

Это можно переписать в виде

$$(3.6.5) \quad (I - A_x)(L_i K) = R_i, \quad i = 1, 2,$$

где  $R_i$ ,  $i = 1, 2$  содержит все остальные члены (3.6.5). При этом (3.6.1) и (3.6.3) выбраны таким образом, что  $R_i$  можно представить в виде

$$(3.6.6) \quad R_i = (I - A_x) M_i(K), \quad i = 1, 2,$$

где  $M_i(K)$  — нелинейный функционал от  $K$ .

(iv) Таким образом,

$$(I - A_x)[L_i K - M_i(K)] = 0, \quad i = 1, 2.$$

Но оператор  $I - A_x$  обратим, поэтому функция  $K$  должна удовлетворять нелинейным дифференциальному уравнениям

$$(3.6.7) \quad L_i K - M_i(K) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Следовательно, каждое решение линейного интегрального уравнения (3.6.1) служит также решением нелинейного дифференциального уравнения (3.6.7).

Основными составными частями этого подхода являются линейное интегральное уравнение (3.6.1) и два линейных дифференциальных оператора  $L_i$ ,  $i = 1, 2$ . Два линейных оператора отвечают линейной задаче рассеяния (скажем, при  $i = 1$ ) и эволюции волновых функций по времени (скажем, при  $i = 2$ ). Для того чтобы этот метод действительно работал, следует определить класс допустимых операторов  $L_i$ ,  $i = 1, 2$ . Принципиальное значение имеет оператор  $L_1$ , связанный с задачей рассеяния. Мы сочли удобным составить «словарик» для членов, которые могут появляться в правой части уравнения (3.6.5) (т. е. из чего состоит  $R_i$ ). В каждом конкретном случае это позволяет редуцировать уравнение (3.6.7) при  $i = 2$  до нелинейного дифференциального уравнения вдоль линии  $y = x$ . Наконец, отметим, что: (i) функция  $K$ , являющаяся решением уравнения (3.6.1), достаточное число раз дифференцируема, поэтому существует  $L_i K$ ; (ii) уравнение  $L_2 F = 0$  может быть либо уравнением в частных производных, содержащим зависимость от времени, либо соответствовать автомодельной подстановке (см. [23]).

Обсудим два типичных примера, а именно уравнения КdФ и мКdФ. Мы начнем с интегрального уравнения

$$(3.6.8) \quad K(x, y) = F(x, y) + \int_x^{\infty} K(x, z) F(z, y) dz$$

(т. е. (3.6.1), случай А). Начнем с составления «словарика» тождеств, которые в дальнейшем нам понадобятся.

$$(3.6.9a) \quad \partial_x^n \int_x^{\infty} K(x, z) F(z, y) dz = \int_x^{\infty} dz F(z, y) (\partial_x^n K(x, z)) + A_n,$$

$$\partial_x \partial_x^{n-1} \int_x^{\infty} K(x, z) F(z, y) dz = \partial_x \left[ \int_x^{\infty} F(z, y) \partial_x^{n-1} K(x, z) dz + A_{n-1} \right].$$

(3.6.9b)

Интегрирование по частям с последующим приравниванием (3.6.9a) и (3.6.9b) дает

$$(3.6.9c) \quad A_n = A_{n-1x} - F(x, y) [\partial_x^{n-1} K(x, z)]_{z=x},$$

причем

$$(3.6.9d) \quad A_1 = -K(x, x) F(x, y),$$

$$(3.6.9e) \quad A_2 = -\frac{d}{dx} (K(x, x) F(x, y)) - F(x, y) [\partial_x K(x, z)]_{z=x},$$

$$(3.6.9f) \quad A_3 = -\left(\frac{d}{dx}\right)^2 (K(x, x) F(x, y)) - \frac{d}{dx} (F(x, y) [\partial_x K(x, z)]_{z=x}) - F(x, y) [\partial_x^2 K(x, z)]_{z=x},$$

где  $(d/dx) K(x, x) = (\partial_x K(x, z) + \partial_z K(x, z))_{z=x}$ .

Аналогично, интегрируя по частям, получим

$$(3.6.10a) \quad \int_x^{\infty} K(x, z) \partial_z^n F(z, y) dz = (-1)^n \int_x^{\infty} F(z, y) \partial_z^n K(x, z) dz + B_n,$$

при этом

$$(3.6.10b) \quad B_1 = -K(x, x) F(x, y),$$

$$(3.6.10c) \quad B_2 = -K(x, x) (\partial_x F(x, y)) + (\partial_z K(x, z))_{z=x} F(x, y),$$

$$(3.6.10d) \quad B_3 = -K(x, x) \partial_x^2 F(x, y) + \left. \frac{\partial K(x, z)}{\partial z} \right|_{x=z} \partial_x F(x, y) - (\partial_z^2 K(x, z))_{z=x} F(x, y).$$

Поэтому

$$(3.6.11a) \quad A_1 - B_1 = 0,$$

$$(3.6.11b) \quad A_2 - B_2 = -2F(x, y) \partial_x K(x, x),$$

$$(3.6.11c) \quad A_3 - B_3 = -3\partial_x F(x, y) \frac{d}{dx} K(x, x) - \\ - 3F(x, y) [(\partial_x^2 + \partial_x \partial_z) K(x, z)]_{z=x},$$

.

.

.

Теперь мы введем оператор  $L_1$  и потребуем, чтобы функция  $F$  удовлетворяла уравнению

$$(3.6.12) \quad L_1 F \equiv (\partial_x^2 - \partial_y^2) F(x, y) = 0.$$

Подействуем оператором  $L_1$  на (3.6.8); в результате получим

$$\begin{aligned} (\partial_x^2 - \partial_y^2) K &= (\partial_x^2 - \partial_y^2) \int_x^\infty K(x, z) F(z, y) dz = \\ &= \int_x^\infty F(z, y) \partial_x^2 K(x, z) dz + A_2 - \int_x^\infty K(x, z) F_{yy}(z, y) dz. \end{aligned}$$

Соотношения (3.6.12) и (3.6.11) дают

$$\begin{aligned} (3.6.13) \quad (\partial_x^2 - \partial_y^2) K(x, y) &= \int_x^\infty F(x, z) (\partial_x^2 - \partial_z^2) K(x, z) dz - \\ &\quad - 2F(x, y) \frac{d}{dx} K(x, x). \end{aligned}$$

Воспользовавшись уравнением  $F = (I - A_x)K$ , перепишем (3.6.13) в виде

$$(3.6.14) \quad (I - A_x) \left\{ (\partial_x^2 - \partial_y^2) K(x, y) + 2 \left[ \frac{d}{dx} K(x, x) \right] K(x, y) \right\} = 0.$$

Из обратности оператора  $(I - A_x)$  следует

$$(3.6.15a) \quad (\partial_x^2 - \partial_y^2) K(x, y) + u(x) K(x, y) = 0;$$

функция  $u(x)$  определена равенством

$$(3.6.15b) \quad u(x) = 2 \frac{d}{dx} K(x, x).$$

Таким образом, если функция  $F$  удовлетворяет уравнению (3.6.12), а  $K$  является решением уравнения (3.6.8), то функция  $K$  удовлетворяет нелинейному уравнению (3.6.15). Если в

(3.6.15) подставить  $K(x, y) = \psi(x, k)e^{iky}$ , то получим

$$(3.6.15c) \quad \Psi_{xx} + (k^2 + u)\Psi = 0,$$

т. е. уравнение Шрёдингера.

Рассмотрим теперь второй интегральный оператор, действующий на  $F$ , и потребуем, чтобы функция  $F$  удовлетворяла уравнению

$$(3.6.16) \quad L_2 F = (\partial_t + (\partial_x + \partial_y)^3) F = 0.$$

Подействовав оператором  $L_2$  на (3.6.8), получим

$$(3.6.17) \quad (\partial_t + (\partial_x + \partial_y)^3) K(x, y) = (\partial_t + (\partial_x + \partial_y)^3) \int_x^\infty K(x, z) F(z, y) dz.$$

В правой части уравнения (3.6.17) имеется член

$$(3.6.18a) \quad I = \int_x^\infty K(x, z) F_t(z, y) dz + (\partial_x + \partial_y)^3 \int_x^\infty K(x, z) F(z, y) dz =$$

$$= - \int_x^\infty K(x, z) (\partial_z + \partial_y)^3 F(z, y) dz + (\partial_x + \partial_y)^3 \int_x^\infty K(x, z) F(z, y) dz,$$

(3.6.18b)

который мы представим в виде

$$(3.6.18c) \quad I = I_1 + I_2 + I_3.$$

Первый вклад  $I_1$  имеет вид (аргументы подразумеваются)

$$(3.6.18d) \quad I_1 = \partial_x^3 \int_x^\infty K F dz - \int_x^\infty K \partial_z^3 F dz;$$

используя (3.6.10), получим

$$(3.6.18e) \quad I_1 = \int_x^\infty (\partial_x^3 K + \partial_z^3 K) F dz + A_3 - B_3.$$

Для  $I_2$  имеем

$$(3.6.18f) \quad I_2 = 3\partial_x^2 \partial_y \int_x^\infty K F dz - 3 \int_x^\infty K \partial_z^2 \partial_y F dz =$$

$$= 3 \int_x^\infty (\partial_x^2 K - \partial_z^2 K) F_y dz + 3\partial_y (A_2 - B_2) =$$

$$(3.6.18g) \quad = - 3u\partial_y (K(x, y) - F(x, y)) + 3\partial_y (A_2 - B_2);$$

при этом мы воспользовались (3.6.15), (3.6.8) в виде  $\int_x^\infty KF dz = K - F$ . И наконец, для  $I_3$  имеем

$$\begin{aligned}
 (3.6.18\text{h}) \quad I_3 &= 3\partial_x\partial_y^2 \int_x^\infty KF dz - 3 \int_x^\infty K\partial_z\partial_y^2 F dz = \\
 &= 3 \int_x^\infty (\partial_x K) F_{yy} dz + 3 \int_x^\infty K_z F_{yy} dz = \\
 &= 3 \int_x^8 (\partial_x K + \partial_z K) F_{yy} dz = \\
 &= 3 \int_x^\infty (\partial_x K + \partial_z K) F_{zz} dz = \\
 &= [3(K_{xz} + K_{zz}) F - 3(K_x + K_z) F_x]_{z=x} + \\
 (3.6.18\text{i}) \quad &+ 3 \int_x^\infty ((\partial_z^2\partial_x + \partial_z^3) K) F dz.
 \end{aligned}$$

В итоге, воспользовавшись соотношением  $K_{zz} = K_{xx} + uK$  в последнем члене (3.6.18i), получим

$$\begin{aligned}
 I &= I_1 + I_2 + I_3 = \int_x^\infty ((\partial_x + \partial_z)^3 K) F dz + A_3 - B_3 - 3u\partial_y(K - F) + \\
 &+ 3\partial_y(A_2 - B_2) + [3(K_{xz} + K_{zz}) F - 3(K_x + K_z) F_x]_{z=x} + \\
 &+ 3u \int_x^\infty K_z F dz.
 \end{aligned}$$

Теперь уравнение (3.6.17) принимает вид

$$(\partial_t + (\partial_x + \partial_y)^3 + 3u\partial_y) K = \int_x^\infty (K_t + (\partial_x + \partial_z)^3 K + 3uK_z) F dz + T,
 \quad (3.6.19\text{a})$$

где

$$\begin{aligned}
 (3.6.19\text{b}) \quad T &= (A_3 - B_3) + 3\partial_y(A_2 - B_2) + 3uF_y + \\
 &+ 3[(K_{xz} + K_{zz}) F - (K_x + K_z) F_x]_{z=x}.
 \end{aligned}$$

Подставив значение  $A_3 = B_3$ ,  $A_2 = B_2$  и воспользовавшись (3.6.15), (3.6.8), получим

$$\begin{aligned} T &= 3u(x)K(x, x)F(x, y) - 3u(x)F_x(x, y) = \\ &= -3u(x)K_x(x, y) + 3u(x) \int_x^{\infty} K_x(x, z)F(z, y)dz. \end{aligned}$$

Это позволяет привести уравнение (3.6.19a) к виду

$$(3.6.20a) \quad (I - A_x)\{(\partial_t + (\partial_x + \partial_y)^3 + 3u(\partial_x + \partial_y))K(x, y)\} = 0.$$

Таким образом,

$$(3.6.20b) \quad K_t + (\partial_x + \partial_y)^2 K + 3u(\partial_x + \partial_y)K = 0.$$

На характеристике  $y = x$  уравнение (3.6.20b) (предварительно продифференцировав) можно переписать в терминах  $u = 2(d/dx)K(x, x)$ ; в результате получим уравнение КдФ:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0.$$

Таким образом, любая функция  $F$ , удовлетворяющая уравнениям (3.6.12), (3.6.16) и быстро убывающая при  $x \rightarrow +\infty$ , порождает решение уравнения КдФ. Задача сводится к решению линейного интегрального уравнения (3.6.8); при этом нет необходимости связывать функцию  $F$  с какой-либо задачей рассеяния.

В качестве второго примера мы рассмотрим линейное интегральное уравнение

$$(3.6.21) \quad K(x, y) = F(x, y) + \frac{\sigma}{4} \int_x^{\infty} \int_x^{\infty} K(x, z)F(z, u)F(u, y)dzdu$$

( $\sigma = \pm 1$ ; множитель  $1/4$  выбран для удобства). Рассмотрим оператор  $L_1$ :

$$(3.6.22a) \quad L_1 F = (\partial_x - \partial_y)F = 0;$$

поэтому

$$(3.6.22b) \quad F(x, y) = F\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

(множитель  $1/2$  снова выбран из соображений удобства). Воспользовавшись (3.6.22b) и сдвинув нижний предел интегрирования в нуль, перепишем (3.6.21) в виде

$$\begin{aligned} K(x, y) &= F\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{\sigma}{4} \int_0^{\infty} \int_c^{\infty} K(x, x+\xi)F\left(\frac{2x+\xi+\eta}{2}\right) \times \\ &\quad \times F\left(\frac{x+\eta+y}{2}\right) d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (3.6.23a)$$

или

$$(3.6.23b) \quad [(I - \sigma A_x) K](x, y) = F\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

где оператор  $A_x$  определяется следующим образом:

$$(3.6.24) \quad A_x f(y) = \frac{1}{4} \int_0^\infty \int_0^\infty f(\xi) F\left(\frac{2x+\xi+y}{2}\right) F\left(\frac{x+\xi+y}{2}\right) d\xi dy.$$

Удобно определить

$$(4.6.25) \quad K_2(x, z) = \int_0^\infty K(x, x+\xi) F\left(\frac{x+\xi+z}{2}\right) d\xi.$$

При этом легко показать, что

$$(3.6.26) \quad (I - \sigma A_x) K_2(x, z) = \int_0^\infty F\left(\frac{2x+\xi}{2}\right) F\left(\frac{x+\xi+z}{2}\right) d\xi,$$

и интегральное уравнение (3.6.23a) можно переписать в виде

$$(3.6.27) \quad K(x, y) = F\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{\sigma}{4} \int_0^\infty K_2(x, x+\eta) F\left(\frac{x+\eta+y}{2}\right) d\eta.$$

Подействовав на него оператором  $L_1 = (\partial_x - \partial_y)$ , получим

$$(3.6.28) \quad (\partial_x - \partial_y) K(x, y) = \frac{\sigma}{4} \int_0^\infty [(\partial_1 + \partial_2) K_2(x, x+\eta)] F\left(\frac{x+\eta+y}{2}\right) d\eta,$$

где  $\partial_1$  и  $\partial_2$  являются производными по первому и второму аргументам функции  $K$ . Подействовав оператором  $(\partial_x + \partial_z)$  на (3.6.25), получим

$$(3.6.29) \quad \begin{aligned} & (\partial_x + \partial_z) K_2(x, z) = \int_0^\infty \left\{ (\partial_1 + \partial_2) K(x, x+\xi) F\left(\frac{x+\xi+z}{2}\right) + \right. \\ & \quad \left. + K(x, x+\xi) F_z\left(\frac{x+\xi+z}{2}\right) \right\} d\xi = \\ & = \int_0^\infty [(\partial_1 - \partial_2) K(x, x+\xi)] F\left(\frac{x+\xi+z}{2}\right) d\xi - 2K(x, x) F\left(\frac{x+z}{2}\right). \end{aligned}$$

Подставив (3.6.28) в (3.6.29), мы видим, что

$$\begin{aligned} (I - \sigma A_x)(\partial_x + \partial_z) K_2(x, z) &= -2K(x, x) F\left(\frac{x+z}{2}\right) = \\ &= -2K(x, x)(I - \sigma A_x) K(x, z). \end{aligned}$$

Аналогично подстановка (3.6.29) в (3.6.28) ведет к

$$(I - \sigma A_x)(\partial_x - \partial_y)K(x, y) = -\frac{\sigma}{2}K(x, x) \int_0^\infty F\left(\frac{2x + \eta}{2}\right) \times \\ \times F\left(\frac{x + \eta + y}{2}\right) d\eta = -\frac{\sigma}{2}K(x, x)(I - \sigma A_x)K_2(x, y).$$

Отметим, что оператор  $A_x$  коммутирует с оператором умножения на функции, зависящие только от  $x$ . Поэтому если оператор  $(I - \sigma A_x)$  обратим, то мы доказали, что

$$(3.6.30) \quad (\partial_x + \partial_y)K_2(x, y) = -2K(x, x)K(x, y), \\ (\partial_x - \partial_y)K(x, y) = -\frac{\sigma}{2}K(x, x)K_2(x, y).$$

Этих результатов следовало ожидать из метода обратной задачи (ср. с (1.3.19)). Однако при их выводе мы воспользовались только обратимостью оператора  $(I - \sigma A_x)$ , а это требование значительно слабее, чем условия, накладываемые при обычном аналитическом подходе. Положив  $K(x, y) = v_1(x)e^{ixy}$ ,  $K_2(x, y) = v_2(x)e^{-ixy}$ , мы получим для  $v_1$ ,  $v_2$  систему уравнений (1.2.7а).

Теперь подействуем на (3.6.23а) оператором

$$(3.6.31) \quad (\partial_x + \partial_y)K(x, y) = F' + \\ + \frac{\sigma}{4} \int_0^\infty \int_0^\infty K(x, x + \zeta)(\partial_x + \partial_y)[F\left(\frac{2x + \zeta + \eta}{2}\right)F\left(\frac{x + \eta + y}{2}\right)]d\zeta d\eta + \\ + \frac{\sigma}{4} \int_0^\infty \int_0^\infty [(\partial_1 + \partial_2)K(x, x + \zeta)]F\left(\frac{2x + \zeta + \eta}{2}\right)F\left(\frac{x + \eta + y}{2}\right)d\zeta d\eta.$$

Но

$$(3.6.32) \quad (\partial_x + \partial_y)F\left(\frac{2x + \zeta + \eta}{2}\right)F\left(\frac{x + \eta + y}{2}\right) = \\ = F'\left(\frac{2x + \zeta + \eta}{2}\right)F\left(\frac{x + \eta + y}{2}\right) + F\left(\frac{2x + \zeta + \eta}{2}\right)F'\left(\frac{x + \eta + y}{2}\right) = \\ = 2\partial_\eta \left\{ F\left(\frac{2x + \zeta + \eta}{2}\right)F\left(\frac{x + \eta + y}{2}\right) \right\}.$$

Интегрирование по  $\eta$  в (3.6.32) ведет к

$$\begin{aligned} & (I - \sigma A_x)(\partial_x + \partial_y) K(x, y) = \\ & = F' \left( \frac{x+y}{2} \right) - \left( \frac{\sigma}{2} \int_0^\infty K(x, x+\zeta) F(2x+\zeta) d\zeta \right) F(x+y) = \\ & = F' \left( \frac{x+y}{2} \right) - \frac{\sigma}{2} K_2(x, x) (I - \sigma A_x) K(x, y), \end{aligned}$$

т. е.

$$F' \left( \frac{x+y}{2} \right) = (I - \sigma A_x) \left\{ (\partial_x + \partial_y) K(x, y) + \frac{\sigma}{2} K_2(x, x) K(x, y) \right\}. \quad (3.6.33)$$

Это «словарик», нужный для нашей задачи.

На последнем этапе мы воспользуемся тем фактом, что функция  $F$  удовлетворяет еще одному линейному уравнению:

$$(3.6.34) \quad L_2 F = (\partial_t + (\partial_x + \partial_y)^3) F = 0.$$

Подействовав оператором  $L_2$  на уравнение (3.6.23а), получим

$$\begin{aligned} & \{ \partial_t + (\partial_x + \partial_y)^3 \} K(x, y) = \\ & = 0 + \frac{\sigma}{4} \{ \partial_t + (\partial_x + \partial_y)^3 \} \int_0^\infty K(x, x+\zeta) F \left( \frac{2x+\zeta+\eta}{2} \right) \times \\ & \quad \times F \left( \frac{x+\eta+y}{2} \right) d\eta d\zeta. \end{aligned} \quad (3.6.35)$$

Когда мы будем производить дифференцирование под знаком интеграла в правой части уравнения (3.6.35), количество членов будет увеличиваться, но некоторые члены взаимно уничтожаются. Например, воспользовавшись (3.6.34), получим

$$\begin{aligned} & \{ \partial_t + (\partial_x + \partial_y)^3 \} F \left( \frac{2x+\zeta+\eta}{2} \right) F \left( \frac{x+\eta+y}{2} \right) = \\ & = 6\partial_\eta [F' \left( \frac{2x+\zeta+\eta}{2} \right) F' \left( \frac{x+\eta+y}{2} \right)]. \end{aligned}$$

Уравнение (3.6.35) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & (I - \sigma A_x) \{ \partial_t + (\partial_x + \partial_y)^3 \} K(x, y) = \\ & = -\frac{3\sigma}{2} \left[ \partial_x \int_0^\infty d\zeta \left\{ \frac{\partial_1 + \partial_2}{2} K(x, x+\zeta) \right\} F \left( \frac{2x+\zeta}{2} \right) \right] F \left( \frac{x+y}{2} \right) - \\ & \quad - \frac{3\sigma}{2} [\partial_x K_2(x, x)] F' \left( \frac{x+y}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.6.36)$$

Но из (3.6.30) следует, что

$$\partial_x K_2(x, x) = -2K(x, x)$$

и

$$\begin{aligned} \partial_x \int_0^\infty d\xi F\left(\frac{2x+\xi}{2}\right) \frac{\partial_1 + \partial_2}{2} K(x, x+\xi) &= \\ &= \partial_x [(\partial_x - \partial_y) K_2(x, y)]_{y=x} = \\ &= [(\partial_x + \partial_y)(\partial_x - \partial_y) K_2(x, y)]_{y=x} = \\ &= (\partial_x - \partial_y) \{-2K(x, x) K(x, y)\}_{y=x} = \\ &= -2 [\partial_x K(x, x)] K(x, x) + \sigma K^2(x, x) K_2(x, x). \end{aligned}$$

При этом мы воспользовались соотношением

$$(\partial_x - \partial_y) K_2(x, y) = \int_0^\infty (\partial_1 + \partial_2) K(x, x+\xi) F\left(\frac{x+\xi+y}{2}\right) d\xi.$$

Теперь из вспомогательных соотношений (3.6.23), (3.6.33), обратимости оператора  $(I - \sigma A_x)$  и равенства (3.6.36) следует, что (при  $y \geq x$ )

$$\begin{aligned} \{ \partial_t + (\partial_x + \partial_y)^3 \} K(x, y) &= 3\sigma K(x, x) K(x, y) \partial_x K(x, x) + \\ (3.6.37) \quad &+ 3\sigma K^2(x, x) (\partial_x + \partial_y) K(x, y). \end{aligned}$$

Если определить

$$(3.6.38) \quad q(x, t) = K(x, x; t)$$

и взять (3.6.37) при  $y = x$ , то получим

$$(3.6.39) \quad \partial_t q + \partial_x^3 q = 6\sigma q^2 q_x,$$

т. е.  $q$  удовлетворяет модифицированному уравнению Кортевега — де Фриза.

Таким образом, каждое решение уравнений  $L_i F = 0$ ,  $i = 1, 2$ , убывающее достаточно быстро при  $x \rightarrow \infty$ , определяет решение уравнения (3.6.39) (при этом на промежуточном этапе следует решить линейное интегральное уравнение (3.6.21)). Никаких глобальных свойств (на всей оси  $-\infty < x < \infty$ ) не требуется. Интересным частным случаем является построение автомодельных  $F$  и  $K$ :

$$(3.6.40) \quad K(x, y; t) = (3t)^{-1/3} \hat{K}(\xi, \eta), \quad F\left(\frac{x+y}{2}; t\right) = (3t)^{-1/3} \hat{F}\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right),$$

где

$$\xi = \frac{x}{(3t)^{1/3}}, \quad \eta = \frac{y}{(3t)^{1/3}}.$$

Подставив это представление в (3.6.23), убедимся, что  $\hat{K}$  удовлетворяет уравнению такого же вида:

$$(3.6.41) \quad \hat{K}(\xi, \eta) = \hat{F}\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right) + \frac{\sigma}{4} \int_{\xi}^{\infty} \hat{K}(\xi, \zeta) \hat{F}\left(\frac{\zeta + \psi}{2}\right) \times \\ \times \hat{F}\left(\frac{\psi + \eta}{2}\right) d\zeta d\psi, \quad \eta \geq \xi.$$

Подстановка (3.6.40) в (3.6.34) дает уравнение

$$\hat{F}'''(\xi) - [\hat{F}(\xi) + \xi \hat{F}'(\xi)] = 0,$$

которое можно один раз проинтегрировать:

$$(3.6.42) \quad \hat{F}''(\xi) - \xi \hat{F}(\xi) = C_1.$$

Если  $C_1 = 0$ , то решение, убывающее при  $\xi \rightarrow \infty$ , пропорционально функции Эйри:

$$(3.6.43) \quad \hat{F}\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right) = r \operatorname{Ai}\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right).$$

При этом функция  $Q(\xi) = \hat{K}(\xi, \xi)$  должна быть автомодельным решением уравнения (3.6.38), т. е.

$$Q''' - [Q + \xi Q'] = 6\sigma Q^2 Q'.$$

Это уравнение также можно один раз проинтегрировать:

$$(3.6.44) \quad Q'' = \xi Q + 2\sigma Q^3 + C_2.$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение (3.6.44) представляет собой уравнение Пенлеве ( $P_{II}$ ).

Мы показали, что каждому решению линейного интегрального уравнения (3.6.41) с ядром  $\hat{F}$ , удовлетворяющим уравнению (3.6.42), отвечает решение уравнения (3.6.44). В частности, при  $C_1 = 0$  из (3.6.41) следует, что функция  $Q(\xi)$  экспоненциально убывает при  $\xi \rightarrow \infty$ ; таким образом,  $C_2$  в (3.6.44) также равно нулю, и

$$(3.6.45) \quad Q'' = \xi Q + 2\sigma Q^3.$$

Однопараметрическое семейство решений этого уравнения можно построить, решив линейное интегральное уравнение

$$(3.6.46) \quad [I - \sigma r^2 \tilde{A}_{\xi}] \hat{K}(\xi, \eta; r) = r \operatorname{Ai}\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right),$$

где

$$(3.6.47) \quad \tilde{A}_{\xi} f(\eta) = \frac{1}{4} \int_{\xi}^{\infty} \int_{\xi}^{\infty} f(\zeta) \operatorname{Ai}\left(\frac{\zeta + \psi}{2}\right) \operatorname{Ai}\left(\frac{\psi + \eta}{2}\right) d\zeta d\psi;$$

при этом  $Q(\xi, r) = R(\xi, \xi, r)$ . Эти результаты впервые были получены Абловицем и Сигуром (1977) [27]. В разд. 3.7 мы более подробно обсудим свойства уравнения  $P_{11}$ .

Перейдем теперь к обсуждению предшествующей конструкции Захарова — Шабата [546], ограничившись частным примером уравнения Кадомцева — Петвиашвили. Уравнение (3.6.8) удобно переписать в виде

$$(3.6.48) \quad K(x, z; y, t) + F(x, z; y, t) + \int_x^\infty K(x, s; y, t) F(s, z; y, t) ds = 0.$$

Вначале мы перечислим результаты для уравнения Кадомцева — Петвиашвили (К—П), а затем обсудим конструкцию Захарова — Шабата (несколько отличающуюся от вышеописанной).

Если мы потребуем, чтобы функция  $F$  удовлетворяла двум линейным уравнениям

$$(3.6.49a) \quad L_1 F = \beta F_y + F_{xx} - F_{zz} = 0,$$

$$(3.6.49b) \quad L_2 F = \alpha F_t + F_{xxx} + F_{zzz} = 0,$$

и будем следовать уже описанному рецепту или рецепту, который будет обсуждаться чуть ниже, мы обнаружим, что  $u = 2(d/dx)K(x, x)$  удовлетворяет уравнению К—П (см. также разд. 2.1, 3.3, 3.4)

$$(3.6.50a) \quad \partial_x \left( \alpha u_t + \frac{1}{4} (u_{xxxx} + 6uu_x) \right) = -\frac{3}{4} \beta^2 u_{yy},$$

или при  $\alpha = 1/4$

$$(3.6.50b) \quad \partial_x (u_t + 6uu_x + u_{xxx}) = -3\beta^2 u_{yy}.$$

Теперь мы выведем уравнение (3.6.50), используя операторный формализм Захарова — Шабата. Все операторы обозначаются буквами, снабженными крышкой (т. е.  $\hat{K}$  — оператор,  $K$  — функция, возможно матричная). В операторных обозначениях линейное интегральное уравнение записывается в факторизованном виде

$$(3.6.51) \quad (1 + \hat{K}_+)(1 + \hat{F}) = (1 + \hat{K}_-),$$

где  $\hat{K}_\pm$ ,  $\hat{F}$  — матричные ( $N \times N$ ) операторы, действующие на (векторнозначные) функции  $\psi = \{\psi_1, \dots, \psi_N\}^T$  и

$$(3.6.52) \quad \hat{F}\psi = \int_{-\infty}^{\infty} F(x, z) \psi(z) dz$$

$(F - N \times N$ -матричная функция). Здесь  $K_{\pm}$  являются вольтерровскими операторами,  $K_+(x, z) = 0$  при  $z < x$ ,  $K_-(x, z) = 0$  при  $z > x$ . Предполагается, что операторы  $(1 + K_{\pm})$  обратимы. Действуя соотношением (3.6.51) на  $\psi$ , получим

$$(3.6.53a) \quad K_+(x, z) + F(x, z) + \int_x^{\infty} K_+(x, s) F(s, z) ds,$$

$$(3.6.53b) \quad K_-(x, z) = F(x, s) + \int_{-\infty}^{\infty} K_-(x, s) F(s, z) ds.$$

Отметим, что уравнение (3.6.53a) совпадает с (3.6.48) (зависимость от вспомогательных переменных  $y, t$  подразумевается).

Пусть далее определены некоторые «невозмущенные» операторы  $\hat{M}_{0,i}$ ,  $i = 1, 2$ , удовлетворяющие соотношению

$$(3.6.54) \quad [\hat{M}_{0,i}, \hat{F}] = \hat{M}_{0,i}\hat{F} - \hat{F}\hat{M}_{0,i} = 0.$$

Так, например, если  $\hat{M}_0 = \partial_x^2$ , то (3.6.54) означает, что

$$\partial_x^2 \int_{-\infty}^{\infty} F(x, z) \psi(z) dz - \int_{-\infty}^{\infty} F(x, z) \partial_z^2 \psi(z) dz = 0,$$

что дает уравнение  $(\partial_x^2 - \partial_z^2) F = 0$ . Эти «невозмущенные» операторы порождают «возмущенные» операторы  $\hat{M}_i$ ,  $i = 1, 2$ , по следующему правилу:

$$(3.6.55) \quad \hat{M}_i(1 + \hat{K}_+) - (1 + \hat{K}_+)\hat{M}_{0,i} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Оператор  $\hat{M}_0$  имеет вид

$$\hat{M}_0 = \alpha \partial_t + \beta \partial_y + \hat{L}_0, \quad \hat{L}_0 = \sum l_n \partial_x^n$$

( $l_n$  — постоянные матрицы). Уравнение (3.6.55) приводит к оператору

$$\hat{M} = \alpha \partial_t + \beta \partial_y + \hat{L}, \quad \hat{L} = \sum_n \left\{ l_n \partial_x^n + \sum_{k=1}^n V_k(x) \partial_x^{n-k} \right\},$$

коэффициенты  $V_k(x)$  которого определяются рекуррентно, и уравнению на  $K_+$  следующего вида:

$$(3.6.56a) \quad \alpha \partial_t K_+ + \beta \partial_y K_+ + \hat{L} K_+ + \sum (-1)^{n-1} \partial_z^n K_+ l_n = 0$$

(это аналог уравнения (3.6.7)). Например, если  $\alpha = \beta = 0$ ,  $\hat{L}_0 = \partial_x^2$  (скалярный оператор), то  $V_1 = 0$ ,  $V_2 = 2(d/dx)K(x, x) = u(x)$ , т. е.  $\hat{L} = \partial_x^2 + u$ , и  $K_+$  удовлетворяет уравнению  $(\partial_x^2 - \partial_z^2 + u) K_+ = 0$ .

Теперь из условия (3.6.54) и интегрального уравнения (3.6.51) следует

$$(3.6.57) \quad \hat{M}(1 + \hat{K}_-) - (1 + \hat{K}_-) \hat{M}_0 = \hat{M}(1 + \hat{K}_+)(1 + \hat{F}) - \\ - (1 + \hat{K}_+)(1 + \hat{F}) \hat{M}_0 = (\hat{M}(1 + \hat{K}_+) - (1 + \hat{K}_+) \hat{M}_0)(1 + \hat{F}).$$

При  $z > x$  левая часть этого равенства обращается в нуль, поэтому должно выполняться соотношение (3.6.55). Предположим, что

$$\hat{M}_{0,1} = \alpha \partial_t + \hat{L}_{0,1},$$

$$\hat{M}_{0,2} = \beta \partial_y + \hat{L}_{0,2},$$

причем  $[\hat{M}_{0,i}, \hat{F}] = 0$ ,  $i = 1, 2$ . Из (3.6.57) следует, что

$$M_i(1 + \hat{K}_+) = (1 + \hat{K}_+) \hat{M}_{0,i}, \quad i = 1, 2.$$

Умножим первое уравнение ( $i = 1$ ) слева на  $\hat{M}_2$  и вычтем из него второе уравнение ( $i = 2$ ), умноженное слева на  $\hat{M}_1$ . В результате получим

$$(3.6.58a) \quad [\hat{M}_1, \hat{M}_2] = 0,$$

или

$$(3.6.58b) \quad \alpha \partial_t \hat{L}_2 - \beta \partial_y \hat{L}_1 + [\hat{L}_1, \hat{L}_2] = 0,$$

или

$$(3.6.58c) \quad \hat{L} = \beta \partial_y + \hat{L}_2, \quad \frac{\hat{L}^{(1)}}{\alpha} = A, \quad \hat{L}_t = [\hat{L}, \hat{A}].$$

Соотношение (3.6.58) представляет собой нелинейное эволюционное уравнение, интегрируемое с помощью линейного интегрального уравнения. В (3.6.58b) видна зависимость от дополнительной переменной  $y$ , а (3.6.58c) является представлением Лакса для этого эволюционного уравнения.

В случае уравнения К—П пара линейных операторов имеет вид

$$(3.6.59a) \quad \hat{M}_{0,1} = \alpha \partial_t + \partial_x^3,$$

$$(3.6.59b) \quad \hat{M}_{0,2} = \beta \partial_y + \partial_x^3.$$

Из (3.6.54) следует, что ядро интегрального оператора подчиняется уравнениям

$$(3.6.60a) \quad \{\alpha \partial_t + (\partial_x^3 + \partial_z^3)\} F = 0,$$

$$(3.6.60b) \quad \{\beta \partial_y + (\partial_x^2 - \partial_z^2)\} F = 0.$$

«Возмущенные» операторы при этом имеют вид

$$(3.6.61a) \quad \hat{M}_1 = a\partial_t + \hat{L}_1,$$

$$(3.6.61b) \quad M_2 = \beta\partial_y + \hat{L}_2,$$

где

$$(3.6.61c) \quad \hat{L}_1 = \partial_x^3 + \frac{3}{4} (u\partial_x + \partial_x u) + w,$$

$$(3.6.61d) \quad \hat{L}_2 = \partial_x^2 + u$$

(отметим, что  $\partial_x u \equiv u\partial_x + u_x$ ) и  $u = 2(d/dx)K(x, x)$ ,

$$w \equiv \frac{3}{2} \frac{d}{dx} ((\partial_x - \partial_z) K(x, z)|_{z=x} + (K(x, x))^2).$$

Можно проверить, что

$$(3.6.62) \quad [\hat{L}_2, \hat{L}_1] = \partial_x w + w\partial_x - \frac{1}{4} (u_{xxx} + 6uu_x).$$

Поэтому операторное равенство (3.6.58b) приводит к (оператором следует действовать на функцию  $\psi$  и приравнять нулю коэффициенты при  $\psi$  и  $\psi_x$ )

$$(3.6.63) \quad au_t + \frac{1}{4} (u_{xxx} + 6uu_x) = \beta w_y, \quad w_x = -\frac{3}{4} \beta u_y.$$

Это уравнение сводится к уравнению К—П (3.6.50). Если положить  $\alpha = 1/4$ , то  $\hat{L}$ -,  $\hat{A}$ -операторы в (3.6.58c) принимают вид

$$(3.6.64a) \quad \hat{L} = \partial_x^2 + u + \beta\partial_y,$$

$$(3.6.64b) \quad \hat{A} = 4\partial_x^3 + 3(u\partial_x + \partial_x u) - 3\beta \int_{-\infty}^x u_y dx'.$$

Мы предлагаем читателю сравнить этот метод с другими подходами, обсуждавшимися в разд. 2.1 (см. также [141], [8]).

Описанный метод является чрезвычайно мощным, он одновременно дает и решения, и  $L$ -,  $A$ -пары. Пара операторов (3.6.64) лежит в основании работы Захарова, Манакова [537], посвященной развитию метода обратной задачи рассеяния для уравнения К—П (см. также [528]).

Следует отметить, что не зависящие от времени решения уравнения (3.6.63) подчиняются уравнению Буссинеска

$$(3.6.65) \quad u_{xxxx} + 6(uu_x)_x + 3\beta^2 u_{yy} = 0.$$

С другой стороны, если отсутствует зависимость от  $y$ , то мы получаем обычное уравнение КdФ, продифференцированное по  $x$ . Частные решения можно строить с помощью линейного инте-

тального уравнения. Предположим, что

$$(3.6.66) \quad F = \sum_n M_n(t, y) e^{-\kappa_n x - \eta_n z};$$

тогда из (3.6.60) следует, что

$$(3.6.67) \quad M_n(t, y) = M_n(0) \exp \{(\eta_n^2 - \kappa_n^2)y + (\kappa_n^3 + \eta_n^3)t\}.$$

Подставив  $K(x, z) = \sum_n K_n(x) e^{-\eta_n z}$  в интегральное уравнение (3.6.48), получим систему линейных алгебраических уравнений

$$(3.6.68) \quad K_n(x) + M_n e^{-\kappa_n x} + M_n \sum_m K_m(x) \frac{\exp(-(\kappa_n + \eta_m)x)}{(\kappa_n + \eta_m)} = 0,$$

из которой следует, что потенциал  $u(x) = +2(d/dx)K(x, x)$  можно представить в виде

$$(3.6.69) \quad u = 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \Delta, \\ \Delta = \det \left( M_n \delta_{nm} + M_n \frac{\exp(-(\kappa_n + \eta_m)x)}{\kappa_n + \eta_m} \right).$$

Эта формула совпадает с результатом разд. 3.3, полученным Сатсумой [445]. Она описывает взаимодействующие плоские солитоны, расположенные под углом к оси  $x$  (в ней содержится также резонансный случай, рассмотренный Майлзом [375, 376] (см. также [397])). При  $\alpha = 1/4$ ,  $\beta^2 = -1$  в работе Манакова и др. [350] было показано, что в пределе формула (3.6.69) дает лампы — двумерные солитоны, убывающие во всех направлениях как  $1/R^2$  ( $R^2 = x^2 + y^2$ ) при  $R \rightarrow \infty$  (см. также разд. 3.4):

$$(3.6.70a) \quad u = 2 \partial_x^2 \ln \det B,$$

где  $2N \times 2N$ -матрица  $B$  имеет вид

$$(3.6.70b) \quad B = \delta_{nm} (x - i v_n y - \xi_n - 3 v_n^2 t) + (1 - \delta_{nm}) \left( \frac{2}{v_n - v_m} \right).$$

Асимптотически это решение представляет собой набор невзаимодействующих лампов, двигающихся со скоростями  $V_x = = 3|v_n|^2$ ,  $V_y = -6 \operatorname{Im} v_n$ . В результате взаимодействия никакого сдвига фаз не происходит.

Захаров и Шабат в работе [546] обсуждают также и другие решения. Кроме того, они показали, каким образом эти методы можно применить для решения следующей задачи о трехвольновом взаимодействии в трехмерном пространстве:

$$(3.6.71) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + V_1 \cdot \nabla u_1 &= i \gamma_1 u_1^* u_2^*, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + V_2 \cdot \nabla u_2 &= i \gamma_2 u_2^* u_3^*, \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} + V_3 \cdot \nabla u_3 &= i \gamma_3 u_3^* u_1^*. \end{aligned}$$

Эти идеи были обобщены в работе Захарова [528] и затем Корния [120]. Решение этой системы уравнений в классе функций, убывающих достаточно быстро при  $|x|, |y| \rightarrow \infty$ , были построены Каупом [265] с помощью метода обратной задачи расщепления.

Наконец, отметим, что этот метод позволяет описывать конечные возмущения частных решений интегрируемых уравнений. Пусть  $u_0(x, t)$  — некоторое частное решение интегрируемого уравнения (например, КdФ); тогда его возмущение  $v(x, t)$  ( $u(x, t) = u_0(x, t) + v(x, t)$ ) можно описывать с помощью интегрального уравнения Гельфанд — Левитана — Марченко. Например, этим способом можно строить рационально-экспоненциальные решения; такой подход использовался в работах Шабата [460], Кузнецова и Михайлова [306], Абловица и Корния [6], Абловица и Эро [5].

**3.7. Трансценденты Пенлеве.** Среди решений уравнений в частных производных встречаются решения, зависящие только от какой-нибудь одной комбинации независимых переменных и, следовательно, удовлетворяющие некоторому обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ) (в этом разделе ОДУ будет обозначать как одно обыкновенное дифференциальное уравнение, так и систему таких уравнений). Например, уравнение КdФ

$$(3.7.1a) \quad u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

допускает как стационарные решения

$$u(x, t) = U(x - ct)$$

(при этом  $U(z)$  удовлетворяет ОДУ

$$(3.7.1b) \quad U'' + 3U^2 - cU = K),$$

так и автомодельное решение

$$u(x, t) = (3t)^{-2/3} f\left(\frac{x}{(3t)^{1/3}}\right),$$

где  $f(z)$  удовлетворяет уравнению

$$(3.7.1c) \quad f''' + 6ff' = zf' + 2f.$$

Каждое из этих ОДУ является точной редукцией уравнения в частных производных.

Методы, обсуждающиеся в этой главе и других разделах книги, успешны из-за чрезвычайно богатой внутренней структуры изучаемых уравнений. Обыкновенные дифференциальные уравнения, полученные точными редукциями из уравнений в частных производных, также наследуют эту богатую структуру, и некоторые из методов, развитых для уравнений в частных произ-

водных, можно с успехом применить для исследования соответствующих нелинейных ОДУ. Осознание этого факта позволило решить ряд проблем, остававшихся неразрешенными в теории ОДУ более века.

Все ОДУ, полученные в результате точной редукции, обладают одним важным и простым свойством — свойством Пенлеве (которое будет определено ниже). Это позволяет непосредственно проверить, является ли наперед заданное нелинейное уравнение в частных производных интегрируемым при помощи МОЗР. Мы увидим, что эта связь между ОДУ со свойством Пенлеве и уравнениями в частных производных, интегрируемыми с помощью МОЗР, является весьма полезной и позволяет получить ценную информацию как об ОДУ, так и об уравнениях в частных производных.

**3.7. а. Свойство Пенлеве.** Начнем с обзора некоторых фактов, касающихся ОДУ (см. [238, гл. 15]). Рассмотрим ОДУ  $n$ -го порядка

$$\frac{d^n w}{dz^n} + P_1(z) \frac{d^{n-1}w}{dz^{n-1}} + \dots + P_{n-1}(z) \frac{dw}{dz} + P_n(z) w = 0.$$

Если все  $n$  коэффициентов являются аналитическими функциями в некоторой окрестности точки  $z_0$  комплексной плоскости  $z$ , то  $z_0$  называется *регулярной* точкой ОДУ, и в ее окрестности имеется  $n$  линейно независимых аналитических решений этого уравнения. Особенности решений ОДУ могут находиться только в точках особенностей коэффициентов уравнения. Эти особенности называются *неподвижными*, так как их расположение не зависит от ( $n$ ) постоянных интегрирования. Неподвижность особенностей решения в комплексной плоскости является общим свойством линейных ОДУ.

Нелинейные ОДУ не обладают этим свойством. Простым примером нелинейного ОДУ является

$$(3.7.2a) \quad \frac{dw}{dz} + w^2 = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$(3.7.2b) \quad w(z; z_0) = \frac{1}{z - z_0}.$$

Здесь  $z_0$  — произвольная постоянная интегрирования, она же определяет расположение особенности. Особенности, расположение которых зависит от постоянных интегрирования, называются *подвижными*. Нелинейные ОДУ могут иметь как подвижные, так и неподвижные особые точки.

Сингулярность решения ОДУ, не являющуюся полюсом (произвольного порядка), называют *критической особой точкой*.

К ним относятся точки ветвления (алгебраические и логарифмические) и точки существенных особенностей. В конце XIX в. математиков интересовала проблема классификации ОДУ по типу сингулярностей, которыми могут обладать их решения. (Обзор большого количества работ, посвященных этому вопросу, см. в [238, гл. 12–14] или в [210].) В 1884 г. Фукс доказал, что среди всех уравнений первого порядка

$$\frac{dw}{dz} = F(w, z)$$

с функцией  $F$ , рациональной по  $w$  и локально аналитической по  $z$ , только обобщенное уравнение Риккатти

$$(3.7.3) \quad \frac{dw}{dz} = P_0(z) + P_1(z)w + P_2(z)w^2$$

не имеет подвижных критических точек.

С. В. Ковалевская, несомненно знакомая с этими результатами, сделала следующий важный шаг, и в 1888 г. ей была присуждена премия Бордэна за значительный вклад в теорию движения твердого тела с неподвижной точкой в поле тяжести. Основная ее идея состояла в том, чтобы выполнить не имеющие очевидного физического смысла вычисления, позволившие определить параметры задачи, при которых уравнение движения не имеет подвижных критических точек. Во всех этих случаях ей удалось явно проинтегрировать уравнения движения. В оставшихся случаях решение этих уравнений до сих пор не известно. (Обсуждение этих работ читатель может найти в книге [189].)

Вскоре после этого Пенлеве и его ученики обратились к изучению уравнений второго порядка вида

$$(3.7.4) \quad w'' = F(w', w, z),$$

где функция  $F$  является рациональной по  $w$ ,  $w'$  и локально аналитической по  $z$ . Они показали, что среди всех возможных уравнений этого вида имеется только 50 канонических уравнений, обладающих свойством отсутствия подвижных критических точек. Это свойство мы будем называть свойством Пенлеве, а уравнения, обладающие этим свойством, — уравнениями Р-типа. Все эти 50 уравнений можно привести либо к интегрируемым уравнениям, либо к одному из шести нелинейных неавтономных ОДУ. Вот эти шесть уравнений:

$$P_I \quad \frac{d^2w}{dz^2} = 6w^2 + z,$$

$$P_{II} \quad \frac{d^2w}{dz^2} = zw + 2w^2 + \alpha,$$

$$P_{III} \quad \frac{d^2w}{dz^2} = \frac{1}{w} \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 - \frac{1}{z} \frac{dw}{dz} + \frac{1}{z} (\alpha w^2 + \beta) + \gamma w^3 + \frac{\delta}{w}.$$

$$\begin{aligned}
 P_{IV} \quad \frac{d^2\omega}{dz^2} &= \frac{1}{2w} \left( \frac{d\omega}{dz} \right)^2 + \frac{3w^3}{2} + 4zw^2 + 2(z^2 - a) + \frac{\beta}{w}, \\
 P_V \quad \frac{d^2\omega}{dz^2} &= \left\{ \frac{1}{2w} + \frac{1}{w-1} \right\} \left( \frac{d\omega}{dz} \right)^2 - \frac{1}{z} \frac{d\omega}{dz} + \\
 &\quad + \frac{(w-1)^2}{z^2} \left( \alpha w + \frac{\beta}{w} \right) + \frac{\gamma m}{z} + \frac{\delta w(w+1)}{w-1}, \\
 P_{VI} \quad \frac{d^2\omega}{dz^2} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{w} + \frac{1}{w-1} + \frac{1}{w-z} \right\} \left( \frac{d\omega}{dz} \right)^2 - \\
 &\quad - \left\{ \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{w-z} \right\} \frac{d\omega}{dz} + \\
 &\quad + \frac{w(w-1)(w-z)}{z^2(z-1)^2} \left\{ \alpha + \frac{\beta z}{w^2} + \frac{\gamma(z-1)}{(w-1)^2} + \frac{\delta z(z-1)}{(w-z)^2} \right\}.
 \end{aligned}$$

Пенлеве и Гамбье показали, что эти уравнения нельзя свести к более простым ОДУ. Поэтому они определили новые специфукции — трансценденты Пенлеве.

Вопрос, какие из ОДУ обладают свойством Пенлеве, можно поставить для уравнений любого порядка, но исчерпывающие результаты получены только для уравнений первого и второго порядка. (Бюрэ [80] дал частичную классификацию уравнений третьего порядка.)

**3.7. б. Связь с МОЗР.** Как обыкновенные дифференциальные уравнения Р-типа связаны с интегрируемыми уравнениями в частных производных? Напомним (разд. 3.6), что нелинейное уравнение в частных производных считается решаемым методом обратной задачи, если  $K(x, x)$  (или  $(d/dx)K(x, x)$ ) является его решением, причем  $K(x, x)$  определяется из линейного интегрального уравнения типа Гельфанд — Левитана — Марченко

$$(3.7.5) \quad K(x, y) = F(x, y) + \int_x^\infty K(x, z) N(x; z, y) dz, \quad y \geqslant x,$$

где  $N$  известным образом связано с  $F$ . Здесь мы опустили зависимость  $K$  от остальных переменных (т. е.  $t$ , иногда  $\tilde{y}$  и т. д.) для того, чтобы подчеркнуть выделенную роль переменной  $x$  в (3.7.5). Абловиц, Рамани и Сигур [22] выдвинули следующую гипотезу:

**Гипотеза о свойстве Пенлеве.** *Нелинейное уравнение в частных производных можно решить методом обратной задачи расщепления только в том случае, когда любое нелинейное ОДУ, полученное из него в результате точной редукции, имеет Р-тип, возможно, после замены переменных.* (См. также [272] и упр. 13.)

Допустим на некоторое время справедливость этой гипотезы и опишем, как ею пользоваться.

(i) Пусть задано нелинейное уравнение в частных производных, тогда следует найти точную редукцию в ОДУ. Простейшие редукции возможны, если уравнение в частных производных допускает решения типа бегущей волны или автомодельные решения, но это не единственныe возможности. Часто число таких простых редукций очевидно из формы уравнения.

(ii) Воспользовавшись приведенным ниже анализом критических точек, следует определить, имеет ли ОДУ Р-тип. Если это ОДУ не является уравнением Р-типа, то в этом виде оно не может быть проинтегрировано с помощью МОЗР.

(iii) Иногда с помощью замены переменных удается преобразовать ОДУ, и оно становится Р-типа; довольно часто на эту замену переменных наталкивают вычисления, связанные с анализом критических точек. Если существует такая замена, то исходное уравнение является кандидатом для применения к нему МОЗР. Примером может служить уравнение sin-Гордон, для которого необходимо такое преобразование. Напомним (разд. 1.2), что МОЗР действительно позволяет решить систему уравнений (1.2.17), которая затем преобразуется к уравнению sin-Гордон (см. также упр. 6).

(iv) Если ОДУ имеет Р-тип, то можно поискать и проверить другие редукции. Но поскольку нет никакого систематического способа поиска всех точных редукций, то эти проверки лишь наводят на мысль, что к данному уравнению в частных производных применим МОЗР. Если одна или две нетривиальные редукции рассматриваемого уравнения в частных производных приводят к ОДУ Р-типа, то, вооружившись надеждой, можно попытаться поискать преобразование Бэклунда или соответствующую задачу рассеяния.

(v) Обратно, если известно, что к уравнению в частных производных применим МОЗР, то любая его точная редукция в естественных переменных соответствующего линейного интегрального уравнения приводит к ОДУ-типа.

Вот несколько примеров. Захаров [527] показал, что уравнение Буссинеска

$$(3.7.6) \quad u_{tt} = u_{xx} + \left(\frac{u^2}{2}\right)_{xx} + \frac{1}{4} u_{xxxx}$$

интегрируется с помощью МОЗР. Точную редукцию этого уравнения можно получить, ограничившись рассмотрением решений типа бегущей волны

$$u(x, t) = w(x - ct) = w(z);$$

при этом  $w(z)$  удовлетворяет уравнению

$$(3.7.7) \quad (1 - c^2) w'' + \left(\frac{w^2}{2}\right)'' + \frac{1}{4} w'''' = 0,$$

которое легко дважды проинтегрировать. В зависимости от выбора постоянных интегрирования после изменения масштабов получим две возможности:

$$(3.7.8) \quad w'' + 2w^2 + a = 0 \quad \text{или} \quad w'' + 2w^2 + z = 0.$$

Первый случай приводит к эллиптическим функциям, все сингулярности которых являются только полюсами. Вторая возможность совпадает с уравнением  $P_1$ . В обоих случаях ОДУ обладает свойством Пенлеве.

В качестве другого примера возьмем уравнение мКдФ

$$(3.7.9) \quad u_t - 6u^2u_x + u_{xxx} = 0,$$

к которому применим МОЗР. Точную редукцию можно получить, ограничившись автомодельными решениями вида

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{w(z)}{(3t)^{2/3}}, \quad z = \frac{x}{(3t)^{1/3}}, \\ \Rightarrow w''' - 6w^2w' - (zw)' &= 0. \end{aligned}$$

После однократного интегрирования получим уравнение Р-типа  $P_{II}$

$$w'' = 2w^3 + zw + a.$$

Уравнение sin-Гордон

$$(3.7.10) \quad u_{x,t} = \sin u$$

можно интегрировать (после преобразования) с помощью МОЗР. Оно имеет автомодельное решение

$$(3.7.11) \quad u(x, t) = f(z), \quad z = xt.$$

Если положить  $w(z) = \exp(if)$ , то

$$P_{III} \quad w'' = \frac{1}{\omega}(w')^2 - \frac{1}{z}(w') + \frac{1}{2z}(w^2 - 1),$$

и снова получается уравнение Р-типа.

Уравнение Шрёдингера с производной

$$(3.7.12) \quad iq_t = q_{xx} - 4iq^2(q^*)_x + 8|q|^4q$$

может быть проинтегрировано методом обратной задачи рассеяния (Кауп, Ньюэлл [266]). ОДУ, которому удовлетворяет автомодельное решение уравнения (3.7.12), приводится к  $P_{IV}$  (см. [23]). Другие примеры были построены в [243, 244], [440], [372]; см. также упражнения к этой главе. Во всех известных нам примерах уравнения в частных производных, интегрируемые с помощью МОЗР, редуцируются к ОДУ Р-типа. Уравнения, которые принято считать неинтегрируемыми с помощью МОЗР (например, на основании численных экспериментов, в

которых две уединенные волны взаимодействуют иначе, чем солитоны), редуцируются к ОДУ, не принадлежащим к Р-типу. Чтобы избежать недоразумений, мы еще раз подчеркнем, что вопрос состоит не в том, принадлежит или нет ОДУ к списку из шести уравнений Пенлеве; важно знать, имеет ли оно Р-тип (т. е. отсутствие подвижных критических точек).

Эти примеры показывают, что, по всей видимости, гипотеза срабатывает. Следуя работе [23], мы набросаем частичное доказательство этой гипотезы, показывающее, почему она должна работать. Рассмотрим линейное интегральное уравнение (в частном случае  $F(x, y) = F(x + y)$ )

$$(3.7.5a) \quad K(x, y) = F(x + y) + \int_x^{\infty} K(x, z) N(x; z, y) dz, \quad y \geq x.$$

Потребуем, чтобы  $F$  удовлетворяла линейному ОДУ, обращаясь в нуль при больших положительных значениях аргумента и  $N$  зависела от  $F$  по известному закону. (Примеры зависимости  $N$  от  $F$  были приведены в разд. 3.6.) Мы хотим показать, что любое решение линейного интегрального уравнения (3.7.5a) должно обладать свойством Пенлеве. Если при этом  $K$  также удовлетворяет некому ОДУ, то семейство решений этого ОДУ, полученных с помощью (3.7.5a), также обладает свойством Пенлеве. Таким образом, связь между ОДУ Р-типа и уравнениями, решаемыми с помощью МОЗР, непосредственно следует из линейного интегрального уравнения (3.7.5a).

Схема доказательства такова (подробности можно найти в [23]):

(i)  $F$  удовлетворяет линейному ОДУ и поэтому не имеет подвижных особенностей.

(ii) Если функция  $F$  убывает достаточно быстро при увеличении аргумента, то применима теория Фредгольма. Из (3.7.5a) следует, что

$$(3.7.13) \quad K(x, y) = F(x + y) + \int_x^{\infty} F(x + z) \frac{D_1(x; z, y)}{D_2(x)} dz,$$

где  $D_1$  и  $D_2$  — целые функции своих аргументов. Поэтому все особенности  $K$  возникают из неподвижных особенностей  $F$  или из подвижных нулей  $D_2$ . Но функция  $D_2$  является аналитической, поэтому эти подвижные сингулярности должны быть полюсами.

(iii) Таким образом, функция  $K$  — решение линейного интегрального уравнения — обладает свойством Пенлеве.

Это доказательство связывает свойство Пенлеве с линейным интегральным уравнением. Мак-Леод и Ольер [372] дали ана-

логичное доказательство. Но связь с МОЗР можно получить, отправляясь и от другой точки зрения. Флашка [157] и Флашка, Ньюэлл [163] воспользовались задачей рассеяния и уравнением эволюции волновой функции по времени. Результаты Флашки формулируются довольно просто.

(i) В разд. 1.2 обсуждалось, что условие совместности задачи рассеяния и уравнения эволюции

$$Lv = \lambda v, \quad V_t = Mv$$

приводят к системе нелинейных уравнений в частных производных, интегрируемой с помощью МОЗР, которую можно представить в лаксовом виде

$$(3.7.14) \quad [L, M] + L_t = 0.$$

(ii) Стационарные решения системы (3.7.14), в том числе  $N$ -солитонные решения и  $N$ -фазные квазипериодические удовлетворяют коммутационному соотношению вида

$$(3.7.15) \quad [L, B] = 0.$$

(iii) Автомодельные решения системы (3.7.14) удовлетворяют другому коммутационному соотношению

$$(3.7.16) \quad [L, B] = L.$$

Практическая ценность соотношения (3.7.15) состоит в том, что оно позволяет свести задачу к изучению некоторого алгебраического уравнения и найти его явное решение, воспользовавшись теорией функций на алгебраических кривых. Пока не известно, как с такой же эффективностью воспользоваться алгебраической природой представления (3.7.16). Ниже в этом разделе мы кратко обсудим, как Флашке и Ньюэллу удалось провести анализ уравнения  $P_{II}$  и воспользоваться концепцией деформаций, сохраняющих матрицу монодромии.

**3.7. с. Анализ особых точек.** Пусть дано нелинейное ОДУ. Как определить, имеют ли его решения подвижные критические точки? Если рассматриваемое уравнение имеет второй порядок и приведено к виду (3.7.4), то можно сравнить его со списком 50 уравнений, найденных Пенлеве и др., приведенным в гл. 14 работы [238]. Если это уравнение содержится в списке, то оно  $P$ -типа; если нет, то вполне возможно, что существует простая замена, преобразующая уравнение к виду, приведенному в списке. Поэтому мы рекомендуем определять природу особых точек, допускаемых уравнением (см. упр. 8).

Если уравнение имеет третий порядок или выше, то нам остается только локальный анализ особых точек. Здесь имеется два подхода. Первый — это  $\alpha$ -метод Пенлеве, подробно описан-

ный в [238]. Второй, близкий к методу Ковалевской, описан Абловицем, Рамани и Сигуром [23]; мы проиллюстрируем его ниже. Следует отметить, что при использовании обоих методов можно потерять существенно особые точки; для них требуется отдельный анализ.

*Пример 1.* Рассмотрим семейство ОДУ

$$(3.7.17) \quad w'' = z^m w + 2w^3.$$

(Если  $m = 0$ , то уравнение (3.7.17) интегрируется в эллиптических функциях. Если  $m = 1$ , то это  $P_{II}$ . При  $m \neq 0, 1$  мы обнаружим подвижные критические точки.) В методе анализа имеется три основных этапа. На первом следует определить поведение главной части решения в окрестности подвижной особенности в точке  $z_0$ . Поэтому мы предположим, что при  $z \rightarrow z_0$

$$w(z; z_0) \sim \frac{a}{(z - z_0)^p}.$$

В этом случае главными членами в (3.7.17) являются первый и последний, и  $p = 1$ ,  $a^2 = 1$ . Если выбрать  $a = 1$ , то при  $z \rightarrow z_0$  получим

$$(3.7.18) \quad w \sim (z - z_0)^{-1} + o(|z - z_0|^{-1}).$$

Если бы  $p$  не было целым, то мы получили бы (подвижную) алгебраическую точку ветвления, и уравнение не относилось бы к  $P$ -типу. (Но даже в этом случае мы рекомендуем продолжить вычисления, так как они могут подсказать преобразование, приводящее уравнение к  $P$ -типу.) Если имеется два или более корней  $p$ , то для каждого из них необходим отдельный анализ.

Так как уравнение (3.7.17) имеет второй порядок, то его общее решение зависит от двух постоянных интегрирования. Одна из них есть  $z_0$ . Следует продолжить разложение решения  $w$  (3.7.18) в ряд, пока не появится другая постоянная интегрирования. Второй этап — это определение степени  $(z - z_0)$ , начиная с которой может появиться вторая постоянная интегрирования. Чтобы это сделать, положим  $\xi = z - z_0$  и подставим

$$(3.7.19) \quad w(z) \sim \xi^{-1} + \beta \xi^{-1+r}$$

в главные части уравнения (3.7.17). В ведущем порядке по  $\beta$  получим соотношение

$$\beta [(r - 1)(r - 2) - 6] \xi^{r-3} \sim 0,$$

представляющее собой алгебраическое уравнение для  $r$ . Один корень этого уравнения всегда равен  $-1$ , что соответствует произволу в выборе  $z_0$ . В данном случае второй корень — это  $r = 4$  (если бы второй корень не оказался целым вещественным чис-

лом, то это указывало бы на наличие подвижных точек ветвления). Отсюда ясно, до каких степеней следует строить разложение решения:

$$(3.7.20) \quad w(z) \sim \xi^{-1} + a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3 + \dots$$

Мы ожидаем, что постоянные ( $a_0, a_1, a_2$ ) полностью определяются, и вторая постоянная появится, когда мы дойдем до определения  $a_3$ .

Последний этап — это определение коэффициентов разложения (3.7.20). Подставив его в уравнение (3.7.17) и собрав коэффициенты при одинаковых степенях  $\xi$ , получим

$$(3.7.21) \quad a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{-z_0^m}{6}, \quad a_2 = \frac{m z_0^{m-1}}{4}.$$

При  $O(\xi^3)$  получим

$$(3.7.22) \quad 0 = 0 \cdot a_3 = \frac{1}{2} m(m-1) z_0^{m-2}.$$

Имеется две возможности.

(i) Если  $m = 0$  или  $1$ , то (3.7.22) выполнено при любом значении постоянной  $a_3$ , которая при этом становится второй постоянной интегрирования. Воспользовавшись методом Пенлеве [238, раз. 14.41], можно показать, что (3.7.20), (21) действительно представляют собой начало разложения общего решения уравнения (3.7.17) в ряд Лорана в окрестности подвижного полюса. В этом случае нет никаких подвижных критических точек алгебраического характера.

(ii) Если  $m \neq 0$  или  $1$ , то соотношению (3.7.22) невозможно удовлетворить никаким выбором постоянной  $a_3$ . В этом случае разложение (3.7.20) следует дополнить логарифмическими членами:

$$(3.7.23) \quad w(z) \sim \xi^{-1} + a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + (a_3 \xi^3 + b_3 \xi^3 \ln \xi) + \dots$$

Теперь соотношения (3.7.21) по-прежнему сохраняют свой вид, а в порядке  $O(\xi^3)$  постоянная  $b_3$  определяется по произвольной постоянной  $a_3$ . Разложение (3.7.23) указывает на существование подвижной логарифмической точки ветвления  $z_0$ . Таким образом, если  $m \neq 0$  или  $1$ , то уравнение не относится к Р-типу (отметим, что следующие члены разложения имеют более высокие степени  $\xi$  и  $\ln \xi$ ).

*Пример 2.* Нелинейное уравнение Шрёдингера в размерности  $n+1$  (см. разд. 4.3) — это

$$(3.7.24) \quad i\varphi_t + \nabla^2 \varphi - 2|\varphi|^2 \varphi = 0.$$

Точная редукция к ОДУ получится, если положить

$$(3.7.25) \quad r^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2, \quad \varphi = R(r) \exp(i\lambda t);$$

при этом

$$(3.7.26) \quad R'' + \frac{n-1}{r} R' = 2|R|^2 R + \lambda R.$$

(Если к тому же мы потребуем вещественность  $R$  при вещественных  $r$ , то нелинейный член в (3.7.26) перепишется в виде  $2R^3$ ; в результате мы получим одно уравнение второго порядка, и можно проверить, не входит ли оно в список из книги [238]. Но для того, чтобы показать, как следует анализировать системы комплексных уравнений, мы рассмотрим более общий случай.) Нелинейный член в (3.7.26) не позволяет рассматривать  $R(r)$  как аналитическую функцию. Вместо уравнения (3.7.26) мы рассмотрим систему

$$(3.7.27) \quad \begin{aligned} R'' + \frac{n-1}{r} R' &= 2R^2S + \lambda R, \\ S'' + \frac{n-1}{r} S' &= 2S^2R + \lambda S. \end{aligned}$$

Если  $\lambda$  вещественно,  $S = R^*$  при вещественных  $r$ , то (3.7.27) содержит (3.7.26). В любом случае (3.7.27) является системой ОДУ четвертого порядка, и мы проведем анализ особых точек ее решения.

*Шаг 1.* В главном порядке все алгебраические особенности решений системы (3.7.27) имеют вид

$$(3.7.28) \quad R \sim \frac{\alpha}{r - r_0}, \quad S \sim \frac{1}{\alpha(r - r_0)},$$

где  $(r_0, \alpha)$  — две (из четырех) произвольные постоянные интегрирования.

*Шаг 2.* Для того чтобы найти степени, при которых появляются две оставшиеся постоянные интегрирования, положим  $x = r - r_0$ ,

$$R \sim \alpha x^{-1} + C_1 x^{-1+p}, \quad S = \frac{1}{\alpha} x^{-1} + C_2 x^{-1+p}$$

и подставим это в главные члены уравнений (3.7.27), сохранив лишь члены, линейные по  $C_1, C_2$ . В результате для определения  $p$  получим полином четвертой степени, имеющий корни  $(-1, 0, 3, 4)$ . Первые два корня отвечают свободе в выборе постоянных

$r_0, \alpha$ . Последние два корня определяют степени, начиная с которых могут появиться две оставшиеся постоянные интегрирования.

Шаг 3. Если (3.7.28) представляет первые члены разложения решения в ряд Лорана вблизи подвижного полюса  $x_0$ , то

$$(3.7.29) \quad \begin{aligned} \frac{R}{\alpha} &\sim x^{-1} + a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, \\ aS &\sim x^{-1} + b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3. \end{aligned}$$

Подставим это разложение в (3.7.27) и будем рекуррентно вычислять коэффициенты:

$$\begin{aligned} a_0 = b_0 &= -\frac{n-1}{6r_0}, \\ a_1 = b_1 &= -\frac{\lambda}{6} - \frac{(n-1)(n-7)}{36r_0^2}, \\ a_2 + b_2 &= \frac{\lambda(n-1)}{6r_0} - \frac{(n-1)(4n^2 - 35n + 85)}{108r_0^3}, \end{aligned}$$

причем на  $(a_2 - b_2)$  нет соотношений, это третья постоянная интегрирования. (Пока все хорошо!) Но в следующем порядке мы получим

$$(3.7.30) \quad 0 \cdot (a_3 + b_3) = (n-1)(*),$$

где  $(*) \neq 0$ . Если  $n = 1$  (а этот случай, как мы знаем, интегрируется с помощью МОЗР), то соотношение (3.7.30) выполнено тождественно при любом значении четвертой постоянной интегрирования  $(a_3 + b_3)$ , и решение не имеет подвижных точек ветвления. Если  $n \neq 1$ , то (3.7.30) приводит к противоречию, избежать которого можно, дополнив разложение (3.7.29) логарифмическими членами в порядке  $O(x^3)$ . Эти логарифмические члены породят бесконечную последовательность усложняющихся членов в высших порядках разложения. Система (3.7.27) не является уравнением Р-типа при  $n \neq 1$ .

Если гипотеза о свойстве Пенлеве верна, то нелинейное уравнение Шредингера (3.7.24) может быть проинтегрировано с помощью МОЗР только в размерности  $1+1$ .

Эти два примера вовсе не исчерпывают все возможные нюансы анализа особых точек. Читатель, интересующийся подробностями, может обратиться к работе [23].

**3.7. d. Глобальные свойства трансцендентов Пенлеве.** Кроме своего эвристического значения в качестве теста для уравнений в частных производных связь между МОЗР и ОДУ Р-типа может быть использована для получения информации о глобальных свойствах трансцендентов Пенлеве. Например, в разд. 3.6

мы видели, что если  $K(x, y)$  удовлетворяет уравнению

$$(3.7.31) \quad K(x, y) = r \operatorname{Ai}\left(\frac{x+y}{2}\right) + \\ + \sigma \frac{r^2}{4} \int_x^\infty \int_x^\infty K(x, z) \operatorname{Ai}\left(\frac{s+z}{2}\right) \operatorname{Ai}\left(\frac{s+y}{2}\right) dz ds, \quad y \geq x,$$

где  $\operatorname{Ai}(z)$  — функция Эйри,  $\sigma = \pm 1$ ,  $r$  — параметр, то  $w(z; r) = K(z, z; r)$  удовлетворяет частному случаю уравнения  $P_{11}$ :

$$(3.7.32) \quad \frac{d^2w}{dz^2} = zw + 2\sigma w^3, \quad \sigma = \pm 1.$$

с граничным условием при  $z \rightarrow +\infty$

$$(3.7.33) \quad w(z; r) \sim r \operatorname{Ai}(z).$$

Уравнение (3.7.31) представляет собой точную линеаризацию однопараметрического семейства решений ОДУ (3.7.32). В этом семействе содержатся все ограниченные решения уравнения (3.7.32).

Глобальное существование этого семейства решений можно доказать непосредственно из (3.7.31). Перепишем (3.7.31) в сокращенном виде:

$$(3.7.34) \quad [I - \sigma r^2 \tilde{A}(z)] K = r \operatorname{Ai};$$

при этом факт существования ограниченного решения уравнения (3.7.32) следует непосредственно из ограниченности оператора  $[I - \sigma r^2 \tilde{A}(z)]^{-1}$ . Здесь мы приведем лишь результаты исследования (подробности можно найти в работах [27], [206], [23]).

(i)  $\tilde{A}(z)$  — положительный оператор. Поэтому при  $\sigma = -1$  уравнения (3.7.32, 33) имеют единственное ограниченное решение при всех вещественных  $z$  и вещественных  $r$ .

(ii)  $L_2$ -норма оператора  $\tilde{A}(z)$  не превышает 1 для любого вещественного  $z$ . Поэтому если  $\sigma = +1$ , то уравнения (3.7.32, 33) имеют единственное ограниченное решение при всех вещественных  $z$ , если  $-1 < r < 1$ .

(iii) При  $\sigma = +1$ ,  $|r| = 1$  возникает критическая ветвь решения уравнения (3.7.32), стремящаяся к нулю при  $z \rightarrow +\infty$  и алгебраически растущая ( $2w^2 + z \sim 0$ ) при  $z \rightarrow -\infty$ .

(iv) Если  $\sigma = +1$ ,  $r > 1$ , то найдется такое вещественное  $z_0(r)$ , то оператор  $[I - \sigma r^2 \tilde{A}(z)]^{-1}$  существует только при  $z > z_0$ . Мы подозреваем (но это не доказано), что  $w(z; r)$  имеет полюс в точке  $z_0$ .

(v) Согласно аргументации, приведенной после формулы (3.7.5a), единственными особенностями этого семейства решений на комплексной плоскости  $z$  являются полюсы. (Разумеется, этот результат впервые был получен Пенлеве.)

Эта тема не заканчивается доказательством существования. Так же как уравнение Эйри

$$\frac{d^2w}{dz^2} = zw$$

является представителем простой линейной точки поворота, так и уравнение (3.7.32) является представителем класса простых нелинейных точек поворота. Так, например, Хаберман [193] показал, что слаболинейное решение уравнения

$$(3.7.35) \quad \frac{d^2u}{dz^2} + k(\varepsilon z)u = \varepsilon\beta(\varepsilon z)u^3, \quad \varepsilon \ll 1,$$

в окрестности нуля функции  $k(\varepsilon z)$  аппроксимируется (асимптотически) решением уравнения (3.7.32). Таким образом, качественное поведение такого решения уравнения (3.7.35) является слабонелинейным и экспоненциально убывающим при  $k < 0$ , слабонелинейным и осциллирующим при  $k > 0$ , но существенно нелинейным в переходной области, где оно аппроксимируется решением уравнения (3.7.32). Это побуждает нас более детально изучить решения уравнения (3.7.32), так как через них производится сшивка двух областей, в которых решения уравнения (3.7.35) имеют качественно различное поведение. Таким образом, мы приходим к задаче о связи асимптотик:

Задана асимптотика ограниченного вещественного решения уравнения (3.7.32) при  $z \rightarrow +\infty$ ; найти асимптотику этого же решения при  $z \rightarrow -\infty$ .

Решения этой задачи было бы вполне достаточно, чтобы связать две области слабой нелинейности решения уравнения (3.7.35).

Совершенно очевидно, что задача о связи асимптотик является глобальной и не может быть решена с помощью локального анализа уравнения (3.7.32). Напомним (разд. 1.7), что для почти всех гладких быстроубывающих начальных данных для уравнения мКдФ (3.7.9) асимптотика решения ( $t \rightarrow \infty$ ) представлена тремя областями с различным качественным поведением:

- (i) Для  $x \gg t^{1/3}$  решение экспоненциально убывает (по  $x$ ).
- (ii) Для  $|x| = O(t^{1/3})$  решение является автомодельным и удовлетворяет уравнению (3.7.32).
- (iii) При  $-x \gg t^{1/3}$  решение осциллирует.

Сигур и Абловиц [457] нашли решение задачи о связи асимптотик для уравнения (3.7.32) с помощью переходов к пределам в областях (i) и (iii) асимптотического решения уравнения мКдФ. Результаты можно сформулировать следующим образом.

Имеется однопараметрическое (с параметром  $r$ ) семейство ограниченных вещественных решений уравнения (3.7.32). Эти

решения экспоненциально убывают (при увеличении  $z$ ) при  $(2\sigma w^2 + z) > 0$  и осциллируют при  $(2\sigma w^2 + z) < 0$ . Типичное решение показано на рис. 3.2. При  $z \rightarrow +\infty$  все эти решения имеют асимптотику (3.7.33) с произвольным вещественным  $r$  при  $\sigma = -1$  и  $-1 < r < 1$  при  $\sigma = +1$ . Без потери общности можно

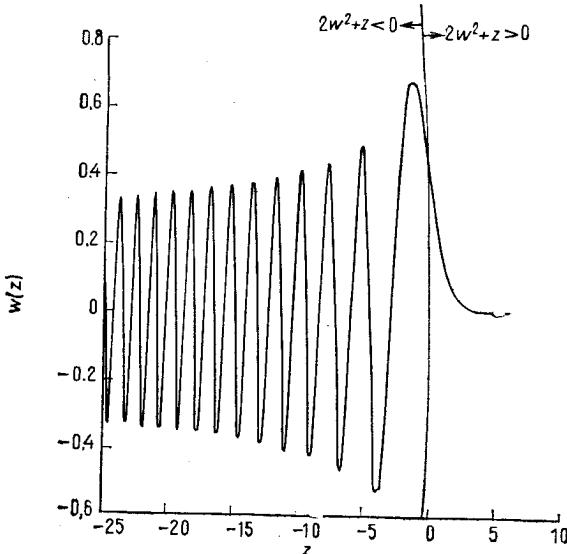


Рис. 3.2. Характерный вид решения уравнения (3.7.32) с граничными условиями (3.7.33). Здесь  $\sigma = +1$ ,  $r = 0$ . На рисунке показана разделяющая парабола  $2w^2 + z = 0$ .

считать  $r \geq 0$ . При  $z \rightarrow -\infty$  эти решения имеют формальное асимптотическое разложение

$$(3.7.36) \quad w(z) \sim d(-z)^{-1/4} \sin \theta + O(|z|^{-7/4}),$$

где

$$\theta \sim \frac{2}{3}(-z)^{2/3} - \frac{3}{2}\sigma d^2 \ln(-z) + \bar{\theta} + O(|z|^{-3/2}).$$

Постоянные  $d (\geq 0)$  и  $\bar{\theta}$  зависят от  $r$ ,  $\sigma$  по следующему закону:

$$(3.7.37) \quad \begin{aligned} d^2 &= -\frac{\sigma}{\pi} \ln(1 - \sigma r^2), \\ \bar{\theta} &= \frac{\pi}{4} - \sigma \arg \left\{ \Gamma \left( 1 - \frac{id^2}{2} \right) \right\} - \frac{3}{2}\sigma d^2 \ln 2, \end{aligned}$$

их графики приведены на рис. 3.3. Других ограниченных вещественных решений уравнение (3.7.32) не имеет.

Рассмотрим теперь общий случай уравнения  $P_{II}$ :

$$\frac{d^2w}{dz^2} = zw + 2w^3 + a.$$

Эро [35], Боити и Пэмпинели [72] воспользовались преобразованием Бэклунда для уравнения КдФ в автомодельном виде и

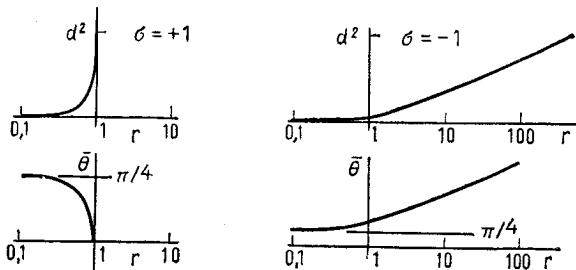


Рис. 3.3. Асимптотические (при  $z \rightarrow -\infty$ ) амплитуды ( $d$ ) и фазы ( $\bar{\theta}$ ) для уравнения  $P_{II}$  как функции начальной амплитуды (см. (3.7.37)).

вывели рекуррентное соотношение между решениями уравнения  $P_{II}$ :

$$(3.7.38) \quad \tilde{w}(z, a+1) = -w(z, a) - \frac{2a+1}{2w^2(z, a) + z + 2w_z(z, a)}.$$

Это соотношение было ранее получено из других соображений в работе [337]. Кроме того, уравнение  $P_{II}$  допускает преобразование симметрии

$$(3.7.39) \quad w(z, a) \rightarrow -w(z, -a).$$

Если воспользоваться (3.7.38), (3.7.39) и любым точным решением уравнения  $P_{II}$ , то можно построить бесконечную серию решений  $w(z, \alpha \pm n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Начав с тривиального решения ( $w(z, 0) = 0$ ), Эро построил таким способом все рациональные решения уравнения КдФ [35] (см. разд. 3.4).

Однопараметрическое семейство ограниченных вещественных решений уравнения  $P_{II}$  при  $\alpha = 0$  порождает однопараметрическое семейство вещественных решений уравнения  $P_{II}$  при любом целом  $\alpha$ . Все эти решения ограничены при  $z \rightarrow +\infty$ , но, как мы покажем, среди них нет решений, ограниченных на всей вещественной оси  $z$ . Иначе говоря, для целых значений  $\alpha$  уравнение  $P_{II}$  не имеет никаких ограниченных вещественных решений.

Начнем со случая  $\alpha = 0$ , и пусть  $0 \leq r < 1$ ; в этом случае ограниченное вещественное решение качественно ведет себя так же, как решение, показанное на рис. 3.2. Из рисунка видно, что знаменатель в формуле (3.7.38) имеет отрицательный знак в точке пересечения графика решения с параболой  $(2w^2 + z) = 0$ ,

а при  $z \rightarrow +\infty$  знак знаменателя положительный. Таким образом, знаменатель обращается в нуль в некоторой промежуточной точке. Эта точка будет полюсом решения  $w(z, 1)$ . (Аналогично рассматривается случай  $r < 0$ .) Таким образом, любое вещественное решение уравнения  $P_{II}$  при  $\alpha = 1$ , ограниченное при  $z \rightarrow +\infty$ , имеет по крайней мере один полюс в некоторой конечной точке  $z$ .

Пусть  $\alpha$  — любое положительное целое число. Если  $w(z, \alpha)$  имеет полюс, то мы покажем, что его также имеет решение  $w(z, \alpha + 1)$ , построенное по формуле (3.7.38). Пусть самый правый полюс функции  $w(z, \alpha)$  расположен в точке  $z_0$ . В окрестности  $z_0$  разложение решения  $w(z, \alpha)$  в ряд Лорана имеет либо вид

$$(3.7.40a) \quad w(z, \alpha) = w_+ \sim (z - z_0)^{-1} - \frac{z_0}{6}(z - z_0) - \\ - \frac{\alpha + 1}{4}(z - z_0)^2 + \dots,$$

либо вид

$$(3.7.40b) \quad w(z, \alpha) = w_- \sim -(z - z_0)^{-1} + \frac{z_0}{6}(z - z_0) - \\ - \frac{\alpha - 1}{4}(z - z_0)^2 + \dots.$$

В этих случаях знаменатель в (3.7.38) принимает вид

$$(3.7.41a) \quad 2w_+^2 + z + 2\partial_z(w_+) \sim -(2\alpha + 1)(z - z_0)$$

или

$$(3.7.41b) \quad 2w_-^2 + z + 2\partial_z(w_-) \sim 4(z - z_0)^{-2}.$$

Для  $w_-(z, \alpha)$  первый член в правой части формулы (3.7.38) имеет полюс в точке  $z = z_0$ , а второй член в этой точке равен нулю. Таким образом, точка  $z_0$  является полюсом решения  $w_-(z, \alpha + 1)$ .

Для  $w_+(z, \alpha)$  при  $\alpha > 0$  знаменатель в (3.7.38) отрицателен в точках  $z_0 + \varepsilon$  ( $0 < \varepsilon \ll 1$ ) и положителен при  $z \rightarrow +\infty$ , поэтому он обязан обращаться в нуль в некоторой промежуточной точке. Но точка  $z_0$  является по предположению самым правым полюсом функции  $w(z, \alpha)$ , поэтому в нуле знаменателя будет полюс решения  $w_+(z, \alpha + 1)$ . Таким образом, при  $\alpha > 0$ , если  $w(z, \alpha)$  убывает при  $z \rightarrow +\infty$  и имеет полюс в некоторой конечной точке  $z_0$ , то такими же свойствами обладает решение  $w(z, \alpha + 1)$ . Поскольку  $w(z, 1)$  имеет полюс, то его имеет и  $w(z, n)$ ,  $n$  — целое положительное число. Согласно (3.7.39), полюс в той же точке имеет решение  $w(z, -n)$ .

Здесь мы остановились только на уравнении  $P_{II}$ , но совершенно ясно, что остальные уравнения Пенлеве также можно

исследовать этим методом. Например, преобразования Бэклунда для  $P_I$  были найдены в работе [73], для  $P_{III}$ ,  $P_{IV}$ ,  $P_V$  в [35], для  $P_{IV}$  в [165]. Преобразование (3.7.38) для  $P_{II}$  и некоторые результаты для других уравнений были ранее другими методами получены советскими математиками (Громак, Еругин, Лукашевич и Яблонский, обзор советских работ и дополнительную библиографию можно найти в статье Еругина [149]).

С другой стороны, Абловиц, Рамани и Сигур [23] нашли линейные интегральные уравнения, обслуживающие ОДУ  $P_{III}$  и  $P_{IV}$ . Там же на основе линейного интегрального уравнения были построены сходящиеся ряды для семейства решений уравнения  $P_{III}$ . Эти ряды оказались эквивалентными рядам, построенным ранее с помощью совершенно другого подхода в работе Мак-Коя, Трейси и Ву [363]. Авторам этой работы удалось установить формулы связи асимптотик для  $P_{III}$ , аналогичные (3.7.37) для  $P_{II}$ .

Уравнение  $P_{III}$  возникает в скэйлинговом пределе корреляционной функции спинов в двумерной модели Изинга; это обстоятельство послужило стимулом работы Мак-Коя, Трейси, Ву и Бароша [508]. Хотя их работа никак не связана с МОЗР, но в некоторых аспектах эти подходы весьма близки. Поэтому напрашивается вопрос: имеется ли какая-нибудь связь двумерной модели Изинга и МОЗР?

Серия весьма важных работ Сато, Мивы и Джимбо [444] была связана с: (i) деформациями линейных дифференциальных уравнений, сохраняющими матрицу монодромии; (ii) голономной квантовой теорией поля; (iii) скэйлинговым пределом двумерной модели Изинга; (iv) теорией групп Клиффорда; (v) МОЗР (см. также [256], [488] и исчерпывающий обзор Джимбо, Мива, Мори, Сато [243]). Идеи, лежащие в основе этих работ, мы опишем, опираясь на близкую по духу работу Флашки и Ньюэлла [163], в которой подчеркивалась связь с трансцендентами Пенлеве.

Нам понадобится ряд определений. Рассмотрим (матричную) систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(3.7.42) \quad \frac{dy}{dx} = y \sum_{j=1}^N \frac{A_j}{x - a_j},$$

где  $A_j$  — постоянные  $m \times m$ -матрицы, а  $x$  является комплексной переменной. Решение уравнения (3.7.42) обычно является многозначной функцией  $x$ ; обозначим через  $Y(x)$  однозначную ветвь фундаментального решения. Если точка  $x$  обойдет одну из сингулярных точек  $a_j$  по замкнутому контуру, то полученная функция  $\tilde{Y}(x)$ , как правило, будет отличаться от своего исходного

значения, но непременно имеется линейная связь

$$(3.7.43) \quad \tilde{Y}(x) = M_i Y(x).$$

Матрицу  $M_i$  называют *матрицей монодромии* точки  $a_i$  (см. разд. 2.3). Вопрос о деформациях, сохраняющих матрицы монодромии, формулируется следующим образом. Допустим, что точке  $a_i$  разрешено двигаться по комплексной плоскости; как при этом следует изменять матрицу  $A_i$ , чтобы матрица монодромии ( $M_i$ ) оставалась постоянной? В простейшем нетривиальном случае, когда является  $2 \times 2$ -матрицами,  $N = 4$  и позволено двигаться только одной сингулярности, эта задача сводится к решению уравнения  $P_{VI}$ ! Другими словами, уравнение  $P_{VI}$  можно рассматривать как условие на деформации коэффициентов линейной системы, при которых сохраняются матрицы монодромии<sup>1)</sup>.

В рассмотренном примере ОДУ имеет только регулярные особые точки. В работе Флашки и Ньюэла основное внимание было уделено нерегулярным особым точкам, когда матрица монодромии заменяется на *множители Стокса*.

В некотором смысле мы все время имели дело с теорией деформаций линейных уравнений. Например, в гл. 1 мы рассматривали линейный дифференциальный оператор

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

и задавали вопрос: как следует изменять коэффициентную функцию  $q(x)$  с изменением внешнего параметра ( $t$ ), чтобы спектр оператора  $L$  оставался инвариантным? Ответ состоит в том, что функция  $q(x, t)$  должна удовлетворять уравнению КdФ или одному из его высших аналогов (1.5.21).

Таким образом, имеется еще один путь рассмотрения МОЗР и трансцендентов Пенлеве с точки зрения теории деформаций линейных дифференциальных уравнений. При этом основное внимание направлено на прямую задачу рассеяния в МОЗР и предполагается, что задача рассеяния для мКdФ должна быть преобразована к автомодельной форме. Преобразование

$$z = \frac{x}{(3t)^{1/3}}, \quad \chi = \zeta (3t)^{1/3}, \quad q(x, t) = (3t)^{-1/3} w(z),$$

$$V_i(x, t, \zeta) = \varphi_i(z, \chi)$$

---

<sup>1)</sup> Вопрос о деформациях, сохраняющих матрицу монодромии, был поставлен и решен в классических работах Шрезингера и Ганье, там же была обнаружена связь с уравнениями Пенлеве. По этому поводу см. [11\*] стр. 283. — Прим. перев.

приводит в результате к системе линейных ОДУ

$$(3.7.44) \quad \begin{aligned} \partial_x \varphi_1 &= -i(4\chi^2 + z + 2w^2)\varphi_1 + (4\chi w + 2iw_z)\varphi_2, \\ \partial_x \varphi_2 &= (4\chi w - 2iw_z)\varphi_1 + i(4\chi^2 + z + 2w^2)\varphi_2. \end{aligned}$$

Множители Стокса решений системы (3.7.44) в окрестности нерегулярных особых точек не зависят от  $z$  только в том случае, если  $w(z)$  удовлетворяет уравнению  $P_{11}$ . Зная свойства матриц монодромии и расположение особых точек, Флашка и Ньюэлл сумели переформулировать задачу в терминах сингулярных линейных интегральных уравнений. Они не рассматривали вопроса о существовании решений этих уравнений. В некоторых частных случаях интегральное уравнение воспроизводит известные результаты.

Подведем итоги этого раздела. Имеется тесная связь между уравнениями в частных производных, интегрируемыми методом обратной задачи рассеяния, и ОДУ Р-типа. Эту связь можно с успехом использовать как при изучении уравнений в частных производных, так и ОДУ. При изучении ОДУ (в особенности  $P_{11}$ ) оказалось, что почти каждый аспект МОЗР (прямая задача рассеяния, обратная задача рассеяния, преобразование Бэкунда и т. д.) имеет важное значение.

**3.8. Возмущения и устойчивость солитонов и уединенных волн относительно поперечных возмущений.** В этом разделе мы кратко обсудим, какое влияние оказывают малые возмущения (например, поперечные) на солитоны и уединенные волны. Этому очень естественному вопросу посвящено довольно много работ.

Здесь мы рассмотрим задачи следующих типов: (а) действие диссилиативных возмущений на солитон, (б) действие диссиляции на уединенную волну и (с) действие поперечных возмущений на солитон (аналогично можно рассматривать задачу об устойчивости уединенных волн относительно поперечных возмущений). Подразделы можно читать независимо друг от друга.

Что касается теории возмущения для солитонов, то на этот счет имеется довольно много методов, развитых на основе МОЗР (см., например, [260], [267], [255], [272]). Методы Каупа, Ньюэла [267] и Карпмана, Маслова [255] позволяют вывести возмущенные уравнения, описывающие эволюцию данных рассеяния, используя теорию возмущений соответствующей линейной задачи рассеяния. Исходные зависимые переменные восстанавливаются по решению обратной задачи рассеяния (т. е. линейного интегрального уравнения Гельфанд — Левитана — Марченко). Отправившись от другой точки зрения, Кинер и Мак-Лафлин [272] развили теорию возмущений, воспользовавшись функ-

цией Грина для решения линеаризованного уравнения, отвечающего исходному уравнению более высокого порядка. Но для вычисления функции Грина необходимо прибегнуть к МОЗР.

С другой стороны, хорошо известно, что существует весьма общая теория возмущений для частных решений нелинейных уравнений (таких, как солитоны, бризеры, уединенные волны, периодические решения). Она применялась для многих задач (см., например, [478], [1], [245], [505], [543], [252], [509], [279], [286], [282]). В этом разделе мы покажем, как эти подходы применяются к задачам с солитонами и уединенными волнами. Здесь мы вовсе не пытаемся сделать сколько-нибудь исчерпывающий обзор существующих теорий возмущений для солитонов или уединенных волн.

Основная идея теории возмущений состоит в следующем. Мы изучаем решение возмущенного нелинейного уравнения весьма общего вида

$$(3.8.1) \quad K(q, q_t, q_x, \dots) = \varepsilon F(q, q_x, \dots), \quad 0 < \varepsilon \ll 1,$$

где  $K$  и  $F$  — нелинейные функции от  $q, q_x, \dots$ . Невозмущенное уравнение ( $\varepsilon = 0$ )

$$(3.8.2) \quad K(q^{(0)}, q_t^{(0)}, q_x^{(0)}, \dots) = 0$$

имеет решение  $q^{(0)}$ . В качестве  $q^{(0)}$  можно брать как солитонное решение, так и уединенную волну (а также бризер или более сложное солитонное решение). Мы запишем это решение явно, указав естественные «быстрые» и «медленные» переменные:

$$(3.8.3) \quad q^{(0)} = \hat{q}^{(0)}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m, T : P_1, P_2, \dots, P_N).$$

В (3.8.3)  $\theta_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) обозначают быстрые переменные,  $T = \varepsilon t$  — медленная переменная,  $P_l$  ( $l = 1, \dots, N$ ) — параметры, зависящие от медленных переменных (в некоторых задачах может потребоваться введение медленной переменной  $X = \varepsilon x$ ; см., например, [506], [1]). Во многих задачах для невозмущенного решения можно ограничиться одной быстрой переменной  $\theta = x - P_1 t$ . Обобщим  $\theta$  так, чтобы  $\partial\theta/\partial x = 1$ ,  $\frac{\partial\theta}{\partial t} = -P_1$ , и воспользуемся  $P_1 = P_1(T)$  для исключения секулярных членов. В этом случае решение (3.8.3) мы будем называть квазистационарным и записывать  $q = \hat{q}(\theta, T, \varepsilon)$ . Для  $P_1, \dots, P_N$  мы выведем уравнение, опираясь на условия вроде условия исключения секулярных членов (должно быть в точности  $N$  независимых условий). Некоторые из них возникают из тождества Грина. Предположим, что  $\hat{q}$  выражается в следующем виде:

$$\hat{q} = \hat{q}^{(0)} + \varepsilon \hat{q}^{(1)} + \dots$$

(после введения подходящих переменных  $\theta_i$ ,  $T$  и т. д.). Тогда (3.8.2) представляет главный порядок задачи, а в следующем порядке получим (если предположить, что  $K$  зависит от производных по времени только первого порядка)

$$(3.8.4) \quad L(\partial_{\theta_i}, \hat{q}^{(0)}) \hat{q}^{(1)} = F(\hat{q}^{(0)}) - \frac{\partial K}{\partial q_t} q_T|_{q=\hat{q}^{(0)}} = \hat{F}.$$

Здесь  $L(\partial_{\theta_i}, \hat{q}^{(0)}) u = 0$  — линеаризация уравнения  $K(q, q_t, q_x, \dots) = 0$  после перехода от  $(x, t)$  к координатам  $\theta_i$ . Обозначим  $v_i$  ( $i = 1, \dots, M$ ) решения однородной сопряженной задачи с нулевыми граничными условиями (т. е.  $v_i \rightarrow 0$  при  $|\theta| \rightarrow \infty$ ):

$$L^A v_i = 0, \quad i = 1, \dots, M, \quad M \leq N,$$

где  $L^A$  — оператор, сопряженный к  $L$ . Левая часть равенства

$$(3.8.5) \quad (L \hat{q}^{(1)}) v_i - (L^A v_i) \hat{q}^{(1)} = \hat{F} v_i$$

всегда является дивергенцией (теорема Грина). Интегрирование этого равенства приводит к секулярным условиям. Эти секулярные условия позволяют вычислить поправку  $\hat{q}^{(1)}$ , удовлетворяющую подходящим граничным условиям (т. е.  $\hat{q}^{(1)}$  ограничена при  $|\theta| \rightarrow \infty$ ). Имеется определенная свобода в выборе решения  $\hat{q}^{(1)}$ . Дело в том, что частично решение  $\hat{q}^{(1)}$  можно включить в главный порядок  $\hat{q}^{(0)}$ , немного сдвинув его параметры. Можно добиться единственности решения  $\hat{q}^{(1)}$ , если наложить дополнительные условия, отражающие специфику задачи. Для вычисления высших порядков  $\hat{q}^{(N)}$  препятствий не возникает.

Из этого метода следует:

(i) Полученное разложение, вообще говоря, не приближает решения равномерно на всей оси  $|x| < \infty$  (см. [1], [267], [255], [282]).

(ii) В каждой области, где оно справедливо, мы получим квазистационарное решение, т. е. решение, зависящее только от  $\theta_i$  и  $T$ .

(iii) Чтобы получить равномерно пригодное разложение решения на всей оси, следует произвести сшивку решения, полученного описанным методом, с нестационарным решением для больших  $|\theta_i|$  (т. е. при  $|\theta| \sim O(1/3)$ ).

В качестве примера применения этой общей схемы мы рассмотрим уравнение КdФ и «сильно нелинейные» уравнения КdФ со слабо диссипативным возмущением. С физической точки зрения это отвечает распространению солитонов в среде с медленно меняющимися параметрами [245]. Интересной особенностью решений этих уравнений является возникновение из-за диссипативных членов полочки за возмущенным солитоном (см. [323], [267], [255]).

**3.8.а. Уравнение КдФ с затуханием.** Пусть возмущенное уравнение КдФ имеет вид

$$(3.8.6) \quad q_t + 6qq_x + q_{xxx} = -\varepsilon\gamma q,$$

где  $\gamma, \varepsilon$  — постоянные,  $\gamma > 0$ ,  $\gamma$  имеет порядок 1 и  $0 < \varepsilon \ll 1$ . (Ниже приведен пример анализа конкретного уравнения и его возмущения. Такой анализ применим в гораздо более общей ситуации.) Солитонное решение невозмущенного уравнения ( $\varepsilon = 0$ ) мы запишем в виде

$$(3.8.7) \quad q^{(0)} = 2\eta^2 \operatorname{sech}^2 \eta(\theta - \theta_0), \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = -4\eta^2.$$

Здесь  $\eta$  и  $\theta_0$  — произвольные параметры, которые могут зависеть от «медленного времени»  $T = \varepsilon t$ . В предположении квазистационарности получим

$$(3.8.8) \quad -4\eta^2 \hat{q}_\theta + 6\hat{q}\hat{q}_\theta + \hat{q}_{\theta\theta\theta} = -\varepsilon\gamma\hat{q} - \varepsilon\hat{q}_T.$$

Разложив  $\hat{q}$  в ряд по  $\varepsilon$ , в главном порядке получим уравнение

$$(3.8.9) \quad -4\eta^2 \hat{q}_\theta^{(0)} + 6\hat{q}_\theta^{(0)}\hat{q}^{(0)} + \hat{q}_{\theta\theta\theta}^{(0)} = 0$$

и возьмем его решение в виде (солитон КдФ)

$$\hat{q}^{(0)} = 2\eta^2 \operatorname{sech}^2 \eta(\theta - \theta^{(0)}).$$

В порядке  $\varepsilon$  получим

$$(3.8.10) \quad \begin{aligned} \hat{L}\hat{q}^{(1)} &= -4\eta^2 \hat{q}_\theta^{(1)} + 6(\hat{q}^{(0)}\hat{q}^{(1)})_\theta + \hat{q}_{\theta\theta\theta}^{(1)} = \hat{F}^{(1)}, \\ \hat{F}^{(1)} &= -\gamma\hat{q}^{(0)} - \hat{q}_T^{(0)} = -\gamma q^{(0)} - \frac{1}{\eta_T} \{2\hat{q}^{(0)} + (\theta - \theta^{(0)}) q_\theta^{(0)}\} + \\ &\quad + \theta_T^{(0)} q_\theta^{(0)}. \end{aligned}$$

Функция  $\hat{q}^{(0)}$  является подходящим (быстро убывающим при  $|\theta| \rightarrow \infty$ ) решением задачи, сопряженной к  $\hat{L}u = 0$ , т. е.

$$(3.8.11) \quad \hat{L}^A \hat{q}^{(0)} = 0, \quad \hat{L}^A = 4\eta^2 \partial_\theta - 6q^{(0)}\partial_\theta - \partial_\theta^3.$$

Условие совместимости

$$(3.8.12) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \hat{q}^{(0)} \hat{F}^{(1)} d\theta = 0$$

приводит к

$$(3.8.13) \quad \frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial T} = -\frac{2}{3} \gamma, \quad \text{или} \quad \eta(T) = \eta(0) \exp\left(-\frac{2}{3} \int_0^T \gamma dT'\right).$$

Это означает, что из-за диссипации ( $\gamma > 0$ ) амплитуда и скорость солитона адиабатически убывают — наиболее важный ре-

зультат в этой задаче. Уравнение (3.8.10) при выполнении (3.8.13) можно решить. В результате получим

$$(3.8.14) \quad \hat{q}^{(1)} = \frac{\gamma}{6\eta} \left[ -1 + \operatorname{th} \varphi + 3 \left( 1 + \frac{\eta}{\gamma} \theta_T^{(0)} \right) (1 - \varphi \operatorname{th} \varphi) \operatorname{sech}^2 \varphi + \varphi (2 - \varphi \operatorname{th} \varphi) \operatorname{sech}^2 \varphi \right],$$

$$|\varphi| \ll O(\epsilon^{-1/2}),$$

где  $\varphi = \eta(\theta - \theta_0)$  (см. упражнения в конце этой главы). Отметим, что ниже будет найдено  $\theta_T^{(0)}$ . Более высокие порядки указывают на неприменимость этого разложения при  $|\varphi| = O(\epsilon^{-1/2})$ . Это соответствует границе применимости разложения Каупа, Ньюэла [267] и Карпмана, Маслова [255] при  $t \sim O(\epsilon^{-1/2})$ . Формула (3.8.14) показывает, что диссиляция приводит к появлению полочки; действительно, в асимптотике получим

$$(3.8.15) \quad \hat{q}^{(1)} \rightarrow \begin{cases} -\frac{\gamma}{3\eta} \{1 - 2\varphi^2 \exp(2\varphi)\} & \text{при } 1 \ll -\varphi \ll O(\zeta^{-1/2}), \\ -\frac{2\gamma}{3\eta} \exp(-2\varphi) & \text{при } 1 \ll \varphi \ll O(\epsilon^{-1/2}). \end{cases}$$

Это полностью согласуется с результатами, полученными с помощью МОЗР. Отметим, что параметр  $\theta_T^{(0)}$  может выбираться произвольно; при этом член  $\theta_T^{(0)}(1 - \varphi \operatorname{th} \varphi) \operatorname{sech}^2 \varphi$  можно включить в решение главного порядка  $\hat{q}^{(0)}$ , сдвинув аргумент  $\eta \rightarrow \eta - \epsilon \theta_T^{(0)}/8\eta$ . Мы привели наиболее существенные результаты, касающиеся теории возмущений; читатель, не заинтересованный в более детальном рассмотрении, может перейти прямо к разд. 3.8. б.

Если  $\eta$  задана начальным условием, то можно определить, какому уравнению подчиняется  $\theta^{(0)}$ . Рассмотрим задачу Коши, причем в качестве начального условия выберем невозмущенный солитон

$$(3.8.16) \quad q(x, 0) = 2\eta^2 \operatorname{sech}^2 \eta x.$$

Из (3.8.16) следует соотношение (скорость изменения энергии),

$$(3.8.17) \quad \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} q^2 dx = -2\epsilon\gamma \int_{-\infty}^{\infty} q^2 dx.$$

Кроме этого, предположим, что  $q$  можно представить в виде  $q_s + \delta q$ , где  $q_s$  — солитонная часть решения, а  $\delta q$  — поправка к ней. Для того чтобы воспользоваться формулой (3.8.17), нам необходимо знать решение в областях, удаленных от солитона. Учитывая (3.8.13) (в основном порядке (3.8.17) совпадает с

(3.8.13)), получим

$$(3.8.18) \quad \frac{d}{dt} \Delta(t) = -2\epsilon\gamma\Delta(t),$$

где  $\Delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \{q_s \delta q + (\delta q)^2/2\} dx$ . Из условия  $\delta q(x, 0) = 0$  получим

$$(3.8.19) \quad \Delta(t) = 0.$$

Оказывается, что длина полочки имеет порядок  $O(\epsilon^{-1})$  для  $t \sim O(\epsilon^{-1})$ . При этих временах порядки первого и второго членов в  $\Delta(t)$  совпадают. На самой начальной стадии задача является нестационарной, но нестационарная часть волны быстро движется к хвосту солитона. Для времен  $t \sim O(\epsilon^{-1})$  решение в области  $|\theta| \ll O(\epsilon^{-1/2})$  является квазистационарным, и там  $\delta q = \delta q(0, T)$ . Поэтому для определения уравнения, которому подчиняется параметр  $\theta^{(0)}$ , потребуем выполнения следующего дополнительного условия:

$$(3.8.20) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \hat{q}^{(0)}(\theta) \hat{q}^{(1)}(\theta) d\theta + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\delta q)^2 dx = 0.$$

Условие (3.8.20) дает

$$(3.8.21) \quad \frac{\partial \theta^{(0)}}{\partial T} = -\frac{\gamma}{3\eta} - \frac{1}{2\eta} \int_{-\infty}^{\infty} (\delta q)^2 dx.$$

Отметим, что в интервале времени  $O(1) \ll t \ll O(\epsilon^{-1})$  вторым членом в (3.8.21) (т. е.  $\int_{-\infty}^{\infty} (\delta q)^2 dx$  в  $\Delta(t)$ ) можно пренебречь.

В этом интервале времен формула (3.8.21) согласуется с результатами работы [255]. Для того чтобы пользоваться формулами (3.8.20), (3.8.21), нужно знать  $\delta q$  при  $-\theta \ll O(\epsilon^{-1/2})$ .

В области  $|\theta| \ll O(\epsilon^{-1/2})$  решение является квазистационарным, но вне ее оно существенно зависит от  $x$  и  $t$ . Для времен  $t$  порядка  $O(\epsilon^{-1})$ , т. е. в области  $O(\epsilon^{-1/2}) \ll (-x) < \infty$ , за солитоном, разложение является неравномерным из-за наличия полочки. Решение уравнения (3.8.6) в этой области аппроксимируется, как показано в работе [278], решением  $\tilde{q}$  уравнения

$$(3.8.22) \quad \tilde{q}_t + \tilde{q}_{xxx} = -\epsilon\gamma\bar{q}$$

с граничными условиями

$$(3.8.23) \quad \tilde{q}(x, t) \rightarrow \begin{cases} -\frac{\epsilon\gamma}{3\eta(T)} & \text{при } x \rightarrow \frac{1}{\epsilon} \int_0^T 4\eta^2(T') dT', \\ 0 & \text{при } x \rightarrow -\infty, \end{cases}$$

С учетом этих граничных условий (с подвижной границей) получим решение уравнения (3.8.22)

$$(3.8.24) \quad \tilde{q}(x, t) = -\frac{\varepsilon \gamma(T_0(\varepsilon x))}{3\eta(T_0(\varepsilon x))} \exp\left(\int_t^{T_0(\varepsilon x)} \gamma dT'\right) \int_{-\infty}^z \text{Ai}(y) dy,$$

где  $\text{Ai}(z)$  — функция Эйри,  $z = x/(3t)^{1/3}$  и  $T_0(\varepsilon x)$  определяется обращением интеграла  $\varepsilon x = \int_0^{T_0} 4\eta(T') dT'$ . Отметим, что  $\delta q$  в (3.8.20), (3.8.21) можно заменить на  $\tilde{q}$ .

В области  $\theta \gg O(\varepsilon^{-1/2})$ , т. е. перед солитоном, разложение также является неравномерным. В ней из-за экспоненциальной малости решения снова применимо уравнение (3.8.22). Решение  $\bar{q}$  можно получить, воспользовавшись методом ВКБ:

$$(3.8.25) \quad \begin{aligned} \bar{q} &= 8\eta^2 \exp\left(\frac{\Phi(Y, T)}{\varepsilon}\right), \quad \theta \geq O(\varepsilon^{-1/2}), \\ \Phi_T - 4\eta^2 \Phi_Y + \Phi_Y^3 &= 0, \\ Y &= \varepsilon(\theta - \theta_0), \quad T = \varepsilon t. \end{aligned}$$

Таким образом, «равномерное» приближенное решение имеет вид

$$(3.8.26) \quad q(x, t) = \begin{cases} \tilde{q}, & -\theta \gg O(\varepsilon^{-1/2}), \\ \hat{q}^{(0)}(\theta, T) + \varepsilon \hat{q}^{(1)}(\theta, T), & |\theta| \ll O(\varepsilon^{-1/2}), \\ \bar{q}, & \theta \gg O(\varepsilon^{-1/2}). \end{cases}$$

Мы не будем здесь углубляться в детали, но отметим, что поучительно проанализировать законы сохранения. С их помощью можно проверить полученную формулу, но, кроме этого, законы сохранения могут служить отправным пунктом для анализа. При этом следует проявлять предельную осторожность, но если все сделать правильно, то можно воспроизвести все полученные результаты. (См., например, [414] (отметим, что результаты этой работы следует модифицировать из-за наличия полочки), [267], [278].) Другой пример — диссипативное возмущение нелинейного уравнения Шрёдингера — приведен в упражнениях.

**3.8.б. Сильно нелинейное уравнение КдФ с затуханием.** Теперь мы кратко рассмотрим диссипативные возмущения сильно нелинейных неинтегрируемых уравнений КдФ и Шрёдингера. При достаточно сильной нелинейности мы обнаружим, что теория возмущений указывает на возможность коллапса возмущенной волны, приводящего к образованию сингулярностей, таких, как в сильнонелинейном уравнении Шрёдингера (Захаров и Сынхах (1976) [549]).

Рассмотрим сильно нелинейное уравнение

$$(3.8.27) \quad q_t + Aq^p q_x + q_{xxx} = -\varepsilon\gamma q, \quad p \geq 1,$$

невозмущенное солитонное решение которого можно представить в виде

$$(3.8.28) \quad q^{(0)} = \alpha \operatorname{sech}^{2/p} \eta (\theta - \theta^0), \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = -4 \frac{\eta^2}{p^2},$$

где  $\alpha$  определяется из соотношения  $A\alpha^p = 2(p+1)(p+2)\eta^2/p^2$ . В предположении квазистационарности возмущенного решения имеем

$$(3.8.29) \quad -4 \frac{\eta^2}{p^2} \hat{q}_0 + A\hat{q}^p \hat{q}_\theta + \hat{q}_{\theta\theta\theta} = \varepsilon \hat{F}(\hat{q}),$$

$$\hat{F}(\hat{q}) = -\gamma \hat{q} - \hat{q}_T.$$

В порядке  $\varepsilon$  получим

$$(3.8.30) \quad \begin{aligned} \hat{L}\hat{q}^{(1)} &= -4 \frac{\eta^2}{p^2} \hat{q}_\theta^{(1)} + A((\hat{q}^{(0)})^p \hat{q}^{(1)})_\theta + \hat{q}_{\theta\theta\theta}^{(1)} = \hat{F}^{(1)}(\hat{q}^{(0)}), \\ \hat{F}^{(1)}(\hat{q}^{(0)}) &= -\gamma \hat{q}^{(0)} - \frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial T} \left\{ \frac{2}{p} \hat{q}^{(0)} + (\theta - \theta^{(0)}) \hat{q}_\theta^{(0)} \right\} + \frac{\partial \theta^{(0)}}{\partial T} \hat{q}_\theta^{(0)}. \end{aligned}$$

Воспользуемся тем, что  $\hat{L}^A \hat{q}^{(0)} = 0$ . При этом условие совместности

$$(3.8.31) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \hat{q}^{(0)} \hat{F}^{(1)}(\hat{q}^{(0)}) d\theta = 0$$

приводит к

$$(3.8.32) \quad \frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial T} = -\frac{2p}{4-p} \gamma.$$

Из (3.8.30), (3.8.32) следует наличие полочки, так как

$$(3.8.33) \quad \hat{q}^{(1)} \rightarrow -\frac{p^2 \gamma}{4\eta^2(4-p)} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{q}^{(0)} d\theta \quad \text{при } \theta \rightarrow -\infty.$$

Этот результат (полученный понижением порядка в уравнении (3.8.30)) согласуется при  $p = 1$  с (3.8.15). Равномерное приближение (при  $p < 4$ ) может быть получено уже описанным методом. Из (3.8.32) видно, что теория возмущений перестает быть справедливой при  $p = 4$ . Это означает, что гипотеза квазистационарности несправедлива при такой нелинейности. Другими словами, возмущение не является адиабатическим. При  $p \geq 4$  это может означать, что уравнение допускает коллапсирующие сингулярности. В рассматриваемой задаче мы не доказали существования этих сингулярностей, но мы покажем, что они воз-

никают в аналогичной задаче для «сильно нелинейного» уравнения Шрёдингера.

Рассмотрим уравнение

$$(3.8.34) \quad iq_t + q_{xx} + A|q|^{2p}q = -i\epsilon\gamma q, \quad p \geq 2,$$

имеющее невозмущенное решение в виде уединенной волны

$$(3.8.35) \quad q_0 = a \operatorname{sech}^{1/p} \eta (\theta - \theta^{(0)}) \exp i(\sigma - \sigma^{(0)}),$$

где  $A\alpha^{2p} = (p+1)\eta^2/p^2$ . Здесь для простоты мы ограничимся покоящимся решением, т. е.

$$(3.8.36) \quad \frac{\partial\theta}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial\theta}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial\sigma}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\sigma}{\partial t} = \frac{\eta^2}{p^2}.$$

В предположении квазистационарности решения  $q = \hat{q}(\theta T, \epsilon) \times \exp(i\sigma - i\sigma^{(0)})$  получим

$$(3.8.37) \quad \begin{aligned} -(\eta^2/p^2)\hat{q} + \hat{q}_{\theta\theta} + A|\hat{q}|^{2p}\hat{q} &= \epsilon\hat{F}(\hat{q}), \\ \hat{F}(\hat{q}) &= -i\gamma\hat{q} - i\hat{q}_T - \sigma_T^{(0)}\hat{q}. \end{aligned}$$

В порядке  $\epsilon$  имеем

$$(3.8.38) \quad \begin{aligned} -\left(\frac{\eta^2}{p^2}\right)\hat{q}^{(1)} + \hat{q}_{\theta\theta} + (p+1)A(\hat{q}^{(0)})^{2p}\hat{q}^{(1)} + pA(\hat{q}^{(0)})^{2p}\hat{q}^{(1)*} &= \\ &= \hat{F}^{(1)}(\hat{q}^{(0)}). \end{aligned}$$

Подставив  $\hat{q}^{(1)} = \hat{\phi}^{(1)} + i\hat{\psi}^{(1)}$ , получим

$$(3.8.39a) \quad -\left(\frac{\eta^2}{p^2}\right)\hat{\phi}^{(1)} + \hat{\phi}_{\theta\theta} + A(2p+1)(\hat{q}^{(0)})^{2p}\hat{\phi}^{(1)} = \operatorname{Re}[\hat{F}^{(1)}(\hat{q}^{(0)})],$$

$$(3.8.39b) \quad -\left(\frac{\eta^2}{p^2}\right)\hat{\psi}^{(1)} + \hat{\psi}_{\theta\theta} + A(q^{(0)})^{2p}\hat{\psi}^{(1)} = \operatorname{Im}[\hat{F}^{(1)}(\hat{q}^{(0)})].$$

Условие совместности

$$(3.8.40) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \hat{q}^{(0)} \operatorname{Im}[\hat{F}^{(1)}(\hat{q}^{(0)})] d\theta = 0$$

дает

$$(3.8.41) \quad \frac{1}{\eta} \frac{\partial\eta}{\partial T} = -\frac{2p}{2-p}\gamma.$$

При  $p = 2$  теория возмущений неприменима! Таким образом, если степень нелинейности равна или превосходит 5, то возмущение существенным образом влияет на решение. Но по существу этот эффект вызван не возмущением, а скорее является неотъемлемой чертой самого уравнения. Сейчас мы покажем, как, используя законы сохранения, Захаров и Сынах [549] доказали, что уравнение (3.8.34) допускает колапсирующие решения.

Рассмотрим эволюцию во времени следующей величины:

$$(3.8.42) \quad J = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |q^2| dx.$$

Из (3.8.34) следует

$$(3.8.43) \quad \frac{d^2J}{dt^2} + 4\epsilon\gamma \frac{dJ}{dt} + 4\epsilon^2\gamma^2 J = 8 \int \left\{ |q_x|^2 - \frac{pA}{2(p+1)} |q|^{2p+2} \right\} dx.$$

При  $p = 2$  получим

$$(3.8.44) \quad \frac{d^2J}{dt^2} = 8I_3 + O(\epsilon),$$

где  $I_3$  является интегралом движения (при  $\gamma = 0$ ):

$$(3.8.45) \quad I_3 = \int \left\{ |q_x|^2 - \frac{A}{2} |q|^6 \right\} dx.$$

Если  $I_3 < 0$ , то это означает, что  $J$  обратится в нуль в конечный момент времени, т. е. решение станет сингулярным (фокусировка). Для уравнения (3.8.27) при  $p \geq 4$  доказательство существования коллапса пока отсутствует.

Отметим, что аналогичным способом можно доказать существование колapsирующих решений у двумерного нелинейного уравнения Шрёдингера

$$(3.8.46) \quad iA_t + A_{xx} + A_{yy} + 2|A|^2 A = 0.$$

Это уравнение имеет следующие интегралы движения:

$$(3.8.47) \quad \begin{aligned} I_1 &= \iint |A|^2 dx dy, \\ I_2 &= \iint (|A_x|^2 + |A_y|^2 - |A|^4) dx dy. \end{aligned}$$

Прямыми вычислениями (Захаров, Сынах [549], Таланов [473]) проверяется, что

$$(3.8.48) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \iint (x^2 + y^2) |A|^2 dx dy = 8I_2.$$

При этом если в начальный момент  $I_2 < 0$ , то за конечное время в решении возникает сингулярность.

**3.8.с. Устойчивость солитона уравнения Кадомцева — Петвиашвили относительно поперечных возмущений.** Возникает естественный вопрос об устойчивости солитонов и уединенных волн. Обычная устойчивость солитонов (не поперечная) не вызывает сомнения, когда к уравнению применим МОЗР. Но довольно часто оказывается, что решение является неустойчивым по отношению к поперечным возмущениям. В качестве примера мы

рассмотрим уравнение Кадомцева — Петвиашвили (т. е. двумерное уравнение КdФ).

Уравнение К—П имеет вид

$$(3.8.49) \quad \partial_x(u_t + 6uu_x + u_{xxx}) = -3\beta^2\sigma u_{yy}, \quad \sigma = \pm 1.$$

Предположим, что имеется длинноволновое возмущение в направлении  $y$ , т. е.  $|\beta| \ll 1$ .

Невозмущенное уравнение

$$(3.8.50a) \quad N(u^{(0)}) = \partial_x(u_t^{(0)} + 6u^{(0)}u_x^{(0)} + u_{xxx}^{(0)}) = 0$$

имеет решение

$$(3.8.50b) \quad \begin{aligned} u^{(0)} &= 2\eta^2 \operatorname{sech}^2 \eta (\theta - \theta^{(0)}), \\ \theta &= x - 4\eta^2 t, \quad \theta^{(0)} = \theta^{(0)}(T, y), \quad \eta = \text{const}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись стандартным многомасштабным разложением, перепишем уравнение К—П в переменных  $\theta, T, y$ :

$$(3.8.51) \quad \partial_\theta(-4\eta^2 u_\theta + 6uu_\theta + u_{\theta\theta\theta}) = -u_{\theta T} - 3\beta^2\sigma u_{yy}.$$

Разложив  $u = u^{(0)} + \beta u^{(1)} + \beta^2 u^{(2)} + \dots$  и собрав коэффициенты при одинаковых степенях  $\beta$ , получим серию соотношений

$$(3.8.52a) \quad N(u^{(0)}) = \partial_\theta(-4\eta^2 u_\theta^{(0)} + 6u^{(0)}u_\theta^{(0)} + u_{\theta\theta\theta}^{(0)}) = 0,$$

$$(3.8.52b) \quad \partial_\theta L(u^{(n)}) = F^{(n)},$$

где

$$(3.8.52c) \quad \partial_\theta L(u^{(n)}) \equiv \partial_\theta(-4\eta^2 u_\theta^{(n)} + 6(u^{(0)}u^{(n)})_\theta + u_{\theta\theta\theta}^{(n)}).$$

Удобнее работать с (3.8.52b) в проинтегрированной форме

$$(3.8.53) \quad L(u^{(n)}) = -4\eta^2 u_\theta^{(n)} + 6(u^{(0)}u^{(n)})_\theta + u_{\theta\theta\theta}^{(n)} = \mathcal{F}^{(n)} = \int_{-\infty}^{\theta} F^{(n)} d\theta'.$$

Оператор, сопряженный к  $L$ , имеет вид

$$(3.8.54) \quad L^A v = 4\eta^2 v_\theta - 6u^{(0)}v_\theta - v_{\theta\theta\theta}.$$

Ясно, что  $v = u^{(0)}$  является решением уравнения  $L^A v = 0$ . Воспользовавшись тождеством Грина  $v L u^{(n)} - u^{(n)} L^A v = \mathcal{F}^{(n)}$ , получим (с помощью интегрирования), что для существования ограниченного решения  $u^{(n)}$  должно выполняться условие

$$(3.8.55) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^{(n)} u^{(0)} d\theta = 0.$$

При  $n = 1$  мы имеем  $\mathcal{F}^{(1)} = \theta_T^{(0)} u_\theta^{(0)}$ , и условие (3.8.55) выполняется автоматически. Решение  $u^{(1)}$  неоднородного уравнения

имеет вид

$$(3.8.56) \quad u^{(1)} = \frac{1}{8\eta^2} \theta_T^{(0)} (2u^{(0)} + \theta u_\theta^{(0)}),$$

решение однородного уравнения включено в  $u^{(0)}$ . При  $n = 2$  получим

$$(3.8.57) \quad \mathcal{F}^{(2)} = -\partial_\theta (6u^{(1)}) u_\theta^{(1)} + \partial_\theta u_T^{(1)} - 3\sigma \int_{-\infty}^{\theta} u_{yy}^{(0)} d\theta'.$$

Условие (3.8.55) приводит к

$$(3.8.58a) \quad -\frac{1}{8\eta^2} \theta_{TT}^{(0)} \int_{-\infty}^{\infty} (2(u^{(0)})^2 + \theta u_\theta^{(0)} u^{(0)}) d\theta + 3\sigma \theta_{yy}^{(0)} \int_{-\infty}^{\infty} (u^{(0)})^2 d\theta = 0$$

или

$$(3.8.58b) \quad \theta_{TT}^{(0)} - 48\sigma\eta^2\theta_{yy}^{(0)} = 0;$$

для условия (3.8.55) существенна только четная по переменной  $\theta - \theta^{(0)}$  часть функций  $\mathcal{F}^{(n)}$ . Таким образом, при  $\sigma = +1$  солитон является неустойчивым по отношению к поперечным возмущениям, при  $\sigma = -1$  солитон, по-видимому, является нейтрально устойчивым (хотя этот факт нами не доказан<sup>1)</sup>). Для волн на поверхности воды неустойчивый случай реализуется, если поверхностное натяжение является достаточно сильным.

В упражнениях обсуждается пример поперечной неустойчивости солитонов двумерного нелинейного уравнения Шрёдингера. Отметим, что в этом случае одномерный солитон оказывается неустойчивым.

Следует отметить, что:

(i) В большинстве случаев задачу об устойчивости можно решить с помощью обычных многомасштабных разложений либо более стандартного подхода (см. Захаров, Рубенчик [543])<sup>2)</sup>;

(ii) Эти идеи применимы также в случае многомерной задачи о самоиндукционной прозрачности (см. разд. 4.4 и [13]) и при изучении устойчивости волновых пакетов на поверхности жидкости конечной глубины (солитоны опять оказываются неустойчивыми относительно поперечных возмущений, см. Абловиц, Сигур [28]). При этом опять оказывается, что и солитоны, и бризеры неустойчивы относительно длинноволновых поперечных возмущений.

<sup>1)</sup> В этом случае, как показано в работах [11\*, 12\*], солитон является асимптотически устойчивым, так как поперечные возмущения затухают со временем, излучая свою энергию в непрерывный спектр. — Прим. перев.

<sup>2)</sup> См. также обзор [13\*], [14\*].

## Упражнения

### Раздел 3.1

1. Пусть  $C(k^2/4)$  — целая функция  $k^2$ . Покажите, что преобразование (3.1.1) отображает любое высшее уравнение мКдФ

$$v_t + C \left( -\frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - v^2 + v_x \int_x^\infty dy v \right) v_x = 0$$

в соответствующее высшее уравнение КдФ

$$u_t + C \left( -\frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - u + \frac{1}{2} u_x \int_x^\infty dy \right) u_x = 0;$$

при этом  $C(k^2/4)$  в обоих случаях является фазовой скоростью линеаризованного уравнения. (Сделать это можно различными способами. Красивое решение было предложено А. Рамани; он воспользовался линейными интегральными уравнениями (1.3.27), (1.3.37) и отождествил  $(K_1 + \bar{K}_1)$  в (1.3.27) с  $K$  в (1.3.37).)

2. Совершенно ясно, что, подставив (3.1.2) в любое уравнение  $D(u) = 0$ , мы получим  $E(\theta) = 0$ , которое отображается в  $D(u) = 0$  с помощью (3.1.2). Обратно, предположим, что  $E(\theta) = 0$  является линейным уравнением с заданным дисперсионным соотношением  $\omega(k)$  (т. е. обобщением (3.1.3)). Что есть в этом случае  $D(u) = 0$ ?

3. Рассмотрим

$$\left( \frac{u+v}{2} \right)_x = \lambda,$$

$$\left( \frac{u+v}{2} \right)_t = - \left( \frac{u-v}{2} \right)_{xx} \lambda' - \frac{\alpha}{4} \lambda^4 + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{u-v}{2} \right)_x \right]^2 \lambda'',$$

где  $\alpha$  — постоянная, а  $\lambda = \lambda((u-v)/2)$  удовлетворяет уравнению

$$\lambda''' + 2\alpha\lambda\lambda' = 0.$$

Рунд [436] предложил эти соотношения в качестве ПБ уравнения

$$u_t + \frac{\alpha}{4} (u_x)^4 + u_{xxx} = 0$$

в себя. Это уравнение является весьма интересным, так как, положив  $u_x = \varphi$ , мы получим уравнение

$$\varphi_t + \alpha\varphi^3\varphi_x + \varphi_{xxx} = 0,$$

не имеющее солитонов и обладающее только тремя полиномиальными законами сохранения. Покажите, что предложенное ПБ на самом деле не является ПБ,

4. Пусть

$$V_x = c_1 e^{\beta(u)} + u_x [\beta'(u) V + \alpha(u)],$$

$$V_t = c_2 e^{\beta(u)} + u_t [\beta'(u) V + \alpha(u)],$$

где  $\alpha, \beta$  — произвольные функции, а  $c_1, c_2$  — постоянные.

(а) Покажите, что это преобразование не является ПБ.

(б) Покажите, что это преобразование является точечным, т. е.  $v = V(x, t, u(x, t))$ . Найдите функцию  $V$ .

5. (а) Задача рассеяния для уравнения sin-Гордон имеет вид (это следует из (1.2.17), (1.2.18))

$$v_{1x} + i\xi v_1 = q v_2, \quad v_{1t} = \frac{a}{\xi} v_1 + \frac{b}{\xi} v_2,$$

$$v_{2x} + i\xi v_2 = r v_1, \quad v_{2t} = \frac{c}{\xi} v_1 - \frac{a}{\xi} v_2.$$

Найдите  $D(u) = 0$  и  $E(v) = 0$ . Как связаны уравнения  $D(u) = 0$  и sin-Гордон?

(б) Определим  $V = v_1/v_2$  и  $U = q - r$ . Покажите, что задача рассеяния определяет ПБ между  $D(U) = 0$  и  $E(V) = 0$ . Выведите (3.1.7) из ПБ.

6. Захаров (1974) [527] представил уравнение Буссинеска в виде

$$u_t = A_x, \quad A_t = \left( u + u^2 + \frac{1}{4} u_{xx} \right)_x$$

и получил его из задачи рассеяния

$$\Psi_{xxx} + \left( u_x + i \left( \frac{4}{3} \right)^{1/2} A \right) \Psi + (1 + 2u) \Psi_x = \lambda \Psi,$$

$$i \left( \frac{4}{3} \right)^{1/2} \Psi_t = \Psi_{xx} + \frac{4}{3} u \Psi.$$

Покажите, что это является преобразованием Бэкунда.

7. Покажите, что задача рассеяния для уравнения трехволнового взаимодействия (разд. 2.1) является преобразованием Бэкунда.

8. (а) Найти преобразование Бэкунда между уравнениями КdФ пятого порядка и мКdФ пятого порядка.

(б) Найти ПБ уравнения КdФ пятого порядка в себя.

### Раздел 3.2

1. Покажите, что ПБ (3.1.19), (3.1.20) уравнения КdФ в се-  
бе может быть приведено к виду (3.2.5) при  $N = 1$ . Таким об-  
разом, это ПБ является псевдопотенциалом.

2. (а) Покажите, что

$$v = -2 \frac{u_x}{u + \lambda} + u$$

является ПБ уравнения (3.2.6) в себя при произвольном значении параметра  $\lambda$ .

(b) Найти общий вид решения уравнения (3.2.6) типа бегущей волны, предположив, что  $u = u(x - ct)$ .

(c) Отправляясь от этого решения, найти при помощи ПБ другое точное решение уравнения (3.2.6). Можно ли рассматривать это решение как двухсолитонное?

(d) Это ПБ можно вывести из преобразования Коула — Хопфа следующим образом: (i) если  $\theta$  удовлетворяет уравнению теплопроводности, то функция  $u$ , вычисленная по формуле (3.1.2), удовлетворяет уравнению (3.2.6); (ii)  $\psi = \theta_x$  также удовлетворяет уравнению теплопроводности; (iii) функция  $V$ , определенная по  $\psi$  с помощью (3.1.2), удовлетворяет уравнению (3.2.6); (iv) связь между  $V$  и  $u$  является искомым ПБ (см. п. «а») (М. Краскал, частное сообщение).

3. Найти матричное представление решения соотношений (3.2.19). Построить линейный псевдопотенциал. Является ли он ПБ?

4. (a) Покажите, что уравнение (3.2.20) имеет псевдопотенциал тогда и только тогда, когда соотношения (3.2.21) обладают нетривиальными решениями. Покажите, что псевдопотенциал тривиален, если  $\alpha = \gamma = 0$ .

(b) Покажите, что при  $N = 1$  единственное решение соотношений (3.2.21) имеет  $\alpha = \gamma = 0$ .

(c) Уравнение (3.2.20) не имеет очевидных законов сохранения. Чему соответствует абелево решение соотношений (3.2.21)?

5. Предположим, что в (3.2.30)  $\underline{\underline{a}}_1$  имеет каноническую жорданову форму

$$\underline{\underline{a}}_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & & \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \dots & & & & & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

и единственный собственный вектор  $v_n$ . Пусть  $(v_1, \dots, v_n) \rightarrow$  такой ортонормированный базис, что

$$\underline{\underline{a}}_1 v_n = \lambda v_n,$$

$$\underline{\underline{a}}_1 v_{n-1} = \lambda v_{n-1} + v_n,$$

$$\underline{\underline{a}}_1 v_{n-2} = \lambda v_{n-2} + v_{n-1} \text{ и т. д.}$$

(a) Покажите, что линейная оболочка векторов  $(v_m, v_{m+1}, \dots, v_n)$  является инвариантным подпространством  $\underline{\underline{a}}_1$  для лю-