.32) дает

(3.5.34) $$\sum_{i=1}^{N}\frac{-2}{(x - x_i)^3}\left[-\mathring{x}_i - 12\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{1}{(x - x_j)^2}\right] = 0.$$

Используя разложение рациональных функций на простые дроби или просто положив $x = x_I + \varepsilon$, $\varepsilon \to 0$ и приравняв нулю члены порядка $O(1/\varepsilon^3)$, $O(1/\varepsilon^2)$, мы получим

$$\overset{\circ}{x}_I = -12 \sum_{\substack{j=1 \\ j=I}}^{N} \frac{1}{(x_I - x_j)^2} \tag{3.5.35a}$$

и дополнительную связь на расположение полюсов

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq I}}^{N} \frac{1}{(x_I - x_j)^3} = 0. \tag{3.5.35b}$$

Следует отметить, что это решение уравнения КдФ соответствует рациональному решению, найденному в разд. 3.4.

Продифференцировав (3.3.35a), мы можем привести эту систему к гамильтоновой форме задачи N тел:

$$\overset{\circ\circ}{x}_I = -(12)^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq I}}^{N} \frac{1}{(x_I - x_j)^5} \tag{3.5.36}$$

(см., например, [110]). Заменив рациональные функции эллиптическими, разложение (3.5.33) можно обобщить; при этом

$$\overset{\circ}{x}_I = -12 \sum_{\substack{j=1 \\ j=I}}^{N} \mathscr{P}(x_I - x_j), \tag{3.5.37a}$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq I}}^{N} \mathscr{P}'(x_I - x_j) = 0, \tag{3.5.37b}$$

где $\mathscr{P}$ — эллиптическая функция Вейерштрасса. Вычислив производную по времени, мы получим гамильтонову систему

$$\overset{\circ\circ}{x}_I = -(12)^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j=I}}^{N} \mathscr{P}'(x_I - x_j)\,\mathscr{P}(x_I - x_j) \tag{3.5.38a}$$

с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \overset{\circ\circ}{x}{}_j^2 + \frac{(12)^2}{2} \sum_i \sum_{j=i} \mathscr{P}^2(x_i - x_j). \tag{3.5.38b}$$

Все предыдущие формулы для рациональных функций могут быть получены из соответствующих формул для эллиптических функций, если заменить $\mathscr{P}(x)$ на x^{-2} (т. е. устремить оба периода эллиптических функций к бесконечности. — *Перев.*).

Теперь мы кратко обсудим результаты о разложении по полюсам (см. [448]) для промежуточного уравнения, описывающего длинные гравитационные волны в стратифицированной жидкости конечной глубины [246], [301, 302]. Буквой δ обозначим параметр, характеризующий отношение глубины жидкости к длине волны. Уравнение движения будем записывать в виде

$$u_t + 2uu_x + \left(1 + \frac{1}{\delta}\right) T(u_{xx}) = 0, \tag{3.5.39a}$$

где

$$T(u_x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[-\frac{1}{2\delta} \operatorname{cth} \frac{\pi(x-\xi)}{2\delta} + \frac{1}{2\delta} \operatorname{sgn}(x-\xi)\right] u_\xi d\xi. \tag{3.5.39b}$$

Это уравнение можно также переписать в виде

$$u_t + 2uu_x + \left(1 + \frac{1}{\delta}\right) \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi)\, u(\xi)\, d\xi = 0, \tag{3.5.40a}$$

где

$$\begin{gathered} K(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(k)\, e^{ikx}\, dk, \\ C(k) = -k \operatorname{cth} k\delta + \frac{1}{\delta}. \end{gathered} \tag{3.5.40b}$$

Для волн на мелкой воде $\delta \to 0$, и уравнение (3.5.39) или (3.5.40) переходит в уравнение КдФ

$$u_t + 2uu_x + \frac{1}{3} u_{xxx} = 0. \tag{3.5.41}$$

Для волн на глубокой воде $\delta \to \infty$, и в пределе получится уравнение Б—О:

$$u_t + 2uu_x + H(u_{xx}) = 0 \tag{3.5.42}$$

($H(u)$ обозначает, как и раньше, преобразование Гильберта от u). Задачу построения N-солитонных решений уравнения (3.5.39) рассматривали Джозеф и Эгри [247] и Чень, Ли [103]. Прежде чем заняться разложением решений уравнений (3.5.39), (3.5.40) по полюсам, мы перепишем их в билинейной форме (см. разд. 3.3). В (3.5.40), формально заменив k на $-i\partial/\partial x$, получим следующее дифференциально-разностное уравнение:

$$\begin{gathered} u_t + 2uu_x + \frac{1}{\delta}\left(1 + \frac{1}{\delta}\right) u_x - \\ - i\left(1 + \frac{1}{\delta}\right) \operatorname{cth}\left(i\delta \frac{\partial}{\partial x}\right) u_{xx} = 0, \end{gathered} \tag{3.5.43}$$

Замена зависимой переменной

$$u = -2i\left(1+\frac{1}{\delta}\right)\operatorname{sh}\left(i\delta\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x}\ln f(x) = \tag{3.5.44}$$
$$= -i\left(1+\frac{1}{\delta}\right)\frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{f(x+i\delta)}{f(x-i\delta)}$$

$\left(e^{\pm i\delta\frac{\partial}{\partial x}}f(x) = f(x\pm i\delta)\right)$ позволяет привести уравнение (3.5.43) к билинейной форме

$$\left(\frac{\delta}{1+\delta}iD_t + \frac{1}{\delta}iD_x + D_x^2\right)f^+\cdot f^- = 0, \tag{3.5.45}$$

где

$$f^{\pm} \equiv f(x\pm i\delta), \tag{3.5.46}$$

а операторы D_t, D_x определены в разд. 3.3 (см. (3.3.4)).

При этих преобразованиях следует соблюдать определенные предосторожности. Например, подстановка (3.5.44) в (3.5.39) или (3.5.40) приводит к (3.5.45) только в том случае, когда выполнено следующее условие.

Условие А. *Функция* $f(x+i\delta)$ *не имеет нулей в полосе* $-2\delta \leqslant \operatorname{Im} x \leqslant 0$.

Если выполнено условие А, то

$$\int \frac{i}{2\delta}\operatorname{cth}\frac{\pi(x-\xi)}{\delta}\frac{\partial}{\partial\xi}\ln\frac{f(\xi+i\delta)}{f(\xi+i\delta)}d\xi =$$
$$= -\frac{\partial}{\partial x}\ln f(x+i\delta)f(x-i\delta) + \text{const}$$

(предполагается, что f ведет себя достаточно хорошо на бесконечности).

Для простейшего нетривиального солитонного решения функцию $f(x)$ можно представить в виде

$$\begin{gathered} f(x) = 1+\exp\left(k_1x-\omega_1t+\eta_1^{(0)}\right), \\ \omega_1 = \left(1+\frac{1}{\delta}\right)\left(\frac{1}{\delta}k_1 - k_1^2\operatorname{ctg}\delta k_1\right), \end{gathered} \tag{3.5.47}$$

k_1, $\eta_1^{(0)}$ — произвольные параметры. Требование $0 < k_1\delta < \pi$ необходимо для выполнения условия А. Подставив (3.5.47) в (3.5.44), получим

$$u = \left(1+\frac{1}{\delta}\right)\frac{k_1\sin\delta k_1}{\left(\cos\delta k_1 + \operatorname{ch}\left\{k_1x-\omega_1t+\eta_1^{(0)}\right\}\right)}. \tag{3.5.48a}$$

Решение (3.5.48a) в пределе $\delta\to 0$ переходит в решение уравнения КдФ

$$u = \frac{k_1^2}{2}\operatorname{sech}^2\frac{1}{2}\left\{k_1x - \frac{1}{3}k_1^3/t + \eta_1^{(0)}\right\}. \tag{3.5.48b}$$

При $\delta \to \infty$ можно перейти к пределу, если одновременно устремить $k_1 \to 0$. Положив $\delta k_1 = \pi - k_1/C_1$, C_1 — вещественная положительная постоянная, получим рациональное решение уравнения Б—О:

$$u = \frac{2C_1}{(1 + C_1^2(x - C_1 t)^2)}. \tag{3.5.48c}$$

Используя (3.5.45), можно получить N-солитонное решение уравнения (3.5.39), но мы не будем здесь этим заниматься (см. [447]).

Обсудим теперь динамические системы, описывающие движение полюсов промежуточного уравнения (3.5.39). На практике более удобно пользоваться этим уравнением, представленным в билинейной форме (3.5.45). Предполагаем, что

$$f(x) = \prod_{j=1}^{N} (x - x_j(t)), \quad |\operatorname{Im} x_j| > \delta,$$

т. е.

$$u = -i\left(1 + \frac{1}{\delta}\right) \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{1}{(x - x_j(t) + i\delta)} - \frac{1}{(x - x_j(t) - i\delta)}\right]$$

(потребуем $|\operatorname{Im} x_j| > \delta$, чтобы удовлетворить условию А). Подставив $f(x)$ в (3.5.45), получим

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{(x - x_i)^2 + \delta^2} \left\{ \mathring{x}_j + 2(1 + \delta) \sum_{k \neq j} \frac{1}{((x - x_k)^2 + \delta^2)} \right\} = 0.$$

Воспользовавшись разложением на простые дроби, это соотношение можно переписать в виде

$$\sum_{j=1}^{N} \left(\frac{1}{(x - x_j + i\delta)} - \frac{1}{(x - x_j - i\delta)} \right) \mathring{x}_j +$$
$$+ 4(1 + \delta) \sum_{j=1}^{N} \sum_{k \neq j} \left\{ \left(\frac{1}{(x - x_j + i\delta)(x_k - x_j)(x_k - x_j + 2i\delta)} \right) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{(x - x_j - i\delta)(x_k - x_j)(x_k - x_j - 2i\delta)} \right\} = 0,$$

из которого немедленно получим

$$\mathring{x}_j + 4(1 + \delta) \sum_{k \neq 1} \frac{1}{(x_k - x_j)(x_k - x_j + 2i\delta)} = 0, \tag{3.5.49a}$$

$$\mathring{x}_j + 4(1 + \delta) \sum_{k \neq j} \frac{1}{(x_k - x_j)(x_k - x_j - 2i\delta)} = 0 \tag{3.5.49b}$$

для $j = 1, \ldots, N$. Складывая (3.5.49a, b), получим

$$\mathring{x}_j + 4(1+\delta) \sum_{k \neq j} \frac{1}{(x_k - x_j)^2 + 4\delta^2} = 0; \tag{3.5.50a}$$

вычитание дает

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N} \frac{1}{(x_k - x_j)((x_k - x_j)^2 + 4\delta^2)} = 0. \tag{3.5.50b}$$

Система (3.5.50) представляет собой динамическую систему со связями. При $\delta \to 0$ мы получим динамическую систему, соответствующую уравнению КдФ (3.5.35):

$$\mathring{x}_j + 4 \sum_{k \neq j} (x_k - x_j)^{-2} = 0, \tag{3.5.51a}$$

$$\sum_{k \neq 1} (x_k - x_j)^{-3} = 0. \tag{3.5.51b}$$

Отличие в коэффициентах связано с разным выбором масштабов времени в уравнениях (3.5.52) и (3.5.41) (t в (3.5.41) следует заменить на $3t$).

При $\delta \to \infty$ обозначим $\hat{x}_j = x_j - i\delta$ для $j = 1, 2, \ldots, M$ (здесь $\operatorname{Im} x_j > \delta$, поэтому $\hat{x}_j$ лежат в верхней полуплоскости) и $\hat{x}_j = x_j + i\delta$ для $j = M+1, M+2, \ldots, N$ (здесь $\operatorname{Im} x_j < -\delta$, поэтому $\hat{x}_j$ лежат в нижней полуплоскости).

При $\delta \to \infty$ получим

$$\frac{1}{2i} \mathring{\hat{x}} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{M} \frac{1}{\hat{x}_k - \hat{x}_j} - \sum_{k=M+1}^{N} \frac{1}{\hat{x}_k - \hat{x}_j} \quad \text{при } j = 1, 2, \ldots, M, \tag{3.5.52a}$$

$$\frac{1}{2i} \mathring{\hat{x}}_j = \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{\hat{x}_k - \hat{x}_j} - \sum_{\substack{k=M+1 \\ k \neq j}}^{N} \frac{1}{\hat{x}_k - \hat{x}_j} \quad \text{при } j = M+1, \ldots, N \tag{3.5.52b}$$

— динамическую систему без связей. Если $N = 2M$ и $\hat{x}_j = \hat{x}^*_{j+M}$ для $j = 1, \ldots, M$, то получим систему

$$\frac{1}{2i} \mathring{\hat{x}}_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{M} \frac{1}{\hat{x}_k - \hat{x}_j} - \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{\hat{x}_j - \hat{x}^*_k}, \tag{3.5.53}$$

которая после комплексного сопряжения и переобозначения совпадает с (3.5.9) (отметим, что в (3.5.53) точки $\hat{x}_j$, $j=1, \ldots, M$, лежат в верхней полуплоскости, а в (3.5.9) точки x_j лежат в нижней полуплоскости).

Вычислив производную по времени от (3.5.52) (после простых алгебраических вычислений, использующих тождества, аналогичные (3.5.7)), получим

$$\overset{\infty}{\hat{x}}_j = 8 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{M} (\hat{x}_j - \hat{x}_k)^{-3} \text{ при } j=1, 2, \ldots, M, \tag{3.5.54a}$$

$$\overset{\infty}{\hat{x}}_j = 8 \sum_{\substack{k=M+1 \\ k \neq j}}^{N} (\hat{x}_j - \hat{x}_k)^{-3} \text{ при } j=M+1, \ldots, N. \tag{3.5.54b}$$

Следует отметить, что в этом пределе ($\delta \to \infty$) функции f^+, f^- имеют следующие разложения по полюсам: $f^+ = \prod_{j=1}^{M} (x - \hat{x}_j)$, $f^- = \prod_{j=M+1}^{N} (x - \hat{x}_j)$. В результате вычислений мы получили систему (3.5.54), показывающую, что полюсы в верхней полуплоскости не влияют на движение полюсов в нижней полуплоскости, и наоборот.

Для уравнения (3.5.39) можно построить преобразование Бэклунда и аналог преобразования Миуры [448, 449]. Обозначив $W_x = u$, перепишем (3.5.39) в виде

$$W_t + W_x^2 + \left(1 + \frac{1}{\delta}\right) T W_{xx} = 0. \tag{3.5.55}$$

Преобразование Бэклунда имеет вид

$$(W + W')_x = \lambda + iT\,(W' - W)_x - i\delta^{-1}\,(W' - W) + \mu e^{i\delta\,(W'-W)/(1+\delta)}, \tag{3.5.56a}$$

$$\begin{aligned}(W' - W)_t = &- \left\{\frac{1}{\delta}\left(1 + \frac{1}{\delta}\right) + \lambda\right\}(W' - W)_x + \\ &+ i\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)(W' - W)_{xx} - i\,(W' - W)_x\,T\,(W' - W)_x + \\ &+ i\delta^{-1}\,(W' - W)\,(W' - W)_x,\end{aligned} \tag{3.5.56b}$$

где λ, μ — произвольные параметры. Если W удовлетворяет (3.5.55), то и W', определенное по (3.5.56), также удовлетворяет (3.5.55). Обозначив $V = W' - W$ (и использовав $W_x = u$), можно переписать (3.5.56) и получить обобщение преобразования Миуры:

$$V_x + 2u = \lambda + iT\,(V_x) - i\delta^{-1}V + \mu e^{iV\,(\delta/1+\delta)}, \tag{3.5.57a}$$

$$\begin{aligned}V_t = &- \left(\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)\delta^{-1} + \lambda\right) V_x + \\ &+ i\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)(V_{xx} + 2u_x) - iV_x T\,(V_x) + i\delta^{-1} V V_x.\end{aligned} \tag{3.5.57b}$$

Подставив $V_x + 2u$ из (3.5.57a) в правую часть (3.5.57b), получим модифицированное уравнение внутренних волн

$$V_t + \lambda V_x + \left(1 + \frac{1}{\delta}\right) T(V_{xx}) + \left\{\mu e^{i(\delta/1+\delta)V} + iT(V_x) - \frac{i}{\delta} V\right\} V_x = 0, \tag{3.5.58}$$

имеющее то же дисперсионное соотношение, что и промежуточное уравнение (3.5.39). Другой способ — разрешить (3.5.57a) относительно u и воспользоваться тождеством

$$T(V_x)\,T(V_{xx}) - V_x V_{xx} - T(V_x T(V_x))_x = \delta^{-1}(VT(V_{xx}) - T(VV_x)). \tag{3.5.59}$$

Тогда (прямо из (3.5.39)) получим

$$\begin{aligned} u_t + 2uu_x + T(u_{xx}) = \Big[\frac{1}{2} i \frac{\partial}{\partial x} T \cdot - i\delta^{-1} + \mu i \frac{\delta}{1+\delta} e^{i(\delta/1+\delta)V} - \\ - \frac{\partial}{\partial x}\Big] \cdot \Big[V_t + \lambda V_x + \left(1 + \frac{1}{\delta}\right) T(V_{xx}) + \\ + \left\{\mu e^{i(\delta/1+\delta)V} + iT(V_x) - \frac{i}{\delta} V\right\} V_x\Big]. \end{aligned} \tag{3.5.60}$$

Таким образом, уравнение (3.5.58) играет ту же роль для промежуточного уравнения (3.5.39), какую модифицированное уравнение КдФ играет по отношению к уравнению КдФ.

Наложив условие $V(\pm\infty) = 0$ и воспользовавшись равенством $\int_{-\infty}^{\infty} fT(f)\,dx = 0$, получим, что $\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} V\,dx = 0$. Это означает, что уравнение (3.5.39) имеет бесконечную серию законов сохранения. Подставляя $V = -i(1 + 1/\delta)(\chi + \ln(-\lambda/\mu)$ в (3.5.57a), получим

$$e^{\chi} - 1 = \lambda^{-1}\Big[i\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)\chi_x + \left(1 + \frac{1}{\delta}\right) T(\chi_x) - \delta^{-1}\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)\chi - 2u\Big]. \tag{3.5.61}$$

Подставив χ в виде разложения $\chi = \sum_1^{\infty} \lambda^{-n}\chi_n$ при $\lambda \to \infty$ и приравняв в (3.5.61) коэффициенты при одинаковых степенях λ, получим рекуррентную формулу для определения χ_n.

Функции χ_n, как нетрудно понять, являются плотностями интегралов движения уравнения (3.5.39). Первые четыре χ_n имеют вид

$$\chi_1 = u, \quad \chi_2 = u^2, \quad \chi_3 = u^3 + \left(1 + \frac{1}{\delta}\right)\frac{3}{2} uTu_x,$$

$$\begin{aligned} \chi_4 = u^4 + 3\left(1 + \frac{1}{\delta}\right) u^2 Tu_x + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)^2 u_x^2 + \frac{3}{2}\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)^2 (Tu_x)^2 + \\ + \frac{3}{2}\delta^{-1}\left(1 + \frac{1}{\delta}\right) uTu_x. \end{aligned}$$

Плотности χ_n в пределе $\delta \to 0$ переходят в плотности интегралов движения для уравнения КдФ, а при $\delta \to \infty$ — соответственно для Б—О.

Формальную линейную задачу можно получить, определив

$$\ln \frac{\psi^+}{\psi^-} = i \frac{\delta}{1+\delta} V, \tag{3.5.62a}$$

$$(\ln \psi^+ \psi^-)_x = \frac{\delta}{1+\delta} [-T(V_x) + \delta^{-1} V]. \tag{3.5.62b}$$

В пределе $\delta \to \infty$ при подходящем V это эквивалентно расщеплению функции V на функции, аналитически продолжаемые в верхнюю (—) и нижнюю (+) полуплоскости, так как $\ln \psi^{\pm} = \pm (i \mp H) V$. Подстановка (3.5.62) в (3.5.57a) дает

$$\left(1 + \frac{1}{\delta}\right) \psi_x^- - i \left(u - \frac{\lambda}{2}\right) \psi^- = -\frac{i}{2} \mu \psi^+. \tag{3.5.63}$$

Оператор, определяющий эволюцию по времени, также можно найти, см. [449].

При $\delta \to 0$, полагая $V = 2(1+\delta)(\ln \varphi)_x$, $\lambda = (1 + 1/\delta) k \cos k\delta$, $\mu = (1 + 1/\delta) k / \sin(k\delta)$ и переходя к пределу, получим, что (3.5.63) переходит в задачу рассеяния для оператора Шрёдингера

$$\varphi_{xx} - \left(\frac{k^2}{4} - u\right) \varphi = 0, \tag{3.5.64}$$

а при $\delta \to \infty$ получим

$$\psi_x^- - i \left(u - \frac{\lambda}{2}\right) \psi^- = -\frac{i}{2} \mu \psi^+. \tag{3.5.65}$$

Уравнения (3.5.63, 65) представляют собой задачи Римана — Гильберта. Для конечного δ функции $\psi^{\pm}$ являются граничными значениями функций, аналитических в полосах $(+;\ -2\delta < \operatorname{Im} x < 0)$, $(-;\ 0 < \operatorname{Im} x < 2\delta)$ и периодически продолженных. Недавно эти линейные задачи позволили применить МОЗР для построения точных решений рассматриваемых уравнений (см. [284]). В этом же направлении были сделаны работы Накамуры [393] и Бока, Краскала [68].

3.6. Прямые методы, использующие линейное интегральное уравнение. В предыдущих разделах была установлена связь между нелинейными эволюционными уравнениями и линейным интегральным уравнением (уравнение типа Гельфанда, Левитана, Марченко). В этом разделе мы обсудим схему вывода эволюционных уравнений непосредственно из линейного интегрального уравнения. Этот вывод применим как в случае уравнений в частных производных, так и для обыкновенных дифференциальных уравнений (см. также разд. 3.7). Нам нужно потребовать лишь достаточно быстрого убывания решений на одной из

бесконечностей (например) при $x \to \infty$, с тем чтобы интегральные операторы были определены. Следует, однако, отметить, что в общем случае решения, достаточно быстро убывающие на $x \to +\infty$, могут иметь особенности в конечных точках, либо неограниченно расти при $x \to -\infty$, либо медленно убывать при $x \to -\infty$. Во всех этих случаях классический анализ, основанный на аналитических свойствах функций Йоста, неприменим, так как при этом требуется «хорошее» поведение потенциала на всей прямой (см., например, [152], [136]). Благодаря этой свободе класс решений, который может быть получен прямым методом, гораздо шире возможностей МОЗР. Например, таким образом можно описывать автомодельные решения, подчиняющиеся обыкновенным дифференциальным уравнениям, связанным с рассматриваемыми эволюционными уравнениями.

Этот метод впервые использовался для нелинейных эволюционных уравнений Захаровым и Шабатом (1974) [546] (см. также [459]). Блазек [66] и Корний [117] использовали аналогичные идеи применительно к обратной задаче рассеяния; Корний [119, 120] получил ряд дальнейших результатов, применяя их для решения нелинейных эволюционных уравнений. В этом разделе мы будем следовать изложению Абловица, Рамани и Сигура [23]; затем обсудим работу Захарова и Шабата [546], основанную на несколько другой точке зрения.

Рассмотрим линейное интегральное уравнение

$$K(x, y) = F(x, y) + \int_x^\infty K(x, z) N(x; z, y)\, dz, \quad y \geqslant x. \tag{3.6.1}$$

Кроме явно указанных аргументов (x, y, z), функции F, N, K в (3.6.1) могут зависеть от других параметров $(t, \lambda, \ldots)$. Производные по этим параметрам могут появиться в дифференциальных уравнениях, которым удовлетворяют F, K, но уравнение (3.6.1) следует рассматривать при фиксированных значениях этих дополнительных параметров.

В каждом конкретном случае функция N явно выражается через F. Например:

(А) $N(x; z, y) = F(z, y)$ (уравнение КдФ, высшие КдФ, Буссинеска, Кадомцева — Петвиашвили ...)

(Б) $N(x; z, y) = \pm \int_x^\infty F(z, s) F(s, y)\, ds$ (уравнения мКдФ, высшие мКдФ, sin-Гордон ...)

(В) $N(x; z, y) = \pm \int_x^\infty F^*(z, s) F(s, y)\, ds$ (нелинейное уравнение Шрёдингера, связанные с ним высшие уравнения ...)

При обычном подходе функция F строится по известным данным рассеяния, полученным из решения «прямой задачи рассеяния»; при этом рассеивающий потенциал $u(x)$ восстанавливается по функции K (например, $u(x)=K(x,x)$, или $u(x)=(d/dx)K(x,x)$). Здесь мы отвлечемся от подобной интерпретации, а вместо этого потребуем, чтобы функция F удовлетворяла некоторому (обыкновенному или в частных производных) линейному дифференциальному уравнению.

Определим оператор A_x:

$$A_x f(y)=\begin{cases}\int\limits_x^\infty f(z)\,N(x;z,y)\,dz; & y\geqslant x,\\ 0 & ;\ y<x.\end{cases} \tag{3.6.2}$$

Предположим, что при каждом конкретном выборе N можно доказать обратимость оператора $(I-A_x)$. Точнее говоря, при достаточно больших x имеется пространство функций, на котором оператор $(I-A_x)$ обратим, а оператор $(I-A_x)^{-1}$ непрерывен. Кроме того, мы предположим, что оператор, полученный из (3.6.2) дифференцированием по x или y, также определен на этом функциональном пространстве. Можно показать, что эти ограничения выполняются во многих задачах (см., например, [23]).

Учитывая эти предположения и тот факт, что функция F подчиняется некоторому линейному дифференциальному уравнению, мы покажем в этом разделе, что (определенная выше) функция $u(x)$ подчиняется нелинейному дифференциальному уравнению. Мы будем говорить, что это нелинейное уравнение решается методом обратной задачи рассеяния, хотя связи с прямой задачей рассеяния устанавливаться не будет.

Схематически этот подход можно сформулировать следующим образом.

(i) Функция F удовлетворяет двум линейным дифференциальным обыкновенным (или в частных производных) уравнениям

$$L_iF=0,\quad i=1,\ 2. \tag{3.6.3}$$

(ii) Функция K связана с F уравнением (3.6.1), которое мы можем переписать в виде

$$(I-A_x)K=F. \tag{3.6.1'}$$

(iii) Действуя операторами L_i, $i=1,\ 2$, на это уравнение, получим

$$L_i(I-A_x)K=0,\quad i=1,\ 2. \tag{3.6.4}$$